Distanzrelationen und Verwandtes.

Von

H. Priester.

Beilage zum Programm des Realprogymnasiums zu Langenberg (Rhld).

Ostern 1903.

Bibliothek des Städt. Gymnasiums Düsseldorf

Leipzig
Buchhandlung Gustav Fock, G. m. b. H.

9ea 11 (1903)
556.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

UNIVERSITÄTS- UND LANDESBIBLIOTHEK DÜSSELDORF

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 1.

Die Relation zwischen den Distanzen von vier Punkten derselben Ebene.

Die sechs Abstände zwischen vier Punkten derselben Ebene sind bekanntlich nicht von einander unabhängig wie die Seiten eines Dreiecks, sondern es existiert eine Gleichung, mit deren Hilfe man den sechsten aus den fünf anderen berechnen kann, und in welcher alle sechs in gleicher Weise vorkommen. Diese Gleichung wird gewöhnlich mit Hilfe von Koordinaten entwickelt. Als Relation zwischen den Koordinaten von vier Punkten eines Kreises findet man (Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie der Kegelschnitte, 3. Auflage, Leipzig [Teubner] 1873, ein Werk, das künftig einfach als „Salmon-Fiedler" zitiert werden soll, — Artikel 126):

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x'^2 + y'^2 & x' & y' & 1 \\ x''^2 + y''^2 & x'' & y'' & 1 \\ x'''^2 + y'''^2 & x''' & y''' & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Bildet man hiernach nun die beiden Systeme (Salmon-Fiedler, Artikel 152):

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x'^2 + y'^2 & x' & y' & 1 \\ x''^2 + y''^2 & x'' & y'' & 1 \\ x'''^2 + y'''^2 & x''' & y''' & 1 \end{matrix}$$

und:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2x & -2y & x^2 + y^2 \\ 1 & -2x' & -2y' & x'^2 + y'^2 \\ 1 & -2x'' & -2y'' & x''^2 + y''^2 \\ 1 & -2x''' & -2y''' & x'''^2 + y'''^2 \end{matrix}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und hieraus das komponierte System (Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten, 4. Aufl., Leipzig [Hirzel] 1875, — künftig kurz als „Baltzer“ zitiert — § 6):

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \overline{12}^2 & \overline{13}^2 & \overline{14}^2 \\ 1 & \overline{12}^2 & 0 & \overline{23}^2 & \overline{24}^2 \\ 1 & \overline{13}^2 & \overline{23}^2 & 0 & \overline{34}^2 \\ 1 & \overline{14}^2 & \overline{24}^2 & \overline{34}^2 & 0 \end{matrix}$$

wo z. B. $\overline{23}$ die Distanz des zweiten und dritten Punktes bezeichnen soll, so ist die Determinante dieses Systemes $= 0$, weil die Systeme, aus denen es komponiert worden, mehr Zeilen als Kolonnen enthalten (Baltzer § 6), und diese Gleichung ist die gesuchte. Wir schreiben dieselbe in der Form (Fig. 1):

$$\text{(I)} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & a^2 & 0 & C^2 & B^2 \\ 1 & b^2 & C^2 & 0 & A^2 \\ 1 & c^2 & B^2 & A^2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Diese Gleichung läßt sich jedoch auch ganz elementar, ohne Hilfe von Koordinaten und Determinanten finden. Vorher jedoch und als Hilfsmittel wollen wir die Relation zwischen den Winkeldistanzen dreier Strahlen derselben Ebene (α, β, γ in Fig. 1) aufstellen und zahlreiche andere ähnlich gebaute Ausdrücke ableiten.

§ 2.

Die Relation zwischen den Winkeldistanzen von drei Strahlen derselben Ebene.

Zwischen den drei Winkeln in Fig. 1 findet mindestens eine der Relationen:

$$\cos\alpha = \cos(\beta + \gamma)$$
$$\cos\beta = \cos(\gamma + \alpha)$$
$$\cos\gamma = \cos(\alpha + \beta) \qquad \text{statt.}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es ist aber zweckmäßig, eine Relation zu haben, die alle drei Winkel in gleicher Weise enthält. Aus der ersten der obigen Gleichungen z. B. folgt:

$$\cos\alpha - \cos(\beta+\gamma) \equiv \cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma = 0$$

wobei „$\equiv$“ bedeutet: „identisch gleich“.

Nach der goniometrischen Gleichung:

$$2\sin\frac{1}{2}(x+y)\sin\frac{1}{2}(x-y) \equiv \cos y - \cos x$$

entsteht:

$$2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\sin\frac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma) \equiv \sin\beta\sin\gamma - \cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha = 0.$$

Hierin $-\beta$ statt β und die ganze Identität mit -1 multipliziert:

$$2\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma) \equiv \sin\beta\sin\gamma + \cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha.$$

Dies mit der vorigen Gleichung multipliziert:

$$4\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\sin\frac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma) \equiv$$

$$\equiv \sin^2\beta\sin^2\gamma - \cos^2\beta\cos^2\gamma - \cos^2\alpha + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 0.$$

Ersetzt man schließlich noch $\sin^2$ durch $1-\cos^2$ oder auch $\cos^2$ durch $1-\sin^2$, so findet man die beiden Formen:

(II)

$$4\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\sin\frac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma) \equiv$$

$$\equiv 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma$$

$$\equiv 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - 2 + \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 0.$$

Die Produktform des links stehenden Ausdrucks läßt erkennen, daß derselbe null ist, sobald eins der zusammengesetzten Argumente null oder ein positives oder negatives Vielfaches von π ist, insbesondere, sobald

$$\alpha+\beta+\gamma = 2\pi$$

oder $\alpha = \beta+\gamma$

oder $\beta = \gamma+\alpha$

oder $\gamma = \alpha+\beta.$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zugleich erkennt man, daß es für die Formel gleichgiltig ist, ob man als Winkel irgend zweier Strahlen den hohlen oder den erhabenen betrachtet.

§ 3.

Analogien aus der sphärischen Trigonometrie.

In der sphärischen Trigonometrie werden bekanntlich aus den Gleichungen:

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

und:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\alpha)}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)}$$

die beiden Formeln entwickelt:

(III)

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin b \sin c - \cos b \cos c + \cos a}{2 \sin b \sin c}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(-a+b+c)}{\sin b \sin c}}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin b \sin c + \cos b \cos c - \cos a}{2 \sin b \sin c}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b+c)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin b \sin c}}$$

Beide Gleichungen multipliziert und das Produkt doppelt genommen:

(IV)

$$\sin b \sin c \cdot \sin\alpha = \sqrt{2\cos a \cos b \cos c + 1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c}$$

$$= \sqrt{2\cos a \cos b \cos c - 2 + \sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c}$$

$$= 2\sqrt{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(-a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a-b+c)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Der Grund dieser Ähnlichkeit soll sogleich gezeigt werden. — Übrigens ist, wie die Symmetrie der rechten Seite beweist, obiger Ausdruck auch

$$= \sin c \sin a \cdot \sin\beta = \sin a \sin b \cdot \sin\gamma$$

und (Fig. 2, als sphärisches Dreieck betrachtet):

$$= \sin a \sin h_a = \sin b \sin h_b = \sin c \sin h_c$$

Er wird nach Staudt (Baltzer § 15) der „Sinus der Ecke" genannt und mit $\sin ABC$ bezeichnet. Er stellt das Volumen des Parallelepipeds dar, welches durch die vom Kugelzentrum nach den Dreiecksecken gezogenen Radien bestimmt wird, wenn diese die Länge 1 haben, — und zugleich das Sechsfache des durch diese Radien bestimmten Tetraeders. Nimmt man die Kanten nicht $= 1$, sondern von den Längen A, B, C, so ist das Volumen des Parallelepipeds $= A \cdot B \cdot C \cdot \sin ABC$, das des Tetraeders $= \frac{1}{6} A \cdot B \cdot C \cdot \sin ABC$. (Übrigens ist der Radikand in Gleichung IV stets positiv.) Daß IV zugleich $\sin\alpha$ durch a, b, c ausdrückt, ist von selbst klar.

§ 4.

Ableitung des Sinus der Ecke aus der Dreistrahlen-Relation.

In Fig. 2 (sphär. Dreieck) sind c, p, q die Winkel dreier Strahlen derselben Ebene und erfüllen also die Gleichung II:

$$2 \cos p \cos q \cos c + 1 - \cos^2 p - \cos^2 q - \cos^2 c = 0.$$

Nun ist nach der sphärischen Trigonometrie:

$$\cos p = \frac{\cos a}{\cos h_c} \qquad \cos q = \frac{\cos b}{\cos h_c}$$

Substituiert man dies und schafft die Nenner fort, so erhält man

$$2 \cos a \cos b \cos c + 1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c = \sin^2 c \cdot \sin^2 h_c =$$
$$= \sin^2 b \sin^2 c \cdot \sin^2\alpha = \sin^2 ABC$$

(also die Gleichung IV). Liegen die drei Kanten in einer Ebene, so ist h_c, also auch $\sin ABC = 0$ (kleinster Wert des

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Sinus der Ecke), und man hat die Dreistrahlen-Relation wieder; ist $a = b = c = \frac{\pi}{2}$, so ist $\sin ABC = 1$ (größter Wert desselben).

§ 5.

Determinantenform des Sinus der Ecke und der Dreistrahlen-Relation.

In der sphärischen Trigonometrie ist $\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$.

Liegen nun die drei Kanten der Ecke in einer Ebene, so ist entweder $\cos\alpha = 1$ oder $\cos\alpha = -1$. Beides wird zusammengefaßt in der Formel $1 - \cos^2\alpha = 0$ oder

$$\text{(V)} \quad \begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha \\ \cos\alpha & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist die Relation für zwei Strahlen, die in derselben Geraden liegen. — Setzt man hierin den Wert für $\cos\alpha$ ein, so erhält man:

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \\ \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Erste Zeile (d. h. die ganze Gleichung, wie auch künftig bei ähnlichen Operationen) mit $\sin^2 b \sin c$, zweite mit $\sin b \sin^2 c$ multipliziert:

$$\begin{vmatrix} \sin^2 b \sin c & \sin b (\cos a - \cos b \cos c) \\ \sin c (\cos a - \cos b \cos c) & \sin b \sin^2 c \end{vmatrix} = 0.$$

Erste Kolonne durch $\sin c$, zweite durch $\sin b$ dividiert:

$$\begin{vmatrix} 1 - \cos^2 b & \cos a - \cos b \cos c \\ \cos a - \cos b \cos c & 1 - \cos^2 c \end{vmatrix} = 0$$

oder:

$$\begin{vmatrix} 1 - \cos^2 b & \cos a - \cos b \cos c & 0 \\ \cos a - \cos b \cos c & 1 - \cos^2 c & 0 \\ \cos b & \cos c & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Letzte Zeile, mit $\cos b$ multipliziert, zur ersten addiert, dagegen mit $\cos c$ multipliziert, zur zweiten:

$$\text{(VI)} \quad \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos b \\ \cos a & 1 & \cos c \\ \cos b & \cos c & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist die Dreistrahlen-Relation.

Auch die Entwicklung des vorigen Paragraphen läßt sich in Determinantenform wiederholen. Sie ergibt:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos b \\ \cos a & 1 & \cos c \\ \cos b & \cos c & 1 \end{vmatrix} = \sin^2 ABC.$$

Durch Koordinaten läßt sich diese Form in folgender Weise finden: Bezeichnet man die Koordinaten von a in Fig. 1 (unter Koordinaten einer Strecke verstehen wir die Differenzen aus den Koordinaten ihres End- und denen ihres Anfangspunktes) mit x_1 und y_1, die von b mit x_2 und y_2 u.s.w. und komponiert das System

$$\begin{matrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{matrix}$$

mit sich selbst, so entsteht:

$$\begin{matrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 x_2 + y_1 y_2 & x_1 x_3 + y_1 y_3 \\ x_1 x_2 + y_1 y_2 & x_2^2 + y_2^2 & x_2 x_3 + y_2 y_3 \\ x_1 x_3 + y_1 y_3 & x_2 x_3 + y_2 y_3 & x_3^2 + y_3^2 \end{matrix}$$

Die Determinante dieses Systems ist bekanntlich $= 0$ (Baltzer § 6). Man kann sie in der Form schreiben:

$$\text{(VII)} \quad \begin{vmatrix} a^2 & ab \cos\gamma & ca \cos\beta \\ ab \cos\gamma & b^2 & bc \cos\alpha \\ ca \cos\beta & bc \cos\alpha & c^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist nichts anderes als die mit $a^2 b^2 c^2$ multiplizierte Dreistrahlen-Relation. — (Baltzer § 16.)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 6.

Andere der Gleichung II ähnliche Identitäten.

Gleichung II war:

$$4\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)\equiv$$
$$\equiv 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma$$
$$\equiv 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-2+\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma$$

Substituiert man hierin:

(VIII)

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=\pi-\alpha'\\ \beta=\pi-\beta'\\ \gamma=\pi-\gamma'\end{array}\right|\begin{array}{l}\text{also: } \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{3}{2}\pi-\frac{1}{2}(\alpha'+\beta'+\gamma')\\ \text{und: } \frac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma)=\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}(-\alpha'+\beta'+\gamma')\end{array}\quad \text{u. s. w.}$$

so ergibt sich, wenn man die Strichelung der Buchstaben nun wieder fortläßt und mit —1 multipliziert:

(IX)

$$4\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\cos\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)$$
$$\equiv 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-1+\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma$$
$$\equiv 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+2-\sin^2\alpha-\sin^2\beta-\sin^2\gamma.$$

Wann dieser Ausdruck null ist, zeigt wieder die Produktform links, — nämlich, wenn eins der zusammengesetzten Argumente ein ungerades Vielfaches von $\frac{1}{2}\pi$ ist, insbesondere, wenn $\alpha+\beta+\gamma=\pi$. Diese Gleichung gibt also z. B. die Relation zwischen den drei Winkeln eines Dreiecks, wie denn obige Substitution in diesem Falle durch Fig. 3 veranschaulicht wird. — Durch Multiplikation von II und IX erhält man:

(X)

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin(-\alpha+\beta+\gamma)\sin(\alpha-\beta+\gamma)\sin(\alpha+\beta-\gamma)\equiv$$
$$\equiv 4\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma-2(\cos^2\beta\cos^2\gamma+\cos^2\gamma\cos^2\alpha+\cos^2\alpha\cos^2\beta)+$$
$$-\cos^4\alpha-\cos^4\beta-\cos^4\gamma+2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)-1\equiv$$
$$\equiv-4\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma+2(\sin^2\beta\sin^2\gamma+\sin^2\gamma\sin^2\alpha+\sin^2\alpha\sin^2\beta)+$$
$$-\sin^4\alpha-\sin^4\beta-\sin^4\gamma.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Produktform gestattet leicht, abzulesen, wann dieser Ausdruck null ist.

Substituiert man in dieser Gleichung:

$$\alpha = \frac{1}{2}\pi + \alpha' \qquad \alpha + \beta + \gamma = \frac{3}{2}\pi + (\alpha' + \beta' + \gamma')$$

$$\beta = \frac{1}{2}\pi + \beta' \qquad -\alpha + \beta + \gamma = \frac{1}{2}\pi + (-\alpha' + \beta' + \gamma')$$

$$\gamma = \frac{1}{2}\pi + \gamma' \qquad \text{u. s. w.}$$

so ergibt sich, nachdem mit —1 multipliziert und die Strichelung der Buchstaben wieder fortgelassen ist:

(XI)

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma)\cos(-\alpha+\beta+\gamma)\cos(\alpha-\beta+\gamma)\cos(\alpha+\beta-\gamma) \equiv$$
$$\equiv -4\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma + 2(\sin^2\beta\sin^2\gamma + \sin^2\gamma\sin^2\alpha + \sin^2\alpha\sin^2\beta) +$$
$$+ \sin^4\alpha + \sin^4\beta + \sin^4\gamma - 2(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma) + 1 \equiv$$
$$\equiv 4\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma - 2(\cos^2\beta\cos^2\gamma + \cos^2\gamma\cos^2\alpha + \cos^2\alpha\cos^2\beta) +$$
$$+ \cos^4\alpha + \cos^4\beta + \cos^4\gamma.$$

Die Determinantenform von IX ist augenscheinlich:

(XII)

$$4\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\cos\frac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma) \equiv$$

$$\equiv \begin{vmatrix} -1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & -1 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \equiv 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - 1 + \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \\ \equiv 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + 2 - \sin^2\alpha - \sin^2\beta - \sin^2\gamma \end{matrix}$$

Auch für X läßt sich eine Determinantenform finden. Durch Multiplikation der beiden Determinantenformen für II und IX entsteht:

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin(-\alpha+\beta+\gamma)\sin(\alpha-\beta+\gamma)\sin(\alpha+\beta-\gamma) \equiv$$

$$\equiv \begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & -1 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & -1 \end{vmatrix}$$

$$\equiv \begin{vmatrix} -1+\cos^2\alpha+\cos^2\beta & \cos\beta\cos\gamma & \cos\gamma\cos\alpha \\ \cos\beta\cos\gamma & -1+\cos^2\gamma+\cos^2\alpha & \cos\alpha\cos\beta \\ \cos\gamma\cos\alpha & \cos\alpha\cos\beta & -1+\cos^2\beta+\cos^2\gamma \end{vmatrix} \equiv$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wenn man die Zeilen der Reihe nach mit $\cos\gamma$, $\cos\beta$, $\cos\alpha$ multipliziert, die Kolonnen durch $\cos\gamma$, $\cos\beta$, $\cos\alpha$ dividiert:

$$\equiv \begin{vmatrix} -1+\cos^2\alpha+\cos^2\beta & \cos^2\gamma & \cos^2\gamma \\ \cos^2\beta & -1+\cos^2\gamma+\cos^2\alpha & \cos^2\beta \\ \cos^2\alpha & \cos^2\alpha & -1+\cos^2\beta+\cos^2\gamma \end{vmatrix}$$

Eine andere Form erhält man noch, wenn man die cos durch sin ersetzt, nämlich:

$$\begin{vmatrix} 1-\sin^2\alpha-\sin^2\beta & 1-\sin^2\gamma & 1-\sin^2\gamma & 0 \\ 1-\sin^2\beta & 1-\sin^2\gamma-\sin^2\alpha & 1-\sin^2\beta & 0 \\ 1-\sin^2\alpha & 1-\sin^2\alpha & 1-\sin^2\beta-\sin^2\gamma & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \equiv$$

wenn man die letzte Zeile zu den übrigen addiert:

$$\equiv - \begin{vmatrix} \sin^2\alpha+\sin^2\beta & \sin^2\gamma & \sin^2\gamma & 1 \\ \sin^2\beta & \sin^2\gamma+\sin^2\alpha & \sin^2\beta & 1 \\ \sin^2\alpha & \sin^2\alpha & \sin^2\beta+\sin^2\gamma & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\equiv - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \sin^2\beta+\sin^2\gamma & \sin^2\alpha & \sin^2\alpha \\ 1 & \sin^2\beta & \sin^2\gamma+\sin^2\alpha & \sin^2\beta \\ 1 & \sin^2\gamma & \sin^2\gamma & \sin^2\alpha+\sin^2\beta \end{vmatrix}$$

Ähnlich die Determinantenform für XI.

Endlich erhält man durch ein ähnliches Verfahren wie in § 2 die Identitäten:

(XIII)

$$4\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\cos\frac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma) \equiv$$

$$\equiv \sin\alpha(\cos\alpha+\cos\beta\cos\gamma)+\sin\beta(\cos\beta+\cos\gamma\cos\alpha)+$$
$$+\sin\gamma(\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta)+\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und:

(XIV)

$$4\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\sin\frac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)=$$

$$=\sin\alpha\,(\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma)+\sin\beta\,(\cos\beta-\cos\gamma\cos\alpha)+$$

$$+\sin\gamma\,(\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta)-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Die letzte wird auch gefunden, indem man in XIII die Substitution VIII macht und mit -1 multipliziert. — XIII und XIV multipliziert ergeben wieder X.

§ 7.

Weitere Analogien aus der sphärischen Trigonometrie.

Weitere Analogien zeigt die Formel für die Fläche eines sphärischen Dreiecks, ausgedrückt durch die Seiten. Setzt man zur Abkürzung:

$$\frac{1}{2}(\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c})=\mathrm{S} \qquad \frac{1}{2}(-\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c})=\mathrm{A} \qquad \text{u. s. w.}$$

so erscheinen die Formeln III in der Gestalt:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin\mathrm{S}\sin\mathrm{A}}{\sin\mathrm{b}\sin\mathrm{c}}} \qquad \sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin\mathrm{B}\sin\mathrm{C}}{\sin\mathrm{b}\sin\mathrm{c}}}$$

$$\cos\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{\sin\mathrm{S}\sin\mathrm{B}}{\sin\mathrm{c}\sin\mathrm{a}}} \qquad \sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{\sin\mathrm{C}\sin\mathrm{A}}{\sin\mathrm{c}\sin\mathrm{a}}}$$

$$\cos\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{\sin\mathrm{S}\sin\mathrm{C}}{\sin\mathrm{a}\sin\mathrm{b}}} \qquad \sin\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{\sin\mathrm{A}\sin\mathrm{B}}{\sin\mathrm{a}\sin\mathrm{b}}}$$

Dividiert man das Produkt zweier dieser Formeln durch eine dritte, so findet man:

(XV)

$$\sin\mathrm{S}=\frac{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\sin\mathrm{a}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\mathrm{b}}{\sin\frac{\beta}{2}}=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\mathrm{c}}{\sin\frac{\gamma}{2}}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$= \frac{\sin\beta \sin\gamma \sin a}{4 \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin\gamma \sin\alpha \sin b}{4 \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin\alpha \sin\beta \sin c}{4 \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2}}$$

$$\sin A = \frac{\sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2} \sin a}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$\sin B = \frac{\sin\frac{\gamma}{2} \sin\frac{\alpha}{2} \sin b}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$\sin C = \frac{\sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin c}{\sin\frac{\gamma}{2}}$$

Daß die hierbei vorkommende Quadratwurzel zeichenrichtig gezogen ist, zeigt sich, wenn man die Seiten des sphärischen Dreiecks sehr klein und die Winkel spitz nimmt. Dann sind nämlich alle vorkommenden sin und cos positiv. — Beiläufig ergibt sich noch, daß

$$\sin\beta \sin\gamma \sin a = \sin\gamma \sin\alpha \sin b = \sin\alpha \sin\beta \sin c = \sin\alpha \sin h_a =$$
$$= \sin\beta \sin h_b = \sin\gamma \sin h_c \qquad \text{(Fig. 2, sphär. Dreieck).}$$

Dieser Ausdruck ist ein Analogon zum Sinus der Ecke und könnte mit $\sin AB\Gamma$ bezeichnet werden, wie denn überhaupt in der sphärischen Trigonometrie ein vollkommenes duales Entsprechen zwischen Seiten und Winkeln stattfindet.

Durch Multiplikation der Formeln XV ergibt sich:

$$\sin\frac{1}{2}(a+b+c) \sin\frac{1}{2}(-a+b+c) \sin\frac{1}{2}(a-b+c) \sin\frac{1}{2}(a+b-c) =$$

$$= \frac{1}{4} \sin\beta \sin\gamma \sin a \cdot \sin a \sin b \sin c$$

$$= \frac{1}{4} \sin\gamma \sin\alpha \sin b \cdot \sin a \sin b \sin c$$

$$= \frac{1}{4} \sin\alpha \sin\beta \sin c \cdot \sin a \sin b \sin c,$$

woraus leicht ein Ausdruck für $\sin AB\Gamma$ folgt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ferner:

$$\sin\frac{1}{2}(-a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a-b+c)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)=$$
$$=\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\sin a\sin b\sin c.$$

Wenden wir nun schließlich diese Gleichungen auf das Polardreieck an, was durch die Substitution:

$$\begin{array}{l|l|l} a=\pi-\alpha' & \alpha=\pi-a' & \frac{1}{2}a=\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}\alpha' \quad \text{u. s. w.} \\ b=\pi-\beta' & \beta=\pi-b' & \\ c=\pi-\gamma' & \gamma=\pi-c' & \frac{1}{2}\alpha=\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}a' \quad \text{u. s. w.} \end{array}$$

$$\frac{1}{2}(a+b+c)=\frac{3}{2}\pi-\frac{1}{2}(\alpha'+\beta'+\gamma')$$

$$\frac{1}{2}(-a+b+c)=\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}(-\alpha'+\beta'+\gamma') \quad \text{u. s. w.}$$

geschieht, so ergibt sich, wenn man die Strichelung der Buchstaben fortläßt, aus XV:

(XVI)

$$-\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\sin b\sin c\sin\alpha}{4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}=\frac{\sin c\sin a\sin\beta}{4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}=$$
$$=\frac{\sin a\sin b\sin\gamma}{4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}$$

$$\cos\frac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\sin\alpha}{\cos\frac{a}{2}}$$

$$\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma)=\frac{\cos\frac{c}{2}\cos\frac{a}{2}\sin\beta}{\cos\frac{b}{2}}$$

$$\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)=\frac{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\sin\gamma}{\cos\frac{c}{2}}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und durch Multiplikation derselben:

(XVII)

$$-\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\cos\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)=$$

$$=\frac{1}{4}\sin b\sin c\sin\alpha\cdot\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

$$=\frac{1}{4}\sin c\sin a\sin\beta\cdot\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

$$=\frac{1}{4}\sin a\sin b\sin\gamma\cdot\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Ferner:

(XVIII)

$$\cos\frac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)=$$

$$=\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cdot\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Hier liefert uns nun zunächst XVII einen Ausdruck des Sinus der Ecke durch die Winkel, nämlich:

$$\sin ABC=\sin b\sin c\sin\alpha=$$

$$=\frac{-4\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\cos\frac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$$

$$=\frac{-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$$

$$=\frac{-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-2+\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$$

$$=\frac{1}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}\cdot\begin{vmatrix}1 & -\cos\alpha & -\cos\beta\\ -\cos\alpha & 1 & -\cos\gamma\\ -\cos\beta & -\cos\gamma & 1\end{vmatrix}\quad\text{(nach IX und XII.)}$$

Ferner folgen hieraus die Flächeninhaltsformeln, wenn man bedenkt, daß $\frac{1}{2}F=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)-\frac{1}{2}\pi$, also:

$\sin\frac{1}{2}F=-\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)$ und $\cos\frac{1}{2}F=\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)$,

vorausgesetzt, daß der Kugelradius $=1$ ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

So folgt aus XVI:

(XIX) $$\sin\frac{1}{2}F = \frac{\sin ABC}{4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2\cos a\cos b\cos c + 1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c}}{4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2\cos a\cos b\cos c - 2 + \sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c}}{4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(-a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a-b+c)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}$$

Setzt man ferner XVIII in die Identität XIII ein, so entsteht:

$$4\cos\frac{1}{2}F\cdot\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cdot\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma =$$
$$= \sin\alpha(\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma) + \sin\beta(\cos\beta + \cos\gamma\cos\alpha) +$$
$$+ \sin\gamma(\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta) + \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Also: $$\cos\frac{1}{2}F\cdot 4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2} =$$

$$= \frac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma} + \frac{\cos\beta + \cos\gamma\cos\alpha}{\sin\gamma\sin\alpha} + \frac{\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} + 1$$
$$= \cos a + \cos b + \cos c + 1$$

nach der sphärischen Trigonometrie, mithin:

(XX) $$\cos\frac{1}{2}F = \frac{\cos a + \cos b + \cos c + 1}{4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}$$

$$= \frac{\cos^2\frac{a}{2} + \cos^2\frac{b}{2} + \cos^2\frac{c}{2} - 1}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$= \frac{2 - \sin^2\frac{a}{2} - \sin^2\frac{b}{2} - \sin^2\frac{c}{2}}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}},$$

ein Ausdruck, den man auch aus XIX mit Hilfe der Beziehung $\cos\frac{1}{2}F = \sqrt{1 - \sin^2\frac{1}{2}F}$ erhalten kann. Aus den letzten beiden Formen von XX ergibt sich dann mit Hilfe der Beziehungen $\cos\frac{1}{4}F = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{1}{2}F\right)}$ und $\sin\frac{1}{4}F = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{1}{2}F\right)}$

(XXI)

$$\cos\frac{1}{4}F = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2} - 1 + \cos^2\frac{a}{2} + \cos^2\frac{b}{2} + \cos^2\frac{c}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{4}(a+b+c)\cos\frac{1}{4}(-a+b+c)\cos\frac{1}{4}(a-b+c)\cos\frac{1}{4}(a+b-c)}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}}$$

und:

$$\sin\frac{1}{4}F = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2} + 1 - \cos^2\frac{a}{2} - \cos^2\frac{b}{2} - \cos^2\frac{c}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{4}(a+b+c)\sin\frac{1}{4}(-a+b+c)\sin\frac{1}{4}(a-b+c)\sin\frac{1}{4}(a+b-c)}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}}$$

mit Benutzung der Identitäten IX und II. Die Multiplikation dieser Formeln liefert wieder XIX, die Division dagegen die Formel von L'Huilier (Schulz, Sphärik, Leipzig [Cnobloch] 1829, zweiter Teil, § 41 — später als „Schulz" zitiert):

$$\operatorname{tang}\frac{1}{4}F =$$

$$= \sqrt{\operatorname{tang}\frac{1}{4}(a+b+c)\operatorname{tang}\frac{1}{4}(-a+b+c)\operatorname{tang}\frac{1}{4}(a-b+c)\operatorname{tang}\frac{1}{4}(a+b-c)}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dieser Ausdruck ist nicht nur der zur logarithmischen Berechnung bequemste, er ist auch völlig unzweideutig. Denn da $F < 2\pi$, so ist $\frac{1}{4}F < \frac{1}{2}\pi$, mithin $\tang\frac{1}{4}F$ positiv, so daß das Vorzeichen der Quadratwurzel und der Wert für $\frac{1}{4}F$ völlig bestimmt sind.

Dieser Ausdruck hat ferner von allen die größte Ähnlichkeit mit der planimetrischen Flächenformel und geht, wie auch die letzte Form von XIX und XXI, direkt in diese über, wenn man die Seitenwinkel unendlich klein nimmt, da man für die sin und tang unendlich kleiner Winkel die Winkel selbst, für die cos dagegen 1 setzen kann. Es wäre jedoch verfehlt, wenn man ein solches Verfahren auch auf die ersten beiden Formen von XIX unvorsichtig anwenden wollte; denn wenn auch dort das Produkt im Nenner: $\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}$ sich von der endlichen Zahl 1 nur um unendlich kleine Größen unterscheidet und deshalb unbedenklich $=1$ gesetzt werden kann, so hat man doch zu erwägen, dass F, mithin auch $\sin\frac{1}{2}F$, eine unendlich kleine Größe vom zweiten Grade ist, unter dem Wurzelzeichen also eine unendlich kleine Größe vierten Grades steht, daß dort also nur unendlich kleine Größen fünften oder höheren Grades vernachlässigt werden dürfen. So darf man in dem Produkt:

$$2\cos a\cos b\cos c = 2\left(1-2\sin^2\frac{a}{2}\right)\left(1-2\sin^2\frac{b}{2}\right)\left(1-2\sin^2\frac{c}{2}\right)$$

nach ausgeführter Multiplikation nur das letzte Glied:

$-16\sin^2\frac{a}{2}\sin^2\frac{b}{2}\sin^2\frac{c}{2}$ vernachlässigen, in dem Ausdrucke

$\sin^2 a = 4\sin^2\frac{a}{2}\cos^2\frac{a}{2} = 4\sin^2\frac{a}{2} - 4\sin^4\frac{a}{2}$ nichts, in dem Ausdrucke $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a = 1 - 4\sin^2\frac{a}{2} + 4\sin^4\frac{a}{2}$ ebenfalls nichts. — Zum Schlusse sei noch bemerkt, daß nicht die sphärische Dreiecksfläche das wahre sphärische Analogon zur

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fläche des ebenen Dreiecks ist, sondern vielmehr der Sinus der Ecke, oder eigentlich dessen sechster Teil, das Tetraëdervolum, denn dieses ist $=\frac{1}{6}\sin ABC=\frac{1}{6}\sin a \sin h_a$, entsprechend der planimetrischen Formel $F=\frac{1}{2}a\,h_a$. (Vergl. § 3.)

Anhangsweise seien noch die sehr einfach ableitbaren Gleichungen:

$$\sin^3 ABC = (\sin a \sin b \sin c)^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$$
$$\sin^3 AB\Gamma = (\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma)^2 \sin a \sin b \sin c$$
$$\sin^2 ABC = \sin AB\Gamma \cdot \sin a \sin b \sin c$$
$$\sin^2 AB\Gamma = \sin ABC \cdot \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$$

hierher gesetzt.

§ 8.

Die Dreipunkt-Relation.

Ganz ähnlich wie in § 2 läßt sich als planimetrisches Analogon zu der Dreistrahlen-Relation die Relation zwischen den Distanzen dreier auf einer Geraden liegenden Punkte ableiten. — Zwischen ihnen findet eine der Gleichungen:

$$-a+b+c=0$$
$$a-b+c=0$$
$$a+b-c=0 \quad \text{statt.}$$

Es ist aber zweckmäßig, eine Relation zu haben, die alle drei Strecken in gleicher Weise enthält, und das wird offenbar eine mit nur geraden Potenzen von a, b, c sein, denn eine solche wird durch einen Vorzeichenwechsel nicht beeinflußt. Auch aus anderen Gründen ist es oft zweckmäßig, eine lineare Relation in eine mit nur geraden Potenzen umzuformen, z. B. wenn Quadratwurzeln aus einer Gleichung fortgeschafft werden sollen. — Man multipliziert also

$$-a+b+c=0 \quad \text{mit} \quad a+b+c\,,$$

so findet man:

$$(a+b+c)(-a+b+c)=-a^2+b^2+c^2+2bc=0.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Hierin hat nur noch ein Glied ungerade Exponenten. Um auch diese fortzuschaffen, setze man $-b$ statt b und multipliziere mit -1:

$$(a-b+c)(a+b-c) \equiv a^2-b^2-c^2+2bc.$$

Die vorige Gleichung mit dieser Identität multipliziert:

$$\text{(XXII)} \qquad (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \equiv$$
$$\equiv 2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4=0.$$

Dies ist die Dreipunkt-Relation. Die Produktform links zeigt, daß sie statthat, sobald einer der Klammerfaktoren oder sein negativer Wert $=0$ ist.

So ist $2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$ teilbar durch $a+b+c$, $-a+b+c$, $a-b+c$, $a+b-c$, $a-b-c$, $-a+b-c$, $-a-b+c$, $-a-b-c$.

§ 9.

Die Dreiecksfläche als Analogon.

In Fig. 2 (ebenes Dreieck) findet die Dreipunkt-Relation

$$2p^2c^2+2q^2c^2+2p^2q^2-c^4-p^4-q^4=0 \qquad \text{statt.}$$

Setzt man hierin $p^2=a^2-h_c^2$ und $q^2=b^2-h_c^2$,

so erhält man: $(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \equiv$

$$2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4=4c^2h_c^2=4a^2h_a^2=4b^2h_b^2=16F^2,$$

die bekannte Formel für die Dreiecksfläche.

Fallen hier die drei Ecken in eine Gerade, so erhält man wieder die Dreipunkt-Relation.

§ 10.

Anwendungen der Dreipunkt-Relation.

Sollen aus der Gleichung $\pm\sqrt{a} \pm \sqrt{b} \pm c=0$ die Quadratwurzeln entfernt werden, so findet man nach XXII:

$$2ab+2(a+b)c^2-a^2-b^2-c^4=0.$$

Aus $\pm\sqrt{a} \pm \sqrt{b} \pm \sqrt{c}=0$ wird:

$$2bc+2ca+2ab-a^2-b^2-c^2=0.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Liegen vier Punkte (Fig. 4) auf einem Kreise, so besteht zwischen ihren Distanzen nach dem „Ptolemäus“ eine der drei Gleichungen:

$$-a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$$
$$a\alpha - b\beta + c\gamma = 0$$
$$a\alpha + b\beta - c\gamma = 0$$

(bei obiger Figur die erste). — Will man sich von dieser Zufälligkeit frei machen, so kann man die drei Gleichungen nach XXII zusammenfassen in:

(XXIII)

$$(a\alpha + b\beta + c\gamma)(-a\alpha + b\beta + c\gamma)(a\alpha - b\beta + c\gamma)(a\alpha + b\beta - c\gamma) =$$
$$2\,b^2c^2\beta^2\gamma^2 + 2\,c^2a^2\gamma^2\alpha^2 + 2\,a^2b^2\alpha^2\beta^2 - a^4\alpha^4 - b^4\beta^4 - c^4\gamma^4 = 0$$

(Salmon-Fiedler, 126), oder auch in:

(XXIV)

$$(-a\alpha + b\beta + c\gamma)(a\alpha - b\beta + c\gamma)(a\alpha + b\beta - c\gamma) =$$
$$= -a^3\alpha^3 - b^3\beta^3 - c^3\gamma^3 + bc\beta\gamma(b\beta + c\gamma) + ca\gamma\alpha(c\gamma + a\alpha) +$$
$$+ ab\alpha\beta(a\alpha + b\beta) - 2\,abc\,\alpha\beta\gamma = 0.$$

§ 11.

Die Determinantenform der Dreiecksfläche und der Dreipunkt-Relation.

Nach der ebenen Trigonometrie ist: $\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,ab}$.

Fallen nun die drei Ecken in eine Gerade, so ist $\cos\gamma = \pm 1$ was zusammengefaßt wird in der einen Gleichung:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma \\ \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

der schon unter V angeführten Zweistrahlen-Relation. Hierin obiges substituiert und die Gleichung mit $4a^2b^2$ multipliziert:

$$\begin{vmatrix} 2\,ab & a^2 + b^2 - c^2 \\ a^2 + b^2 - c^2 & 2\,ab \end{vmatrix} = 0.$$

Die Determinante „gerändert“:

$$\begin{vmatrix} 2\,ab & a^2 + b^2 - c^2 & 0 & 0 \\ a^2 + b^2 - c^2 & 2\,ab & 0 & 0 \\ a & b & 1 & 0 \\ b & a & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die dritte Zeile mit b, die vierte mit a multipliziert und von der ersten subtrahiert; desgleichen die dritte mit a, die vierte mit b multipliziert und von der zweiten subtrahiert:

$$\begin{vmatrix} 0 & -c^2 & -b & -a \\ -c^2 & 0 & -a & -b \\ a & b & 1 & 0 \\ b & a & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{oder:} \quad \begin{vmatrix} 0 & c^2 & b & a \\ c^2 & 0 & a & b \\ a & b & 1 & 0 \\ b & a & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Determinante läßt sich auf doppelte Weise umformen. Einmal multipliziere man die dritte und vierte Kolonne mit c und dividiere sodann die erste und zweite Zeile durch c. Dann erhält man:

$$\begin{vmatrix} 0 & c & b & a \\ c & 0 & a & b \\ a & b & c & 0 \\ b & a & 0 & c \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{matrix}\text{oder durch Zeilen-}\\ \text{und Kolonnen-}\\ \text{Vertauschungen:}\end{matrix} \quad - \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Anstatt obige Determinante auf eine zweite Art umzuformen, kann man auch bei der zuletzt erhaltenen Form die zweite Kolonne mit bc, die dritte mit ca, die vierte mit ab multiplizieren, insgesamt also mit $a^2b^2c^2$, so erhält man:

$$- \begin{vmatrix} 0 & abc & abc & abc \\ a & 0 & c^2a & ab^2 \\ b & bc^2 & 0 & a^2b \\ c & b^2c & ca^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dann wieder die erste Zeile durch abc, die zweite durch a, die dritte durch b, die vierte durch c, insgesamt also durch $a^2b^2c^2$, dividiert:

$$- \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{matrix}\text{oder durch Zeilen-}\\ \text{und Kolonnen-}\\ \text{Vertauschungen:}\end{matrix} \quad - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ [1]}$$

[1]) Baltzer § 3.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Somit haben wir als Dreipunkt-Relation:

$$\text{(XXV)} \quad (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \equiv$$

$$\equiv -\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} \equiv -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

und jeder dieser Ausdrücke stellt uns auch $16\,F^2$ dar, wenn die drei Punkte nicht in einer Geraden liegen.

Noch weiter rückwärts gehend, kann man auch die Zweipunkt-Relation aufstellen, d. h. diejenige, welcher die Entfernung zweier zusammenfallenden Punkte unterworfen ist. Diese Relation ist natürlich:

$$a = 0 \qquad \text{(XXVI) oder:} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 \\ 1 & a^2 & 0 \end{vmatrix} \equiv 2a^2 = 0$$

§ 12.

Umwandlung von $a+b+c+d=0$ in eine Relation mit nur geraden Exponenten.

Man multipliziere obige Gleichung mit $-a-b+c+d$, so ergibt sich:

$$(a+b+c+d)(-a-b+c+d) \equiv -2ab+2cd-a^2-b^2+c^2+d^2=0.$$

Hierin $-b$ und $-d$ statt b und d und mit -1 multipliziert:

$$(-a+b-c+d)(-a+b+c-d) \equiv -2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2.$$

Beides multipliziert:

$$(a+b+c+d)(-a-b+c+d)(-a+b-c+d)(-a+b+c-d) \equiv$$
$$2(a^2b^2+a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2)-a^4-b^4-c^4-d^4-8abcd=0.$$

Mit Benutzung des Summenzeichens, welches über alle Buchstaben und alle möglichen Kombinationen zu erstrecken ist, läßt sich abgekürzt schreiben:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

(XXVII)

$$(a+b+c+d)(-a-b+c+d)(-a+b-c+d)(-a+b+c-d) \equiv$$
$$2\sum a^2b^2 - \sum a^4 - 8abcd = 0.$$

Die Produktform zeigt von selbst, wann diese Gleichung gilt. Scheinbar nimmt in jener Produktform a eine Ausnahmestellung ein; ändert man aber in irgend zweien der drei letzten Klammern die Vorzeichen, so wird diese Ausnahmestellung auf b oder c oder d übertragen.

In XXVII setze man —a statt a:

(XXVIII)

$$(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d) \equiv$$
$$2\sum a^2b^2 - \sum a^4 + 8abcd.$$

Wann diese Identität null ist, zeigt wieder die Produktform. Mit der vorigen Gleichung multipliziert:

(XXIX)

$$(a+b+c+d)(-a-b+c+d)(-a+b-c+d)(-a+b+c-d)\cdot$$
$$(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d) \equiv$$
$$\sum a^8 + 6\sum a^4b^4 - 4\sum a^6b^2 + 4\sum a^4b^2c^2 - 40a^2b^2c^2d^2 = 0.$$

Dies ist die gesuchte Relation. — Werden z. B. aus:

$$\pm\sqrt{a} \pm\sqrt{b} \pm\sqrt{c} \pm\sqrt{d} = 0$$

die Wurzeln entfernt, so ergibt sich:

$$\sum a^4 + 6\sum a^2b^2 - 4\sum a^3b + 4\sum a^2bc - 40abcd = 0.$$

§ 13.

Die Ausdrücke des vorigen § als Determinanten.

$$(a+b+c+d)(-a-b+c+d)(-a+b-c+d)(-a+b+c-d) \equiv$$

$$(a+b+c+d)(-a-b+c+d)(-a+b-c+d)\cdot\begin{vmatrix} 1 & d-b \\ 1 & c-a \end{vmatrix} \equiv$$

$$(a+b+c+d)(-a-b+c+d)\cdot\begin{vmatrix} 1 & d-b & a-b \\ 1 & c-a & b-a \\ 0 & 0 & -a+b-c+d \end{vmatrix}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

oder, die zweite Zeile von der dritten subtrahiert:

$$= (a+b+c+d)(-a-b+c+d) \cdot \begin{vmatrix} 1 & d-b & a-b \\ 1 & c-a & b-a \\ -1 & a-c & d-c \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c+d)(-a-b+c+d) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & 1 & d-b & a-b \\ a & 1 & c-a & b-a \\ c & -1 & a-c & d-c \end{vmatrix}$$

oder, die erste Kolonne zur dritten und vierten addiert:

$$= (a+b+c+d)(-a-b+c+d) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ b & 1 & d & a \\ a & 1 & c & b \\ c & -1 & a & d \end{vmatrix}$$

$$= -(a+b+c+d)(-a-b+c+d) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & d & a \\ 1 & a & c & b \\ -1 & c & a & d \end{vmatrix}$$

$$= -(a+b+c+d) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -a-b+c+d & b & d & a \\ -a-b+c+d & a & c & b \\ a+b-c-d & c & a & d \end{vmatrix}$$

oder, die zweite und vierte Kolonne zur ersten addiert, die dritte hingegen von ihr subtrahiert:

$$= -(a+b+c+d) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ c & b & d & a \\ d & a & c & b \\ b & c & a & d \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} a+b+c+d & a+b+c+d & a+b+c+d & a+b+c+d \\ c & b & d & a \\ d & a & c & b \\ b & c & a & d \end{vmatrix}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

oder, die drei letzten Zeilen von der ersten subtrahiert:

$$= - \begin{vmatrix} a & d & b & c \\ c & b & d & a \\ d & a & c & b \\ b & c & a & d \end{vmatrix}$$

oder, durch Zeilen- und Kolonnenvertauschung:

$$(a+b+c+d)(-a-b+c+d)(-a+b-c+d)(-a+b+c-d) =$$

$$= - \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$$

eine Determinante, bei welcher alle Zeilen und Kolonnen dieselben Buchstaben enthalten. Setzt man $d = 0$, so entsteht nach einigen Zeilen- und Kolonnenvertauschungen XXV.

Setzt man $-a$ statt a, so entsteht:

$$(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d) =$$

$$= - \begin{vmatrix} -a & b & c & d \\ b & -a & d & c \\ c & d & -a & b \\ d & c & b & -a \end{vmatrix}$$

Die scheinbare Ausnahmestellung von a läßt sich leicht auf jeden anderen Buchstaben übertragen.

Durch Multiplikation findet man:

(XXX)

$$(a+b+c+d)(-a-b+c+d)(-a+b-c+d)(-a+b+c-d) \cdot$$
$$(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d) =$$

$$= \begin{vmatrix} -a^2+b^2+c^2+d^2 & 2cd & 2bd & 2bc \\ 2cd & -a^2+b^2+c^2+d^2 & 2bc & 2bd \\ 2bd & 2bc & -a^2+b^2+c^2+d^2 & 2cd \\ 2bc & 2bd & 2cd & -a^2+b^2+c^2+d^2 \end{vmatrix}$$

eine Determinante von demselben Bau wie die beiden vorigen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 14.

Allgemeines über Relationen mit nur geraden Potenzen.

Vergleicht man unter XXII und XXX die für $a+b+c=0$ und für $a+b+c+d=0$ gefundenen Relationen mit nur geraden Potenzen, (für $a+b=0$ ist dieselbe: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2=\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}=0$), so erkennt man, daß bei jeder folgenden der Grad sich verdoppelt. Dies ist allgemein der Fall, wie folgendes allgemein brauchbare Verfahren zeigt: Die für $a+b+c+d=0$ gefundene Relation sei, nach Potenzen von d geordnet:

$$d^8+H_2 d^6+H_4 d^4+H_6 d^2+H_8=0,$$

wo die H homogene Funktionen der drei übrigen Buchstaben mit nur geraden Potenzen sind. Der Index zeigt den Grad dieser Funktionen an. — Setzt man hierin nun $d+e$ statt d, so erhält man für $a+b+c+d+e=0$ eine Gleichung von der Form $N_8+N_6 de=0$, wo die N nur gerade Potenzen enthalten, wo aber $N_6 de$ alle die Glieder umfaßt, welche ungerade Potenzen von d und e enthalten.

Multipliziert man diese Gleichung mit

$N_8-N_6 de$, so erhält man $N_8{}^2-N_6{}^2 d^2 e^2=0$.

Dies ist die gesuchte Relation für

$$a+b+c+d+e=0.$$

Sie ist homogen und vom 16. Grade.

Dieses Verfahren läßt sich kurz so darstellen: Ist $F(d)=0$ die Relation für $a+b+c+d=0$, so ist $F(d+e)\cdot F(d-e)=0$ dieselbe für $a+b+c+d+e=0$.

Der Ausdruck $F(d+e)\cdot F(d-e)$ muß nach der Lehre von den Wurzeln einer Gleichung teilbar sein durch

$$\pm a \pm b \pm c \pm d \pm e,$$

wo jedes einzelne Vorzeichen ganz beliebig ist. Denn da er nur gerade Potenzen enthält, so verändert ein Vorzeichenwechsel irgend eines Buchstabens nichts. Also muß er teilbar sein durch:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

(XXXI)

$$(a+b+c+d+e)(-a+b+c+d+e)(a-b+c+d+e)\cdot$$
$$(a+b-c+d+e)(a+b+c-d+e)(a+b+c+d-e)\cdot$$
$$(-a-b+c+d+e)(-a+b-c+d+e)\cdot$$
$$(-a+b+c-d+e)(-a+b+c+d-e)\cdot$$
$$(a-b-c+d+e)(a-b+c-d+e)(a-b+c+d-e)\cdot$$
$$(a+b-c-d+e)(a+b-c+d-e)(a+b+c-d-e)$$

Da dieses Produkt aber ebenfalls vom 16. Grade ist, so kann es sich von $F(d+e)\cdot F(d-e)$ nur durch einen Zahlenfaktor unterscheiden, und dieser kann, wie eine genauere Betrachtung zeigt, höchstens -1 sein.

Wenn unser Ausdruck durch irgend eine Vorzeichenkombination, z. B. $-a-b+c+d+e$, teilbar ist, so ist er schon von selbst durch deren negativen Wert $a+b-c-d-e$ teilbar; daher braucht die Produktform von allen Vorzeichenkombinationen nur die Hälfte zu enthalten, z. B. bei einer ungeraden Buchstabenzahl diejenigen Kombinationen, welche mehr Plus- als Minus-Zeichen aufweisen, wie das obige Beispiel zeigt, bei einer geraden Buchstabenzahl außerdem noch die Hälfte derjenigen Kombinationen, die gleichviel Plus- und Minus-Zeichen aufweisen, z. B. diejenigen Kombinationen, bei denen ein Buchstabe, etwa a, negativ ist, wie XXX zeigt.

Da nun, wenn n Buchstaben vorhanden, nur eine Kombination mit lauter Plus-Zeichen, $\binom{n}{1}$ mit einem Minus-Zeichen, $\binom{n}{2}$ mit zwei Minus-Zeichen, $\binom{n}{3}$ mit drei Minus-Zeichen existieren, so ist für eine ungerade Anzahl von Buchstaben die Anzahl der Klammerfaktoren in der Produktform:

$$1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots\cdots+\binom{n}{\frac{n-1}{2}}=2^{n-1}$$

für eine gerade Anzahl von Buchstaben dagegen:

$$1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2}\binom{n}{\frac{n}{2}}=2^{n-1}$$

Diese Zahl bezeichnet also auch den Grad des Ausdrucks.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 15.

Die goniometrischen Analogien zu § 12.

Wie wir die goniometrischen Analogien zu § 8 und 9 bereits in den §§ 2, 3, 4, 6 kennen gelernt haben, so sollen nun auch zu § 12 die goniometrischen Analogien aufgestellt werden. Durch ein ähnliches Verfahren wie in § 2 findet man:

(XXXII)

$$4\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\sin\frac{1}{2}(-\alpha-\beta+\gamma+\delta)\sin\frac{1}{2}(-\alpha+\beta-\gamma+\delta)$$
$$\sin\frac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma-\delta)$$

$$=2-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma-\cos^2\delta+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta+$$
$$-2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\delta$$

$$=-2+\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma+\sin^2\delta+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta+$$
$$-2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\delta.$$

Auch hier nimmt α ebensowenig eine Ausnahmestellung ein wie in der analogen Gleichung XXVII.

Substituiert man hier nichts weiter (was übrigens auch in § 6 anwendbar ist), als $\alpha+\pi$ statt α, mithin

$$\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)+\frac{1}{2}\pi \quad \text{statt} \quad \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$$

und $\frac{1}{2}(-\alpha-\beta+\gamma+\delta)-\frac{1}{2}\pi$ statt $\frac{1}{2}(-\alpha-\beta+\gamma+\delta)$ u. s. w.,

so erhält man, wenn man noch die Identität mit -1 multipliziert:

(XXXIII)

$$4\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\cos\frac{1}{2}(-\alpha-\beta+\gamma+\delta)\cos\frac{1}{2}(-\alpha+\beta-\gamma+\delta)$$
$$\cos\frac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma-\delta)=$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$-2+\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+\cos^2\delta+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta+$$
$$-2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\delta\equiv$$

$$2-\sin^2\alpha-\sin^2\beta-\sin^2\gamma-\sin^2\delta+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta+$$
$$-2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\delta.$$

Setzt man in XXXII und XXXIII $-\alpha$ statt α, so resultiert:

(XXXIV)

$$4\sin\frac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma+\delta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma+\delta)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma+\delta)$$
$$\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma-\delta)\equiv$$

$$2-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma-\cos^2\delta+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta+$$
$$+2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\delta\equiv$$

$$-2+\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma+\sin^2\delta+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta+$$
$$+2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\delta$$

und:

$$4\cos\frac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma+\delta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma+\delta)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma+\delta)$$
$$\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma-\delta)\equiv$$

$$-2+\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+\cos^2\delta+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta+$$
$$+2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\delta\equiv$$

$$2-\sin^2\alpha-\sin^2\beta-\sin^2\gamma-\sin^2\delta+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta+$$
$$+2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\delta.$$

Diese Formeln zeichnen sich durch ihre Regelmäßigkeit vor denen des § 6 aus, die aus ihnen hervorgehen, wenn man $\delta=0$ setzt.

Ferner sind noch zu erwähnen:

(XXXV)

$$4\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\cos\frac{1}{2}(-\alpha-\beta+\gamma+\delta)\cos\frac{1}{2}(-\alpha+\beta-\gamma+\delta)$$
$$\cos\frac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma-\delta)\equiv$$

$$\sum\sin\alpha\cos\alpha+\sum\sin\alpha\cdot\cos\beta\cos\gamma\cos\delta+\sum\cos\alpha\cdot\sin\beta\sin\gamma\sin\delta.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Setzt man hierin nichts weiter als $\alpha+\pi$ statt α, so ergibt sich:

(**XXXVI**)

$$4\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\sin\frac{1}{2}(-\alpha-\beta+\gamma+\delta)\sin\frac{1}{2}(-\alpha+\beta-\gamma+\delta)$$
$$\sin\frac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma-\delta)\equiv$$

$$\sum\sin\alpha\cos\alpha-\sum\sin\alpha\cdot\cos\beta\cos\gamma\cos\delta-\sum\cos\alpha\cdot\sin\beta\sin\gamma\sin\delta$$

Endlich noch einige Formeln, die sich durch Multiplikation der bisher aufgestellten ergeben. Aus XXXII und XXXIII:

(**XXXVII**)

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\sin(-\alpha-\beta+\gamma+\delta)\sin(-\alpha+\beta-\gamma+\delta)$$
$$\sin(-\alpha+\beta+\gamma-\delta)\equiv$$

$$-\sum\cos^4\alpha+2\sum\cos^2\alpha\cos^2\beta-4\sum\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma+$$
$$+8\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma\cos^2\delta-8\cos\alpha\sin\alpha\cos\beta\sin\beta\cos\gamma\sin\gamma\cos\delta\sin\delta\equiv$$

$$-\sum\sin^4\alpha+2\sum\sin^2\alpha\sin^2\beta-4\sum\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma+$$
$$+8\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma\sin^2\delta-8\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta\sin\gamma\cos\gamma\sin\delta\cos\delta.$$

Hierin $-\alpha$ statt α:

$$\sin(-\alpha+\beta+\gamma+\delta)\sin(\alpha-\beta+\gamma+\delta)\sin(\alpha+\beta-\gamma+\delta)\sin(\alpha+\beta+\gamma-\delta)\equiv$$

$$-\sum\cos^4\alpha+2\sum\cos^2\alpha\cos^2\beta-4\sum\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma+$$
$$+8\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma\cos^2\delta+8\cos\alpha\sin\alpha\cos\beta\sin\beta\cos\gamma\sin\gamma\cos\delta\sin\delta\equiv$$

$$-\sum\sin^4\alpha+2\sum\sin^2\alpha\sin^2\beta-4\sum\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma+$$
$$+8\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma\sin^2\delta+8\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta\sin\gamma\cos\gamma\sin\delta\cos\delta.$$

Setzt man in XXXVII nur $\alpha+\frac{1}{2}\pi$ statt α, also:

$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta)+\frac{1}{2}\pi \quad \text{statt} \quad \alpha+\beta+\gamma+\delta$$

und $(-\alpha-\beta+\gamma+\delta)-\frac{1}{2}\pi$ statt $-\alpha-\beta+\gamma+\delta$ u. s. w.,

so scheint es zwar, als erhielte α auf der rechten Seite eine Ausnahmestellung, aber doch entsteht, nachdem mit -1 multipliziert ist, folgende symmetrische Form:

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\cos(-\alpha-\beta+\gamma+\delta)\cos(-\alpha+\beta-\gamma+\delta)$$
$$\cos(-\alpha+\beta+\gamma-\delta)\equiv$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$1-2\sum\cos^2\alpha+\sum\cos^4\alpha+2\sum\cos^2\alpha\cos^2\beta-4\sum\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma+$$
$$+8\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma\cos^2\delta-8\cos\alpha\sin\alpha\cos\beta\sin\beta\cos\gamma\sin\gamma\cos\delta\sin\delta\equiv$$
$$\equiv 1-2\sum\sin^2\alpha+\sum\sin^4\alpha+2\sum\sin^2\alpha\sin^2\beta-4\sum\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma+$$
$$+8\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma\sin^2\delta-8\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta\sin\gamma\cos\gamma\sin\delta\cos\delta$$

Hierin $-\alpha$ statt α:

$$\cos(-\alpha+\beta+\gamma+\delta)\cos(\alpha-\beta+\gamma+\delta)\cos(\alpha+\beta-\gamma+\delta)\cos(\alpha+\beta+\gamma-\delta)\equiv$$
$$1-2\sum\cos^2\alpha+\sum\cos^4\alpha+2\sum\cos^2\alpha\cos^2\beta-4\sum\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma+$$
$$+8\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma\cos^2\delta+8\cos\alpha\sin\alpha\cos\beta\sin\beta\cos\gamma\sin\gamma\cos\delta\sin\delta\equiv$$
$$1-2\sum\sin^2\alpha+\sum\sin^4\alpha+2\sum\sin^2\alpha\sin^2\beta-4\sum\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma+$$
$$+8\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma\sin^2\delta+8\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta\sin\gamma\cos\gamma\sin\delta\cos\delta.$$

Endlich noch durch Multiplikation der ersten Formen von XXXII und XXXIV:

(XXXVIII)

$$16\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\sin\frac{1}{2}(-\alpha-\beta+\gamma+\delta)\sin\frac{1}{2}(-\alpha+\beta-\gamma+\delta)$$
$$\sin\frac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma-\delta)\cdot\sin\frac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma+\delta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma+\delta)$$
$$\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma+\delta)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma-\delta)\equiv$$
$$\sum\cos^4\alpha-2\sum\cos^2\alpha\cos^2\beta+8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta+$$
$$+4\sum\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma-4\sum\cos^3\alpha\cdot\cos\beta\cos\gamma\cos\delta$$

und wenn man hierin $\alpha+\pi$ statt α setzt:

(XXXIX)

$$16\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\cos\frac{1}{2}(-\alpha-\beta+\gamma+\delta)\cos\frac{1}{2}(-\alpha+\beta-\gamma+\delta)$$
$$\cos\frac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma-\delta)\cdot\cos\frac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma+\delta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma+\delta)$$
$$\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma+\delta)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma-\delta)\equiv$$
$$\sum\cos^4\alpha-2\sum\cos^2\alpha\cos^2\beta-8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta+$$
$$+4\sum\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma+4\sum\cos^3\alpha\cdot\cos\beta\cos\gamma\cos\delta.$$

Die letzten beiden Formeln zeichnen sich vor den übrigen dadurch aus, daß sie nur cos enthalten.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Um endlich noch ein anderes Prinzip der Ableitung nicht unerwähnt zu lassen, so setze man in XXXV und XXXVI 2α, 2β, 2γ, 2δ statt α, β, γ, δ, so erhält man:

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\cdot\cos(-\alpha-\beta+\gamma+\delta)\cos(-\alpha+\beta-\gamma+\delta)\cos(-\alpha+\beta+\gamma-\delta)\equiv$$

$$-\sum\cos\alpha\sin\alpha+\sum\cos^3\alpha\sin\alpha+\sum\cos\alpha\sin\alpha\cdot\cos^2\beta-2\sum\cos\alpha\sin\alpha\cdot$$
$$\cdot\cos^2\beta\cos^2\gamma-2\sum\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cdot\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma+4\sum\cos\alpha\sin\alpha\cdot$$
$$\cdot\cos^2\beta\cos^2\gamma\cos^2\delta+4\sum\cos^2\alpha\cdot\cos\beta\cos\gamma\cos\delta\cdot\sin\beta\sin\gamma\sin\delta\equiv$$

$$\equiv\sum\sin\alpha\cos\alpha-\sum\sin^3\alpha\cos\alpha-\sum\sin\alpha\cos\alpha\sin^2\beta+2\sum\sin\alpha\cos\alpha\cdot$$
$$\cdot\sin^2\beta\sin^2\gamma+2\sum\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\cdot\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-4\sum\sin\alpha\cos\alpha\cdot$$
$$\cdot\sin^2\beta\sin^2\gamma\sin^2\delta-4\sum\sin^2\alpha\cdot\sin\beta\sin\gamma\sin\delta\cdot\cos\beta\cos\gamma\cos\delta$$

und:

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\cdot\sin(-\alpha-\beta+\gamma+\delta)\sin(-\alpha+\beta-\gamma+\delta)\sin(-\alpha+\beta+\gamma-\delta)\equiv$$

$$+\sum\cos^3\alpha\sin\alpha-\sum\cos\alpha\sin\alpha\cdot\cos^2\beta+2\sum\cos\alpha\sin\alpha\cdot\cos^2\beta\cos^2\gamma+$$
$$+2\sum\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cdot\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma-4\sum\cos\alpha\sin\alpha\cdot\cos^2\beta\cos^2\gamma\cos^2\delta+$$
$$-4\sum\cos^2\alpha\cdot\cos\beta\cos\gamma\cos\delta\cdot\sin\beta\sin\gamma\sin\delta\equiv$$

$$\equiv-\sum\sin^3\alpha\cos\alpha+\sum\sin\alpha\cos\alpha\sin^2\beta-2\sum\sin\alpha\cos\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma+$$
$$-2\sum\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\cdot\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+4\sum\sin\alpha\cos\alpha\cdot\sin^2\beta\sin^2\gamma\sin^2\delta+$$
$$+4\sum\sin^2\alpha\cdot\sin\beta\sin\gamma\sin\delta\cdot\cos\beta\cos\gamma\cos\delta.$$

Wird in den beiden letzten Identitäten $\delta=0$ gesetzt, so ergeben sich noch zwei Formeln, die in § 6 ausgelassen worden sind.

§ 16.

Die Ausdrücke in § 14 als Determinanten.

$(a+b)(-a+b)\equiv-a^2+b^2\equiv-\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}$ ist schon erwähnt. Das beste Verfahren, aus dieser Determinante die Reihe der folgenden zu finden, ist das in § 14 angegebene:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Man bilde aus dieser Gleichung $F(b) = 0$ die Gleichung: $F(b+c) \cdot F(b-c) = 0$. Dies ist die verlangte Relation mit nur geraden Potenzen für drei Größen. Also:

$$\begin{vmatrix} a & b+c \\ b+c & a \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & b-c \\ b-c & a \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} a & b+c & 0 & 0 \\ b+c & a & 0 & 0 \\ 0 & c & a & b-c \\ c & 0 & b-c & a \end{vmatrix} = 0$$

Addiert man hierin die erste Kolonne zur dritten, die zweite zur vierten, so ergibt sich:

$$\begin{vmatrix} a & b+c & a & b+c \\ b+c & a & b+c & a \\ 0 & c & a & b \\ c & 0 & b & a \end{vmatrix} = 0.$$

Subtrahiert man endlich die dritte Zeile von der ersten, die vierte von der zweiten, so ergibt sich:

$$- \begin{vmatrix} a & b & 0 & c \\ b & a & c & 0 \\ 0 & c & a & b \\ c & 0 & b & a \end{vmatrix} = 0.$$

Das Minus-Zeichen ist vorgesetzt, damit der Ausdruck links mit XXV auch im Zeichen übereinstimmt. Durch ganz das gleiche Verfahren erhält man XXIX in der Form:

(XL)
$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & c & 0 & 0 & 0 & d \\ b & a & c & 0 & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & c & a & b & 0 & d & 0 & 0 \\ c & 0 & b & a & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & a & b & 0 & c \\ 0 & 0 & d & 0 & b & a & c & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 & 0 & c & a & b \\ d & 0 & 0 & 0 & c & 0 & b & a \end{vmatrix} = 0$$

die mit der Determinante XXX übereinstimmt, und XXXI in der Form:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$
-\begin{vmatrix}
a & b & . & c & . & . & . & d & . & . & . & . & . & . & . & e \\
b & a & c & . & . & . & d & . & . & . & . & . & . & . & e & . \\
. & c & a & b & . & d & . & . & . & . & . & . & . & e & . & . \\
c & . & b & a & d & . & . & . & . & . & . & . & e & . & . & . \\
. & . & . & d & a & b & . & c & . & . & . & e & . & . & . & . \\
. & . & d & . & b & a & c & . & . & . & e & . & . & . & . & . \\
. & d & . & . & . & c & a & b & . & e & . & . & . & . & . & . \\
d & . & . & . & c & . & b & a & e & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & e & a & b & . & c & . & . & . & d \\
. & . & . & . & . & . & . & e & . & b & a & c & . & . & . & d & . \\
. & . & . & . & . & . & e & . & . & . & c & a & b & . & d & . & . \\
. & . & . & . & . & e & . & . & . & c & . & b & a & d & . & . & . \\
. & . & . & . & e & . & . & . & . & . & . & . & d & a & b & . & c \\
. & . & . & e & . & . & . & . & . & . & . & d & . & b & a & c & . \\
. & . & e & . & . & . & . & . & . & . & d & . & . & . & c & a & b \\
e & . & . & . & . & . & . & . & . & d & . & . & . & c & . & b & a
\end{vmatrix} = 0
$$

Die leeren Stellen dieser Determinante sind — wie auch im folgenden öfter — mit Nullen besetzt.

Daß die entwickelten Ausdrücke nur gerade Potenzen enthalten, läßt sich auch in der Determinantenform darstellen. Für drei Buchstaben ist diese Darstellung schon in XXV gegeben. — Um für vier Buchstaben dasselbe zu erreichen, multipliziere man die Kolonnen von XL der Reihe nach resp. mit bcd, acd, d, abd, b, a, c, abc, so daß die ganze Determinante mit $a^4b^4c^4d^4$ multipliziert wird. Dann ergibt sich:

$$
\begin{vmatrix}
abcd & abcd & . & abcd & . & . & . & abcd \\
b^2cd & a^2cd & cd & . & . & . & cd & . \\
. & ac^2d & ad & ab^2d & . & ad & . & . \\
bc^2d & . & bd & a^2bd & bd & . & . & . \\
. & . & . & abd^2 & ab & ab & . & abc^2 \\
. & . & d^2 & . & b^2 & a^2 & c^2 & . \\
. & acd^2 & . & . & . & ac & ac & ab^2c \\
bcd^2 & . & . & . & bc & . & bc & a^2bc
\end{vmatrix} = 0
$$

Dividiert man nun die Zeilen der Reihe nach resp. durch

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

abcd, cd, ad, bd, ab, 1, ac, bc, die ganze Determinante daher durch $a^4b^4c^4d^4$, so ergibt sich:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & . & 1 & . & . & . & 1 \\ b^2 & a^2 & 1 & . & . & . & 1 & . \\ . & c^2 & 1 & b^2 & . & 1 & . & . \\ c^2 & . & 1 & a^2 & 1 & . & . & . \\ . & . & . & d^2 & 1 & 1 & . & c^2 \\ . & . & d^2 & . & b^2 & a^2 & c^2 & . \\ . & d^2 & . & . & . & 1 & 1 & b^2 \\ d^2 & . & . & . & 1 & . & 1 & a^2 \end{vmatrix} = 0$$

Hieraus durch Zeilen- und Kolonnenvertauschungen:

$$\begin{vmatrix} . & . & . & . & 1 & 1 & 1 & 1 \\ . & . & 1 & 1 & . & . & a^2 & b^2 \\ . & 1 & . & 1 & . & a^2 & . & c^2 \\ . & 1 & 1 & . & a^2 & . & . & d^2 \\ 1 & . & . & 1 & . & b^2 & c^2 & . \\ 1 & . & 1 & . & b^2 & . & d^2 & . \\ 1 & 1 & . & . & c^2 & d^2 & . & . \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & . & . & . & . \end{vmatrix} = 0$$

Die Zeilen dieser Determinante enthalten die Kombinationen zu 0, 2 und 4 Elementen, die Kolonnen zu 1 und 3 Elementen. Auch enthält jede Zeile und Kolonne, von den Nullen abgesehen, 4 Terme.

Für 5 Buchstaben ist die Umformung in ähnlicher Weise zu bewirken.

§ 17.

Die Formeln XXXVIII und XXXIX als Determinanten.

Unter allen Ausdrücken des § 15 eignen sich diese beiden am besten für die Determinantenform, weil sie nur cos enthalten. — Man bekommt die Produktform XXXVIII aus der Produktform II, wenn man in der letzteren einmal $\gamma + \delta$, sodann $\gamma - \delta$ statt γ setzt und die so erhaltenen Ausdrücke multipliziert. Dasselbe Verfahren wenden wir jetzt auf die

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Determinantenform VI an. Wir multiplizieren die beiden Determinanten:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos(\gamma+\delta) \\ \cos\beta & \cos(\gamma+\delta) & 1 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos(\gamma-\delta) \\ \cos\beta & \cos(\gamma-\delta) & 1 \end{vmatrix}$$

Schreiben wir zu augenblicklicher Abkürzung γ und δ statt $\cos\gamma$ und $\cos\delta$, sowie γ' und δ' statt $\sin\gamma$ und $\sin\delta$, so erhalten wir das Produkt:

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & \gamma\delta-\gamma'\delta' & 0 & 0 & 0 \\ \beta & \gamma\delta-\gamma'\delta' & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma'\delta' & \alpha & 1 & \gamma\delta+\gamma'\delta' \\ 0 & \gamma'\delta' & 0 & \beta & \gamma\delta+\gamma'\delta' & 1 \end{vmatrix}$$

Addiert man hier die vierte Zeile zur ersten, die fünfte zur zweiten, die sechste zur dritten; subtrahiert sodann die erste Kolonne von der vierten, die zweite von der fünften, die dritte von der sechsten, so erhält man:

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & \gamma\delta & 0 & 0 & \gamma'\delta' \\ \beta & \gamma\delta & 1 & 0 & \gamma'\delta' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma'\delta' & \alpha & 1 & \gamma\delta \\ 0 & \gamma'\delta' & 0 & \beta & \gamma\delta & 1 \end{vmatrix}$$

Multipliziert man hier die drei ersten Zeilen mit γ', die drei letzten mit δ', dividiert sodann die drei ersten Kolonnen durch γ', die drei letzten durch δ', so ergibt sich:

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & \gamma\delta & 0 & 0 & \gamma'^2 \\ \beta & \gamma\delta & 1 & 0 & \gamma'^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \delta'^2 & \alpha & 1 & \gamma\delta \\ 0 & \delta'^2 & 0 & \beta & \gamma\delta & 1 \end{vmatrix}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Drückt man nun die sin durch die cos aus und multipliziert die drei ersten Zeilen sowie die drei ersten Kolonnen mit -1, was nichts verändert, so entsteht:

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & \gamma\delta & 0 & 0 & \gamma^2-1 \\ \beta & \gamma\delta & 1 & 0 & \gamma^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \delta^2-1 & \alpha & 1 & \gamma\delta \\ 0 & \delta^2-1 & 0 & \beta & \gamma\delta & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \beta & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & \alpha & 1 & \gamma\delta & 0 & 0 & \gamma^2-1 \\ 0 & \gamma & \beta & \gamma\delta & 1 & 0 & \gamma^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha & \beta \\ \delta & 0 & 0 & 0 & \delta^2-1 & \alpha & 1 & \gamma\delta \\ 0 & \delta & 0 & \delta^2-1 & 0 & \beta & \gamma\delta & 1 \end{vmatrix}$$

Subtrahiert man hier die erste Kolonne, mit δ multipliziert, von der fünften, und, mit γ multipliziert, von der achten, dagegen die zweite Kolonne, mit δ multipliziert, von der vierten, und, mit γ multipliziert, von der siebenten, so entsteht:

$$\begin{vmatrix} 1 & . & . & . & -\delta & . & . & -\gamma \\ . & 1 & . & -\delta & . & . & -\gamma & . \\ . & . & 1 & \alpha & \beta & . & . & . \\ \gamma & . & \alpha & 1 & . & . & . & -1 \\ . & \gamma & \beta & . & 1 & . & -1 & . \\ . & . & . & . & . & 1 & \alpha & \beta \\ \delta & . & . & . & -1 & \alpha & 1 & . \\ . & \delta & . & -1 & . & \beta & . & 1 \end{vmatrix}$$

Multipliziert man noch die ersten beiden Zeilen mit -1 und vertauscht sie sodann, was das Vorzeichen der Determinante ändert, so entsteht nach einigen weiteren Zeilen- und Kolonnenvertauschungen:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$
-\begin{vmatrix}
1 & . & . & . & \cos\alpha & \cos\beta & . & . \\
. & 1 & . & . & . & . & \cos\alpha & \cos\beta \\
. & . & . & -1 & \cos\delta & . & \cos\gamma & . \\
. & . & -1 & . & . & \cos\delta & . & \cos\gamma \\
\cos\alpha & . & \cos\gamma & . & 1 & . & . & -1 \\
\cos\beta & . & . & \cos\gamma & . & 1 & -1 & . \\
. & \cos\alpha & \cos\delta & . & . & -1 & 1 & . \\
. & \cos\beta & . & \cos\delta & -1 & . & . & 1
\end{vmatrix}
$$

Diese Determinante ist also identisch mit XXXVIII.

Die vier ersten Zeilen und Kolonnen enthalten (von den Nullen abgesehen) je drei Elemente, die vier letzten je vier.

Da das Paar α und β in zwei Zeilen und Kolonnen vorkommt, ebenso das Paar γ und δ, die anderen Paare dagegen nur in je einer Zeile und Kolonne, so ist die Paarung α und β, γ und δ vor den zwei anderen Paarungen bevorzugt, und es gibt daher im ganzen drei Determinanten für denselben Ausdruck, oder vielmehr sechs, da das Paar γ und δ in derselben Zeile und Kolonne -1 hat, das Paar α und β dagegen $+1$. Doch kann man diese letzten Unterschiede vertauschen, wenn man die ersten vier Zeilen und die letzten vier Kolonnen mit -1 multipliziert.

Die Identität XXXIX ging aus XXXVIII hervor, indem wir $\alpha+\pi$ statt α setzten. Tun wir dasselbe bei der letzten Determinante, so wechselt $\cos\alpha$ das Vorzeichen. Um $\cos\alpha$ wieder positiv zu machen, multipliziere man die 1., 2., 6., 8., 4. Zeile und Kolonne mit -1, so ergibt sich:

$$
\textbf{(XLI)} \quad -\begin{vmatrix}
1 & . & . & . & \cos\alpha & \cos\beta & . & . \\
. & 1 & . & . & . & . & \cos\alpha & \cos\beta \\
. & . & . & 1 & \cos\delta & . & \cos\gamma & . \\
. & . & 1 & . & . & \cos\delta & . & \cos\gamma \\
\cos\alpha & . & \cos\gamma & . & 1 & . & . & 1 \\
\cos\beta & . & . & \cos\gamma & . & 1 & 1 & . \\
. & \cos\alpha & \cos\delta & . & . & 1 & 1 & . \\
. & \cos\beta & . & \cos\delta & 1 & . & . & 1
\end{vmatrix}
$$

Diese Determinante ist also identisch mit XXXIX.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 18.

Analogien aus der sphärischen Trigonometrie.

Manche Ausdrücke des § 15 kommen vor bei den Flächeninhalten sphärischer Sehnenvierecke, ausgedrückt durch die Seiten. Ist Fig. 5 ein sphärisches Viereck, so bestehen zwischen den Seiten und Winkeln desselben die Beziehungen:

(XLII)

$$\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\varphi = \cos e = \cos c \cos d + \sin c \sin d \cos\psi$$

ebenso:

$$\cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\chi = \cos a \cos d + \sin a \sin d \cos\omega$$

ferner:

$$-\cos\varphi \cos\omega + \sin\varphi \sin\omega \cos a = \cos\eta = -\cos\chi \cos\psi + \sin\chi \sin\psi \cos c$$

ebenso:

$$-\cos\varphi \cos\chi + \sin\varphi \sin\chi \cos b = -\cos\psi \cos\omega + \sin\psi \sin\omega \cos d$$

Von diesen vier Relationen sind freilich nur drei von einander unabhängig, da nur drei der acht Stücke durch die fünf übrigen bestimmt sind. Drückt man nun in der ersten die Funktionen der Seiten durch die Funktionen der halben Seiten aus, also

$$\cos a = 2\cos^2\frac{a}{2} - 1, \quad \text{oder abgekürzt} \quad = 2\,k_a^2 - 1$$

$$\sin a = 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}, \quad \text{oder abgekürzt} \quad = 2\,s_a\,k_a, \quad \text{u. s. w.}$$

multipliziert aus, addiert beiderseitig 1, dividiert durch 2, so findet man:

(XLIII)

$$s_a^2 s_b^2 + k_a^2 k_b^2 + 2\,s_a s_b k_a k_b \cos\varphi = s_c^2 s_d^2 + k_c^2 k_d^2 + 2\,s_c s_d k_c k_d \cos\psi$$

Durch dieselbe Substitution findet man aus der dritten jener vier Relationen:

$$2\,k_a^2 \sin\varphi \sin\omega - \cos(\varphi - \omega) = 2\,k_c^2 \sin\chi \sin\psi - \cos(\chi - \psi)$$

Ist nun das Viereck ein Sehnenviereck, so ist $\varphi + \psi = \chi + \omega$ also $\varphi - \omega = \chi - \psi$, mithin besteht für ein solches die wichtige Relation:

$$k_a^2 \sin\varphi \sin\omega = k_c^2 \sin\chi \sin\psi$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ebenso:

$$k_b^2 \sin\varphi \sin\chi = k_d^2 \sin\omega \sin\psi$$

multipliziert:

(XLIV)

$$k_a^2 k_b^2 \sin^2\varphi = k_c^2 k_d^2 \sin^2\psi$$

radiziert:

$$k_a k_b \sin\varphi = \pm k_c k_d \sin\psi$$

Zur Entscheidung über das Vorzeichen ist zu bemerken: Für das gewöhnliche Sehnenviereck gilt zweifellos plus, weil dessen halbe Seiten sämtlich spitze Winkel und dessen Winkel sämtlich hohle Winkel sind. Läßt man das gewöhnliche in das gekreuzte (Fig. 6) übergehen, so wird d negativ, ψ wird durch sein Supplement ersetzt, wodurch k_d und $\sin\psi$ im Vorzeichen nicht verändert werden, also gilt auch hier plus.

Zieht man ferner XLIV von XLIII ab, so ergibt sich:

$$s_a^2 s_b^2 + k_a^2 k_b^2 \cos^2\varphi + 2 s_a s_b k_a k_b \cos\varphi = s_c^2 s_d^2 + \\ + k_c^2 k_d^2 \cos^2\psi + 2 s_c s_d k_c k_d \cos\psi$$

radiziert:

$$s_a s_b + k_a k_b \cos\varphi = \pm (s_c s_d + k_c k_d \cos\psi)$$

Zur Entscheidung über das Vorzeichen ist zu bemerken, daß für ein gekreuztes Sehnenviereck plus gilt. Denn wenn man es einem ebenen annähert, also seine Seiten klein nimmt, dazu φ und ψ spitz, so sind alle vorkommenden Größen positiv. Läßt man dagegen die Seite d durch Null durchgehen, so daß aus dem gekreuzten Viereck ein gewöhnliches wird, so wechseln s_d und $\cos\psi$ das Vorzeichen. Daher gilt für ein gewöhnliches Sehnenviereck minus.

Eliminiert man nun aus $k_a k_b \sin\varphi = k_c k_d \sin\psi$

und $s_a s_b + k_a k_b \cos\varphi = - s_c s_d - k_c k_d \cos\psi$

den Winkel ψ, so ergibt sich:

(XLV)

$$2 (s_a s_b + s_c s_d)(s_a s_b + k_a k_b \cos\varphi) = s_a^2 + s_b^2 - s_c^2 - s_d^2$$

oder:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

(XLVI)

$$2(s_a s_b + s_c s_d)\, k_a k_b \cos\varphi = s_a^2 + s_b^2 - s_c^2 - s_d^2 - 2 s_a^2 s_b^2 - 2 s_a s_b s_c s_d$$

Dies gibt den Ausdruck der Winkel durch die Seiten.

Multipliziert man ferner dieselben beiden Gleichungen, die erste mit $\sin\varphi$, die zweite mit $\cos\varphi$ und addiert, so folgt:

$$k_c k_d (\sin\varphi \sin\psi - \cos\varphi \cos\psi) = k_a k_b + (s_a s_b + s_c s_d) \cos\varphi$$

Da nun aber der Flächeninhalt des Sehnenvierecks

$$F = \varphi + \chi + \psi + \omega - 2\pi = 2(\varphi + \psi) - 2\pi,$$

mithin:

$$\frac{1}{2} F = \varphi + \psi - \pi$$

also $\cos\frac{1}{2} F = -\cos(\varphi + \psi) = \sin\varphi \sin\psi - \cos\varphi \cos\psi$,

so ergibt sich:

$$k_c k_d \cos\frac{1}{2} F = k_a k_b + (s_a s_b + s_c s_d) \cos\varphi,$$

also:

$$2 k_a k_b k_c k_d \cos\frac{1}{2} F = 2 k_a^2 k_b^2 + 2(s_a s_b + s_c s_d)\, k_a k_b \cos\varphi.$$

Hierin XLVI eingesetzt:

$$\cos\frac{1}{2} F = \frac{2 - s_a^2 - s_b^2 - s_c^2 - s_d^2 - 2 s_a s_b s_c s_d}{2 k_a k_b k_c k_d}$$

$$= \frac{-2 + k_a^2 + k_b^2 + k_c^2 + k_d^2 - 2 s_a s_b s_c s_d}{2 k_a k_b k_c k_d}$$

Dies ist der Ausdruck des Flächeninhalts durch die Seiten. Für ein gekreuztes Sehnenviereck ist d negativ zu nehmen, mithin:

$$\cos\frac{1}{2} F' = \frac{2 - s_a^2 - s_b^2 - s_c^2 - s_d^2 + 2 s_a s_b s_c s_d}{2 k_a k_b k_c k_d}$$

Für $d = 0$ geht die Formel in XX (Fläche des Dreiecks) über.

Nach den Formeln:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos\alpha)} \quad \text{und} \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos\alpha)}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

folgt noch für das gewöhnliche Sehnenviereck:

(XLVII)

$$\cos\frac{1}{4}F = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2 - s_a^2 - s_b^2 - s_c^2 - s_d^2 - 2\,s_a\,s_b\,s_c\,s_d + 2\,k_a\,k_b\,k_c\,k_d}{k_a\,k_b\,k_c\,k_d}}$$

oder nach XXXIII:

$$= \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{4}(a+b+c+d)\cos\frac{1}{4}(-a-b+c+d)\cos\frac{1}{4}(-a+b-c+d)\cos\frac{1}{4}(-a+b+c-d)}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2}}}$$

und:

(XLVIII)

$$\sin\frac{1}{4}F = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-2 + s_a^2 + s_b^2 + s_c^2 + s_d^2 + 2\,s_a\,s_b\,s_c\,s_d + 2\,k_a\,k_b\,k_c\,k_d}{k_a\,k_b\,k_c\,k_d}}$$

oder nach XXXIV

$$= \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{4}(-a+b+c+d)\sin\frac{1}{4}(a-b+c+d)\sin\frac{1}{4}(a+b-c+d)\sin\frac{1}{4}(a+b+c-d)}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2}}}$$

Diese letztere Formel geht für unendlich kleine Seiten in den Ausdruck für das ebene Sehnenviereck über:

$$F = \sqrt{\frac{1}{2}(-a+b+c+d)\,\frac{1}{2}(a-b+c+d)\,\frac{1}{2}(a+b-c+d)\,\frac{1}{2}(a+b+c-d)}$$

Aus den letzten fünf Ausdrücken erhält man die für ein gekreuztes Sehnenviereck, wenn man z. B. a negativ nimmt, also

$$\cos\frac{1}{4}F' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2 - s_a^2 - s_b^2 - s_c^2 - s_d^2 + 2\,s_a\,s_b\,s_c\,s_d + 2\,k_a\,k_b\,k_c\,k_d}{k_a\,k_b\,k_c\,k_d}}$$

$$= \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{4}(-a+b+c+d)\cos\frac{1}{4}(a-b+c+d)\cos\frac{1}{4}(a+b-c+d)\cos\frac{1}{4}(a+b+c-d)}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2}}}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\sin\frac{1}{4}F' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-2+s_a^2+s_b^2+s_c^2+s_d^2-2\,s_a\,s_b\,s_c\,s_d+2\,k_a\,k_b\,k_c\,k_d}{k_a\,k_b\,k_c\,k_d}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{4}(a+b+c+d)\sin\frac{1}{4}(-a-b+c+d)\sin\frac{1}{4}(-a+b-c+d)\sin\frac{1}{4}(-a+b+c-d)}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2}}}$$

und für das ebene gekreuzte Sehnenviereck:

$$F' = \sqrt{\frac{1}{2}(a+b+c+d)\,\frac{1}{2}(-a-b+c+d)\,\frac{1}{2}(-a+b-c+d)\,\frac{1}{2}(-a+b+c-d)}$$

Durch Multiplikation von XXXIII und XXXIV findet man noch folgende Identität, die in § 15 ausgelassen worden ist, und die den Gleichungen XXXVIII und XXXIX analog ist.

(**XLIX**)

$$16\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\cos\frac{1}{2}(-\alpha-\beta+\gamma+\delta)\cos\frac{1}{2}(-\alpha+\beta-\gamma+\delta)\cos\frac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma-\delta)\,.$$

$$\sin\frac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma+\delta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma+\delta)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma+\delta)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma-\delta) \equiv$$

$$\equiv -\sum\sin^4\alpha + 2\sum\sin^2\alpha\sin^2\beta + 8\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\delta +$$
$$-4\sum\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma - 4\sum\sin^3\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\delta$$

und eine analoge, wenn man hier $-\alpha$ statt α setzt. — Vergleicht man den jetzt gefundenen Ausdruck mit XXXIX und mit der hierfür gefundenen Determinantenform XLI, so erkennt man, daß er die analoge Determinantenform besitzt:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \sin\alpha & \sin\beta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\alpha & \sin\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \sin\delta & 0 & \sin\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \sin\delta & 0 & \sin\gamma \\ \sin\alpha & 0 & \sin\gamma & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \sin\beta & 0 & 0 & \sin\gamma & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \sin\delta & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \sin\beta & 0 & \sin\delta & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Das doppelte Produkt der beiden Gleichungen XLVII und XLVIII ergibt nun noch (mit leicht verständlichen Abkürzungen und mit Hilfe der soeben gefundenen Identität):

$$\sin\frac{1}{2}F = \frac{1}{2k_a k_b k_c k_d} \cdot$$

$$\sqrt{-\sum s_a^4 + 2\sum s_a^2 s_b^2 + 8 s_a s_b s_c s_d - 4\sum s_a^2 s_b^2 s_c^2 - 4\sum s_a^3 s_b s_c s_d}$$

$$= \frac{2}{k_a k_b k_c k_d}\sqrt{K K_{ab} K_{ac} K_{ad} S_a S_b S_c S_d}$$

$$= \frac{1}{2k_a k_b k_c k_d}\sqrt{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & s_a & s_b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_a & s_b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & s_d & 0 & s_c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & s_d & 0 & s_c \\ s_a & 0 & s_c & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ s_b & 0 & 0 & s_c & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & s_a & s_d & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & s_b & 0 & s_d & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}.$$

Die entsprechenden Ausdrücke für das gekreuzte Sehnenviereck ergeben sich wieder, wenn man hierin a negativ nimmt. Einfache Determinanten für die Flächen ebener Sehnenvierecke sind aus § 13 zu finden.

Bemerkt sei hier noch, daß das gewöhnliche Sehnenviereck das größte der aus vier gegebenen Seiten zu bildenden Vierecke ist, das gekreuzte dagegen das kleinste, falls nicht etwa die vier gegebenen Seiten den Flächeninhalt null zulassen. Der Beweis gehört nicht in den Rahmen dieser Arbeit.

Dagegen sei eine andere interessante Anwendung der in diesem § entwickelten Identität XLIX erwähnt. Bezieht man dieselbe auf die vier Winkel in Fig. 7 (sphärisches Viereck), so ist entweder $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \pi$ oder einer der Winkel gleich der Summe der drei anderen, mithin hat jedenfalls unsere Identität den Wert null; also, wenn wir zur Abkürzung α' statt $\sin\alpha$ schreiben:

$$-\sum \alpha'^4 + 2\sum \alpha'^2 \beta'^2 + 8\alpha'\beta'\gamma'\delta' - 4\sum \alpha'^2 \beta'^2 \gamma'^2 - 4\sum \alpha'^3 \beta'\gamma'\delta' \doteq 0$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

oder mit Hilfe von XXVIII:

$$(-\alpha'+\beta'+\gamma'+\delta')(\alpha'-\beta'+\gamma'+\delta')(\alpha'+\beta'-\gamma'+\delta')(\alpha'+\beta'+\gamma'-\delta') = \\ = 4(\alpha'\beta'+\gamma'\delta')(\alpha'\gamma'+\beta'\delta')(\alpha'\delta'+\beta'\gamma').$$

Hierin ist nun nach der sphärischen Trigonometrie:

$$\alpha' = \sin\alpha = \frac{\sin\frac{a}{2}}{\sin r} = \frac{s_a}{\sin r} \quad \text{u. s. w.}$$

Dies eingesetzt und mit $\sin^6 r$ beiderseits multipliziert:

$$\sin^2 r \cdot (-s_a+s_b+s_c+s_d)(s_a-s_b+s_c+s_d)(s_a+s_b-s_c+s_d)(s_a+s_b+s_c-s_d) = \\ = 4(s_a s_b+s_c s_d)(s_a s_c+s_b s_d)(s_a s_d+s_b s_c)$$

Diese Relation gibt den Ausdruck des Radius durch die Seiten. — Die für das gekreuzte Sehnenviereck geht daraus hervor, indem man überall $-s_a$ statt s_a schreibt, die für das ebene, indem man überall statt der sin die Seiten selber nimmt.

Übrigens ergibt sich aus XLII:

$$\sin^2\frac{e}{2} = s_a^2 + s_b^2 - 2 s_a s_b [s_a s_b + k_a k_b \cos\varphi]$$

und indem man hier den Wert aus XLV einsetzt:

$$\sin^2\frac{e}{2} = \frac{(s_a s_c + s_b s_d)(s_a s_d + s_b s_c)}{s_a s_b + s_c s_d}$$

und ebenso:

$$\sin^2\frac{f}{2} = \frac{(s_a s_b + s_c s_d)(s_a s_d + s_b s_c)}{s_a s_c + s_b s_d}$$

$$\sin^2\frac{g}{2} = \frac{(s_a s_b + s_c s_d)(s_a s_c + s_b s_d)}{s_a s_d + s_b s_c}$$

wo e, f, g die drei verschiedenen Diagonalenlängen sind, die sich bei verschiedener Reihenfolge der Seiten ergeben.

Mithin:

$$\sin^2\frac{e}{2}\sin^2\frac{f}{2}\sin^2\frac{g}{2} = (s_a s_b + s_c s_d)(s_a s_c + s_b s_d)(s_a s_d + s_b s_c)$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Auch das sphärische Analogon zum Ptolemäus folgt leicht durch Multiplikation irgend zweier der obigen drei Diagonalenausdrücke. Desgleichen das Analogon zu XXIII.

§ 19.
Die Vierpunkt-Relation.

Die Determinantenform derselben ist mit Hilfe von Koordinaten bereits in § 1 abgeleitet worden. Auf elementarem Wege findet man die Vierpunkt-Relation, wenn man (Fig. 1) in die Dreistrahlen-Relation

$$2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma = 0$$

die Werte

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - A^2}{2bc} \quad \cos\beta = \frac{c^2 + a^2 - B^2}{2ca} \quad \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - C^2}{2ab}$$

substituiert, die Nenner durch Multiplikation beseitigt und die übrig bleibenden Glieder ordnet. Dann findet man:

$$\text{(L)} \qquad \begin{aligned} &A^2a^2(B^2 + b^2 + C^2 + c^2 - A^2 - a^2) + \\ &+ B^2b^2(C^2 + c^2 + A^2 + a^2 - B^2 - b^2) + \\ &+ C^2c^2(A^2 + a^2 + B^2 + b^2 - C^2 - c^2) + \\ &- A^2B^2C^2 + \\ &- A^2b^2c^2 + \\ &- B^2c^2a^2 + \\ &- C^2a^2b^2 = 0 \end{aligned}$$

Dies ist die Vierpunkt-Relation. Die letzten vier Glieder enthalten je drei solche Strecken, die ein Dreieck miteinander bilden. Es mag hier gleich bemerkt werden, daß der hier gegebene Ausdruck die Hälfte der Determinante I ist.

§ 20.
Die Determinantenform der Vierpunkt-Relation.

Statt den Gang des § 1 einzuschlagen, kann man den Gang des vorigen § wiederholen und die oben angegebenen Werte von $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ in

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = 0$$

einsetzen. Wenn man nun die Zeilen der Reihe nach mit $2abc^2$, $2ab^2c$, $2a^2bc$ multipliziert, dann die Kolonnen der Reihe nach durch ab, ca, bc dividiert, endlich mit $(-1)^4$ multipliziert, so entsteht:

$$-\begin{vmatrix} -2c^2 & A^2-b^2-c^2 & B^2-c^2-a^2 \\ A^2-b^2-c^2 & -2b^2 & C^2-a^2-b^2 \\ B^2-c^2-a^2 & C^2-a^2-b^2 & -2a^2 \end{vmatrix} = 0$$

Durch Zeilen- und Kolonnenvertauschung und „Ränderung“:

$$-\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & 0 & -2a^2 & C^2-a^2-b^2 & B^2-c^2-a^2 \\ b^2 & 0 & C^2-a^2-b^2 & -2b^2 & A^2-b^2-c^2 \\ c^2 & 0 & B^2-c^2-a^2 & A^2-b^2-c^2 & -2c^2 \end{vmatrix} = 0$$

Addiert man hier die erste Kolonne zu den drei letzten und die zweite Zeile zu den drei letzten und vertauscht endlich noch die ersten beiden Kolonnen, wodurch das Minus schwindet, so erhält man die Relation I. Die Herleitung zeigt, daß im ganzen mit dem Zahlenfaktor 8 multipliziert worden ist; da nun in § 19 zur Beseitigung der Nenner nur mit 4 multipliziert worden, so besitzt der entwickelte Determinantenausdruck, ebenso wie die Zweipunkt-Relation XXVI, den Faktor 2.

Ein wenig verschiedenes Verfahren geht von der Determinante VII aus. Diese wird durch Multiplizieren mit $(-2)^3$ und durch Ränderung:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & 0 & -2a^2 & -2ab\cos\gamma & -2ca\cos\beta \\ b^2 & 0 & -2ab\cos\gamma & -2b^2 & -2bc\cos\alpha \\ c^2 & 0 & -2ca\cos\beta & -2bc\cos\alpha & -2c^2 \end{vmatrix} = 0$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Addiert man auch hier die erste Kolonne zu den drei letzten und die zweite Zeile zu den drei letzten, so gelangt man zu demselben Ziel.

§ 21.

Anwendungen und Spezialfälle der Vierpunkt-Relation.

Als spezieller Fall ist zu erwähnen die Stewartsche Gleichung, die eintritt, wenn drei der vier Punkte in einer Geraden liegen. Sie lautet bekanntlich (Fig. 8):

$$\text{(LI)} \qquad ABC = A \cdot a^2 + B \cdot b^2 - C \cdot c^2,$$

wo man noch

$$C = A + B \quad \text{oder} \quad A = C - B \quad \text{oder} \quad B = C - A$$

einsetzen kann, wodurch man eine Relation zwischen fünf Größen erhält. Gewöhnlich findet sie sich in der Form (Fig. 9):

$$\overrightarrow{BC} \cdot a^2 + \overrightarrow{CA} \cdot b^2 + \overrightarrow{AB} \cdot c^2 + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

Sie ist am einfachsten nicht aus der allgemeinen Vierpunkt-Relation, sondern durch eine besondere Entwicklung abzuleiten.

Eine andere Besonderheit entsteht, wenn die vier Punkte auf einem Kreise liegen. Dann tritt zu der Vierpunkt-Relation noch die des Ptolemäus oder XXIII oder XXIV hinzu.

Ist ferner in L $a = b = c = r$, so entsteht

$$r^2 [2 B^2 C^2 + 2 C^2 A^2 + 2 A^2 B^2 - A^4 - B^4 - C^4] = A^2 B^2 C^2,$$

woraus der Radius des dem Dreieck ABC umschriebenen Kreises gefunden wird.

Ist dagegen $A = B = C = R$, so entsteht:

$$R^4 - R^2 (a^2 + b^2 + c^2) + (a^4 + b^4 + c^4 - b^2c^2 - c^2a^2 - a^2b^2) = 0$$

also:

$$2 R^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{3 (2 b^2 c^2 + 2 c^2 a^2 + 2 a^2 b^2 - a^4 - b^4 - c^4)}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Um ferner den Radius eines Kreises zu finden, der drei gegebene Kreise berührt, setze man in L $r+a$ statt a, $r+b$ statt b, $r+c$ statt c. Dann erhält man die Gleichung (Fig. 10):

(LII)

$$r^2\left[\sum(B^2+C^2-A^2)A^2+\sum 4(B^2+C^2-A^2)bc-\sum 4A^2a^2\right]+$$
$$+2r\left[\sum(B^2+C^2-A^2)A^2a+\sum(B^2+C^2-A^2)(b+c)bc-\sum 2A^2a^3\right]+$$
$$-A^2B^2C^2+\sum(B^2+C^2-A^2)A^2a^2+\sum(B^2+C^2-A^2)b^2c^2-\sum A^2a^4=0$$

wo die Summenzeichen sich auf die cyklische Vertauschung der Größen A, B, C unter sich, sowie der Größen a, b, c unter sich beziehen. Der r nicht enthaltende Ausdruck ist der in der Vierpunkt-Relation vorkommende. — Da die Gleichung in Bezug auf r nur vom zweiten Grade ist, so ist das Problem des Apollonius mit Zirkel und Lineal lösbar.

Das Gleiche läßt sich in der Determinantenform ausführen. Man schreibe die Vierpunkt-Relation in der Form:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ a^2 & 1 & 0 & C^2 & B^2 \\ b^2 & 1 & C^2 & 0 & A^2 \\ c^2 & 1 & B^2 & A^2 & 0 \end{vmatrix}=0$$

setze hierin resp. $r+a$, $r+b$, $r+c$ statt a, b, c, so entsteht:

(LIII)

$$\begin{vmatrix} 0 & 0+0+1 & r^2+2ra+a^2 & r^2+2rb+b^2 & r^2+2rc+c^2 \\ 0+0+1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ r^2+2ra+a^2 & 1 & 0 & C^2 & B^2 \\ r^2+2rb+b^2 & 1 & C^2 & 0 & A^2 \\ r^2+2rc+c^2 & 1 & B^2 & A^2 & 0 \end{vmatrix}=0$$

Diese Determinante läßt sich nach den Summanden der ersten Zeile und Kolonne in neun Determinanten von je 25 Elementen zerlegen, von denen aber sechs paarweise einander gleich sind. So findet man:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$
r^4 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & & \\ 1 & 1 & & \ddots & \\ 1 & 1 & & & \ddots \end{vmatrix}
+ 2r^3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2a & 1 & \ddots & & \\ 2b & 1 & & \ddots & \\ 2c & 1 & & & \ddots \end{vmatrix} +
$$

$$
+ 2r^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ a^2 & 1 & \ddots & & \\ b^2 & 1 & & \ddots & \\ c^2 & 1 & & & \ddots \end{vmatrix}
+ r^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2a & 2b & 2c \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2a & 1 & \ddots & & \\ 2b & 1 & & \ddots & \\ 2c & 1 & & & \ddots \end{vmatrix} +
$$

$$
+ 2r \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2a & 2b & 2c \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ a^2 & 1 & \ddots & & \\ b^2 & 1 & & \ddots & \\ c^2 & 1 & & & \ddots \end{vmatrix}
+ \begin{vmatrix} 0 & 1 & a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ a^2 & 1 & \ddots & & \\ b^2 & 1 & & \ddots & \\ c^2 & 1 & & & \ddots \end{vmatrix} = 0
$$

wo durch die schräge Linie die in der vorigen Determinante dort stehenden Elemente angedeutet sind. Der Faktor von r^4 und $2r^3$ ist augenscheinlich null. Die beiden Glieder mit r^2 lassen sich folgendermaßen umgestalten (wenn man die erste Zeile von der zweiten abzieht):

$$
2r^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a^2 & 1 & \ddots & & \\ b^2 & 1 & & \ddots & \\ c^2 & 1 & & & \ddots \end{vmatrix}
+ r^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2a & 2b & 2c \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2a & 1 & \ddots & & \\ 2b & 1 & & \ddots & \\ 2c & 1 & & & \ddots \end{vmatrix}
$$

Da nun die erste Determinante, nach Elementen der zweiten Zeile geordnet, bis auf die Unterdeterminante von 1 verschwindet, so läßt sie sich auch schreiben:

$$
2r^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & \ddots & & \\ b & 1 & & \ddots & \\ c & 1 & & & \ddots \end{vmatrix}
+ r^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2a & 2b & 2c \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2a & 1 & \ddots & & \\ 2b & 1 & & \ddots & \\ 2c & 1 & & & \ddots \end{vmatrix}
$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

oder:

$$r^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2a & 1 & \ddots & & \\ 2b & 1 & & \ddots & \\ 2c & 1 & & & \ddots \end{vmatrix} + r^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2a & 2b & 2c \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2a & 1 & \ddots & & \\ 2b & 1 & & \ddots & \\ 2c & 1 & & & \ddots \end{vmatrix}$$

oder:

$$r^2 \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2a & 1 & \ddots & & \\ 2b & 1 & & \ddots & \\ 2c & 1 & & & \ddots \end{vmatrix} + r^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2a & 2b & 2c \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2a & 1 & \ddots & & \\ 2b & 1 & & \ddots & \\ 2c & 1 & & & \ddots \end{vmatrix}$$

Addiert man nun diese beiden Glieder, so nimmt die ganze Gleichung folgende Gestalt an:

(LIV)

$$r^2 \begin{vmatrix} -2 & 0 & 2a & 2b & 2c \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2a & 1 & \ddots & & \\ 2b & 1 & & \ddots & \\ 2c & 1 & & & \ddots \end{vmatrix} + 2r \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2a & 2b & 2c \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ a^2 & 1 & \ddots & & \\ b^2 & 1 & & \ddots & \\ c^2 & 1 & & & \ddots \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & 1 & a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ a^2 & 1 & \ddots & & \\ b^2 & 1 & & \ddots & \\ c^2 & 1 & & & \ddots \end{vmatrix} = 0$$

Um hieraus den Wert für r zu finden, multipliziere man beiderseits mit:

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2a & 2b & 2c \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2a & 1 & \ddots & & \\ 2b & 1 & & \ddots & \\ 2c & 1 & & & \ddots \end{vmatrix}$$

so erhält man, wenn man die Gleichung auflöst:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\text{(LV)} \quad r\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2a & 2b & 2c \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2a & 1 & \ddots & & \\ 2b & 1 & & \ddots & \\ 2c & 1 & & & \ddots \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2a & 2b & 2c \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ a^2 & 1 & \ddots & & \\ b^2 & 1 & & \ddots & \\ c^2 & 1 & & & \ddots \end{vmatrix} + \sqrt{R}$$

wobei R den Wert hat:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2a & 2b & 2c \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ a^2 & 1 & \ddots & & \\ b^2 & 1 & & \ddots & \\ c^2 & 1 & & & \ddots \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} -2 & 0 & 2a & 2b & 2c \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2a & 1 & \ddots & & \\ 2b & 1 & & \ddots & \\ 2c & 1 & & & \ddots \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ a^2 & 1 & \ddots & & \\ b^2 & 1 & & \ddots & \\ c^2 & 1 & & & \ddots \end{vmatrix}$$

Wir gestalten R noch in folgender Weise um:

$$R = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2a & 2b & 2c & -2 & . & . & . & . \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & . & . & . & . \\ a^2 & 1 & \ddots & & & 2a & . & . & . & . \\ b^2 & 1 & & \ddots & & 2b & . & . & . & . \\ c^2 & 1 & & & \ddots & 2c & . & . & . & . \\ & & & & & & & & & \\ . & . & . & . & . & 0 & 1 & a^2 & b^2 & c^2 \\ . & . & . & . & . & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ . & . & . & . & . & 2a & 1 & \ddots & & \\ . & . & . & . & . & 2b & 1 & & \ddots & \\ . & . & . & . & . & 2c & 1 & & & \ddots \end{vmatrix} +$$

$$- \begin{vmatrix} -2 & 0 & 2a & 2b & 2c & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & . & . & . & . & . \\ 2a & 1 & \ddots & & & . & . & . & . & . \\ 2b & 1 & & \ddots & & . & . & . & . & . \\ 2c & 1 & & & \ddots & . & . & . & . & . \\ & & & & & & & & & \\ 0 & . & . & . & . & 0 & 1 & a^2 & b^2 & c^2 \\ 0 & . & . & . & . & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2a & . & . & . & . & a^2 & 1 & \ddots & & \\ 2b & . & . & . & . & b^2 & 1 & & \ddots & \\ 2c & . & . & . & . & c^2 & 1 & & & \ddots \end{vmatrix}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wo an den mit Punkten bezeichneten Stellen Nullen zu denken sind. — Oder:

$$R = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2a & 2b & 2c & -2 & . & . & . & . \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & . & . & . & . \\ a^2 & 1 & & & & 2a & . & . & . & . \\ b^2 & 1 & & & & 2b & . & . & . & . \\ c^2 & 1 & & & & 2c & . & . & . & . \\ & & & & & & & & & \\ . & . & . & . & . & 0 & 1 & a^2 & b^2 & c^2 \\ . & . & . & . & . & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ . & . & . & . & . & 2a & 1 & & & \\ . & . & . & . & . & 2b & 1 & & & \\ . & . & . & . & . & 2c & 1 & & & \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2a & 2b & 2c & -2 & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & . & . & . & . \\ 0 & 1 & & & & 2a & . & . & . & . \\ 0 & 1 & & & & 2b & . & . & . & . \\ 0 & 1 & & & & 2c & . & . & . & . \\ & & & & & & & & & \\ 0 & . & . & . & . & 0 & 1 & a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & . & . & . & . & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ a^2 & . & . & . & . & 2a & 1 & & & \\ b^2 & . & . & . & . & 2b & 1 & & & \\ c^2 & . & . & . & . & 2c & 1 & & & \end{vmatrix}.$$

beide Determinanten addiert:

$$\textbf{(LVI)} \quad R = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2a & 2b & 2c & -2 & . & . & . & . \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & . & . & . & . \\ a^2 & 1 & & & & 2a & . & . & . & . \\ b^2 & 1 & & & & 2b & . & . & . & . \\ c^2 & 1 & & & & 2c & . & . & . & . \\ & & & & & & & & & \\ 0 & . & . & . & . & 0 & 1 & a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & . & . & . & . & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ a^2 & . & . & . & . & 2a & 1 & & & \\ b^2 & . & . & . & . & 2b & 1 & & & \\ c^2 & . & . & . & . & 2c & 1 & & & \end{vmatrix} =$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$
= - \begin{vmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a^2 & b^2 & c^2 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & . & . & . & . \\
a^2 & 1 & 0 & C^2 & B^2 & 2a & . & . & . & . \\
b^2 & 1 & C^2 & 0 & A^2 & 2b & . & . & . & . \\
c^2 & 1 & B^2 & A^2 & 0 & 2c & . & . & . & . \\
 & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 2a & 2b & 2c & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & . & . & . & . & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
a^2 & . & . & . & . & 2a & 1 & 0 & C^2 & B^2 \\
b^2 & . & . & . & . & 2b & 1 & C^2 & 0 & A^2 \\
c^2 & . & . & . & . & 2c & 1 & B^2 & A^2 & 0
\end{vmatrix}
$$

Bei Berührung von innen tritt in LIII $a - r$ u. s. w. an die Stelle von $r + a$, bei umschließender Berührung dagegen $r - a$. Da jedoch nur die Quadrate dieser Größen vorkommen, so unterscheiden sich die beiden letzten Fälle in der Formel nicht von einander. Sie liefern beide das Quadrat $r^2 - 2ra + a^2$, d. h. man hat in LV $-a$ statt a zu setzen. Somit bekommt man die Radien der acht Berührungskreise, wenn man in LV den Größen a, b, c alle nur möglichen Vorzeichenzusammenstellungen verleiht. — Dabei kann augenscheinlich die Determinante R, wie aus LVI ersichtlich, ebenso wie der Faktor von r in LV nur vier verschiedene Werte annehmen, — während der dritten dort vorkommenden Determinante wirklich acht verschiedene Werte zustehen, von denen sich je zwei nur durch das Vorzeichen unterscheiden.

Ist daher bei einer bestimmten Vorzeichenkombination, z. B. $-a$, $+b$, $+c$ der Radiuswert gefunden und man benutzt nun bei derselben Vorzeichenkombination den negativen Wert der Wurzel, so ergibt sich nur der negative Wert von demjenigen Radius, den man bei der Vorzeichenkombination $+a$, $-b$, $-c$ und positivem Wurzelwert finden würde. Man kann also den negativen Wurzelwert ganz entbehren.

Wird der Wurzelausdruck bei einer bestimmten Vorzeichenkombination, z. B. $-a$, $+b$, $+c$, imaginär, so wird

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

er nach dem soeben Gesagten auch bei $+a$, $-b$, $-c$ imaginär, also sind nur noch sechs Kreise möglich. — So kann es geschehen, daß auch nur 4, 2, 0 Kreise möglich sind. Tritt an Stelle irgend eines der gegebenen Kreise ein Punkt, so ist der betreffende Radius $=0$ zu setzen.

Liegen die Zentren der gegebenen Kreise in einer Geraden, so ist in der Stewartschen Gleichung (LI) $r+a$, $r+b$, $r+c$ einzusetzen. Dann findet man:

$$r = \frac{ABC - Aa^2 - Bb^2 + Cc^2}{2(Aa + Bb - Cc)}$$

Jedoch ist nicht immer, selbst wenn diese Gleichung einen positiven Wert für r liefert, auch ein Kreis möglich, z. B. nicht für $B = A$, $C = 2A$, $b = 0$, $c = 0$, $a = \frac{4}{3}A$. Über die acht Kreise gilt ähnliches wie im allgemeinen Falle.

Dividiert man die Gleichungen LII und LIV durch r^2 und setzt dann $r = \infty$, so erhält man:

$$\sum (B^2 + C^2 - A^2) A^2 + \sum 4 (B^2 + C^2 - A^2) bc - \sum 4 A^2 a^2 = 0$$

oder in Determinantenform:

(LVII)
$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2a & 2b & 2c \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2a & 1 & 0 & C^2 & B^2 \\ 2b & 1 & C^2 & 0 & A^2 \\ 2c & 1 & B^2 & A^2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

nämlich die Beziehung zwischen den Seiten eines Dreiecks und den von seinen Ecken auf eine Gerade gefällten Loten (Fig. 11). Auch hier ist die Determinante das Doppelte des Ausdrucks in der vorhergehenden Formel.

Um hieraus den Radius eines Kreises zu finden, der zwei Kreise und eine Gerade berührt, setze man r statt c, $r+A$ statt A, $r+B$ statt B; dann erhält man, wenn man vorher noch der Gleichförmigkeit wegen die Bezeichnungen A und

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

a gegeneinander vertauscht, ebenso B und b, die für r quadratische Gleichung (Fig. 12):

$$4\,r^2\Big[A-B-a+b\Big]^2-4r\Big[(A+B+a+b)\,C^2-2\,(A-B)\,(Aa-Bb)+$$
$$+(A-B-a+b)\,(a^2-b^2)\Big]+4\,ABC^2+C^4+4\,(A-B)\,(Aa^2-Bb^2)+$$
$$-2\,C^2\,(a^2+b^2)+(a^2-b^2)^2=0$$

Das Gleiche läßt sich in der Determinantenform ausführen. Man schreibe die Gleichung LVII:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & B^2 & A^2 & 2c \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ B^2 & 1 & 0 & C^2 & 2a \\ A^2 & 1 & C^2 & 0 & 2b \\ 2c & 0 & 2a & 2b & -2 \end{vmatrix}=0,$$

setze auch hier r statt c, $r+A$ statt A, $r+B$ statt B und vertausche die Bezeichnungen A und a gegeneinander, ebenso B und b, so findet man (Fig. 12):

$$\begin{vmatrix} 0 & 0+0+1 & r^2+2rb+b^2 & r^2+2ra+a^2 & 0+2r+0 \\ 0+0+1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ r^2+2rb+b^2 & 1 & 0 & C^2 & 2A \\ r^2+2ra+a^2 & 1 & C^2 & 0 & 2B \\ 0+2r+0 & 0 & 2A & 2B & -2 \end{vmatrix}=0$$

Hier schlage man ein ganz analoges Verfahren ein wie oben, zerlege nach den Summanden in neun Determinanten, von denen sechs paarweise gleich sind. Die Faktoren von r^4 und r^3 werden null, die r^2 enthaltenden Glieder sind:

$$2\,r^2\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ b^2 & 1 & 0 & C^2 & 2A \\ a^2 & 1 & C^2 & 0 & 2B \\ 0 & 0 & 2A & 2B & -2 \end{vmatrix}+r^2\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2b & 2a & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2b & 1 & 0 & C^2 & 2A \\ 2a & 1 & C^2 & 0 & 2B \\ 2 & 0 & 2A & 2B & -2 \end{vmatrix}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Diese lassen sich durch ein ganz analoges Verfahren wie oben vereinigen, so daß die ganze Gleichung die Gestalt annimmt:

$$r^2 \begin{vmatrix} -2 & 0 & 2b & 2a & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2b & 1 & 0 & C^2 & 2A \\ 2a & 1 & C^2 & 0 & 2B \\ 2 & 0 & 2A & 2B & -2 \end{vmatrix} + 2r \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2b & 2a & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ b^2 & 1 & 0 & C^2 & 2A \\ a^2 & 1 & C^2 & 0 & 2B \\ 0 & 0 & 2A & 2B & -2 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & 1 & b^2 & a^2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ b^2 & 1 & 0 & C^2 & 2A \\ a^2 & 1 & C^2 & 0 & 2B \\ 0 & 0 & 2A & 2B & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Diese hat die Auflösung:

$$r \begin{vmatrix} -2 & 0 & 2b & 2a & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2b & 1 & 0 & C^2 & 2A \\ 2a & 1 & C^2 & 0 & 2B \\ 2 & 0 & 2A & 2B & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2b & 2a & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ b^2 & 1 & 0 & C^2 & 2A \\ a^2 & 1 & C^2 & 0 & 2B \\ 0 & 0 & 2A & 2B & -2 \end{vmatrix} + \sqrt{R}$$

wo R die Form hat:

$$R = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2b & 2a & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ b^2 & 1 & 0 & C^2 & 2A \\ a^2 & 1 & C^2 & 0 & 2B \\ 0 & 0 & 2A & 2B & -2 \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} -2 & 0 & 2b & 2a & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2b & 1 & 0 & C^2 & 2A \\ 2a & 1 & C^2 & 0 & 2B \\ 2 & 0 & 2A & 2B & -2 \end{vmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & b^2 & a^2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ b^2 & 1 & 0 & C^2 & 2A \\ a^2 & 1 & C^2 & 0 & 2B \\ 0 & 0 & 2A & 2B & -2 \end{vmatrix}$$

sich aber durch eine ganz analoge Umformung schreiben läßt:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$R = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b^2 & a^2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & . & . & . & . \\ b^2 & 1 & 0 & C^2 & 2A & 2b & . & . & . & . \\ a^2 & 1 & C^2 & 0 & 2B & 2a & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 2A & 2B & -2 & 2 & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 2b & 2a & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & . & . & . & . & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ b^2 & . & . & . & . & 2b & 1 & 0 & C^2 & 2A \\ a^2 & . & . & . & . & 2a & 1 & C^2 & 0 & 2B \\ 0 & . & . & . & . & 2 & 0 & 2A & 2B & -2 \end{vmatrix}$$

wo die Punkte durch Nullen zu ersetzen sind.

Die acht Radiuswerte werden erhalten durch die vier Vorzeichenkombinationen von a und b in Verbindung mit dem doppelten Wurzelvorzeichen. Über das Imaginärwerden der Wurzel gilt Analoges wie oben.

Liegen die Zentren der gegebenen Kreise auf verschiedenen Seiten der gegebenen Geraden, so ist entweder B oder A negativ zu nehmen.

Die Bestimmung des Radius eines Kreises, der zwei Gerade und einen Kreis berührt, ist einfacher und geschieht am besten direkt.

§ 22.

Der Tetraeder-Inhalt.

Bezeichnet man die Kantenlängen eines Tetraeders wie in Fig. 13 und fällt von der Spitze aus das Lot h, so besteht zwischen den Längen A, B, C, a′, b′, c′ die Vierpunkt-Relation. Setzt man in dieser nun $a'^2 = a^2 - h^2$, $b'^2 = b^2 - h^2$, $c'^2 = c^2 - h^2$ und bezeichnet die linke Seite in L der Abkürzung wegen mit V, so findet man:

$$V = h^2 (2B^2C^2 + 2C^2A^2 + 2A^2B^2 - A^4 - B^4 - C^4)$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Da nun die Klammer $= 16\,F^2_{ABC}$ ist, so ist:

$$\mathrm{Vol}_{ABCabc} = \frac{1}{12}\sqrt{V}$$

$$= \frac{1}{12}\sqrt{\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & a^2 & 0 & C^2 & B^2 \\ 1 & b^2 & C^2 & 0 & A^2 \\ 1 & c^2 & B^2 & A^2 & 0 \end{vmatrix}}$$

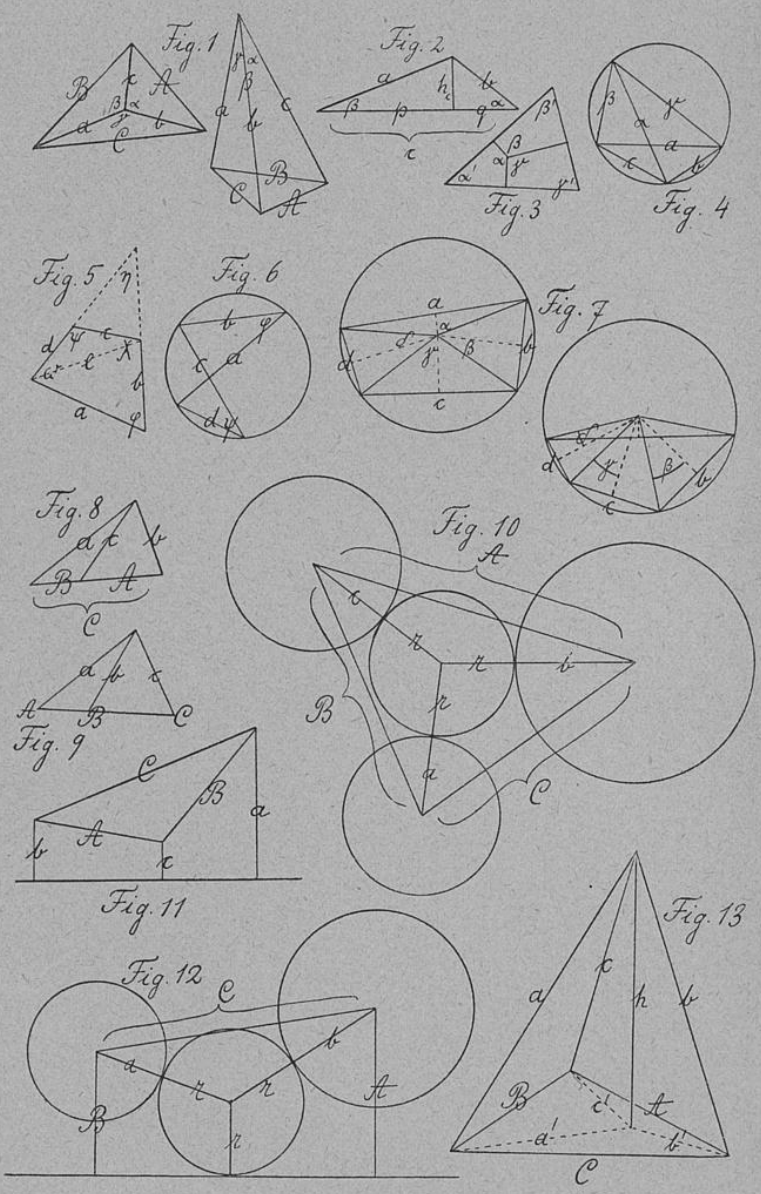
Somit bedeutet die Vierpunkt-Relation, daß das Volumen des aus den sechs Strecken gebildeten Tetraeders null ist.

Schlußbemerkung. Die Arbeit mußte, weil für eine Programmabhandlung zu umfangreich, hier abgebrochen werden. Der zweite Teil muß später erscheinen. Hoffentlich ist sie, obwohl mit geringer Literaturkenntnis geschrieben, doch einem oder dem anderen Kollegen von Nutzen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Figuren-Tafel.



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

© The Tiffen Company, 2007
TIFFEN Gray Scale
R G B W G K C Y M
A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf