Ueber Kettenbrüche und ihre Anwendung auf das Ausziehen der Quadratwurzel.

Die Bestimmung des Verhältnisses zweier Grössen mittelst der Zahlen soll zu einer möglichst klaren und bestimmten Vorstellung desselben führen; daher fordern wir nicht nur, dass sie genau richtig, sondern auch, dass sie möglichst anschaulich sei. Die Anschaulichkeit eines Verhältnisses aber ist dadurch bedingt, dass es in niedrigern Zahlen ausgedrückt sei. Je höher die Zahlen werden, durch welche es vorgestellt werden soll, desto mehr geht von seiner Anschaulichkeit verloren. Nun sind aber zwei Zahlen die niedrigsten, durch welche ein gegebenes Verhältniss bestimmt werden kann, wenn sie Primzahlen unter sich sind. Sind sie dabei zu hoch, um eine leichte Anschaulichkeit zu gewähren, so muss die eine jener beiden Forderungen der andern aufgeopfert werden. In den meisten Fällen opfern wir die strenge Richtigkeit der Anschaulichkeit auf. Oft sind wir nicht im Stande die erstere zu erreichen. Wir begnügen uns daher mit einer Näherung, wenn wir diese nur so weit erreichen können, wie wir wollen, und auf jeder Stufe derselben die Grenze des möglichen Fehlers anzugeben vermögen.

Die einfachste Bestimmung des Verhältnisses zweier Grössen ist diejenige, in welcher die eine als Vielfaches der andern dargestellt wird. Ist daher von zwei Grössen die kleinere durch einen Bruch der grösseren gegeben, dessen Zähler und Nenner hohe Zahlen und Primzahlen unter sich sind, so sucht man zuerst das Vielfache der kleineren, welches zunächst kleiner ist, als die andere; der Rest wird sich durch einen ähnlichen Bruch der kleineren darstellen lassen. Wird an diesem Reste und so weiter an jedem folgenden dasselbe Verfahren wiederholt, so erhält man eine Reihe von Brüchen, welche dadurch unter einander verknüpft sind, dass jeder folgende mit dem Nenner des vorangehenden zusammenhängt. Eine solche Reihe von

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Brüchen heisst ein Kettenbruch oder auch ein zusammenhängender oder continuirlicher Bruch. Die einzelnen Brüche, aus welchen er zusammengesetzt ist, heissen seine Glieder.

z. B. $\frac{a}{b}$, es sei $b = q'a + r'$,

so ist $\frac{a}{b} = \cfrac{1}{q' + \cfrac{r'}{a}}$

es sei $a = q''r' + r''$,

so ist $\frac{a}{b} = \cfrac{1}{q' + \cfrac{1}{q'' + \cfrac{r''}{r'}}}$

es sei $r' = q'''r'' + r'''$,

so ist $\frac{a}{b} = \cfrac{1}{q' + \cfrac{1}{q'' + \cfrac{1}{q''' + \cfrac{r'''}{r''}}}}$

und so fort, bis man zu einem Reste kommt, welcher $= 1$ ist. Dann wird der vorletzte Rest die Reihe der Nenner schliessen.

z. B. $\frac{61}{257} = \cfrac{1}{4 + \cfrac{13}{61}}$ $\qquad 257 = 4.\ 61 + 13$

$= \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{9}{13}}}$ $\qquad 61 = 4.\ 13 + 9$

$= \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{4}{9}}}}$ $\qquad 13 = 1.\ 9 + 4$

$= \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4}}}}}$ $\qquad 9 = 2.\ 4 + 1$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wenn ein Kettendruch sich auf die jetzt dargestellte Weise, welche mit der Regel für die Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers zweier Zahlen zusammenfällt, aus einem zwar in hohen Zahlen aber doch vollständig gegebenen gewöhnlichen oder Decimalbruche entwickelt, so enthält er nicht nur eine endliche Anzahl von Gliedern, weil man nothwendig zuletzt zu einem Reste gelangt, welcher $= 1$ ist, sondern es ist auch jeder einzelne Bruch, zu dem Nenner des vorigen zugesetzt, und jeder Zähler $= 1$. Aber auch irrationale Verhältnisse lassen sich mittelst der Kettenbrüche annähernd darstellen, namentlich die Quadratwurzel solcher Zahlen, welche keine vollkommenen Quadratzahlen sind.

Jede solche Zahl A liegt nothwendig zwischen zwei auf einander folgenden Quadratzahlen, $A > a^2$ u. $< (a + 1)^2$. Ihr Unterschied von der Wurzel der nächst kleineren Quadratzahl, welcher durch b bezeichnet werden soll, ist daher nothwendig $< 2a + 1$ und höchstens $= 2a$. Wäre nun die $\sqrt{\ }$ der gegebenen Zahl überhaupt bestimmbar, so müsste sie von a um einen ächten Bruch verschieden sein, welcher durch z bezeichnet werden soll;

$$\text{es wäre daher } \sqrt{(a^2 + b)} = a + z$$
$$\text{folgl. } a^2 + b = a^2 + (2a + z)\, z$$
$$\text{und } b = (2a + z)\, z$$

Nun ist zwar z überhaupt mittelst der Zahl nicht bestimmbar; da jedoch die Grösse, deren Bestimmung durch $\sqrt{A}$ angedeutet ist, wenigstens als grade Linie immer construirt werden kann, so ist eine annähernde Bestimmung in Zahlen unerlässlich. Es ist aber $z = \frac{b}{2a + z}$ und da in dem Nenner dieses Bruches die Unbekannte selbst wieder vorkommt, so wiederholt sich die vorige Bestimmung immer wieder; es entsteht daher ein unendlicher Kettenbruch

$$= \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + z}}}$$

Dieser Bruch ist in bestimmten Fällen schon an sich von der Art, dass seine Zähler durch eine leichte Aufhebung $= 1$ werden können, namentlich:

1) wenn $b = 1$, so ist $\sqrt{A} = \sqrt{(a^2 + 1)} = a + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{2a \text{ etc.}}}$

2) wenn $b = \frac{2a}{m}$, so ist $\sqrt{(a^2 + b)} = a + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{2a \text{ etc.}}}}}$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

z. B. wenn $b = 2a$, so ist $\sqrt{(a^2 + 2a)} = a + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2a}}}}$ etc.

wenn $b = a$, so ist $\sqrt{(a^2 + a)} = \sqrt{a(a+1)} = a + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2a}}}}$ etc.

3) wenn $b = c^2$ und $2a = mc$,

so ist $\sqrt{(a^2 + b)} = \sqrt{(\frac{m^2 c^2}{4} + c^2)} = c\sqrt{(\frac{m^2}{4} + 1)} = c\left(\cfrac{1}{2}m + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{m \ldots}}}}\right)$

Dieser Fall lässt sich darauf zurückführen, dass die gegebene Zahl A ein Produkt aus einer Quadratzahl und einer andern Zahl ist, welche um 1 grösser ist als ein Quadrat.

4) Wenn die gegebene Zahl ein Produkt aus einer Quadratzahl und einer andern ist, deren Unterschied von der nächst kleineren Quadratzahl entweder in der $\sqrt{}$ der letztern selbst oder in dem doppelten derselben aufgeht:

z. B. $A = c^2 (m^2 d^2 + d)$

oder $A = c^2 (m^2 f^2 + 2f)$

Dann wird im ersten Falle

$\sqrt{A} = c\sqrt{(m^2 d^2 + d)} = c\left(md + \cfrac{d}{2md + \cfrac{d}{2md}}\right.$ etc. $= c\left(md + \cfrac{1}{2m + \cfrac{1}{2m}}\right.$ etc.

im zweiten Falle:

$\sqrt{A} = c\sqrt{(m^2 f^2 + 2f)} = c\left(mf + \cfrac{2f}{2mf + \cfrac{2f}{2mf}}\right.$ etc. $= c\left(mf + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{m}}\right.$ etc.

In allen übrigen Fällen muss der Kettenbruch, zu welchem man gekommen ist, auf eine andre Weise dahin zurückgebracht werden, dass alle Zähler $= 1$ werden. Zu dem Ende setzen wir:

$$\sqrt{A} = \sqrt{(a^2 + b)} = a + \frac{b}{2a + z} = a + \frac{b}{a + \sqrt{A}} = a + \frac{1}{x'}$$

folgl.: $x' = \frac{a + \sqrt{A}}{b} = q' + \frac{r' + z}{b'}$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Da nun b immer kleiner als $a + \sqrt{A}$, so ist q' immer eine ganze Zahl, und mindestens $= 1$; 1 aber ist gewiss $\lhd$ a, weil $a + \sqrt{A} = 2a + z$ und $z \lhd 1$. Da ferner $r' + z$ gewiss $\lhd b'$, so setzen wir wieder

$$\frac{r' + z}{b'} = \frac{1}{x''}, \text{ folgl. } x'' = \frac{b'}{r' + z}$$

Nun ist $z = \sqrt{A} - a$, folgl. $r' + z = r' + \sqrt{A} - a$, und weil $r' \lhd a$, so ist $r' + z = \sqrt{A} - (a - r')$

$$\text{folgl. } \frac{b'}{r' + z} = \frac{b'}{\sqrt{A} - (a - r')} = \frac{b'([a - r'] + \sqrt{A})}{A - (a - r')^2} = \frac{a - r' + \sqrt{A}}{\frac{A - (a - r')^2}{b'}}$$

Bezeichnen wir $a - r' = a''$ und $\frac{A - a''^2}{b'} = b''$,

$$\text{so haben wir } x'' = \frac{a'' + \sqrt{A}}{b''} = q'' + \frac{r'' + z}{b''}$$

Dieser Ausdruck ist dem für x' ganz ähnlich, wenn nur b'' eine ganze Zahl, d. h. $\frac{A - a''^2}{b'}$ theilbar ist.

Nun ist aber $q'b' = 2a - r' = a + a''$, und ferner

$$b''b' = A - a''^2, \; b' = A - a^2,$$

$$\text{folgl.: } b'(b'' - 1) = a^2 - a''^2 = (a + a'')(a - a'') = (a - a'')\, q'b'$$

$$\text{also: } b'' - 1 = (a - a'')\, q'$$

folgl.: b'' eine ganze Zahl und auch $\rhd a + a''$

Es ergiebt sich hieraus ein Gesetz, nach welchem jeder vollständige Quotient x aus dem vorhergehenden abgeleitet werden kann.

Die allgemeine Gültigkeit dieses Gesetzes muss dadurch erwiesen werden, dass man zeigt, wie es von jedem folgenden Quotienten gelten müsse, wenn es von dem vorhergehenden gilt. Nach diesem Gesetz wäre:

$$x^m = \frac{b^{m-1}}{r^{m-1} + z} = \frac{a^m + \sqrt{A}}{b^m} = q^m + \frac{r^m + z}{b^m}$$

$$\text{und } a^m = a - r^{m-1}, \; b^m = A - \frac{a^{m2}}{b^{m-1}} \quad \text{oder} \quad b^m b^{m-1} = A - a^{m2}$$

Wenn diess nun für alle x bis x^m incl. gilt, so ist $b^m \lhd a^m + \sqrt{A}$, folgl. nicht $\rhd a + a^m$ und weil a^m nicht $\rhd$ a, so ist b^m nicht $\rhd 2a$; r^m ist gewiss $\lhd a'$, und weil r^m eine ganze Zahl, so ist auch $a - r^m$ eine ganze Zahl.

$$\text{Nun ist } x^{m+1} = \frac{b^m}{r^m + z} = \frac{b^m}{\sqrt{A} - (a - r^m)} = \frac{b^m(a - r^m + \sqrt{A})}{A - (a - r^m)^2} = \frac{a - r^m + \sqrt{A}}{\frac{A - (a - r^m)^2}{b^m}}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Hier ist nun a^{m+1} von selbst $= a - r^m$, und $b^{m+1} = A - \frac{a^{m\,2}}{b^m}$

oder $b^{m+1}\, b^m = A - a^{2m+1}$

Es ist also auch zu erweisen, dass b^{m+1} eine ganze Zahl ist; dass es $\lhd\, a^{m+1} + \sqrt{A}$ sein müsse, folgt schon daraus, dass $b^m \rhd r^m + z$; aber weil

1) $a^m + \sqrt{A} = a^m - r^m = a^m + a + z = q^m b^m + r^m + z$ ist, so ist $q^m b^m = a^m - r^m$
$= a^m + a^{m+1}$

2) $b^m\, b^{m-1} = A - a^{m\,2}$ u. $b^{m+1}\, b^m = A - a^{2m+1}$

so ist $b^m (b^{m+1} - b^{m-1}) = a^{2m} - a^{2m+1} = (a^m + a^{m+1})\,(a^m - a^{m+1})$
$= (a^m - a^{m+1})\; q^m\, b^m$ u. $b^{m+1} - b^{m-1} = (a^m - a^{m+1})\, q^m$

folgl. ist b^{m+1} wieder eine ganze Zahl, weil a^m, a^{m+1}, q^m, b^{m-1} ganze Zahlen sind.

Das Gesetz ist also erwiesen; es bleibt noch zu untersuchen, welche Bestimmungen für die durch a, b, q, r ausgedrückte Zahlen und für die Form des ganzen Kettenbruches daraus folgen.

1) weil $a^m = a - r^{m-1}$, so ist, wenn $r^{m-1} = o$, $a^m = a$ und umgekehrt,

2) weil $a^m = a - r^{m-1}$ u. $a^{m+1} = a - r^m$, so ist $a^m - a^{m+1} = r^m - r^{m-1}$,
folglich wenn $r^m = r^{m-1}$, so ist $a^{m+1} = a^m$

3) weil $b^{m+1} - b^{m-1} = (a^m - a^{m+1})\; q^m$ ist, so ist
wenn $r^m = r^{m-1}$ oder $a^{m+1} = a^m$ ist, auch $b^{m+1} = b^{m-1}$

4) weil $q^m\, b^m = a^m + a^{m+1}$, so ist weder b^m noch $q^m \rhd a^m + a^{m+1}$
folgl. auch $\rhd a + a^{m+1}$, daher auch kein $q \rhd 2a$

5) weil $b^m\, b^{m-1} = A - a^{2m} = a^2 - a^{2m} + b = (a + a^m)\,(a - a^m) + b$
$= (a + a^m)\; r^{m-1} + b$ u. b^{m-1} nicht $\rhd a + a^m$, so ist b^m immer $\rhd r^{m-1}$ od. $\rhd a - a^m$,
folgl. auch $\rhd a^m - a^m$

6) weil $q^{m+1}\, b^{m+1} = a^{m+1} + a^{m+2}$ u. $q^{m-1}\, b^{m-1} = a^{m-1} + a^m$, so ist
$q^{m+1}\, b^{m+1} - q^{m-1}\, b^{m-1} = a^{m+2} + a^{m+1} - a^m - a^{m-1}$
folgl. wenn $a^{m+1} = a^m$, auch $b^{m+1} = b^{m-1}$ ist, so ist
$(q^{m+1} - q^{m-1})\, b^{m-1} = a^{m+2} - a^{m-1}$
und weil $a^{m+2} - a^{m-1} \lhd b^{m-1}$, so ist $a^{m+2} = a^{m-1}$ u. $q^{m+1} = q^{m-1}$

7) weil $q^m\, b^m = a^m + a^{m+1}$ u. $q^{m-1}\, b^{m-1} = a^{m-1} + a^m$,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

so ist $q^m b^m - q^{m-1} b^{m-1} = a^{m+1} - a^{m-1}$

folgl., wenn $b^m = b^{m-1}$, so ist $(q^m - q^{m-1})\, b^m = (q^m - q^{m-1})\, b^{m-1}$

$= a^{m+1} - a^{m-1} = r^{m-2} - r^m$

folgl. weil $a^{m+1} - a^{m-1} < b^{m-1}$, so ist $q^m = q^{m-1}$, $a^{m+1} = a^{m-1}$,

$r^m = r^{m-2}$

8) weil $b^m b^{m-1} = A - a^{2m}$, so ist, wenn $b^m = b^{m-1}$, $b^{2m} = A - a^{2m}$,

folgl. $A = a^{2m} + b^{2m}$, d. h. die angegebene Zahl ist die Summe zweier Quadrate.

9) Weil $a^m > a$, u. b^m u. q^m nie $> 2a$ u. $r^m < a$, der Kettenbruch aber ohne Ende fortgeht, so müssen die Werthe von a, b, q, r sich nothwendig immer wiederholen und es müssen auch bei diesen Wiederholungen dieselben Werthe von a wieder mit denselben Werthen von b zusammentreffen.

10) Ist aber einmal $a^n = a^m$ u. $b^n = b^m$, folgl. auch $x^n = x^m$, so ist auch:

α) weil $\frac{a^m + \sqrt{A}}{b^m} = q^m + \frac{r^m + z}{b^m}$ u. $\frac{a^n + \sqrt{A}}{b^n} = q^n + \frac{r^n + z}{b^n}$,

so ist $q^n = q^m$ u. $r^n = r^m$,

folgl. auch $a - r^n = a - r^m$, d. h. $a^{n+1} = a^{m+1}$

u. weil $b^{m+1} = \frac{A - a^{2m+1}}{b^m}$ u. $b^{n+1} = \frac{A - a^{2n+1}}{b^n}$, so ist auch

$b^{n+1} = b^{m+1}$, folgl. nach d. vorigen auch $q^{n+1} = q^{m+1}$ u. $r^{n+1} = r^{m+1}$

d. h. die auf x^n folgenden Quotienten den auf x^m folgenden der Reihe nach gleich.

β) weil $a - a^m = r^{m-1}$ u. $a - a^n = r^{n-1}$, so ist $r^{n-1} = r^{m-1}$, u. weil

$b^m b^{m-1} = A - a^{2m}$ u. $b^n b^{n-1} = A - a^{2n}$, so ist $b^{n-1} = b^{m-1}$,

ferner weil $q^{m-1} b^{m-1} = a^{m-1} + a^m$ u. $q^{n-1} b^{n-1} = a^{n-1} + a^n$,

so ist auch $(q^{m-1} - q^{n-1})\, b^{n-1} = a^{m-1} - a^{n-1}$, u. folgl. wieder

weil $a^{n-1} = a^{n-1} < b^{n-1}$, so ist $q^{n-1} = q^{m-1}$ u. $a^{n-1} = a^{m-1}$,

also sind auch die vor x^n vorhergehenden Quotienten den vor x^m vorhergehenden der Reihe nach gleich.

11) Daher bilden die durch a, b, q, r bezeichneten Zahlen regelmässige Perioden und zwar von Anfang an. Die Natur dieser Perioden lässt sich noch genauer bestimmen.

Die Periode enthalte m Glieder, dann ist $a^{m+1} = a$, $b^{m+1} = b$, $q^{m+1} = q$,

$r^{m+1} = r$, flg. $r^m = o$, $b^m = \frac{A - a^{2m+1}}{b^{m+1}} = \frac{A - a^2}{b} = 1$, flg. weil $r^{m-1} < b^m$,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

so ist $r^{m-1} = o$, daher auch $a^m = a$, u. $q^m b^m = q^m = a^m + a^{m+1} = 2a$, folgl. sind die letzten Glieder der Periode $a^m = a$, $b^m = 1$, $q^m = 2a$, $r^m = o$; ferner weil $a^m = a^{m+1}$, so ist nach 3 u. 6 $b^{m-1} = b^{m+1} = b'$, $q^{m-1} = q^{m+1} = q'$, $a^{m-1} = a^{m+1} = a''$ u. $r^{m-2} = r^{m+1} = r'$. Nun ist weiter $b^{m-1} b^{m-2} = A - a^{2m-1}$ u. $b^{m+2} b^{m+1} = A - a^{2m+1}$, folgl. auch $b^{m-3} = b^{m+2} = b''$ u. $(q^{m+2} - q^{m-2}) b^{m-2} = a^{m+3} + a^{n+2} - (a^{m-1} + a^{m-2}) = a^{m+3} - a^{m-2}$ folgl. auch $a^{m-2} = a^{m+3} = a^m$ u. $q^{m-2} = q^{m+2} = q''$, endlich auch $r^{m-3} = r^{m+2} = r''$

Dieselben Schlüsse wiederholen sich jetzt wieder. —

Folglich sind die Perioden der durch a, b, q, r bezeichneten Zahlen symmetrisch, bis auf ihre letzten Glieder, welche allein dastehen. Wäre der Kettenbruch aus $a + \sqrt{A}$ entwickelt, d. h. die $\sqrt{\ }$ der Gleichung $x^2 - 2ax = b$ gesucht worden, so würden die Perioden völlig symmetrisch und stetig, d. h. es würde das letzte Glied der einen zugleich das Anfangsglied der folgenden sein.

In der Mitte dieser Perioden müssen folglich entweder zwei auf einander folgende a und folglich auch zwei auf einander folgende r, oder zwei auf einander folgende b und also auch zwei auf einander folgende q = werden. Im ersten Falle wird die Anzahl der Glieder in der Periode grade, im zweiten ungrade, und im letzteren wird zugleich die gegebene Zahl die Summe zweier Quadrate sein.

z. B. $\sqrt{107} = \sqrt{100} + \frac{7}{20}$

$a^{I} = 10$	$b^{I} = 7$	$q^{I} = 2$	$r^{I} = 6$
$a^{II} = 4$	$b^{II} = 13$	$q^{II} = 1$	$r^{II} = 1$
$a^{III} = 9$	$b^{III} = 2$	$q^{III} = 9$	$r^{III} = 1$
$a^{IV} = 9$	$b^{IV} = 13$	$q^{IV} = 1$	$r^{IV} = 6$
$a^{V} = 4$	$b^{V} = 7$	$q^{V} = 2$	$r^{V} = 0$
$a^{VI} = 10$	$b^{VI} = 1$	$q^{VI} = 20$	$r^{VI} = 0$

also $\sqrt{107} = 10 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{20}}}}}}$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Der Zweck der Kettenbrüche wird aber erst dann erreicht sein, wenn wir den entwickelten Kettenbruch bis zu jeder Stufe seiner Entwickelung wieder in der Form eines gewöhnlichen Bruches darzustellen und zugleich die Grenzen der dadurch erreichten Annäherung zu bestimmen im Stande sind.

Das erste ist, wenn auch nicht ohne Mühe, immer dadurch möglich, dass man von dem Gliede der Kette anfangend, bei welchem man abbrechen will, jeden Bruch mit dem Nenner des vorhergehenden zu einem unächten Bruche vereinigt, diesen umkehrt und mit dem Nenner des vorigen zusammenzieht, u. s. f. — Soll aber auch der zweiten Forderung genügt werden, so muss ein Gesetz gesucht werden, nach welchem jeder folgende Näherungsbuch durch den vorhergehenden und durch den folgenden Nenner des Kettenbruches bestimmt ist. Dass ein solches Gesetz da sei, und wie es gefunden werden muss, lässt sich im Voraus mit Bestimmtheit schliessen, weil jeder folgende Näherungsbuch von den vorhergehenden nur dadurch unterschieden ist, dass in ihm zu dem Nenner desselben Bruches, bei welchem abgebrochen worden, noch das zu demselben gehörige folgende Glied der Kette hinzutritt.

Es sei also der entwickelte Kettenbruch $= \cfrac{1}{q' + \cfrac{1}{q'' + \cfrac{1}{q''' + \cfrac{1}{q^{IV} \cdot \cdot \cdot \cfrac{1}{q^m}}}}}$

Die einzelnen Näherungsbrüche sollen durch $\frac{\alpha}{\beta}$ bezeichnet werden.

Nun ist der 1. Näherungsbruch $= \frac{1}{q'}$, folgl. $\alpha' = 1$, $\beta' = q'$

der 2. $\frac{\alpha''}{\beta''} = \cfrac{1}{q' + \cfrac{1}{q''}} = \frac{q''}{q''q' + 1}$, folgl. $\alpha'' = q''$, $\beta'' = q''q' + 1$

der 3. muss sich aus dem 2. bilden, wenn in diesem zu q'' noch $\frac{1}{q'''}$ hinzutritt,

$$\frac{\alpha'''}{\beta'''} = \frac{q'' + \frac{1}{q'''}}{q''q' + 1 + \frac{1}{q'''}q'} \text{ oder weil } q'' = \alpha'', \; q''q' + 1 = \beta'' \text{ u. } q' = \beta'$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\frac{\alpha'''}{\beta'''} = \frac{\alpha'' + \frac{1}{q'''}}{\beta'' + \frac{1}{q'''}\beta'} = \frac{q'''\alpha'' + 1}{q'''\beta'' + \beta'}$$

folgl. $\alpha''' = q'''\alpha'' + 1$ u. $\beta''' = q'''\beta'' + \beta'$

Daraus folgt weiter $\frac{\alpha^{IV}}{\beta^{IV}} = \frac{q'''\alpha'' + 1 + \frac{1}{q^{IV}}\alpha''}{q'''\beta'' + \beta' + \frac{1}{q^{IV}}\beta''} = \frac{\alpha''' + \frac{1}{q^{IV}}\alpha''}{\beta''' + \frac{1}{q^{IV}}\beta''} = \frac{q^{IV}\alpha''' + \alpha''}{q^{IV}\beta''' + \beta''}$

folgl. $\alpha^{IV} = q^{IV}\alpha''' + \alpha''$ u. $\beta^{IV} = q^{IV}\beta''' + \beta''$.

Hier wird das Gesetz deutlich: Zähler und Nenner des Näherungsbruches bilden sich aus den beiden vorangehenden auf gleiche Weise, indem zu dem Produkte des nächsten von ihnen in den folgenden Quotienten der vorige hinzutritt. Gilt aber diess Gesetz für irgend einen Näherungsbruch, so muss es auch für den folgenden gelten, denn wenn

$$\frac{a^m}{\beta^m} = \frac{q^m a^{m-1} + \alpha^{m-2}}{q^m \beta^{m-1} + \beta^{m-2}}$$

so ist $\frac{\alpha^{m+1}}{\beta^{m+1}} = \frac{q^m \alpha^{m-1} + \alpha^{m-2} + \frac{1}{q^{m+1}}\alpha^{m-1}}{q^m \beta^{m-1} + \beta^{m-2} + \frac{1}{q^{m+1}}\beta^{m-1}} = \frac{\alpha^m + \frac{1}{q^{m+1}}\alpha^{m-1}}{\beta^m + \frac{1}{q^{m+1}}\beta^{m-1}}$

$$= \frac{q^{m+1}\alpha^m + \alpha^{m-1}}{q^{m+1}\beta^m + \beta^{m-1}}$$

Dass diess Gesetz in den ersten beiden Näherungsbrüchen sich nicht vollständig zeigen können, folgt eben daraus, dass diesem noch keine andern vorausgehen; bei dem dritten ist es schon zu erkennen, weil $\alpha' = 1$ ist. Man nimmt, um die Bildung der Näherungsbrüche ganz zu einem blossen Mechanismus zu machen, gewöhnlich noch zwei an sich sinnlose Brüche $\frac{1}{0}$ und $\frac{0}{1}$ an, welche man der Reihe der übrigen voranstellt. Man kann ihrer aber füglich entbehren:

z. B. $\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}}}$ $\quad \frac{1}{0}\ \frac{0}{1}$ | 2, 3, 1, 4

| $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{7}$ $\frac{4}{9}$ $\frac{19}{43}$

Um nun die Grenzen der Annäherung für jeden einzelnen Näherungsbruch zu bestimmen, untersuchen wir zuerst die Unterschiede zweier auf einander folgender Näherungsbrüche.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es ist aber:

$$\frac{\alpha^m}{\beta^m} - \frac{\alpha^{m+1}}{\beta^{m+1}} = \frac{\alpha^m \beta^{m+1} - \alpha^{m+1} \beta^m}{\beta^m \beta^{m+1}}, \text{ u. } \frac{\alpha^m}{\beta^m} - \frac{\alpha^{m-1}}{\beta^{m-1}} = \frac{\alpha^m \beta^{m-1} - \alpha^{m-1} \beta^m}{\beta^m \beta^{m-1}}$$

Nun ist weiter $\alpha^{m+1} = q^{m+1} \alpha^m + \alpha^{m-1}$ und $\beta^{m+1} = q^{m+1} \beta^m + \beta^{m-1}$

folgl. $\alpha^m \beta^{m+1} = q^{m+1} \alpha^m \beta^m + \alpha^m \beta^{m-1}$ u $\alpha^{m+1} \beta^m = q^{m+1} \alpha^m \beta^m + \alpha^{m-1} \beta^m$

folgl. $\alpha^m \beta^{m+1} - \alpha^{m+1} \beta^m = \alpha^m \beta^{m-1} - \alpha^{m-1} \beta^m$

Hieraus ergiebt sich

1) jeder Näherungsbruch ist entweder grösser oder kleiner als jeder der beiden, zwischen denen er liegt.

Nun ist $\frac{1}{q'} > \frac{q''}{q''q' + 1}$ oder $\frac{\alpha'}{\beta'} > \frac{\alpha''}{\beta''}$, folgl. ist jeder Näherungsbruch, dessen Ordnungszahl ungrade ist, grösser als jeder, dessen Ordnungszahl grade ist.

2) Die Unterschiede eines Näherungsbruches von den beiden, zwischen denen er liegt, verhalten sich umgekehrt wie die Nenner dieser Brüche:

$$\frac{\alpha^m}{\beta^m} - \frac{\alpha^{m-1}}{\beta^{m-1}} : \frac{\alpha^m}{\beta^m} - \frac{\alpha^{m+1}}{\beta^{m+1}} = \beta^{m+1} : \beta^{m-1}$$

Da nun der Nenner jedes folgenden Bruches grösser ist, als der des vorhergehenden, so wird der Unterschied zweier auf einander folgender Brüche um so kleiner, je grösser ihre Ordnungszahlen sind. Eben desshalb werden auch die Näherungsbrüche von ungrader Ordnungszahl immer kleiner, die von grader immer grösser, je weiter sie von dem ersten abstehen.

3) Der Unterschied der Produkte aus dem Zähler eines Näherungsbruches in den Nenner des folgenden und dem Zähler des folgenden in den Nenner des ersten ist für jede zwei auf einander folgende Näherungsbrüche derselbe.

Nun ist er für die beiden ersten $= q''q' + 1 - q''q' = 1$, mithin ist auch für alle folgende Brüche $\alpha^m \beta^{m+1} - \alpha^{m+1} \beta^m = \mp 1$, und zwar ist $\alpha^m \beta^{m+1} = \alpha^{m+1} \beta^{m+1}$, wenn m ungrade und $= \alpha^{m+1} \beta^{m-1}$, wenn m grade ist.

Demnach ist der Unterschied je zweier auf einander folgender Näherungsbrüche $\frac{\alpha^m}{\beta^m} - \frac{\alpha^{m+1}}{\beta^{m+1}}$ durch einen Bruch gegeben, dessen Zähler 1 und dessen Nenner das Produkt aus den Nennern beider Brüche ist, $= \mp \frac{1}{\beta^m \beta^{m+1}}$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

4) Da jene beiden Produkte zugleich das Verhältniss der beiden auf einander folgenden Näherungsbrüche ausdrücken, so folgt nicht nur, dass dieses Verhältniss immer durch zwei um 1 verschiedene Zahlen gegeben ist, sondern auch, weil jene Produkte selbst diese Zahlen sind, dass sowohl die Nenner zweier auf einander folgender Brüche, als auch Zähler und Nenner jedes einzelnen Bruches zu einander Primzahlen sind.

5) Weil $\beta^m = q^m \beta^{m-1} + \beta^{m-2}$, so ist $\frac{\beta^m}{\beta^{m-1}} = q^m + \frac{\beta^{m-2}}{\beta^{m-1}}$

folgl. $\frac{\beta^{m-1}}{\beta^m} = \frac{1}{q^m + \frac{\beta^{m-2}}{\beta^{m-1}}}$

folgl. auch $\frac{\beta^{m-2}}{\beta^{m-1}} = \frac{1}{q^{m-1} + \frac{\beta^{m-3}}{\beta^{m-2}}}$

und folgl. überhaupt $\frac{\beta^{m-1}}{\beta^m} = \frac{1}{q^m + \frac{1}{q^{m-1} + \frac{1}{q^{m-2}}}}$

$\frac{1}{q'}$

d. h. das Verhältniss der Nenner zweier auf einander folgender Näherungsbrüche ist durch einen Kettenbruch gegeben, welcher die Glieder des gegebenen Kettenbruches bis auf den zu dem letzteren der beiden Näherungsbrüche gehörigen Quotienten, aber in umgekehrter Folge enthält.

6) Nun ist $\frac{a^m}{\beta^m} = \frac{1}{q' + \frac{1}{q''}}$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und nach dem vorigen $\frac{\beta^{m-1}}{\beta^m} = \frac{1}{q^m +}$

$$\cdot$$

$$+ \frac{1}{q'}$$

wenn daher die Folge der Quotienten von q' bis q^m symmetrisch ist, so dass $q^m = q'$, $q^{m-1} = q''$ etc., so ist $a^m = \beta^{m-1}$, und ist umgekehrt der Zähler eines Näherungsbruches dem Nenner des vorhergehenden gleich, so ist die Folge der Quotienten des Kettenbruches, aus welchem sie sich bilden bis zu dem Quotienten des letzteren Näherungsbruches symmetrisch. Wenn also die Periode des Kettenbruches, welche sich aus $\sqrt{A}$ entwickelt, $m + 1$ Glieder hat, so ist $\alpha^m = \beta^{m-1}$.

Aus dem Gefundenen lässt sich schliessen, dass der wahre Werth des Kettenbruches zwischen je zwei auf einander folgenden Näherungsbrüchen liegen und folglich durch den Unterschied dieser Brüche die Grenze ihrer Annäherung gegeben sein wird. Erwiesen wird es sein, wenn sich zeigen lässt, dass der Unterschied eines jeden Näherungsbruches von dem wahren Werthe des Kettenbruches kleiner sei, als sein Unterschied von dem nächstfolgenden Näherungsbruche. Dazu bezeichnen wir durch x^m den sogenannten vollständigen Quotienten, welcher anstatt q^m in die Kette gesetzt, dieselbe schliessen würde. Dieses x^m ist bei einem endlichen Kettenbruche $= q^m + \frac{r^m}{r^m - 1}$; bei einem unendlichen Kettenbruche, wie er sich aus $\sqrt{A}$ entwickelt, ist $x^m = q^m + \frac{r^m + z}{b^m} = \frac{a^m + \sqrt{A}}{b^m}$, in jedem Falle also grösser als q^m. Bezeichnen wir nun den wahren Werth des Kettenbruches durch X, so ist, weil er sich ergeben muss, wenn x^{m+1} an die Stelle von q^{m+2} gesetzt wird,

$$X = \frac{x^{m+1}\alpha^m + \alpha^{m-1}}{x^{m+1}\beta^m + \beta^{m-1}}$$

folgl. $$X - \frac{\alpha^m}{\beta^m} = \frac{x^{m+1}\alpha^m\beta^m + \alpha^{m-1}\beta^m - x^{m+1}\alpha^m\beta^m + \beta^{m-1}\alpha^m}{(x^{m+1}\beta^m + \beta^{m-1})\beta^m}$$

$$= \frac{a^{m-1}\beta^m - \alpha^m\beta^{m-1}}{\beta^m(x^{m+1}\beta^m + \beta^{m-1})} = \frac{1}{\beta^m(x^{m+1}\beta^m + \beta^{m-1})}$$

Nun ist $$\frac{\alpha^{m+1}}{\beta^{m+1}} - \frac{\alpha^m}{\beta^m} = \frac{1}{\beta^m(x^{m+1}\beta^m + \beta^{m-1})} = \frac{\alpha^{m+1}\beta^m - \alpha^m\beta^{m+1}}{\beta^m\beta^{m+1}}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$= \mp \frac{1}{\beta^m \beta^{m+1}}$$

Hieraus folgt: 1) wenn $\frac{\alpha^{m+1}}{\beta^{m+1}} \gtrless \frac{\alpha^m}{\beta^m}$

so ist auch $X \gtrless \frac{\alpha^m}{\beta^m}$

2) weil $x^{m+1} > q^{m+1}$

so ist $x^{m+1} \beta^m + \beta^{m-1} > q^{m+1} \beta^m + \beta^{m-1} > \beta^{m+1}$

folgl. auch $\frac{1}{\beta^m (x^{m+1} \beta^m + \beta^{m-1})} < \frac{1}{\beta^m \beta^{m+1}}$

folgl. $X - \frac{\alpha^m}{\beta^m} < \frac{\alpha^{m+1}}{\beta^{m+1}} - \frac{\alpha^m}{\beta^m}$

Demnach liegt wirklich der wahre Werth des Kettenbruches zwischen zwei auf einander folgenden Näherungsbrüchen und ist folgl. $<$ als jeder Näherungsbruch von ungrader und $>$ als jeder Näherungsbruch von grader Ordnungszahl.

Die genauere Entwickelung des vollständigen Quotienten führt zu zwei merkwürdigen Sätzen:

1) bei einem endlichen Kettenbruche, wie er sich aus einem gewöhnlichen Bruche entwikkelt, ist $x^m = q^m + \frac{r^m}{r^{m-1}}$. Bezeichnen wir nun den Bruch, aus welchem der Kettenbruch sich entwickelt, durch $\frac{A}{B}$, so muss dieser Bruch aus jedem Näherungsbruche hervorgehen, wenn anstatt des Quotienten, aus welchem dieser sich bildet, der vollständige Quotient gesetzt wird.

Nun ist $\frac{\alpha^m}{\beta^m} = \frac{q^m \alpha^{m-1} + \alpha^{m-2}}{q^m \beta^{m-1} + \beta^{m-2}}$

folgl. $\frac{A}{B} = \frac{x^m \alpha^{m-1} + \alpha^{m-2}}{x^m \beta^{m-1} + \beta^{m-2}} = \frac{\alpha^m + \frac{r^m}{r^{m-1}} \alpha^{m-1}}{\beta^m + \frac{r^m}{r^{m-1}} \beta^{m-1}} = \frac{r^{m-1} \alpha^m + r^m \alpha^{m-1}}{r^{m-1} \beta^m + r^m \beta^{m-1}}$

folgl. $A = r^{m-1} \alpha^m + r^m \alpha^{m-1}$

$B = r^{m-1} \beta^m + r^m \beta^{m-1}$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nun ist $\frac{A}{B} - \frac{\alpha^m}{\beta^m} = \frac{A\beta^m - B\alpha^m}{B\beta^m}$

Wenn für A und B die gefundenen Werthe gesetzt werden, so ist

$$A\beta^m = r^{m-1}\alpha^m\beta^m + r^m\alpha^{m-1}\beta^m$$

$$B\alpha^m = r^{m-1}\alpha^m\beta^m + r^m\alpha^m\beta^{m-1}$$

folgl. $A\beta^m - B\alpha^m = r^m\alpha^{m-1}\beta^m - r^m\alpha^m\beta^{m-1} = r^m(\alpha^{m-1}\beta^m - \alpha^m\beta^{m-1})$

Nun ist $\alpha^{m-1}\beta^m - \alpha^m\beta^{m-1} = \mp 1$

folgl. $A\beta^m - B\alpha^m = r^m$

Nun ist der letzte Rest, welcher bei Entwickelung des Kettenbruchs bleibt $= 1$; ist also $\frac{\alpha^m}{\beta^m}$ der letzte Näherungsbruch, so ist $A\beta^m - B\alpha^m = \mp 1$. Daraus folgt: Wenn zwei Zahlen zu einander Primzahlen sind, so lassen sich immer Vielfache der einen finden, welche von Vielfachen der andern um 1 verschieden sind. Die kleinsten Vielfachen beider Zahlen, deren Unterschied 1 ist, werden gefunden, wenn das Verhältniss der gegebenen in einen Kettenbruch und aus diesem wieder die Näherungsbrüche entwickelt werden. Zähler und Nenner des letzten Näherungsbruches sind die Zahlen, welche die gesuchten Vielfachen geben.

Daraus geht hervor, dass die beiden kleinsten Zahlen, deren Produkte in zwei gegebenen relativen Primzahlen um 1 verschieden sind, kleiner sein müssen als die gegebene selbst. Hat man aber die beiden kleinsten Zahlen von der Art gefunden, dass das Produkt der einen in die erste der zwei gegebenen um 1 grösser ist, als das Produkt der andern in die zweite gegebene, so lassen sich unmittelbar daraus zwei andre Zahlen finden, so dass das Produkt der einen in die erste der gegebenen um 1 kleiner ist, als das Produkt der andern in die zweite gegebene.

Sind nehmlich a und b unter einander Primzahlen, und x und y die kleinsten der Art, dass $ax = by + 1$, so ist $ab - ax = ab - by - 1$, das ist aber $a(b-x) = b(a-y) - 1$. Man hat also nur die erste der gefundenen von der zweiten der gegebenen und die zweite der gefundenen von der ersten der gegebenen abzuziehen.

Es sollen die kleinsten Zahlen gefunden werden, so dass das Produkt der einen in 12 von dem Produkt der andern in 17 um 1 verschieden ist: $12x = 17y \mp 1$

$$\begin{array}{l} 12|17|1 \\ \quad 5|12|2 \\ \quad\quad 2|5|2 \\ \quad\quad\quad 1|2|2 \end{array} \qquad \frac{12}{17} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Näherungsbrüche: $\frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}$

$$\text{also } x = 7$$
$$y = 5$$
$$7.\,12 = 5.\,17 \pm 1$$

aber $\frac{5}{7}$ ist der 3. Näherungsbruch, folglich grösser als $\frac{12}{17}$, daher ist $7.\,12 = 5.\,17 - 1 = 84$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf