Berechnung einiger stereometrischer Körper, deren Behandlung zur Lehraufgabe der Untersecunda gehört.

Nach dem mathematischen Lehrplan vom Jahre 1892 ist der Lehraufgabe der Untersecunda eines Gymnasiums in der Stereometrie die Betrachtung der einfachen stereometrischen Körper zugewiesen und nach den methodischen Bemerkungen zu den Lehrplänen ist dieser Unterricht zwar so einzurichten, daß auf die Berechnung der Körper der Hauptnachdruck gelegt wird, er muß aber doch, wenn er seinen Zweck ganz erfüllen soll, auch darauf Bedacht nehmen, das stereometrische Vorstellungsvermögen überhaupt zu stärken. Daher sollen auch die wichtigsten Lehrsätze über die Lage der Linien und Ebenen im Raum mit in den Bereich der Betrachtung gezogen werden. Auf den folgenden Seiten wird unter diesen Gesichtspunkten eine etwas ausführlichere Berechnung einiger stereometrischer Körper vorgeführt. Eine solche erscheint mir aus folgendem Grunde nicht überflüssig. Soll das in der Untersecunda gewonnene stereometrische Wissen nicht größtenteils wieder verloren gehen, bevor die Fortführung und der Abschluß des stereometrischen Unterrichts in der Prima erfolgt, so ist eine Wiederholung des betreffenden Pensums der Untersecunda in der Obersecunda erforderlich. Wenn nun aber, wie es bei der Ritterakademie oft eintritt, erst in die Obersecunda eine größere Anzahl Schüler neu aufgenommen ist, so wird es diesen meist

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

schwer bei einer solchen Wiederholung zu folgen und aus ihr den vollen Nutzen zu ziehen, wenn sie, was häufig der Fall ist, vieles früher in anderer Weise, manches gar nicht durchgenommen haben. Solchen Schülern wird eine ausführlichere Darstellung des vorliegenden Stoffes Hülfe bringen; aber auch anderen, besonders schwächeren, nützen, wenn sie daran gehen, das in der Schule Besprochene nochmals zu Hause zu überdenken.

In Betreff der Art des Unterrichtes geht meine Ansicht dahin, daß allerdings zunächst den Schülern Modelle der Körper gezeigt und an diesen die sich ergebenden Beziehungen klar gemacht werden müssen, auch Zeichnungen des ganzen Körpers oder einzelner Teile desselben sind auszuführen und vom Schüler zu verlangen; dann aber halte ich es für gut, an ihn die Forderung zu stellen, bei den Wiederholungen wenigstens die einfacheren Beziehungen auch ohne Benützung von Modell oder Figur abzuleiten. Gerade durch letzteres wird der Schüler gezwungen, sich im Kopfe eine klare Vorstellung des Körpers zu bilden, und so eine Stärkung seines stereometrischen Vorstellungsvermögens erreicht werden.

Die bei der Berechnung sich ergebenden Beziehungen und Formeln sind naturgemäß schon in den verschiedensten Lehrbüchern u. s. w. veröffentlicht, infolge dessen wird ein Anspruch darauf, daß Neues geboten werde, nicht erhoben.

Ich führe zunächst eine Anzahl stereometrischer Lehrsätze an, von denen im Laufe der Betrachtung mehrfach Anwendung gemacht wird. Dieselben sind im wesentlichen dem bei uns eingeführten Lehrbuch: Mehler, Hauptsätze der Elementar-Mathematik, entnommen.

Daß für alle derselben schon in der Secunda der strenge mathematische Beweis erbracht wird, erscheint mir nicht nötig und auch nicht wünschenswert, da dadurch eine zu große Belastung dieser Klasse mit mathematischem Lehrstoff eintreten würde.

1) Eine Gerade, die zwei Punkte einer Ebene verbindet, liegt ganz in der Ebene. Eine Gerade schneidet eine Ebene in nur einem Punkte, schneidet sie dieselbe nicht, so heißt sie der Ebene parallel.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2) Eine Ebene ist bestimmt durch drei Punkte, die nicht in derselben Geraden liegen. Eine Ebene ist also auch bestimmt durch eine Gerade und einen außerhalb derselben liegenden Punkt, oder durch zwei sich schneidende Gerade.

3) Zwei parallele Gerade liegen in einer und derselben Ebene.

4) Der Ort aller Punkte, die von zwei festen Punkten gleiche Entfernung haben, ist eine Ebene.

5) Steht eine Gerade auf zwei sich schneidenden Geraden einer Ebene im Schnittpunkt derselben senkrecht, so steht sie auf allen durch den Schnittpunkt gehenden Geraden (also auf der Ebene) senkrecht.

6) Lote auf derselben Ebene sind parallel. Steht eine von zwei parallelen Geraden auf einer Ebene senkrecht, so steht auch die andere auf der Ebene senkrecht.

7) Das von einem Punkte auf eine Ebene gefällte Lot ist die kürzeste Verbindungslinie zwischen beiden und wird die Entfernung des Punktes und der Ebene genannt.

8) Entfernung zweier parallelen Ebenen heißt das Lot, welches von einem beliebigen Punkte der einen auf die andere gefällt wird.

9) Winkel mit parallelen Schenkeln sind gleich.

10) Neigungswinkel zweier Ebenen heißt der Winkel, den zwei in diesen Ebenen auf ihrer Durchschnittskante in einem beliebigen Punkte errichteten Lote mit einander bilden.

11) Zwei Ebenen stehen auf einander senkrecht, wenn ihr Neigungswinkel ein Rechter ist.

12) Jede durch eine Senkrechte einer Ebene gelegte Ebene steht auf der Ebene senkrecht.

13) Projektion eines Punktes auf eine Ebene heißt der Fußpunkt des von dem Punkte auf die Ebene gefällten Lotes. Die Projektion einer Linie auf eine Ebene geht durch die Projektionen ihrer sämtlichen Punkte.

14) Der Winkel, den eine Gerade mit ihrer Projektion auf eine Ebene bildet, heißt der Neigungswinkel der Geraden und der Ebene.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

15) Zwei Geraden, die sich weder schneiden noch einander parallel sind, heißen sich kreuzende Geraden. Das gemeinsame Perpendikel zweier sich kreuzenden Geraden heißt die Entfernung der beiden Geraden. Es ist kleiner als jede andere die sich kreuzenden Geraden verbindende Strecke.

16) Eine n-seitige Pyramide ist begrenzt von einem n-Eck als Grundfläche und n-Dreiecken, die seine Seiten mit einem außerhalb gelegenen Punkt (der Spitze) verbinden, als Seitenflächen. Das von der Spitze auf die Grundfläche gefällte Lot heißt Höhe der Pyramide, die die Grundfläche begrenzenden Kanten nennt man Grundkanten, die von der Spitze ausgehenden Seitenkanten.

Der Inhalt einer Pyramide ist gleich dem dritten Teil des Produktes aus ihrer Grundfläche und Höhe.

17) Sind die Seitenkanten einer Pyramide einander gleich, so läßt sich um die Grundfläche ein Kreis beschreiben, der Fußpunkt der Höhe ist der Mittelpunkt dieses Kreises.

Beweis. (Fig. 1.) Ist $SO \perp ABCDE$ und $SA = SB = SC = SD = SE$, so ist:

$$\frac{\Delta\, SOA \cong \Delta\, SOB \cong \Delta\, SOC \cong \Delta\, SOD \cong \Delta\, SOE}{OA = OB = OC = OD = OE}$$

Das rechtwinklige Parallelepipedon.

Ein rechtwinkliges Parallelepipedon ist ein von sechs Rechtecken begrenzter Körper. (Figur 2.)

Die Zahl der Ecken desselben ist $e = 8$, der Flächen $f = 6$, der Kanten $k = 12$, also ist:

$$e + f = k + 2. \quad \text{(Eulerscher Satz).}$$

Je vier Kanten sind einander gleich und parallel und auf zwei Begrenzungsflächen senkrecht.

Es ist $AA_1 \perp AB$ und AD, ebenso

$$\underline{AA_1 \perp A_1B_1 \text{ und } A_1D_1}$$

AA_1 senkrecht auf den Ebenen $ABCD$ u. $A_1B_1C_1D_1$ (5.); dasselbe gilt für die Kanten BB_1, CC_1 und DD_1.

Zwei parallele Kanten, welche nicht in demselben Begrenzungsrechteck liegen, heißen Gegenkanten z. B. AA_1 und CC_1.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Je zwei der Begrenzungsflächen (z. B. ABB_1A_1 und CDD_1C_1) sind kongruente Rechtecke, einander parallel und auf den vier anderen Seitenflächen senkrecht.

Die Rechtecke ABB_1A_1 und ADD_1A_1 schneiden sich in der Kante AA_1, es sind AB und $AD \perp AA_1$, also ist $\sphericalangle DAB$ der Neigungswinkel dieser beiden Rechtecke (10.), $\sphericalangle DAB = R$, also stehen die beiden Rechtecke auf einander senkrecht (11.). Ebenso steht ABB_1A_1 auf den Rechtecken BCC_1B_1, $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ senkrecht, dasselbe gilt für Rechteck CDD_1C_1.

In jeder Ecke schneiden sich drei im allgemeinen verschieden lange Kanten rechtwinklig.

In jeder Ecke schneiden sich drei Begrenzungsflächen rechtwinklig; zwei Ecken, in denen sich drei verschiedene Begrenzungsflächen schneiden, heißen Gegenecken. ($A - C_1$, $C - A_1$, $B - D_1$, $D - B_1$).

In jeder Seitenfläche lassen sich zwei Flächendiagonalen ziehen, die Anzahl dieser ist also $= 12$. Da je zwei gegenüberliegende Seitenflächen kongruente Rechtecke sind, sind je 4 dieser Diagonalen einander gleich.

Ist die Kantenlänge von $AB = a$, von $AD = b$, von $AA_1 = c$, so ergiebt sich:

$$AC = BD = A_1C_1 = B_1D_1 = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$AB_1 = BA_1 = CD_1 = DC_1 = \sqrt{a^2 + c^2}$$
$$AD_1 = DA_1 = BC_1 = CB_1 = \sqrt{b^2 + c^2}$$

Durch je zwei Gegenkanten z. B. AA_1 und CC_1 läßt sich, da dieselben parallel sind, eine Ebene legen (3). Eine solche Ebene heißt Diagonalebene, ihre Anzahl ist $= 6$.

$ABC_1D_1 - CDA_1B_1 - ADC_1B_1 - BCD_1A_1 - BDD_1B_1 - ACC_1A_1$.

Die Diagonalebenen sind Rechtecke.

Es ist $AA_1 \perp AB$ und AD, also auch $\perp AC$ (5.) Ebenso folgt, daß die übrigen Seiten des Vierecks ACC_1A_1 auf einander senkrecht sind.

Es ist Rechteck ABC_1D_1 = Rechteck $CDA_1B_1 = a\sqrt{b^2 + c^2}$

Rechteck ADC_1B_1 = Rechteck $BCD_1A_1 = b\sqrt{a^2 + c^2}$

Rechteck BDD_1B_1 = Rechteck $ACC_1A_1 = c\sqrt{a^2 + b^2}$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es sind AA_1 und BB_1 senkrecht auf den Begrenzungsflächen ABCD und $A_1B_1C_1D_1$, also sind auch die Diagonalebenen ACC_1A_1 und BDD_1B_1 auf diesen Flächen senkrecht (12); da außerdem Rechteck $ACC_1A_1 \cong BDD_1B_1$ ist, folgt:

Je zwei Diagonalebenen sind kongruent und stehen auf zwei parallelen Begrenzungsflächen senkrecht.

Die Diagonale einer Diagonalebene verbindet zwei Gegenecken, eine solche Diagonale heißt räumliche Diagonale, die Anzahl derselben ist = 4. (AC_1, CA_1, BD_1, DB_1).

Die 4 räumlichen Diagonalen sind gleich ($= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$), schneiden sich in einem Punkt und halbieren sich in demselben.

Die räumliche Diagonale AC_1 ist Diagonale der Diagonalebenen ACC_1A_1, ABC_1D_1 und ADC_1B_1, die zweiten Diagonalen dieser Rechtecke sind die übrigen drei räumlichen Diagonalen CA_1, BD_1 und DB_1. Letztere müssen also sämtlich durch die Mitte M von AC_1 hindurchgehen, sich in M halbieren und AC_1 gleich sein.

Aus dem rechtwinkligen Dreieck ACC_1 folgt:

$$AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2$$
$$AC^2 = a^2 + b^2,\ CC_1^2 = c^2$$
$$AC_1^2 = a^2 + b^2 + c^2$$
$$AC_1 = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Punkt M hat also von den 8 Eckpunkten des rechtwinkligen Parallelepipedon gleiche Entfernung, ist mithin der Mittelpunkt der Kugel, welche sich demselben umschreiben läßt; der Radius dieser Kugel ist $= \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Die Diagonalebenen schneiden sich im Punkt M, also muß auch die Schnittlinie zweier derselben z. B. von ACC_1A_1 und BDD_1B_1 durch Punkt M gehen. Diese Schnittlinie ist EE_1 die Verbindungslinie der Schnittpunkte der Diagonalen der parallelen Begrenzungsflächen ABCD und $A_1B_1C_1D_1$. Es ist $AE \# A_1E_1$ also auch $EE_1 \# AA_1$, AA_1 steht senkrecht auf den Rechtecken ABCD und $A_1B_1C_1D_1$, also auch EE_1 (6.). M ist die Mitte von CA_1 und $CE \parallel A_1E_1$, folglich M auch

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Mitte von EE_1, also $E_1M = EM = \frac{c}{2}$. Das entsprechende gilt für FF_1 und GG_1, die Verbindungslinien der Mitten der beiden andern Paare paralleler Begrenzungsflächen des Parallelepipedon. Es ist $FM = F_1M = \frac{b}{2}$ und $GM = G_1M = \frac{a}{2}$. Ferner ist $AA_1 \parallel EE_1$, ebenso $AD \parallel FF_1$ und $AB \parallel GG_1$; AA_1, AD und AB stehen aber aufeinander senkrecht, also auch EE_1 FF_1 und GG_1. (9.). Wir finden also den Satz: Die Verbindungslinien der Mitten zweier parallelen Seitenflächen eines rechtwinkligen Parallelepipedon stehen auf diesen Seitenflächen und aufeinander senkrecht, sie halbieren sich im Mittelpunkt M der dem Parallelepipedon umschriebenen Kugel.

Punkt M ist von den parallelen Seitenflächen um deren halben Abstand entfernt. (8.) Es läßt sich also einem rechtwinkligen Parallelepipedon keine Kugel einbeschreiben.

Es ist Rechteck $ABCD$ = Rechteck $A_1B_1C_1D_1 = ab$
Rechteck ADD_1A_1 = Rechteck $BCC_1B_1 = bc$
Rechteck ABB_1A_1 = Rechteck $CDD_1C_1 = ca$

die Oberfläche des rechtwinkligen Parallelepipedon

$$= 2\,(ab + bc + ca).$$

Das Volumen eines geraden rechtwinkligen Parallelepipedon ist gleich dem Produkt dreier in einem Eckpunkt zusammenstoßender Kanten.

$$V = a.\ b.\ c.$$

Beweis (für den Fall, daß die Kanten ganze Vielfache der Längeneinheit (= 1 m) also a, b und c ganze Zahlen sind). Fig. 3.

Wird auf der Kante AB die Längeneinheit a mal abgetragen und werden durch die (a—1) Teilpunkte zu der Ebene ADD_1A_1 parallele Ebenen gelegt, so zerfällt dadurch das Parallelepipedon in a inhaltsgleiche rechtwinklige parallelepipedische Platten. ($ADEFA_1D_1E_1F_1$). Je drei in einem Eckpunkt z B. A zusammenstoßende Kanten einer solchen Platte haben die Länge: $AE = 1$, $AD = b$ und $AA_1 = c$. Bezeichnet man den Kubikinhalt einer solchen Platte mit V_1, so ist:

$$V = a.\ V_1.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Teilt man ebenso die Kante AD des Parallelepipedon V_1 in b gleiche Teile und legt durch die (b—1) Teilpunkte zu der Ebene ABB_1A_1 parallele Ebenen, so wird dadurch dieses Parallelepipedon in b inhaltsgleiche parallelepipedische Säulen ($AEKGA_1E_1K_1G_1$) geteilt. Je drei in einem Eckpunkt z. B. A zusammenstoßende Kanten einer solchen Säule haben die Länge $AE = 1$, $AG = 1$, und $AA_1 = c$. Ist V_2 der Inhalt einer solchen Säule, so ist:

$$V_1 = b.\ V_2 \text{ und } V = a.\ b.\ V_2.$$

Auf der Kante AA_1 einer solchen Säule läßt sich nun die Längeneinheit c mal abtragen und die durch die entstehenden (c—1) Teilpunkte zu der Ebene ABCD parallel gelegten Ebenen zerlegen das Parallelepiped V_2 in c Würfel, deren Kantenlänge gleich der Längeneinheit, deren Kubikinhalt also = 1 cbm ist. Also ist der Kubikinhalt von

$$V_2 = c \text{ cbm, woraus } V = abc \text{ cbm folgt.}$$

Der Würfel. (Hexaeder.) (Fig. 4.)

Würfel oder Hexaeder nennt man einen von sechs Quadraten begrenzten Körper.

Es ist also der Würfel ein rechtwinkliges Parallelepipedon, dessen drei in einer Ecke zusammenstoßende Kanten einander gleich sind.

Setzt man mithin in den für das rechtwinklige Parallelepipedon erhaltenen Formeln $b = c = a$, so erhält man die entsprechenden Formeln für den Würfel.

Es sind also die 12 Diagonalen der Seitenflächen $= a\sqrt{2}$,

die 4 räumlichen Diagonalen $= a\sqrt{3}$.

Die 6 Diagonalebenen sind Rechtecke vom Flächeninhalt $= a^2\sqrt{2}$.

Der Radius der umschriebenen Kugel ist $= \frac{a}{2}\sqrt{3}$.

Der senkrechte Abstand des Mittelpunktes M der umschriebenen Kugel von den Seitenflächen des Würfels ist

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$= \frac{a}{2}$, legt man also um Punkt M mit dem Radius $\frac{a}{2}$ eine Kugel, so berührt diese die Seitenflächen, ist also dem Würfel einbeschrieben.

M heißt der Mittelpunkt des Würfels.

Die Oberfläche des Würfels ist $= 6a^2$, sein Kubikinhalt $= a^3$.

Das regelmäßige Oktaeder. (Fig. 5.)

Ein von sechs gleichseitigen Dreiecken begrenzter Körper heißt regelmäßiges Oktaeder.

Die Seitenkanten sind einander gleich, ihre Zahl ist $k = 12$. In jeder Ecke stoßen immer vier Kanten zusammen, die Anzahl der Ecken ist $e = 6$. Zwei Ecken, in welchen je vier verschiedene Kanten zusammenstoßen, heißen Gegenecken (A, A_1 — B, B_1 — C, C_1). Die Verbindungsgeraden zweier Gegenecken sollen als Axen des Oktaeders bezeichnet werden.

Da die Zahl der Begrenzungsdreiecke $f = 8$ ist, ergiebt sich die Beziehung:

$$e + f = k + 2 \text{ (Eulerscher Satz).}$$

Bezeichnet man die Kantenlänge mit a, so ist der Flächeninhalt eines der 8 gleichseitigen Begrenzungsdreiecke $= \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$, also die Oberfläche $= 8 . \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = 2a^2\sqrt{3}$.

Es ist $CA = CB = CA_1 = CB_1$,

$C_1A = C_1B = C_1A_1 = C_1B_1$,

also liegen die Punkte ABA_1B_1 in einer Ebene. (4.)

Da $AB = BA_1 = A_1B_1 = B_1A$ ist, erkennt man ABA_1B_1 zunächst als Rhombus. Dasselbe gilt für ACA_1C_1 und BCB_1C_1. Die Schnittgeraden dieser drei Vierecke sind ihre Diagonalen AA_1, BB_1 und CC_1. Die Diagonale AA_1 des Rhombus ACA_1C_1 halbiert die Diagonale CC_1 und ist senkrecht auf ihr, ebenso halbiert BB_1 als Diagonale des Rhombus BCB_1C_1 die Diagonale CC_1

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und ist senkrecht auf ihr, das heißt die Axen (AA_1, BB_1, CC_1) des Oktaeders halbieren sich in demselben Punkt O und stehen auf einander senkrecht.

CC_1 ist $\perp$ AA_1 und BB_1, also senkrecht der Ebene ABA_1B_1 (5.), ebenso BB_1 senkrecht der Ebene ACA_1C_1 und AA_1 senkrecht der Ebene BCB_1C_1. Die drei Vierecke ABA_1B_1, ACA_1C_1 und BCB_1C_1 stehen also auf einander senkrecht (12.). Die Pyramide ABA_1B_1C hat die gleichen Seitenkanten $CA = CB = CA_1 = CB_1$, also läßt sich um die Grundfläche ABA_1B_1 ein Kreis beschreiben, dessen Mittelpunkt der Fußpunkt des von der Spitze C auf die Grundfläche ABA_1B_1 gefällten Lotes, also Punkt O ist (17.). Also ist $AA_1 = BB_1$ als Durchmesser dieses Kreises, d. h. Rhombus ABA_1B_1 ist ein Quadrat. Dasselbe gilt für BCB_1C_1 und ACA_1C_1. Bezeichnet man diese drei Quadrate als Diagonalschnitte des Oktaeders, so erhält man den Satz: Die drei Diagonalschnitte des regelmäßigen Oktaeders sind kongruente Quadrate, sie schneiden sich in einem Punkt und stehen auf einander senkrecht. Ihre Schnittgeraden sind die Axen des Oktaeders; dieselben sind einander gleich, stehen auf einander senkrecht und halbieren sich in demselben Punkt.

Aus dem rechtwinkligen Dreieck ABA_1 folgt:

$$AA_1^2 = AB^2 + A_1B^2 = 2a^2$$

$$AA_1 = a\sqrt{2};$$

also ist $OA = OB = OC = OA_1 = OB_1 = OC_1 = \frac{a}{2}\sqrt{2}$, d. h.: Um das reguläre Oktaeder läßt sich eine Kugel beschreiben, deren Mittelpunkt O, deren Radius $= \frac{a}{2}\sqrt{2}$ ist.

Das Volumen des regulären Oktaeders ist:

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}.$$

Bezeichnet man das Volumen der Pyramide ABA_1B_1C mit V_1, das der Pyramide $ABA_1B_1C_1$ mit V_2, so ist, da die Grundfläche dieser Pyramiden ABA_1B_1 gleich a^2 und OC und OC_1 die Höhen sind,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$V_1 = \frac{a^2 \cdot OC}{3} \qquad (16.)$$

$$V_2 = \frac{a^2 \cdot OC_1}{3}$$

und $V = V_1 + V_2 = \frac{a^2}{3}(OC + OC_1)$

$$= \frac{a^2}{3} \cdot CC_1$$

$$CC_1 = a\sqrt{2}$$

$$V = \frac{a^3}{3}\sqrt{2}.$$

Die Pyramide ABCO hat, da OA = OB = OC ist, gleiche Seitenkanten, (Figur 6), fällt man also von ihrer Spitze O auf die Grundfläche ABC das Lot OS_1, so ist der Fußpunkt S_1 desselben der Mittelpunkt des dem Δ ABC umschriebenen Kreises (17.), und da Δ ABC gleichseitig ist, ist S_1 auch sein Schwerpunkt und Höhendurchschnittspunkt. Die Verlängerung von CS_1 trifft also die Kante AB in ihrer Mitte E, und es ist $CE \perp AB$. Als Höhe des gleichseitigen Dreiecks ABC ist $CE = \frac{a}{2}\sqrt{3}$, also $S_1E = \frac{1}{3}CE = \frac{a}{6}\sqrt{3}$.

Zieht man OE, so ist $OE = \frac{a}{2}$ und aus dem rechtwinkligen Dreieck OS_1E folgt:

$$OS_1^2 = OE^2 - S_1E^2$$

$$= \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{6}\sqrt{3}\right)^2$$

$$= \frac{a^2}{4} - \frac{3a^2}{36} = 6 \cdot \frac{a^2}{36}$$

$$OS_1 = \frac{a}{6}\sqrt{6}.$$

Da dasselbe für die übrigen von O auf die Begrenzungsflächen des Oktaeders gefällten Lote gilt, so folgt, daß O auch Mittelpunkt der dem Oktaeder einbeschriebenen Kugel ist. Diese

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Kugel berührt die Oktaederflächen in den Schwerpunkten (Mittelpunkten der den Flächen um- oder einbeschriebenen Kreise); der Radius dieser Kugel ist $= \frac{a}{6}\sqrt{6}$.

Punkt O heißt Mittelpunkt des regelmäßigen Oktaeders. Verbindet man C_1 mit E, so sind CE und C_1E senkrecht AB, also ist $\sphericalangle CEC_1$ der Neigungswinkel der Oktaederflächen ABC und ABC_1 (10.). Es ist $CE = C_1E$ und $EO \perp CC_1$ (5.), also $\sphericalangle CEO = \sphericalangle C_1EO$ und: $\sin \frac{CEC_1}{2} = \frac{CO}{CE}$

$$= \frac{\frac{a}{2}\sqrt{2}}{\frac{a}{2}\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Würfel im regelmäßigen Oktaeder. (Fig. 6.)

Sind S_1, S_2, S_3, S_4 die Schwerpunkte der vier in der Oktaederecke C zusammenstoßenden Begrenzungsdreiecke, so folgt, da:

$$OS_1 = OS_2 = OS_3 = OS_4 = \frac{a}{6}\sqrt{6}$$

$$CS_1 = CS_2 = CS_3 = CS_4 = \frac{2}{3}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{3}\sqrt{3}$$

ist, daß diese vier Punkte in einer Ebene liegen (4.). M sei der Schnittpunkt dieser Ebene mit CO. Zieht man EE_1 und FF_1 die Verbindungslinien der Mitten der Gegenseiten des Quadrats ABA_1B_1, so schneiden sich diese Geraden in Punkt O, CO ist also die Schnittlinie der Ebenen CEE_1 und CFF_1 (1.). Diese beiden Ebenen schneiden die vier in C zusammentreffenden Oktaederflächen in den Mittellinien CE, CE_1, CF und CF_1, welche durch die Punkte S_1, S_2, S_3, S_4, im Verhältnis von 2 : 1 geteilt werden. Durch M, den Schnittpunkt der drei Ebenen CEE_1, CFF_1 und $S_1S_2S_3S_4$, gehen auch die drei Schnittgeraden dieser Ebenen CO, S_1S_3 und S_2S_4 hindurch.

Es verhält sich:

$$\frac{CS_1 : CE = CS_3 : CE_1}{S_1S_3 \parallel EE_1}$$

$S_1M : S_3M = EO : E_1O = 1 : 1$, d. h. M ist die

Mitte von S_1S_3 und dasselbe gilt für S_2S_4. Da nun

$$S_1S_3 \parallel EE_1,\ S_2S_4 \parallel FF_1$$

und $EE_1 \perp FF_1$ ist,

so folgt, daß auch $S_1S_3 \perp S_2S_4$ ist (9.).

Ferner folgt aus den Proportionen:

$$S_1S_3 : EE_1 = CM : CO = S_2S_4 : FF_1 = CS_1 : CE = 2 : 3,$$

daß $S_1S_3 = S_2S_4 = \frac{2}{3} EE_1 = \frac{2}{3} a$ ist.

Die Diagonalen des Vierecks $S_1S_2S_3S_4$ halbieren sich also, sind gleich und auf einander senkrecht, das heißt $S_1S_2S_3S_4$ ist ein Quadrat.

In dem rechtwinkeligen Dreieck S_1MS_2 ist $S_1M = S_2M = \frac{1}{3} a$, also

$$S_1S_2 = \sqrt{\frac{a^2}{9} + \frac{a^2}{9}} = \frac{a}{3}\sqrt{2}$$

Die Axen des Oktaeders waren $= a\sqrt{2}$, wir finden also die Beziehung:

Die Schwerpunkte von je vier in derselben Ecke des regulären Oktaeders zusammenstoßenden Begrenzungsdreiecken bilden Quadrate, deren Seiten gleich dem dritten Teil der Axen des Oktaeders sind.

Man erhält sechs solche Quadrate, dieselben begrenzen einen Würfel.

Es ist $CO \perp EE_1$ und FF_1, $EE_1 \parallel S_1S_3$, $FF_1 \parallel S_2S_4$, also auch $CO \perp S_1S_2S_3S_4$, (9. 5.), ferner $CM = \frac{2}{3} CO = \frac{1}{3} CC_1$, d. h.

Die Begrenzungsquadrate des Würfels, dessen Ecken die 8 Schwerpunkte der Begrenzungsdreiecke des regelmäßigen Oktaeders sind, teilen die Axen des Oktaeders in 3 gleiche Teile und stehen auf denselben senkrecht.

Es war gezeigt, daß die Schwerpunkte der Begrenzungsdreiecke des Oktaeders die Berührungspunkte der demselben einbeschriebenen Kugel sind, also ist diese Kugel dem Würfel umschrieben, woraus folgt, daß die Mittelpunkte von Oktaeder

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und Würfel zusammenfallen. Die Geraden S_1S_7, S_2S_8, S_3S_5, S_4S_6 schneiden sich als räumliche Diagonalen des Würfels also in Punkt O und sind einander gleich $= S_1S_2 \cdot \sqrt{3} = \frac{a}{3}\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ $= \frac{a}{3}\sqrt{6}$

Die Oberfläche des Würfels ist

$$= 6\left(\frac{a}{3}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{4}{3}\,a^2$$

das Volumen

$$= \left(\frac{a}{3}\sqrt{2}\right)^3 = \frac{2a^3}{27} \cdot \sqrt{2}.$$

Das rechtwinklige Parallelepipedon im regelmäßigen Oktaeder. (Fig. 7.)

Sind α, β, α_1, β_1 die Mitten der vier von C ausgehenden Oktaederkanten CA, CB, CA_1 und CB_1, so zeigt man, wie vorher bei den Schwerpunkten der vier von C ausgehenden Begrenzungsdreiecken, daß diese vier Punkte in einer Ebene liegen, und daß die Geraden $\alpha\alpha_1$ und $\beta\beta_1$ die Axe CC_1 in demselben Punkt μ schneiden.

Es ist $\alpha\beta \parallel AB$, $\alpha\beta_1 \parallel AB_1$
$AB \perp AB_1$

$\alpha\beta \perp \alpha\beta_1$ (9).

und da $\alpha\beta = \beta\alpha_1 = \alpha_1\beta_1 = \beta_1\alpha = \frac{a}{2}$ ist, ergiebt sich, daß $\alpha\beta\alpha_1\beta_1$ ein Quadrat ist.

Ferner ist $\alpha\alpha_1 \parallel AA_1$ und $CC_1 \perp AA_1$

$CC_1 \perp \alpha\alpha_1$

ebenso ist $CC_1 \perp \beta\beta_1$

CC_1 senkrecht auf dem Quadrat $\alpha\beta\alpha_1\beta_1$ (5).

Ebenso ist $\gamma\delta\gamma_1\delta_1$ ein Quadrat und senkrecht CC_1, wenn γ, δ, γ_1, δ_1 die Mitten der von der Gegenecke C_1 des Oktaeders ausgehenden Kanten sind.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es ist $\alpha\beta \parallel AB \parallel \gamma\delta$

$$\alpha\beta = \frac{AB}{2} = \gamma\delta$$

$\alpha\beta\gamma\delta$ ein Parallelogramm

$$\alpha\gamma \parallel CC_1 = \frac{1}{2} CC_1 = \frac{1}{2} a \sqrt{2}$$

$CC_1 \perp$ Quadrat $\alpha\beta\alpha_1\beta_1$ und $\gamma\delta\gamma_1\delta_1$, also auch $\alpha\gamma \perp$ Quadrat $\alpha\beta\alpha_1\beta_1$ und $\gamma\delta\gamma_1\delta_1$ (6.),

also $\alpha\gamma \perp \alpha\beta$ und $\gamma\delta$, das heißt $\alpha\beta\gamma\delta$ ist ein Rechteck. Dasselbe gilt für die Vierecke $\beta\alpha_1\delta\gamma_1$, $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$ und $\beta_1\alpha\delta_1\gamma$.

Die acht Mitten der von zwei Gegenecken des regelmäßigen Oktaeders ausgehenden Kanten sind also die Ecken eines von vier Rechtecken und zwei Quadraten begrenzten rechtwinkligen Parallelepipedon. Die beiden Quadrate stehen senkrecht zu der Axe des Oktaeders, welche die beiden Gegenecken verbindet. Die Schnittpunkte der Quadrate und der Mittelpunkt des Oktaeders teilen die Oktaederaxe in vier gleiche Teile.

$$C\mu = \mu O = O\mu_1 = \mu_1 C_1 = \frac{a}{4} \sqrt{2}$$

Es lassen sich dem regelmäßigen Oktaeder drei solche rechtwinklige Parallelepipedon einbeschreiben.

Die Länge dreier in einem Eckpunkt z. B. α zusammenstoßender Kanten des Parallelepipedon ist:

$$\alpha\beta = \alpha\beta_1 = \frac{a}{2}, \ \alpha\gamma = \frac{1}{2} CC_1 = \frac{1}{2} a \sqrt{2},$$

also die Oberfläche:

$$= 2 \left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2 . \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \sqrt{2} \right) = \frac{a^2}{2} (1 + 2\sqrt{2}),$$

sein Volumen $= \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \sqrt{2} = \frac{a^3}{8} \sqrt{2}.$

Die räumlichen Diagonalen des Parallelepipedon sind $\alpha\gamma_1$, $\alpha_1\gamma$, $\beta\delta_1$, und $\beta_1\delta$, sie sind zugleich die Verbindungslinien der Mitten der Gegenseiten der Diagonalschnitte des Oktaeders, sie sind also gleich den Oktaederkanten und schneiden sich im Mittelpunkt O des Oktaeders.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Durch Rechnung findet man die Länge dieser räumlichen Diagonalen

$$= \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2} = a.$$

Das regelmäßige Tetraeder.

(Fig. 8).

Ein von vier gleichseitigen Dreiecken begrenzter Körper heißt regelmäßiges Tetraeder.

Die Kanten sind einander gleich, ihre Anzahl ist $k = 6$. Zwei nicht in derselben Begrenzungsfläche des Tetraeders liegende Kanten heißen Gegenkanten. In jeder Ecke stoßen drei Kanten zusammen, die Anzahl der Ecken ist $e = 4$. Da die Anzahl der Begrenzungsflächen $f = 4$ ist, erhalten wir wieder die Beziehung:

$$e + f = k + 2.$$

Da $DA = DB = DC$ ist, kann man das regelmäßige Tetraeder als eine Pyramide mit gleichen Seitenkanten ansehen, D ist seine Spitze, ABC seine Grundfläche. Das von der Spitze D auf die Grundfläche ABC gefällte Lot (Höhe des Tetraeders) trifft also ΔABC im Mittelpunkt S_4 des umschriebenen Kreises (17.) S_4 ist, da ΔABC gleichseitig, auch Schwerpunkt und Höhendurchschnittspunkt. Die durch DA und DS_4 gelegte Ebene (2.) schneidet also die Dreiecke ABC und DBC in ihren Mittellinien oder Höhen AE und DE.

Ist die Kantenlänge des regelmäßigen Tetraeders $= a$, so ist:

$$AE = \frac{a}{2}\sqrt{3},\ AS_4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{3}\sqrt{3},$$

$$ES_4 = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{6}\sqrt{3}$$

und aus dem rechtwinkligen Dreiecke ADS_4 folgt:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$DS_4^2 = AD^2 - AS_4^2$$
$$= a^2 - \left(\frac{a}{3}\sqrt{3}\right)^2$$
$$= 6 \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^2$$

$$DS_4 = \frac{a}{3}\sqrt{6}$$

Denselben Wert erhält man für die übrigen Tetraederhöhen.

Die Oberfläche des regelmäßigen Tetraeders ist:

$$= 4 \,\Delta\, ABC = 4 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = a^2\sqrt{3},$$

sein Volumen ist $= \frac{1}{3} \,\Delta\, ABC \cdot DS_4$ (16.)

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} \cdot \frac{a}{3}\sqrt{6}$$
$$= \frac{a^3}{12}\sqrt{2}$$

Die vom Eckpunkt A auf das gleichseitige Dreieck BCD gefällte Senkrechte trifft dasselbe in seinem Schwerpunkt S_1 (17.). S_1 liegt in der Mittellinie DE, also muß AS_1 in der Ebene ADE liegen (1.), mithin DS_4 schneiden. S sei der Schnittpunkt von AS_1 und DS_4. Zieht man S_1S_4, so verhält sich:

$$AS_4 : ES_4 = DS_1 : ES_1 = 2 : 1$$
$$AD \parallel S_1 S_4$$
$$AS : S_1S = DS : S_4S = AD : S_1S_4 = DE : S_1E = 3 : 1.$$

Die Tetraederhöhe AS_1 trifft also die Höhe DS_4 in Punkt S so, daß beide in diesem Punkt im Verhältnis 3 : 1 geteilt werden. Da dasselbe auch für die von den Eckpunkten B und C ausgehenden Tetraederhöhen gilt, findet man:

Die vier Höhen des regelmäßigen Tetraeders sind einander gleich, schneiden sich in einem Punkt und werden in diesem Punkt im Verhältnis 3 : 1 geteilt.

Es ist: $AS_1 = BS_2 = CS_3 = DS_4 = \frac{a}{3}\sqrt{6}$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\text{also } AS = BS = CS = DS = \frac{3}{4} \cdot \frac{a}{3} \sqrt{6} = \frac{a}{4} \sqrt{6}$$

$$\text{und } S_1S = S_2S = S_3S = S_4S = \frac{1}{4} \cdot \frac{a}{3} \sqrt{6} = \frac{a}{12} \sqrt{6}$$

S_1S, S_2S, S_3S und S_4S stehen auf den Tetraederflächen senkrecht, also ist S der Mittelpunkt der dem Tetraeder umschriebenen und einbeschriebenen Kugel, die Radien dieser Kugeln sind $= \frac{a}{4} \sqrt{6}$ bezw. $= \frac{a}{12} \sqrt{6}$.

AS_4 ist die Projektion der Kante AD auf die Ebene ABC (13.), also $\sphericalangle DAS_4 = \varphi$ der Neigungswinkel von AD gegen die Ebene ABC (14.). Man findet also den Neigungswinkel einer Tetraederkante gegen die Begrenzungsfläche aus einer der Gleichungen:

$$\sin\varphi = \frac{DS_4}{DA} = \frac{\frac{a}{3}\sqrt{6}}{a} = \frac{1}{3}\sqrt{6} = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

$$\cos\varphi = \frac{AS_4}{AD} = \frac{\frac{a}{3}\sqrt{3}}{a} = \frac{1}{3}\sqrt{3},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{2}.$$

Da ED und EA $\perp$ BC sind, ist $\sphericalangle AED = \sphericalangle \psi$ der Neigungswinkel der Ebenen ABC und DBC (10.). Mithin erhält man für die Berechnung des Neigungswinkels zweier Begrenzungsflächen des regelmäßigen Tetraeders die Gleichungen:

$$\sin\psi = \frac{DS_4}{DE} = \frac{\frac{a}{3}\sqrt{6}}{\frac{a}{2}\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

$$\cos\psi = \frac{ES_4}{DE} = \frac{\frac{1}{3}DE}{DE} = \frac{1}{3}$$

$$\operatorname{tg}\psi = 2\sqrt{2}.$$

Die Verlängerung von ES treffe die Kante AD in Punkt E_1. Es ist:

$$\frac{ES_1 = ES_4,\ SS_1 = SS_4}{ES \perp S_1S_4}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\frac{AD \parallel S_1S_4}{ESE_1 \perp AD}$$

$$\frac{AS = DS}{AE_1 = DE_1}$$

$$\frac{BS = CS \text{ und } BE = CE}{ESE_1 \perp BC.}$$

Die Verbindungslinien der Mitten zweier Gegenkanten des regelmäßigen Tetraeders stehen also auf den Gegenkanten senkrecht, sind also die kürzeste Entfernung der beiden Gegenkanten (15.). Sie gehen durch den Durchschnittspunkt der Höhen des Tetraeders.

Es ist: $EE_1^2 = EA^2 - AE_1^2$

$$= \left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 2\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$EE_1 = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

$$ES^2 = ES_4^2 + S_4S^2 = \left(\frac{a}{6}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{12}\sqrt{6}\right)^2$$

$$= \frac{a^2}{12} + \frac{a^2}{24} = 2\,\frac{a^2}{16}$$

$$ES = \frac{a}{4}\sqrt{2}$$

und $E_1S = EE_1 - ES = \frac{a}{2}\sqrt{2} - \frac{a}{4}\sqrt{2} = \frac{a}{4}\sqrt{2} = ES$

Es seien F, F_1 und G, G_1 die Mitten der anderen Kanten des Tetraeders.

Da sich EE_1 und FF_1 im Punkt S schneiden, liegen diese vier Punkte in einer Ebene (2.), nun ist $EF = FE_1 = E_1F_1 = F_1E = \frac{a}{2}$, also ist

$$EE_1 \perp FF_1$$

Das Entsprechende gilt für GG_1, also folgt der Satz:

Die Verbindungslinien der Mitten der Gegenkanten eines regelmäßigen Tetraeders halbieren sich in Punkt S, stehen auf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

einander senkrecht und sind einander gleich. Sie bilden also die Axen eines regelmäßigen Oktaeders, dessen Ecken die Mitten der Tetraederkanten sind. Die Kanten des Oktaeders sind halb so groß als die des Tetraeders.

EFE_1F_1 ist ein Quadrat von Inhalt $\left(\frac{a}{2}\right)^2$

$GG_1 \perp EFE_1F_1$ und $= \frac{a}{2}\sqrt{2}$, also der Inhalt des Oktaeders $= \frac{1}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{a}{2}\sqrt{2} = \frac{a^3}{24}\sqrt{2}$.

Eine Seitenfläche des Oktaeders ist

$$= \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{4}\sqrt{3} = \frac{a^2}{16}\sqrt{3},$$

also die Oberfläche $= \frac{a^2}{2}\sqrt{3}$.

Das regelmäßige Tetraeder im Würfel. (Fig. 9.)

Zieht man im Würfel die Verbindungslinien der Endpunkte zweier sich kreuzenden Diagonalen zweier paralleler Seitenflächen, so sind diese Verbindungslinien ebenfalls sich kreuzende Diagonalen paralleler Seitenflächen des Würfels. Diese 6 Diagonalen sind einander gleich ($= a\sqrt{2}$) und bilden die Kanten eines regelmäßigen Tetraeders (z. B. BDA_1C_1). Die Verbindungslinien der Mitten der Gegenkanten des regulären Tetraeders schneiden sich im Durchschnittspunkt der Höhen des Tetraeders. Diese Verbindungslinien sind aber hier die Geraden, welche die Mitten je zweier paralleler Begrenzungsquadrate des Würfels verbinden, da sich diese im Mittelpunkt M des Würfels schneiden, ist also M zugleich der Durchschnittspunkt der Höhen des Tetraeders. Zieht man also A_1M und verlängert A_1M bis zum Schnittpunkt K mit der Tetraederfläche BDC_1, so ist A_1K senkrecht auf der Ebene BDC_1 und K der Schwerpunkt des gleichseitigen Dreiecks BDC_1, also muß die

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Mittellinie C_1E dieses Dreiecks durch K gehen und sich $C_1K : EK = 2 : 1$ verhalten. Bezeichnet man die Kantenlänge des Tetraeders mit b, so ist im gleichseitigen Dreieck BDC_1 die Höhe $C_1E = \frac{b}{2}\sqrt{3}$

$$b = a\sqrt{2}$$

$$C_1E = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$C_1K = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{6} = \frac{a}{3}\sqrt{6}.$$

Ferner folgt aus dem rechtwinkligen Dreieck A_1KC:

$$A_1K^2 = A_1C_1^2 - C_1K^2$$

$$= (a\sqrt{2})^2 - \left(\frac{a}{3}\sqrt{6}\right)^2$$

$$= 2a^2 - \frac{2}{3}a^2 = 3\left(\frac{2}{3}a\right)^2$$

also die Tetraederhöhe $A_1K = \frac{2}{3}a\sqrt{3}$.

Der Inhalt einer Seitenfläche des Tetraeders ist

$$= \frac{b^2}{4}\sqrt{3} = \frac{(a\sqrt{2})^2}{4}\sqrt{3} = \frac{a^2}{2}\sqrt{3},$$

also die Oberfläche des Tetraeders $= 4 \cdot \frac{a^2}{2}\sqrt{3} = 2a^2\sqrt{3}$

Das Volumen des Tetraeders ist $= \frac{1}{3} \cdot \Delta BDC_1 \cdot A_1K$ (16.)

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{2a}{3}\sqrt{3}$$

$$= \frac{a^3}{3}$$

Das Volumen der Pyramide $BDCC_1$ ist, da $CC_1 \perp \Delta BDC$ ist

$$= \frac{1}{3}\Delta BDC \cdot CC_1 \quad (16.)$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\Delta\ BDC = \frac{1}{2}\ \text{Quadrat}\ ABCD = \frac{a^2}{2},\ CC_1 = a$$

also $= \frac{a^3}{6}$.

Dasselbe gilt für die Pyramiden $BDAA_1$, $A_1C_1B_1B$ und $A_1C_1D_1D$.

Zieht man diese vier Pyramiden von dem Würfel ab, so erhält man das regelmäßige Tetraeder als Restkörper und mithin sein Volumen auch durch $a^3 - 4 \cdot \frac{a^3}{6} = \frac{a^3}{3}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$CD = \frac{a^2}{2}$, $CC_1 = a$

al

DAA_1, $A_1C_1B_1B$ und

A

von dem Würfel ab,

so

er als Restkörper und

mi

$4 \cdot \frac{a^3}{6} = \frac{a^3}{3}$.

© The Tiffen Company, 2007
TIFFEN Gray Scale
R G B W G K C Y M
A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fig. 1.

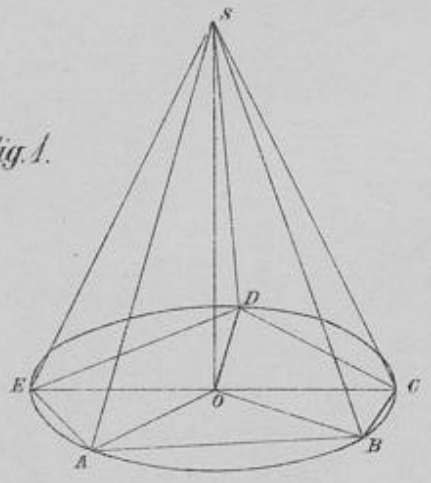


Fig. 2.

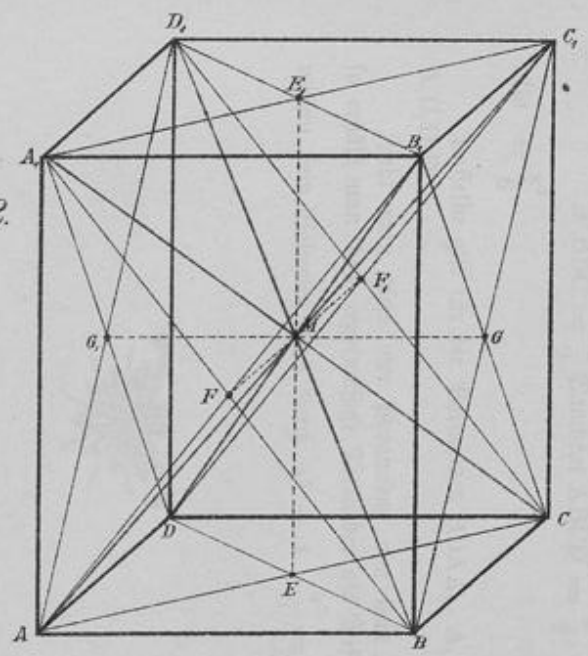


Fig. 3.

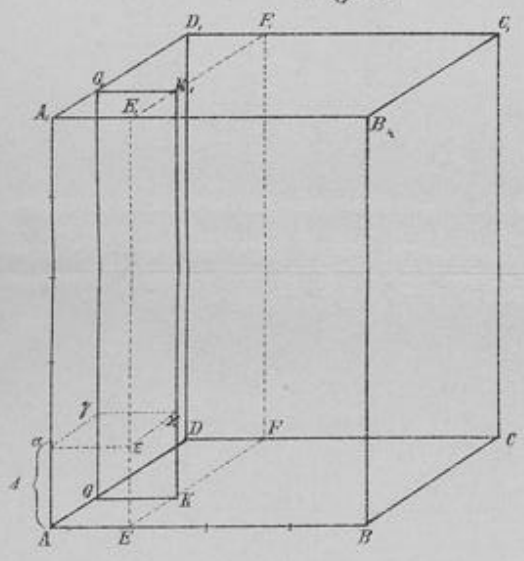


Fig. 4.

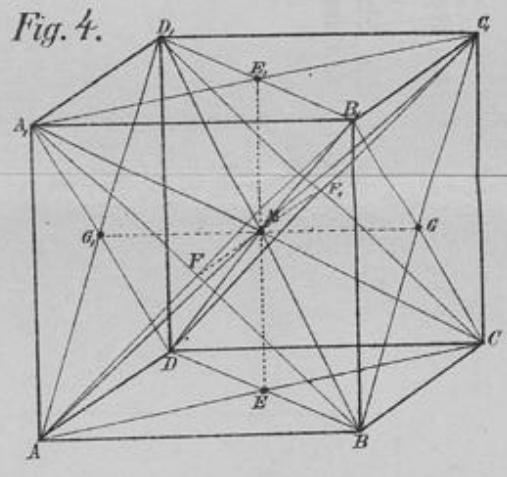
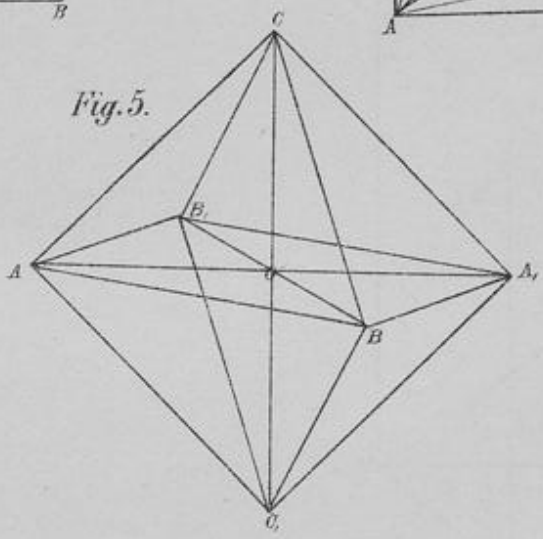


Fig. 5.



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fig. 1.

Fig. 2.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fig. 6.

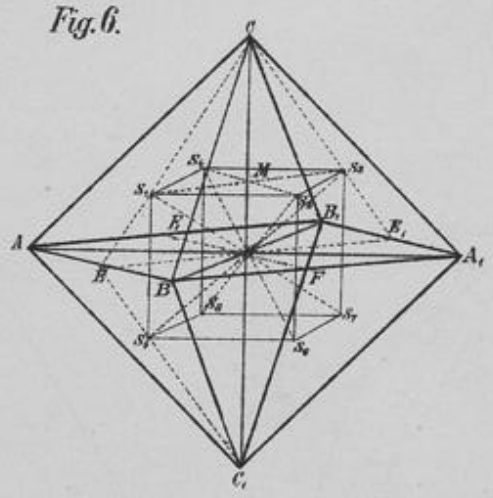


Fig. 7.

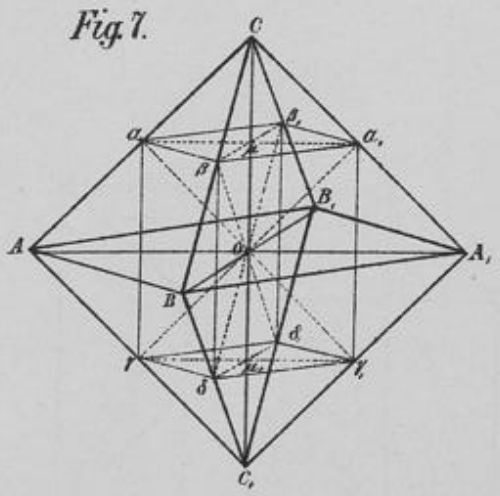


Fig. 8.

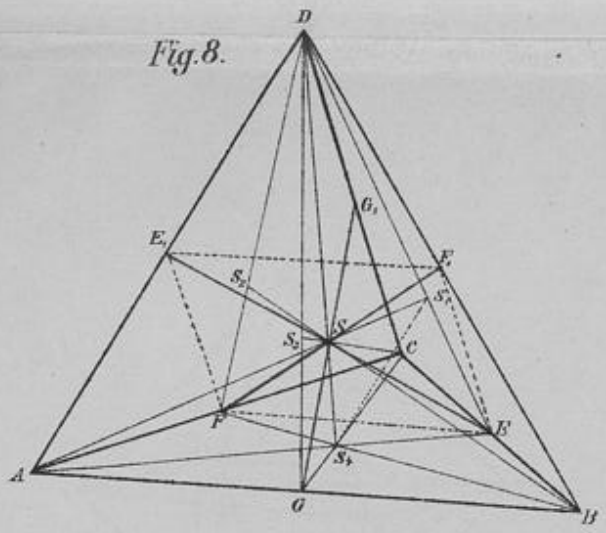
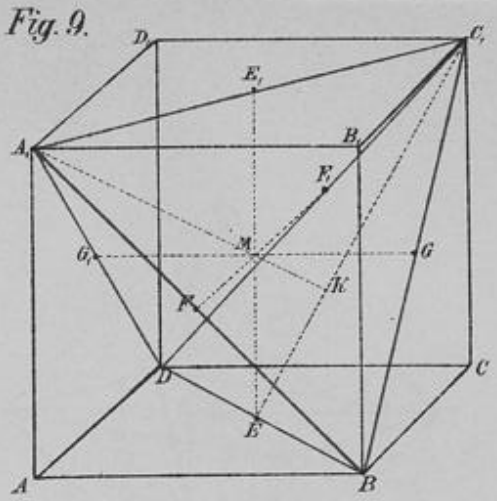
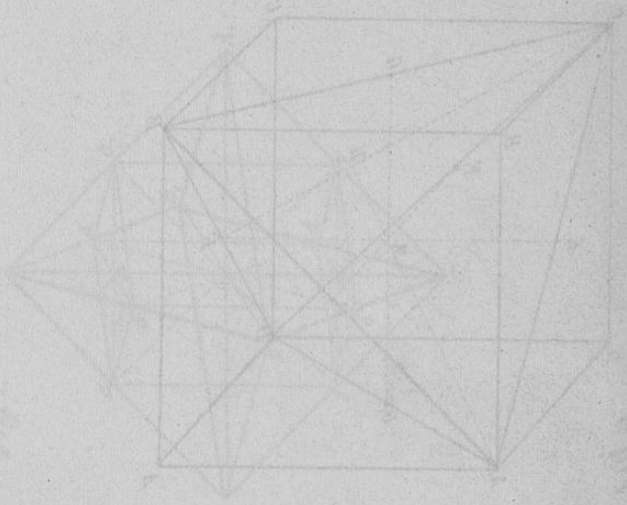
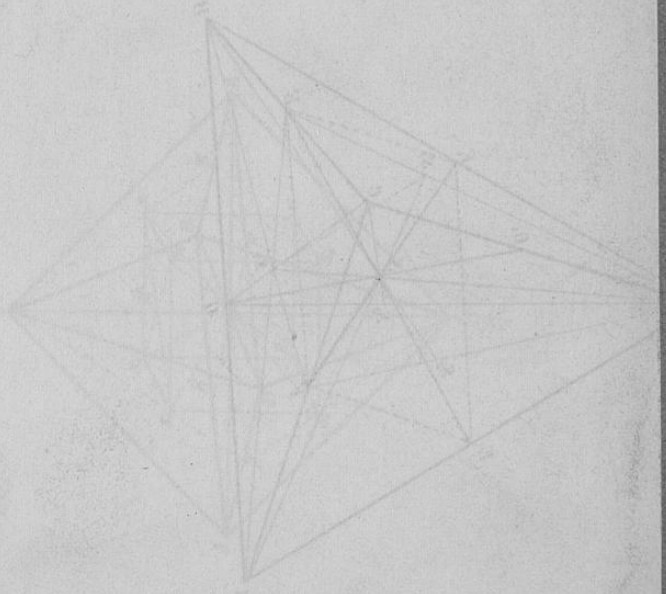


Fig. 9.







Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf