Über die Bewegung eines materiellen Punktes auf Rotationsflächen.

Rotationsflächen entstehen dadurch, dass eine grade oder krumme Linie, die erzeugende Linie, deren Punkte von einer im Raume festliegenden Graden einen nach Gestalt und Lage der Linie bestimmten gesetzmässigen Abstand haben, sich um diese Grade, die Axe, dreht. Die erzeugende Linie kann so liegen, dass sie mit der Rotationsaxe in derselben Ebene sich befindet — dann ist sie selbst eine ebene Linie —, oder dass sie und die Rotationsaxe nicht in einer Ebene enthalten sind — dann ist sie entweder eine ebene oder eine Raumlinie. Für die Rotationsfläche selbst ist es jedoch ohne Belang, diese Fälle zu unterscheiden; denn wie auch die erzeugende Linie beschaffen war, die aus ihr entstandene Rotationsfläche kann stets erhalten werden aus der Umdrehung derjenigen Curve, welche als Schnitt einer Ebene, die durch die Rotationsaxe gelegt ist, mit der Rotationsfläche sich ergiebt, d. h. aus der Umdrehung einer ebenen Linie. Die Ebene, in welcher diese erzeugende Linie sich befindet, heisst Meridianebene, die Linie selbst Meridianschnitt der Rotationsfläche. Jede Ebene, welche senkrecht zur Rotationsaxe gelegt wird, heisst Horizontalebene und ihre Schnittlinie mit der Rotationsfläche Horizontalschnitt. Dieser ist stets ein Kreis.

In der nachfolgenden Betrachtung handelt es sich um die Bewegung eines materiellen Punktes, dessen Bewegungsgebiet eine Rotationsfläche ist. Derartige Untersuchungen sind zwar schon vielfach angestellt*), doch ist dies nicht mit der Allgemeinheit geschehen, wie im Folgenden. Die Möglichkeit dieser Allgemeinheit verdanken wir zwei

*) Ich erwähne nur:

Sonntag, Über die Bewegung eines mat. Punktes auf der Fläche eines Rotationsparaboloids. Marburg 1879.

Werner, Beitrag zur Theorie der Bewegung eines materiellen Punktes auf Rotationsflächen (spec. Rotationsparaboloid). Ratibor 1886.

Besonders Staude: Über die Bewegung eines schweren Punktes auf einer Rotationsfläche. Acta mathem. 1888.

Bertram, Beitrag zur Kenntnis von der Bewegung eines schweren Punktes auf Rotationsflächen mit verticaler Axe. Archiv der Math. u. Phys. Th. 59, S. 193, 1876.

Züge, Bewegung eines schweren Punktes auf einem Rotationsparaboloid, ebenda, Th. 70, S. 58, 1884.

E. Voss, Bewegung eines schweren Punktes auf der Fläche eines graden Kegels und eines Rotationsparaboloids. Schwerin 1878 (1872).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Abhandlungen von Weierstrass*) und Staude.**) Die letztere bildet die Grundlage für das unten folgende Problem. Herr Staude hat selbst eine Anwendung seiner Untersuchungen gemacht in der vorhin citierten Arbeit (Acta math. 1888). Hier untersucht er die Bewegung eines schweren Punktes auf einer Rotationsfläche, welche, trotzdem sie als eine Anwendung seiner allgemeinen Darstellung für die Umkehrung gewisser Integrale dient, doch für manche mechan. Probleme von grosser Allgemeinheit ist. Dass mit dieser Arbeit ein Feld über die Anwendbarkeit jenes Umkehrproblems nicht abgeschlossen war, sondern vielmehr erst geöffnet wurde, gab mir Veranlassung, die folgende Untersuchung über eine fernere Anwendbarkeit des Staude'schen Umkehrproblems vorzunehmen unter der Voraussetzung, dass das Bewegungsgebiet, wie schon erwähnt, ebenfalls eine Rotationsfläche sei. Den Bedingungen gemäss, unter denen das Umkehrproblem Geltung hat, konnte es nicht von wesentlichem Einfluss sein, dass grade die Schwerkraft das die Bewegung bedingende Agens war. Daher kam es darauf an, zu ergründen, welcher Art die Kraft sein kann und welchen Voraussetzungen sie unterworfen sein muss, damit das Umkehrproblem gebraucht werden kann.

In Betreff der Rotationsflächen muss gleich von vorn herein eine gewisse Beschränkung gemacht werden. Eine beliebige Rotationsfläche wird, wie oben gesagt wurde, von jeder Horizontalebene in einem Kreise geschnitten. Solcher Kreise können für eine Schnittebene auch mehrere vorhanden sein, was von der Gestalt der Erzeugungslinie abhängt. Wir machen für die folgende Untersuchung die Einschränkung, dass nur solche Rotationsflächen in Betracht gezogen werden sollen, die von einer Horizontalebene in nicht mehr als zwei (concentrischen) Kreisen geschnitten werden.

Für die wirkende Kraft sei die Voraussetzung, dass sie den Principien der lebendigen Kraft und der Flächen für die Rotationsaxe unterworfen sei.

I.

Die Gleichungen der Bewegung auf Rotationsflächen mit einfachen Horizontalschnitten.

Das Coordinatensystem sei ein rechtwinkliges. Die Rotationsaxe möge die Z-Axe sein. Dann lautet die Gleichung für jede Rotationsfläche

(1) $$x^2 + y^2 = f^2(z).$$

Der Winkel, den die Meridianebene durch den materiellen Punkt mit der ZX-Ebene bildet, heisse φ. Alsdann können die Coordinaten des materiellen Punktes, dessen Masse gleich 1 gedacht wird, x, y, z, dargestellt werden durch

(2) $$x = f(z)\cos\varphi\ ,\ y = f(z)\sin\varphi\ ,\ z = z.$$

*) Über eine Gattung reell periodischer Funktionen. Monatsberichte der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1866, S. 97.

**) Über eine Gattung doppelt reell periodischer Funktionen zweier Veränderlicher. Mathemat. Annalen, Bd. 29, S. 468.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es genügt, dass nur der positive Wert von f(z) genommen wird, da der Winkel φ in seiner Veränderlichkeit unbeschränkt bleibt.

Es ist alsdann

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

oder

$$v^2 = f'^2(z)\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + f^2(z)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

Da vorausgesetzt ist, dass das Princip der lebendigen Kraft gilt, nehmen wir an, dass die vorhandene Kräftefunktion U heisse.

Deswegen folgt

$$f'^2(z)\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + f^2(z)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2\,(U + h), \tag{3}$$

worin h die Konstante der lebendigen Kraft bedeutet. Da aber ferner das Princip der Flächen für die X Y-Ebene bestehen soll, so ist

$$x\,\frac{dy}{dt} - y\,\frac{dx}{dt} = k.$$

Hier ist k die doppelte Flächengeschwindigkeit der auf die X Y-Ebene projicierten Bewegung. Setzen wir für x und y die Werte aus (2) ein, so folgt

$$f^2(z)\,\frac{d\varphi}{dt} = k. \tag{4}$$

k kann unter allen Umständen als positiv angenommen werden.

Aus (3) und (4) entsteht

$$f'^2(z)\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + \frac{k^2}{f^2(z)} + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2\,(U + h); \tag{5}$$

daher

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \frac{2\,(U + h)\,f^2(z) - k^2}{f^2(z)\,(1 + f'^2(z))}$$

Dieser Ausdruck kann nur integriert werden, wenn U eine Funktion von z allein ist. Es sei $U = \Psi(z)$. Mithin ist

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\sqrt{2\,(\Psi(z) + h)\,f^2(z) - k^2}}{f(z)\,\sqrt{1 + f'^2(z)}} \tag{6}$$

also

$$dt = \frac{f(z)\,\sqrt{1 + f'^2(z)}}{\sqrt{2\,(\Psi(z) + h)\,f^2(z) - k^2}}\,dz\,. \tag{7}$$

Andrerseits ist nach (4)

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{k}{f^2(z)}$$

folglich

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{k}{f^2(z)}\,\frac{dt}{dz}$$

und

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

(8) $$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{k\sqrt{1+f'^2(z)}}{f(z)\sqrt{2(\Psi(z)+h)f^2(z)-k^2}}$$

endlich

(9) $$d\varphi = \frac{k\sqrt{1+f'^2(z)}}{f(z)\sqrt{2(\Psi(z)+h)f^2(z)-k^2}}\,dz$$

Setzen wir nun noch in (7) und (9)

$$v = \sin^2\varphi, \text{ also } d\varphi = \frac{dv}{2\sqrt{v(1-v)}},$$

so sind die Beziehungen zwischen x, y, z, t gegeben durch

(10) $$x = f(z)\sqrt{1-v}\ ,\ y = f(z)\sqrt{v}\ ,\ z = z$$

und

(11) $$\begin{cases} -\int_0^v \frac{dv}{2\sqrt{v(1-v)}} + \int_{z_0}^z \frac{k\sqrt{1+f'^2(z)}\,dz}{f(z)\sqrt{2(\Psi(z)+h)f^2(z)-k^2}} = 0 \\ \int_{z_0}^z \frac{f(z)\sqrt{1+f'^2(z)}\,dz}{\sqrt{2(\Psi(z)+h)f^2(z)-k^2}} = t \end{cases}$$

Diese Gleichungen haben die Form des Staude'schen allgemeinen Umkehrproblems. Es bedarf daher jetzt der näheren Bedingungen für die Umkehrbarkeit der Integrale.

II.

Die Bedingungen des Umkehrproblems und die Wendekreise der Bewegung für Rotationsflächen mit einfachen Horizontalschnitten.

Die Integrale (11) sind nach Staude*) umkehrbar, wenn

1.) $F(z) = 2(\Psi(z)+h)f^2(z) - k^2$ für zwei reelle Werte verschwindet, zwischen denen kein Wert liegt, der diese Funktion Null oder unendlich werden lässt, und zwischen denen sie einen beständig positiven reellen Wert besitzt;

2.) $\frac{k\sqrt{1+f'^2(z)}}{f(z)}$ und $f(z)\sqrt{1+f'^2(z)}$ eindeutige, stetige Funktionen sind, die innerhalb der beiden in 1.) genannten Nullwerte ihr Vorzeichen niemals wechseln und niemals unendlich werden. Die doppelt gestrichenen Wurzeln sind positiv zu nehmen;

*) Acta mathematica 1888. S. 306.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3.) der aus einer Determinante sich ergebende Ausdruck $-\frac{1}{2} f(z) \sqrt{1 + f'^2(z)}$ für alle zwischen den genannten Nullwerten liegenden z nicht Null wird, also sein Zeichen nicht ändert.*)

Hierzu tritt noch die für unsere Rotationsflächen stets erfüllte Bedingung, dass f(z) innerhalb eines gewissen Intervalles $A < z < B$ mit näher zu bestimmenden Grenzen A und B eine eindeutige und stetige Funktion der reellen Variabeln z, sowie von positivem reellen, von o und ∞ verschiedenen Werte ist; sie soll ferner innerhalb desselben Umfanges einen bestimmten nicht unendlich werdenden ersten Differentialquotienten $f'(z)$ besitzen.

Es ist leicht ersichtlich, dass zwischen den Grenzen A und B, infolge der Voraussetzungen für die Rotationsfläche, die Bedingungen 2.) und 3.) ohne weiteres erfüllt werden. Es bleibt daher nur zu untersuchen übrig, ob und wie den Bedingungen 1.) genügt wird.

Zu diesem Zwecke wählen wir ein rechtwinkliges Coordinatensystem mit den Axen z und w in der Halbmeridianebene der Rotationsfläche, wo z die Rotationsaxe und w die Durchschnittslinie der Halbmeridianebene mit der X Y-Ebene des ursprünglichen Coordinatensystems ist.**) Alsdann ist die Gleichung der Curve, in welcher die Halbmeridianebene die Rotationsfläche schneidet

$$w = f(z) \tag{12}$$

worin w positiv ist. Man sieht, dass, wenn man aus dieser Gleichung und aus

$$w = \frac{k}{\sqrt{2(\Psi(z) + h)}} \tag{13}$$

w eliminiert, als Resultat $F(z) = o$ folgt. Die letztere Gleichung stellt eine Curve dar, welche nach Staude Halbmeridiancurve genannt werden soll. Die doppelt gestrichene Wurzel gilt auch hier und später als positiv. Die Z-Coordinaten der Durchschnittspunkte der Curven (12) und (13) ergeben nun sämtliche reellen Nullwerte der Funktion F(z). Die Bedingung 1.) wird demnach nur erfüllt werden, wenn ein Schneiden dieser beiden Curven stattfindet. Ist dieses der Fall, so bleibt für die Teile der Curve $w = f(z)$ zwischen zwei aufeinander folgenden Schnittpunkten noch zu beachten, dass kein Wert von z hier $F(z) \infty$ macht und dass F(z) positiv und reell ist. Das letztere ergiebt sich dadurch, dass für ein gewisses $z = z_1$ zwei w vorhanden sind, das eine für den Halbmeridianschnitt $w_1 = f(z_1)$ und das andere für die Halbmeridiancurve $w_2 = \frac{k}{\sqrt{2(\Psi(z_1) + h)}}$. Es ist

*) In den acta mathem. S. 306 heisst es über die Determinante: Endlich soll die Determinante $D(x_1, x_2)$ für alle etc. Wertepaare x_β beständig positiv und von o verschieden sein.

Herr Staude schreibt mir hierzu: „Für die Determinante $D(x_1, x_2)$ S. 306 genügt es, dass sie entweder immer positiv oder immer negativ ist. Ich habe der Kürze wegen die erste Voraussetzung gemacht, die sich stets herstellen lässt, indem man nötigenfalls die Vorzeichen von g_{11} und g_{12} umkehrt, wodurch der Ansatz (1) S. 306 nicht geändert wird. Selbst wenn rechts nicht o, sondern t_1 in der ersten Gleichung (1) stünde, würde die erwähnte Zeichenumkehr ohne Belang sein, da t_1 von $-\infty$ bis $+\infty$ gehen könnte."

Diese Bemerkungen scheinen mir so wichtig, dass ich sie hier mit Erlaubniss des Herrn Autors wiedergebe.

**) Vergl. Acta math. 1888. S. 315.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

nun klar, dass $F(z)$ nur für solche Werte von z positiv ist, für welche die Differenz $w_1 - w_2 > o$ ist.

Lassen wir nun die Halbmeridianebene mit ihren beiden Curven um die Z-Axe eine volle Umdrehung machen, so beschreibt die Curve (12) die Rotationsfläche, während (13) eine andere neue Umdrehungsfläche bildet, welche kurz (w, Ψ) genannt werden soll. Beide Flächen schneiden einander in Kreisen. Alle Punkte ein und desselben Kreises haben gleiche z-Coordinaten, und da diese die Nullwerte der Funktion $F(z)$ darstellen, so geben sie die äussersten Grenzen an, welche von dem beweglichen materiellen Punkte erreicht werden können, an welchen derselbe unter Umständen eine in Bezug auf das durchlaufene Gebiet rückläufige Bewegung annimmt, weshalb sie Wendekreise genannt sind.

Es gilt demnach auch hier, wie bei Staude, der Satz:

Die Wendekreise der Bewegung des materiellen Punktes auf einer Rotationsfläche sind die Schnittkreise der letzteren mit der Rotationsfläche

$$x^2 + y^2 = \frac{k^2}{2\,(\Psi(z) + h)}\,. \tag{14}$$

Das es nun auf die Gestalt und Lage dieser Fläche ankommt, muss für $\Psi(z)$ eine nähere Bestimmung getroffen werden.

III.

Die Kräftefunktion und die Kraft.

Die Frage, welche jetzt aufgeworfen wird, lautet: Welcher Art muss die Kraft sein, welchen Bedingungen ist sie unterworfen, damit sie die in I und II gemachten Voraussetzungen erfüllt und welche Folgerungen ergeben sich hieraus für die Rotationsfläche (14)?

Die Kräftefunktion bedingt die Grösse und das Wesen der Kraft. Die analytische Beschaffenheit derselben giebt also Aufklärung darüber, welcher Art die Kräfte sein müssen, damit sie die eingeschlagene Behandlung des Bewegungsproblems gestatten. Da die vorliegende Kräftefunktion $\Psi(z)$, wie erwähnt, eine Funktion von z sein muss, um obige Integrationsweise zuzulassen, so ist hierbei zu beachten, dass auch der Fall, wo die Kräftefunktion eine Funktion einer Funktion etc. von z ist, in Betracht gezogen werden muss; denn es kommt ja nur darauf an, dass die Kräftefunktion eine analytisch nur durch z dargestellte Funktion ist. Nun ist jede Kräftefunktion eine analytische Funktion, in unserm Problem eine solche der Coordinaten des beweglichen Punktes. Sie wird sich mithin im allgemeinen nicht als Funktion von z allein, sondern auch von x und y darstellen; denn ihre partiellen Ableitungen nach den drei Variabeln x, y, z ergeben die Kraftcomponenten parallel den drei Axen. Von allen möglichen Kräftefunktionen sind jedoch nur solche zulässig, die sich darstellen durch die Variabeln z allein. Dies ist aber vermöge der Gleichung für die Rotationsfläche $x^2 + y^2 = f^2(z)$ nur dann möglich, wenn die Coordinaten x und y in der analytischen Form der Kräftefunktion als Complexe

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$(x^2 + y^2)$ auftreten. Dann verschwindet x und y stets durch die Substitution $x^2 + y^2 = f^2(z)$. Wie wir sehen, enthält dann die Kräftefunktion das $f(z)$ der gegebenen Rotationsfläche: sie ist von der Rotationsfläche abhängig. Für solche Fälle hängt auch die Rotationsfläche (14) in ihrer Gestalt und Lage ab von der gegebenen Rotationsfläche. Die Fläche (14) ist mithin nur dann unabhängig von der ursprünglichen Rotationsfläche, wenn die Coordinaten x und y überhaupt nicht in der Kräftefunktion vorkommen, diese vielmehr eine unmittelbare Funktion von z ist.

Um die Eigenschaften der zulässigen Funktionen im Wesen der Kraft zu erkennen, ist es erforderlich die Richtung der wirkenden Kraft in Betracht zu ziehen. Da für das Problem das Princip der Flächen für die X Y-Ebene gilt, so ist die notwendige Bedingung, dass die Resultante aller möglichen Kräfte, hier also der auf den beweglichen Punkt direct wirkenden Kraft und der vermöge des Zwanges, welchem der Punkt unterworfen ist, auftretenden Normalkraft, stets durch die Z-Axe gerichtet ist. Hieraus folgt, dass die direct wirkende Kraft nur in der Meridianebene der Rotationsfläche liegen darf. Aber ihre Richtung in dieser Ebene kann entweder parallel oder nicht parallel mit der Z-Axe sein. Ist die Kraft nicht parallel der Z-Axe gerichtet, so wird sie sich im allgemeinen nach den Coordinatenaxen in drei Componenten zerlegen lassen und dann müssen, wie oben dargelegt ist, x und y in der Kräftefunktion als Complexe von der Form $(x^2 + y^2)$ auftreten. In diesem Falle wird also stets die Kräftefunktion von der Rotationsfläche abhängen. Ist die Kraft immer, wo auch der bewegliche Punkt sich befinden mag, parallel der Z-Axe gerichtet, so werden die Kraftcomponenten parallel der X- und Y-Axe verschwinden; die Kräftefunktion kann also den Complex $(x^2 + y^2)$ nicht enthalten: sie ist von der gegebenen Rotationsfläche unabhängig und daher auch die Fläche (14).

Zwei Fälle sind demnach zu unterscheiden, wenn es sich darum handelt, auf den beweglichen Punkt eine Kraft wirken zu lassen so, dass die Rotationsfläche (14) abhängig oder unabhängig von der jedesmal zu Grunde liegenden Rotationsfläche ist.

Die Rotationsfläche (14) ist von der gegebenen Rotationsfläche

a) unabhängig, wenn die Resultante aller wirkenden Kräfte parallel der Rotationsaxe ist;

b) abhängig, wenn die Resultante aller wirkenden Kräfte in der Meridianebene liegt und nicht parallel der Z-Axe ist. Hierzu kommt, dass die Kräftefunktion x und y nur in Complexen von der Form $(x^2 + y^2)$ enthalten darf.

Als ein Beispiel zu a) dient die oben genannte Staude'sche Abhandlung, in welcher als wirkende Kraft die Schwere angenommen ist. Für b) soll hier später ein Beispiel gegeben werden.

Es sei hier nur noch bemerkt, dass der Fall a) allgemein, b) dagegen nur durch specielle Untersuchungen für die einzelnen Rotationsflächen sich erledigen lässt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

IV.

Die Gleichungen der Bewegung auf einer Rotationsfläche mit zweifachen Horizontalschnitten.

Hat die Rotationsfläche zweifache Horizontalschnitte, so ist $f(z)$ in dem Intervalle $A < z < B$ nicht mehr eindeutig und $f'(z)$ nicht mehr überall von o und ∞ verschieden. Es ist aber möglich durch Substitutionen $f(z)$ und $f'(z)$ Formen zu geben, die den früheren Bedingungen genügen. Es ist zu setzen*)

$$z = \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} \cos u$$

worin A und B die Grenzen des Intervalles sind, zwischen denen z sich bewegen kann.

Da die Betrachtungen für geschlossene wie offene Rotationsflächen analog sind, wobei im Wesentlichen nur A und B richtig gewählt werden müssen, so soll hier nur von geschlossenen Rotationsflächen die Rede sein. Es ist nach Staude $f(z)$ alsdann darzustellen in der Form $\mathfrak{p}(z) + \sqrt{q(z)}$ und $q(z) = (z - A)(B - z)\, q_1(z)$. Hierin müssen $\mathfrak{p}(z)$ und $q_1(z)$ für alle im genannten Intervalle liegenden z eindeutige und stetige Funktionen von z sein und einen positiven, reellen von o und ∞ verschiedenen Wert besitzen. Der erste Differentialquotient dieser Funktionen $\mathfrak{p}(z)$ und $q'(z)$ wird für dieselben Werte von z nicht ∞. Endlich ist $\mathfrak{p}(z) > \sqrt{q(z)}$. Nach obiger Substitution ist dann

$$q(z) = \sqrt{(z-A)(B-z)} \;.\; \sqrt{q_1(z)} = -\frac{A-B}{2} \sin u \sqrt{q_1(z)}$$

$$dz = -\frac{A-B}{2} \sin u \, du.$$

Diese Substitution erreicht, dass, wenn u alle reellen Werte durchläuft, z zwischen A und B oscilliert. Es ist dann

$$f(z) = \mathfrak{p}\left(\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}\cos u\right) - \frac{A-B}{2} \sin u \sqrt{q_1\left(\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}\cos u\right)}$$

$$= F(u)$$

eine eindeutige und stetige Funktion von u, die immer positiv und von o und ∞ verschieden ist. Ferner wird

$$1 + f'(z) = \frac{q(z) + (\mathfrak{p}'(z)\sqrt{q(z)} + \frac{1}{2} q'(z))^2}{(z-A)(B-z)\, q_1(z)} = \frac{G(u)}{(z-A)(B-z)},$$

wo $G(u)$ für alle reellen Werte von u eindeutig, stetig, positiv und von o und ∞ verschieden ist. Aus diesem Grunde darf $\sqrt{G(u)}$ ohne Beschränkung als positiv genommen werden.

*) Vergl. Staude, Acta math. 1888. S. 325 (27) u. f.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Setzen wir noch

$$\cos u = \frac{1-\sigma^2}{1+\sigma^2}\,,\ \sin u = \frac{2\sigma}{1+\sigma^2}\,,\ du = \frac{2\,d\sigma}{1+\sigma^2}\,,\ \text{wodurch}$$

$F(u) = F_1(\sigma)$, $G(u) = G_1(\sigma)$ wird, so lauten die Gleichungen der Bewegung

$$x = F_1(\sigma)\sqrt{1-v}\,,\ y = F_1(\sigma)\sqrt{v}\,,\ z = \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}\,\frac{1-\sigma^2}{1+\sigma^2}$$

und

$$-\int_0^v \frac{dv}{2\sqrt{v(1-v)}} + \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{2\,k\sqrt{G_1(\sigma)}\,d\sigma}{(1+\sigma^2)\,.\,F_1(\sigma)\sqrt{2\left[\psi\left(\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}\,\frac{1-\sigma^2}{1+\sigma^2}\right)+h\right]F_1^2(\sigma)-k^2}} = 0$$

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{2\,F_1(\sigma)\sqrt{G_1(\sigma)}\,d\sigma}{(1+\sigma^2)\sqrt{2\left[\psi\left(\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}\,\frac{1-\sigma^2}{1+\sigma^2}\right)+h\right]F_1^2(\sigma)-k^2}} = t\,.$$

Diese Bewegungsgleichungen erfüllen vermöge der Eigenschaften der darinstehenden Funktionen die in II. angeführten Bedingungen. Ihre Umkehrbarkeit hängt also wie vorher allein von den Eigenschaften des Radikanden im Nenner des zweiten Integrales ab, und es ergeben sich den früheren ganz analoge Untersuchungen, deren Verlauf für den einzelnen Fall genau so wie vorher gefunden werden kann.

Das Resultat aus diesen Untersuchungen ist, dass die Integrale für beiderlei Arten von Rotationsflächen umkehrbar sind, wenn die in II, 1) genannte Bedingung erfüllt wird. Man hat bei jedem besonderen Problem daher nur hierauf zu achten. Zwischen den dort genannten Grenzen existiert dann immer, wie Herr Staude nachgewiesen hat, eine eindeutige Funktion der oberen Integralgrenzen, welche eine für alle reellen Werte von t eindeutige, endliche und stetige, sowie bedingt periodische Funktion von t ist. Diese kann durch eine für alle reellen Werte von t gleichmässig convergente Reihe, die zweifach unendliche Fourier'sche Reihe, dargestellt werden.*)

V.

Beispiel für das Rotationsellipsoid.

Um die in II und III auseinander gesetzten Beziehungen zwischen Kräftefunktion, Kraft und Rotationsfläche (14) gegenüber der gegebenen Rotationsfläche, welche nur bis zu einem gewissen Grade von Bestimmtheit geführt werden konnten, durch ein Beispiel noch näher zu erörtern, stellen wir uns folgende Aufgabe:

Es ist die Bewegung eines materiellen Punktes zu untersuchen, der gezwungen ist auf einem Rotationsellipsoid zu bleiben, und der von einem auf der Rotationsaxe liegenden Centrum umgekehrt proportional der nten Potenz seiner Entfernung von diesem angezogen wird.

*) Vergl. Staude, Acta math. 1888 S. 307 und Math. Annalen, Bd. 29. S. 468 ff.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

In diesem Problem ist zunächst die Bedingung erfüllt, dass die bewegende Kraft stets durch die Z-Axe gerichtet ist, also immer in eine Meridianebene des Ellipsoids fällt, in der sie jedoch nicht parallel der Z-Axe gerichtet ist. Demnach gehört die Aufgabe der zweiten durch III b) bedingten Art an, worin die Rotationsfläche (14) abhängig ist von dem Rotationsellipsoid. Wir werden sofort sehen, dass auch die andere Bedingung erfüllt wird, nämlich dass $\Psi(z)$ x und y nur in der Form $x^2 + y^2$ enthält.

Das Coordinatensystem ist das frühere und es gelten unmittelbar alle vorausgeschickten Bewegungsgleichungen. Die Untersuchung hat daher da einzusetzen, wo die früheren allgemeinen Betrachtungen stehen geblieben sind. Es gilt nämlich jetzt, die Eigenschaften der Rotationsfläche (14) und ihre Beziehungen zum Rotationsellipsoid aufzusuchen.

A. Die Curve (13).

Da über die Lage des anziehenden Centrums auf der Z-Axe Bestimmtes nicht gesagt ist, so nennen wir die Entfernung desselben auf der positiven Axe ν. Es ist dann klar, dass dasselbe jede Lage auf der Z-Axe haben kann, wenn wir ν variieren zwischen $-\infty$ und $+\infty$. Nennen wir ferner die Entfernung des beweglichen Punktes vom anziehenden Centrum r, die in der Einheit der Entfernung wirkende Kraft μ, so ist die Kraft, welche jeden Augenblick auf den materiellen Punkt mit der Masse 1 wirkt,

$$K = -\frac{\mu}{r^n}.$$

Die hieraus sich ergebende Kräftefunktion ist

$$\Phi(r) = \frac{\mu}{(n-1)\, r^{n-1}}$$

Es ist nun wichtig, dass r durch z ersetzt werden kann. Dies geschieht mit Hülfe der Gleichung für das Rotationsellipsoid

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

und durch die Entfernungsgleichung

$$x^2 + y^2 + (z - \nu)^2 = r^2$$

Die Gleichung des Ellipsoids ist die gewöhnliche und die Lage der Axen an sich verständlich. Ohne weiteres folgt für r aus den letzten beiden Gleichungen

$$r = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{c^2} z^2 + (z - \nu)^2} \tag{15}$$

Die Wurzel gilt wieder als positiv. Es wird also nun in der That r ersetzt werden können durch einen Ausdruck von z; folglich ist jetzt die Kräftefunktion

$$\Phi(r) = \Psi(z) = \frac{\mu}{(n-1)\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{c^2} z^2 + (z - \nu)^2}^{\,n-1}}. \tag{16}$$

Die Bedingung $A < z < B$ geht hier über in $-c < z < +c$, weil die Z-Coordinaten des materiellen Punktes niemals einen kleineren resp. grösseren Wert von z erreichen können. Wie wir gesehen haben, hängt die Gestalt und Lage der Rotations-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

fläche (14) nur von ihrer Erzeugungslinie (13) ab, weshalb wir nur diese und ihre Lage zur Ellipse in der Meridianebene (w, z) darzustellen brauchen. Die Gleichung (13) lautete

$$w = \frac{k}{\sqrt{2\,(\Psi(z) + h)}}\,.$$

Hierin ist k, wie erwähnt, positiv, und h wird gefunden durch eine Anfangslage. Wählen wir hierfür einen Wendekreis der Bewegung, so ist $\frac{dz}{dt} = o$. Daher folgt nach (6)

$$2\,(\Psi(z) + h)\,f^2(z) - k^2 = 0$$

oder

$$h = \frac{k^2}{2\,f^2(z)} - \Psi(z)$$

woraus ersichtlich ist, wann h positiv, wann negativ ist. Im allgemeinen wird h positiv sein, da der Nenner von $\Psi(z)$ diese Funktion genügend klein macht. Für kleine n jedoch kann der Fall eintreten, dass h negativ ist. Zunächst soll jedoch h als positiv behandelt werden, und an geeigneter Stelle sollen dann auch die negativen Werte berücksichtigt werden.

Zur Discussion der Curve (13), die sich auf das rechtwinklige Coordinatensystem w, z bezieht, sind die reellen Maxima und Minima aufzustellen. Es ist zunächst aus (13) und (16) nach einigen Umformungen

$$(17)\qquad w = \frac{k\sqrt{n-1}\,.\sqrt[4]{a^2 - \frac{a^2}{c^2}\,z^2 + (z-\nu)^2}^{\,n-1}}{\sqrt{2\left[\mu + h\,(n-1)\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{c^2}\,z^2 + (z-\nu)^2}^{\,n-1}\right]}}$$

Wir bilden nun den ersten Differentialquotienten von w nach z.

Zu diesem Zwecke setzen wir $\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{c^2}\,z^2 + (z-\nu)^2} = r$, also

$\frac{dr}{dz} = \frac{z\,\frac{c^2 - a^2}{c^2} - \nu}{r}$. Für w gebrauchen wir jetzt die Form (13), nämlich

$$(17a)\qquad w = \frac{k}{\sqrt{2\left[\frac{\mu}{(n-1)\,r^{n-1}} + h\right]}}$$

Wir differenzieren zuerst nach r, dies giebt

$$\frac{dw}{dr} = \frac{k\,\mu}{r^n\sqrt{2\left[\frac{\mu}{(n-1)\,r^{n-1}} + h\right]}^{\,3}}\,.$$

Hieraus

$$\frac{dw}{dz} = \frac{k\,\mu\left[z\,\frac{c^2 - a^2}{c^2} - \nu\right]}{r^{n+1}\sqrt{2\left[\frac{\mu}{(n-1)\,r^{n-1}} + h\right]}^{\,3}}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Führen wir hier den Wert von r wieder ein, so erhalten wir nach einer kleinen Umformung

$$(18)\quad \frac{dw}{dz} = \frac{\mu k \sqrt{n-1}\, 3 \left[z \frac{c^2 - a^2}{c^2} - \nu\right] \sqrt[4]{a^2 - \frac{a^2}{c^2} z^2 + (z-\nu)^2}^{\,n-5}}{\sqrt{2\left[\mu + h(n-1)\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{c^2} z^2 + (z-\nu)^2}^{\,n-1}\right]}^{\,3}}$$

Setzen wir diesen Wert gleich Null, so folgt

$$(19)\quad \begin{aligned} &1.\ z = \frac{\nu c^2}{c^2 - a^2} = \delta_1 \\ &2.\ z = \frac{\nu c^2}{c^2 - a^2} \pm \frac{c\,a}{c^2 - a^2} \sqrt{\nu^2 - (c^2 - a^2)} = \begin{cases} \delta_2 \text{ gültig nur} \\ \delta_3 \text{ für } n > 5 \end{cases} \end{aligned}$$

Der Kürze wegen mögen diese 3 Werte mit $\delta_{1,2,3}$ bezeichnet werden. Endlich ist zu prüfen, für welche dieser Werte der zweite Differentialquotient von w nach z positiv oder negativ wird. Durch nochmalige Differentiation nach z und nach mehrfachen Umformungen erhalten wir

$$(20)\quad \begin{cases} \frac{d^2 w}{d z^2} = \dfrac{k \mu \sqrt{n-1}\, 3 \sqrt[4]{a^2 - \frac{a^2}{c^2} z^2 + (z-\nu)^2}^{\,n-9}}{\sqrt{2\left[\mu + h(n-1)\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{c^2} z^2 + (z-\nu)^2}^{\,n-1}\right]}^{\,5}} \\ \cdot \left\{ \frac{c^2 - a^2}{c^2}\left[a^2 - \frac{a^2}{c^2} z^2 + (z-\nu)^2\right]\left(2\mu + 2h(n-1)\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{c^2} z^2 + (z-\nu)^2}^{\,n-1}\right) + \left[z\frac{c^2 - a^2}{c^2} - \nu\right]^2 \cdot \right. \\ \left. \left(3\mu(n-1) - 2(n+1)\left[\mu + h(n-1)\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{c^2} z^2 + (z-\nu)^2}^{\,n-1}\right]\right)\right\}. \end{cases}$$

Um nun über das Vorzeichen von $\frac{d^2 w}{dz^2}$ entscheiden zu können, werden wir die 3 Fälle unterscheiden müssen $c^2 - a^2 < 0$, $c^2 - a^2 = 0$, $c^2 - a^2 < 0$. In jedem einzelnen Falle ist dann die Lage des anziehenden Centrums zu berücksichtigen.

I. Fall. $c^2 - a^2 > 0$.

Wir setzen zunächst den Wert δ_1 aus (19) in die Gleichung für $\frac{d^2 w}{dz^2}$ ein. Alsdann verschwindet das zweite Glied der geschweiften Klammer und es wird

$$(21)\quad \frac{d^2 w}{d z^2}_{(z=\delta_1)} = \frac{k \mu \sqrt{n-1}\, 3 \sqrt[4]{\frac{a^2}{c^2 - a^2}\left[(c^2 - a^2) - \nu^2\right]}^{\,n-5}}{\sqrt{2\left[\mu + h(n-1)\sqrt{\frac{a^2}{c^2 - a^2}\left[(c^2 - a^2) - \nu^2\right]}^{\,n-1}\right]}^{\,3}} \cdot \frac{c^2 - a^2}{c^2}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Um zu entscheiden, ob dieser Wert positiv oder negativ ist, ist es nur nötig den Wert der $(n-5)^{ten}$ Potenz der 4ten Wurzel im Zähler zu betrachten, denn mit dem Vorzeichen dieses Ausdrucks stimmt das von $\frac{d^2 w}{dz^2}$ überein. Es ist selbstverständlich, dass der Wert dieser Potenz nur reell sein darf. Wir müssen nun zur Entscheidung die 3 Fälle untersuchen:

$$\text{a) } c^2 - a^2 > \nu^2$$
$$\text{b) } c^2 - a^2 = \nu^2$$
$$\text{c) } c^2 - a^2 < \nu^2 .$$

a) $c^2 - a^2 > \nu^2$. Das anziehende Centrum liegt zwischen den beiden Brennpunkten der Ellipse resp. des Rotationsellipsoids.

Wie sofort zu sehen, ist $\frac{d^2 w}{dz^2}$ positiv. Die Curve hat unter dieser Bedingung für $z = \delta_1$ ein Minimum. Die Werte $\delta_{2,3}$ sind aber dann imaginär und haben daher hier keine Bedeutung. w wird für keinen Wert von z Null. Die Z-Axe kann daher nirgends getroffen werden. Für $z = \pm\infty$ wird w konstant, nämlich

$$w = \frac{k}{\sqrt{2h}}$$

wie man aus (17a) erkennt.

Diese Gleichung stellt eine Parallele zur Z-Axe dar in der Entfernung $\frac{k}{\sqrt{2h}}$ von dieser. Der Parallelen nähert sich die Curve (13) asymptotisch. Sie liegt symmetrisch zu der Parallelen, welche zur w-Axe durch den Punkt $z = \delta_1$ gezogen ist. Dies erkennt man, wenn man in (17) für z Werte einsetzt, welche von δ_1 gleichweit nach beiden Seiten entfernt liegen. Es ist klar, dass nur der Radikand, wie er unter der 4ten Wurzel steht, mit sich änderndem z eine Änderung für w bedingt. Wird dieser für zwei Werte von z gleich, so gilt dasselbe von w. Man setze also für z die beiden Werte $\delta_1 + \varepsilon$ und $\delta_1 - \varepsilon$ in den Radikanden ein, so wird derselbe für $z = \delta_1 \pm \varepsilon$

$$a^2 - \frac{a^2}{c^2}(\delta_1 \pm \varepsilon)^2 + (\delta_1 \pm \varepsilon - \nu)^2 = a^2 + \frac{c^2 - a^2}{c^2}\delta_1^2 - 2\nu\delta_1 + \nu^2 + \varepsilon^2\frac{c^2 - a^2}{c^2}$$
$$\mp 2\varepsilon\left(\nu - \frac{c^2 - a^2}{c^2}\delta_1\right).$$

Führt man $\delta_1 = \frac{\nu c^2}{c^2 - a^2}$ ein, so wird die letzte Klammer Null und es folgt nur der eine Wert

$$a^2 + \nu^2 - \frac{2\nu^2 c^2}{c^2 - a^2} + \varepsilon^2\frac{c^2 - a^2}{c^2} .$$

Von $z = -\infty$ bis $z = \delta_1$ ist $\frac{dw}{dz}$ negativ, die Curve (13) fällt mithin gegen die Z-Axe; von hier bis zu $z = +\infty$ ist $\frac{dw}{dz}$ positiv, weshalb die Curve sich von der Z-Axe entfernt. Da die Curve an der Stelle ihres Minimums der Z-Axe ihre convexe Seite und in der Nähe von $z = \pm\infty$ derselben Axe die concave Seite zukehrt, so wird sie für einen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

mittleren Wert einen Wendepunkt besitzen. Wenn es nun auch für unser Problem nicht erforderlich ist, den Wert von z für den Wendepunkt zu kennen, so dient es doch zur Sicherheit, wenn wir uns überzeugen, dass zwei solcher Werte vorhanden sein müssen. Für einen Wendepunkt muss $\frac{d^2 w}{dz^2}$ sein Zeichen ändern. Diese Änderung bewirkt der Ausdruck in (19), der in der geschweiften Klammer steht. Während diese Klammer anfänglich, d. h. in der Nähe von $z = \delta_1$, positiv ist, überwiegt bei zunehmendem z der negative Teil des zweiten Gliedes; denn $\left[z \frac{c^2 - a^2}{c^2} - \nu\right]^2$ wächst mit z schneller als $a^2 - \frac{a^2}{c^2} z^2 + (z - \nu)^2$. Die Gestalt der Curve ist demnach die der Figur I.

Über die Veränderung dieser Curve nach Lage und Gestalt möge hier Folgendes stehen.

Wo liegt der Scheitel der Curve für die verschiedenen zwischen die oben genannten Grenzwerte fallenden ν? Der Werth $\delta_1 = \frac{\nu c^2}{c^2 - a^2}$ kann angesehen werden als $\nu \cdot \frac{c^2}{c^2 - a^2}$. Hier ist also ν multipliciert mit einem Werte welcher grösser als 1 ist, folglich ist δ_1 seiner Grösse nach, also absolut, grösser als ν. Nur für $\nu = 0$ ist auch $\delta_1 = 0$, d. h. der Scheitel der Curve liegt auf der w-Axe. Die Curve schneidet die Ellipse in 2 Punkten (Fig. I a) oder sie berührt sie in einem Punkte (Fig. I b). Lassen wir ν auf der positiven oder negativen Z-Axe vom Nullpunkt gegen die Brennpunkte hin wandern, so geht der Scheitel der Curve dem ν stets voran. Kommt ν dem Brennpunkte nahe, so wird der Scheitel die Parallele, welche man durch den Brennpunkt zur w-Axe legen kann, bereits überschritten haben; denn diese Parallele wird von ihm schon passiert, wenn $\frac{\nu c^2}{c^2 - a^2} = \pm \sqrt{c^2 - a^2}$ oder $\nu = \pm \frac{c^2 - a^2}{c^2} \sqrt{c^2 - a^2}$ ist. Die Curve schneidet die Ellipse in 2 Punkten (Fig. I c) oder berührt sie in einem Punkte (Fig. I d).

Auch w_{δ_1}, d. h. der Wert von w für $z = \delta_1$, ändert sich bei Verschiebung von ν. Aus (17a) folgt

$$w_{\delta_1} = \frac{k}{\sqrt{2\left[\frac{\mu}{(n-1)\sqrt{\frac{a^2}{c^2 - a^2}\left[(c^2 - a^2) - \nu^2\right]}^{\,n-1}} + h\right]}}$$

Ändert sich nur ν allein, während die andern Constanten ihre Werte behalten, so hängt die Beweglichkeit von w_{δ_1} nur von

$$(c^2 - a^2) - \nu^2$$

ab. Mit diesem Ausdruck wächst und fällt w_{δ_1}. Für $\nu = 0$, also wenn w_{δ_1} mit der Z-Axe zusammenfällt, hat der Ausdruck seinen grössten Wert, folglich auch w_{δ_1}. Je mehr ν auf der positiven oder negativen Axe fortschreitet und sich den beiden Brennpunkten nähert, rückt demnach der Scheitel der Curve der Z-Axe näher.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Welche Gestaltsänderungen treten bei der Curve ein, wenn n wächst? Aus der Gleichung (17a) sieht man, dass mit wachsenden n der Quotient $\frac{\mu}{(n-1)\, r^{n-1}}$ kleiner wird, und zur Null convergiert. Je kleiner aber dieser Bruch wird, um so grösser wird w. Denken wir uns für ein bestimmtes z die zugehörige w Coordinate gezogen, so wird für alle möglichen positiven $n > 1$ die Curvenschaar so liegen, dass jedesmal die Curve mit kleinerem n diese Coordinate näher an der Z-Axe schneidet als die mit grösserem. Der Scheitelpunkt selbst rückt mit grösser werdenden n der Asymptote näher, welche an der Grenze $n = \infty$ mit der Curve zusammenfällt.

Wodurch wird die Lage der Asymptote bestimmt? Die Asymptote hat die Gleichung $w = \frac{k}{\sqrt{2h}}$. Ihre Lage ist demnach nur abhängig von k und h. Ändert sich k allein, so wächst oder fällt w mit k, ändert sich h allein, so wächst w mit fallendem h und umgekehrt.

Man sieht, dass für $h = o$ die Asymptote ins Unendliche rückt und für noch kleinere h ihre Bedeutung verliert. Es treten aber alsdann zwei neue Asymptoten auf, deren Gleichung sich ergiebt, wenn der Radikand des Nenners in (17) gleich Null gesetzt wird. Diese Asymptoten laufen parallel zur w-Axe.

b) $c^2 - a^2 = \nu^2$. Das anziehende Centrum liegt in einem der beiden Brennpunkte. Da es gleichgültig ist, für welchen Brennpunkt wir unsere Betrachtungen anstellen, so entscheiden wir uns für den auf der positiven Z-Axe liegenden. Zunächst sehen wir, dass jetzt die Werte δ_1, δ_2, δ_3 (19) Geltung haben; da jedoch δ_2 und δ_3 gleich δ_1 sind, so bleibt auch jetzt nur der eine Wert $\delta_1 = \frac{c^2}{\sqrt{c^2 - a^2}}$ für die Untersuchung auf Maximum oder Minimum übrig. Die Gleichung (21) lässt nun keine Entscheidung zu, denn sie geht über in

$$\frac{d^2 w}{d z^2} = 0$$

Wir können aber schon daraus, dass w nur positive Werte hat und für den einzigen δ_1 Null wird, kleinere Werte jedoch nicht annehmen kann, schliessen, dass an der Stelle $z = \delta_1$ ein Minimum liegt. Da ferner w sowohl als $\frac{dw}{dz}$ an dieser Stelle continuierlich bleiben und w eine eindeutige Funktion von z ist, so ergiebt sich ohne weiteres, dass der von der negativen Seite der z herkommende Zweig die Z-Axe an der Stelle δ_1 berührt und nach der positiven Seite der z weitergeht. Die Curve kehrt hier der Z-Axe ihre convexe Seite zu, während sie wie vorher für ein gewisses positives und negatives z einen Wendepunkt hat und von hier an der Z-Axe die concave Seite zuwendet. Für $z = \pm \infty$ wird wieder $w = \frac{k}{\sqrt{2h}}$. Die Asymptote bleibt also dieselbe wie in a). Der Wert δ_1 ist jetzt grösser als c. Die Gestalt der Curve zeigt die Figur II.

Über die Änderungen der Curve in Bezug auf die Gestalt gilt dasselbe wie in a). Es hat somit die Curve mit der Ellipse 2 Punkte gemein (Fig. II a) oder nur einen solchen (Fig. II b).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

c) $c^2 - a^2 < \nu^2$. Das anziehende Centrum liegt auf der Z-Axe in den Verlängerungen der Entfernung der beiden Brennpunkte. Von den Werten (19) haben hier nur δ_2 und δ_3 allgemeine Geltung. δ_1 kommt dagegen dann in Betracht, wenn r in (17a), welches durch diese Grösse imaginär wird, infolge des Potenzierens mit $n - 1$ reell wird. Diese Möglichkeit tritt nur für gewisse Werte von n ein, die besonders hervorgehoben werden sollen und deren Geltung resp. Nichtgeltung für das Problem sich von selbst ergeben wird.

Führen wir zunächst die Werte $z = \delta_{2,3}$, welche nur bestehen für $n > 5$, in w ein, so wird nach (17) $w = 0$, die Curve trifft demnach die Z-Axe an den beiden Stellen $z = \delta_2$ und $z = \delta_3$. Ist $z = \infty$, so ist $w = \frac{k}{\sqrt{2h}}$, also existiert auch hier wieder die in a) und b) auftretende Asymptote. Das früher benutzte Kriterium für Maxima und Minima liefert für $z = \delta_{2,3}$ keine Aufklärung; denn es ist $\frac{d^2 w}{dz^2}$ für diese Werte gleich Null. Aber wir wissen bereits, dass für jedes $n > 1$ die Curve an zwei Stellen die Z-Axe trifft und nach einer in positiver Entfernung von Z gelegenen Asymptote in zwei Zweigen verläuft, der eine Zweig nämlich von $z = \delta_2$ bis $z = \infty$, der andere von $z = \delta_3$ bis $z = -\infty$. δ_2 und δ_3 liegen symmetrisch zu δ_1. Für alle Werte zwischen δ_2 und δ_3 wird r imaginär. Nun ist aber ein imaginärer Wert reell, wenn er mit Zahlen von der Form 4α oder $4\alpha + 2$ potenziert wird. Für unsern Fall muss $\sqrt{r^{n-1}}$ eine positiv reelle Grösse sein, was nur der Fall ist für Werte von der Form $n = 4\alpha + 1$ d. h. für (1), (5), 9, 13, 17, 21, 25 . . . . Diese Werte von n lassen w zwischen $z = \delta_2$ und δ_3 positiv reell werden. Wir haben sonach 2 Fälle: 1) n beliebig > 5, 2) n hat die Form $4\alpha + 1$.

1) Für jedes $n > 5$ giebt es zwei getrennt liegende Curvenzweige, deren Grenzen oben schon genannt sind. Wir machen nun in Bezug auf die Gestalt der Curve denselben Schluss wie in b). Da auch hier w für alle Werte $z > \delta_2$ und $< \delta_3$ einen positiven, reellen und eindeutigen Wert besitzt und $\frac{dw}{dz}$ für genannte Werte von z bis in die Grenzen hinein continuierlich bleibt, so muss jeder Curventeil in der Nähe der Werthe δ_2 und δ_3 der Z-Axe die convexe Seite zukehren und diese selbst für $z = \delta_2$ und δ_3 zur Tangente haben. Alles Andere bleibt wie in b). Die Curve hat jetzt die Gestalt der Figur IIIa.

Der Wert δ_1 ist grösser als c, mithin δ_2 unter allen Umständen grösser als c. δ_3 kann nun gleich oder grösser als c sein. Es ergiebt sich nämlich der Minimalwert für δ_3 aus dem ersten Differentialquotienten von δ_3 nach ν. Dieser Minimalwert ist $\nu = c$. Hierfür ist auch $\delta_3 = c$. Daher liegt δ_3 stets ausserhalb der Ellipse bis auf diesen Grenzfall; denn wird ν grösser als c, so wird es auch δ_3 und es ist dann immer $\delta_3 > \nu$.

Die Schnitt- oder Berührungspunkte sind für die verschiedenen Lagen von ν dargestellt in Fig. IIIa a, b, c, d, e, f.

2) n hat die Form $4\alpha + 1$. Während die Curventeile des ersten Falles bestehen bleiben, tritt noch ein Teil zwischen jenen auf. Jetzt hat nämlich auch δ_1 wieder Geltung und zwar ist $\frac{d^2 w}{dz^2}$ für δ_1 negativ, weshalb an dieser Stelle ein Maximum liegt. Es bildet

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

der hier noch hinzugekommene Curventeil einfach die Verbindung der beiden aus 1). Die Curve hat jetzt die Form der Figur IIIb. Jedoch gilt über die Änderung nach Lage und Gestalt der Curve dasselbe wie in 1). Mithin kommt der mittlere Curventeil hier nicht weiter in Betracht und es gilt unmittelbar 1), also die Figur IIIa.

II. Fall. $c^2 - a^2 = 0$.

Die Rotationsfläche ist eine Kugel mit dem Radius a.

Es kann dieser Fall, wie man aus (19) erkennt, nicht ohne weiteres specialisiert werden. Vielmehr ergiebt sich

$$w = \frac{k\sqrt{n-1}\,\sqrt[4]{a^2+\nu^2-2\nu z}^{\,n-1}}{\sqrt{2\left[\mu + h(n-1)\sqrt{a^2+\nu^2-2\nu z}^{\,n-1}\right]}}.$$

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{\mu k\sqrt{n-1}\,.\,\nu\,.\,\sqrt[4]{a^2+\nu^2-2\nu z}^{\,n-5}}{\sqrt{2\left[\mu + h(n-1)\sqrt{a^2+\nu^2-2\nu z}^{\,n-1}\right]}^{\,3}}$$

$$\frac{d^2 w}{d z^2} = \frac{k\mu\sqrt{n-1}\,\sqrt[4]{a^2+\nu^2-2\nu z}^{\,n-9}}{\sqrt{2\left[\mu + h(n-1)\sqrt{a^2+\nu^2-2\nu z}^{\,n-1}\right]}^{\,5}}\cdot\nu^2\left\{\mu(n-5) - h(n-1)\sqrt{a^2+\nu^2-2\nu z}^{\,n-1}\right\}$$

Wir setzen $\frac{dw}{dz} = o$. Dies ergiebt $z = \frac{a^2+\nu^2}{2\nu} = \delta$ unter Voraussetzung, dass $n > 5$. Ähnlich wie früher erkennt man für diese Stelle das Minimum der Funktion w, während für $z = -\infty$ das Maximum $w = \frac{k}{\sqrt{2h}}$ sich ergiebt. Der Wendepunkt der Curve folgt aus der geschweiften Klammer in $\frac{d^2 w}{dz^2}$. Die Gestalt der Curve giebt Figur IV.

Für Werte $z > \frac{a^2+\nu^2}{2\nu}$ sind nur solche n zulässig, welche wie vorher die Form $4\alpha + 1$ haben. Für diese ist w und $\frac{dw}{dz}$ reell und positiv. Wir haben dann einen dem ersten Zweige zur Graden $z = \frac{a^2+\nu^2}{2\nu}$ symmetrisch gelegenen zweiten, welcher jedoch, da er niemals, wie wir sehen werden, einen Schnittpunkt mit dem Kreise hat, nicht weiter in Betracht kommt.

Wenn das anziehende Centrum ν seinen Ort ändert, so wandert gleichfalls der Scheitel der Curve und zwar fallen beide ineinander im Endpunkte von a, also auf der Peripherie (Fig. IVc). Rückt ν nach dem Coordinatenanfang, so wandert δ immer weiter von demselben fort, denn für $\nu = c$ ist δ ein Minimum. Jetzt hat die Curve mit dem Kreise zwei Schnittpunkte (Fig. IVa) oder einen Berührungspunkt (Fig. IVb). Ist $\nu = o$ so ist $\delta = +\infty$, geht ν auf die negative Seite über, so rückt δ von $-\infty$ zurück nach dem

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Anfangspunkte zu u. s. f. Wird ν aber grösser als $+ a$ so rückt δ wieder vom Kreise fort nach $+ \infty$ und zwar ist hier immer $\delta < \nu$, und es ergeben sich wieder 2 Schnittpunkte (Fig. IVd), oder ein Berührungspunkt (Fig. IVe). Wir sehen, dass diese Curve mit ihren Änderungen ganz analog der in Fall I c) oder (Fig. IIIa) ist.

III. Fall. $c^2 - a^2 < 0$.

Die Rotationsfläche ist ein Ellipsoid mit der kleinen Axe als Rotationsaxe.

Die Gleichung (21) gilt auch hier unmittelbar, nur muss beachtet werden, dass $c^2 - a^2$ jetzt negativ ist. Wie leicht zu sehen ist, wird r^2 stets positiv, $\frac{d^2 w}{d z^2}$ aber infolge des zweiten Faktors negativ. Wir haben daher, wo auch ν auf der Z-Axe liegen mag, für $z = \delta_1$ ein Maximum. Jetzt ist jedoch der Wert $\delta_1 = \frac{\nu c^2}{c^2 - a^2}$ für positive ν negativ, d. h. δ_1 ist ein Punkt auf der negativen Z-Axe. Umgekehrt ist δ_1 positiv, wenn ν negativ ist. Für $\nu = 0$ ist auch $\delta_1 = 0$.

Für $z = \delta_{2,3}$ giebt (20) wieder den Wert Null. Die Untersuchung auf Maxima oder Minima muss daher wie im 1. Fall geschehen. Es ergeben sich danach für δ_2 und δ_3 zwei Minima, welche zum Werte $z = \delta_1$ symmetrisch liegen. Wie man sehen wird, braucht man nicht wie im I. Fall 3 Unterfälle zu bilden: es giebt hier nur eine Art Curve. Um deren Gestalt zu fixieren, lassen wir z positiv und negativ unendlich werden. Dies liefert wieder wie früher die Asymptote $w = \frac{k}{\sqrt{2h}}$. Da ferner w für $\delta_{2,3}$ den Wert Null hat, so ist die Gestalt der Curve die der Figur V. Sie stimmt im allgemeinen mit Figur III^b überein, jedoch mit dem Unterschied, dass die jetzige Curve für alle n gültig ist, welche > 5 sind. Die Folgerungen, welche für die Gestalt der Curve III^b galten sind also auch hier zu machen.

Welche Änderungen in der Lage der Curve treten nun ein, wenn ν seine Lage wechselt? Wir lassen ν vom Nullpunkt aus auf der positiven Z-Axe fortschreiten. Liegt ν im Anfangspunkte des Coordinatensystems (Figur Va, b), so liegt die Curve symmetrisch zur w-Axe. In diesem Falle wird, da δ_2 und $\delta_3 > \pm c$ ist, die Ellipse in 2 Punkten geschnitten (Figur Va) oder in einem Punkte berührt (Figur Vb) oder beide Curven haben keinen Punkt gemein. Ist $o < \nu < c$, so schneidet die Curve mit ihrem mittleren Teile die Ellipse in 2 Punkten (Figur Vc), oder sie berührt die Ellipse in einem Punkte (Figur Vd). Für $\nu = c$ ist $\delta_3 = c$, folglich ergiebt sich eine Lage, wie sie Figur Ve zeigt. Liegt endlich ν so, dass $\nu > c$ ist, so schneidet wieder der Teil zwischen δ_2 und δ_3 die Ellipse in 2 Punkten (Figur Vf) oder derselbe Teil berührt sie in einem Punkte (Figur Vg).

Analog sind die Beziehungen, wenn ν negativ wird. Es wiederholen sich alle Fälle mit dem Unterschiede, dass δ_1 auf der positiven Z-Axe fortrückt. Man hat die verschiedenen Lagen unmittelbar, wenn sämmtliche Figuren auf den Kopf gestellt werden

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

B. Die Bewegungsgebiete.

Wir kommen zum Resultat unsrer Betrachtungen über die Bewegung des materiellen Punktes auf dem Rotationsellipsoid resp. der Kugel. Die analytische Untersuchung und graphische Darstellung der Curve (13) giebt uns jetzt Aufschluss, innerhalb welcher Grenzen die in II. 1) gemachte Voraussetzung resp. Bedingung eintritt. Wir haben in demselben Abschnitte schon hervorgehoben, dass diese Bedingung erfüllt wird, wenn zwischen zwei bestimmten Grenzen für z die Differenz $w_1 - w_2 > 0$ ist. Diese Möglichkeit ist jetzt klar ersichtlich. Es genügt, einen Blick auf die graphisch dargestellten Curven zu werfen, um das Bewegungsgebiet des materiellen Punktes zu erkennen. Hierbei hat man sich das ganze System um die Z-Axe gedreht zu denken, so dass Ellipse sowohl als die sie schneidende oder berührende Curve je eine Rotationsfläche darstellen. Die genannten Grenzen sind die Schnittpunkte beider Curven und der Meridianschnitt des Bewegungsgebietes der Teil der Ellipse, welcher zwischen diesen Grenzen liegt und in den Figuren durch stärkere Zeichnung hervorgehoben ist.

Für jedes so gekennzeichnete Bewegungsgebiet giebt es für z immer eine eindeutige, endliche, stetige unbedingt periodische Funktion von t, welche durch eine für alle reellen Werte t gleichmässig convergente einfach unendliche trigonometrische Reihe dargestellt werden kann, während x und y eindeutige, endliche, stetige, bedingt periodische Funktionen von t sind, die durch eine zweifach unendliche gleichmässig convergierende trigonometrische Reihe sich ausdrücken lassen.*)

Wir können nun der Kürze wegen alle betrachteten möglichen Bewegungsgebiete in 2 Gruppen vereinigen, für welche jedesmal ein allgemeiner Staude'scher Satz Gültigkeit hat.

1) Die Normalform der stabilen Bewegung. Die Bewegung des materiellen Punktes findet zwischen zwei Parallelkreisen statt, welche die Wendekreise der Bewegung sind. Der Punkt bewegt sich in der Richtung von einem Wendekreise nach dem andern, kehrt hier um, geht zum ersten zurück, um sich wieder dem andern zu nähern, während die auf die XY-Ebene projicierte Flächengeschwindigkeit constant nämlich gleich $\frac{1}{2}$ k bleibt. Solche Bewegung tritt ein für Figur I a, c; Figur II a; Figur III^a a, e; Figur IV a, d; Figur V a, c.

Hierher gehören ebenso die Fälle Figur III^a c, d; Figur IV c; denn sie unterscheiden sich von den vorhergehenden nur dadurch, dass der eine Wendekreis ein Punkt geworden ist.

Die Periodicitätskonstante ω für alle diese Fälle ergiebt sich aus der zweiten Zeile von (11), wenn darin die Z-Coordinaten der Schnittpunkte als Integralgrenzen gesetzt werden. Ist T die Zeit, welche der materielle Punkt gebraucht, um von einem Wendekreise bis zum andern zu gelangen, so gilt $T = 2\omega$. Die Bewegung ist für z unbedingt für x und y bedingt periodisch.

2) Die unbedingt periodische Bewegung. Der materielle Punkt kann sich nur auf einem Parallelkreise bewegen. Diese Bewegung ist eine stabile, da auf beiden Seiten der

*) Vergl. Staude, Acta math. 1888, S. 307, 313 und 314.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Bahn unerreichbare Teile des Rotationsellipsoids liegen. Hierher gehören die Fälle: Figur I b, d; Figur II b; Figur III^a b, f; Figur IV b, e; Figur V b, d, g.

Die Formel für die Umlaufszeit längs eines solchen Parallelkreises ist

$$T = 2\pi \frac{a}{c} \frac{\sqrt{z_o (c^2 - z_o^2)} \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{c^2} z_o^2 + (z_o - \nu)^2}^{\,n-1}}{\sqrt{n \frac{c^2 - a^2}{c^2} z_o^3 - (n+1)\nu z_o^2 + (n a^2 - (n-1) c^2 + \nu^2) z_o + (n-1)\nu c^2}},$$

worin z_o der Abstand des Kreises von der XY-Ebene ist. Sie bietet jedoch kein weiteres Interesse.

Dr. Richard Frantz.

Erklärung der Figuren.

Wenn auch aus dem vorstehenden Texte die Einzelheiten der Figuren hervorgehen, so möchte es doch nicht unpraktisch sein, hier noch einmal eine kurze Erklärung folgen zu lassen; denn mit dieser ist man jederzeit im Stande, die durch die Figuren dargestellten Resultate der Bewegung des materiellen Punktes auf einem Rotationsellipsoid und auf der Kugel sich schnellstens ins Gedächtniss zurückzurufen.

Die Figuren geben nur Halbmeridianschnitte, blos in Figur IV und V^a ist der vollständige Meridianschnitt der gegebenen Rotationsfläche dargestellt.

Das Axenkreuz ist in allen Figuren so zu nehmen, dass die positive Z-Axe nach oben, die positive w-Axe nach rechts liegt, wie es Figur I zeigt. Die Z-Axe ist Rotationsaxe.

E und E_1 sind die Brennpunkte der Ellipse.

ν ist das nach dem Gesetz $-\frac{\mu}{r^n}$ anziehende Centrum.

Die mit Indices versehenen δ sind Minimal- resp. Maximalwerte der die Ellipse oder den Kreis schneidenden Halbmeridiancurve.

Die stark ausgezogenen Teile der Ellipse oder des Kreises sind die Bewegungsgebiete des materiellen Punktes. Bei Berührung ist solches der Berührungspunkt selbst.

Die punktierte Linie parallel der Z-Axe ist die Asymptote für die Zweige der Halbmeridiancurve.

Die Figuren sind so geordnet, dass die Änderungen des Bewegungsgebietes, welche durch Verschiebung des anziehenden Centrums ν auf der positiven Z-Axe hervorgerufen werden, anschaulich verfolgt werden können.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fig. I.

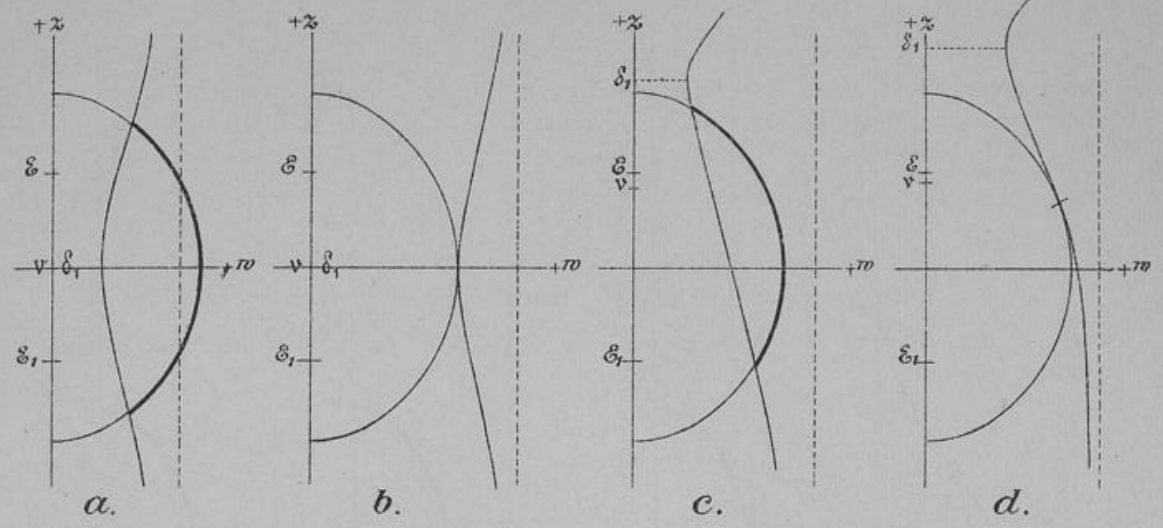


Fig. II.

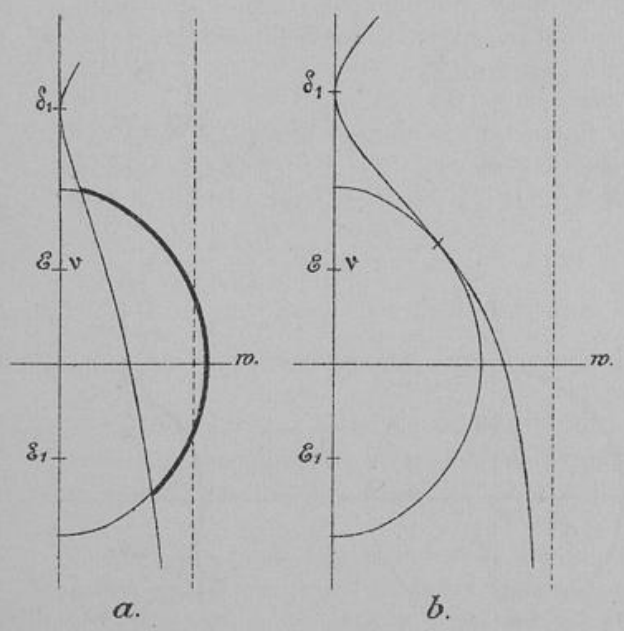
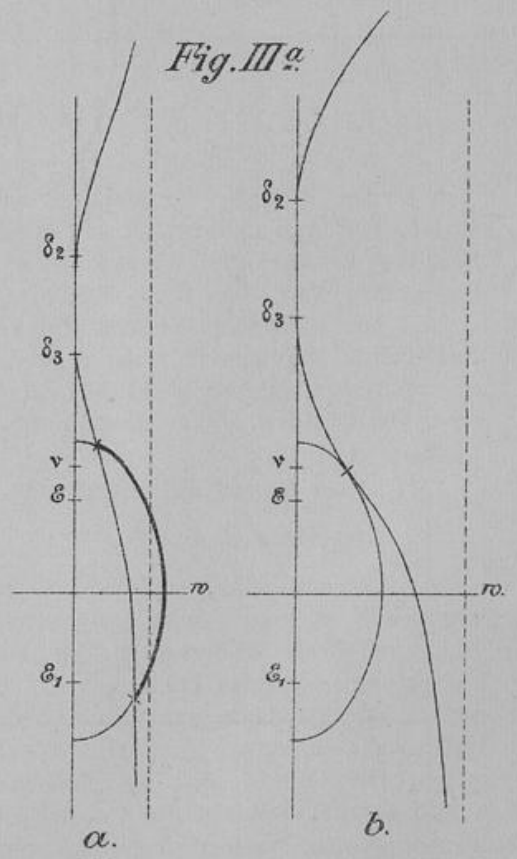


Fig. III a.



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fig. III a.

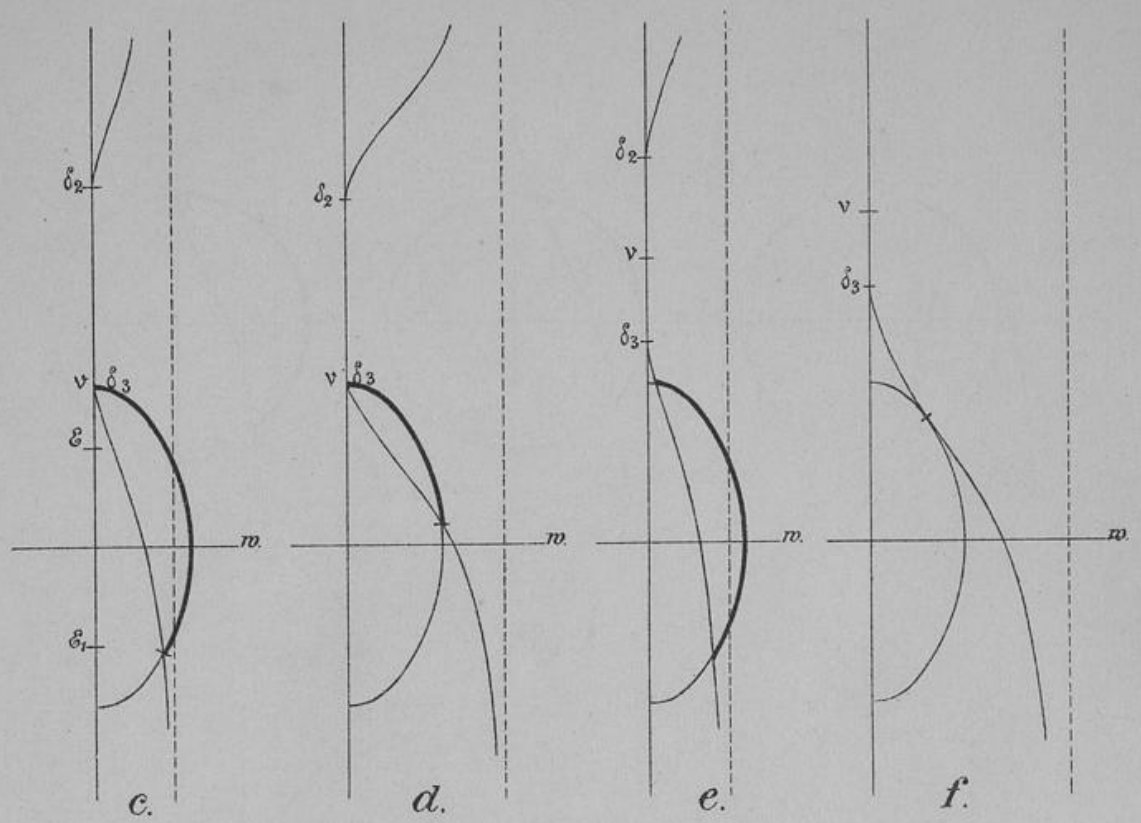


Fig. III b

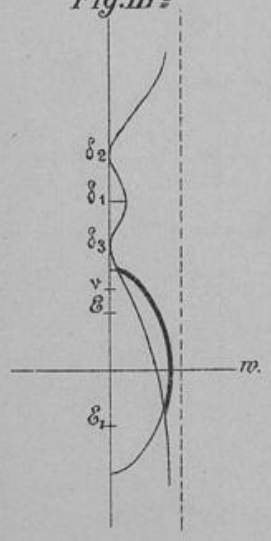
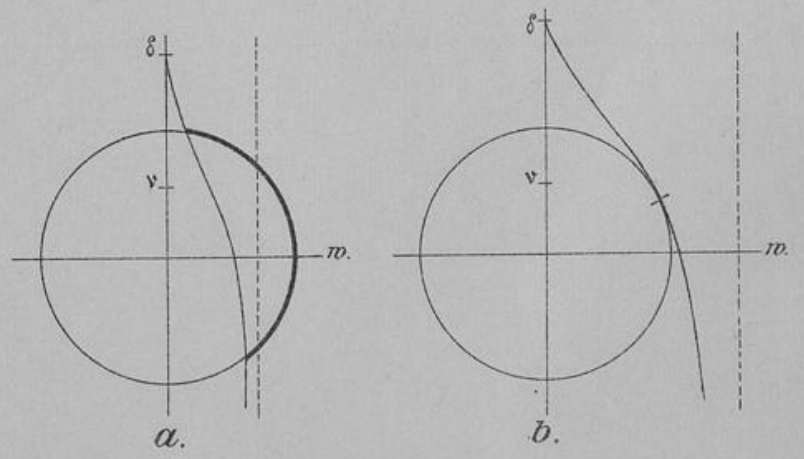


Fig. IV.



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fig. IV.

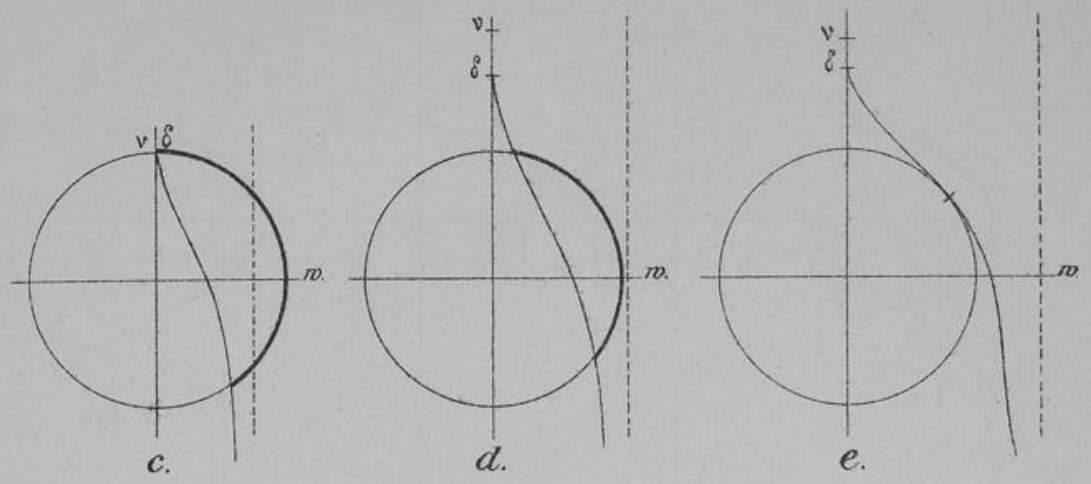
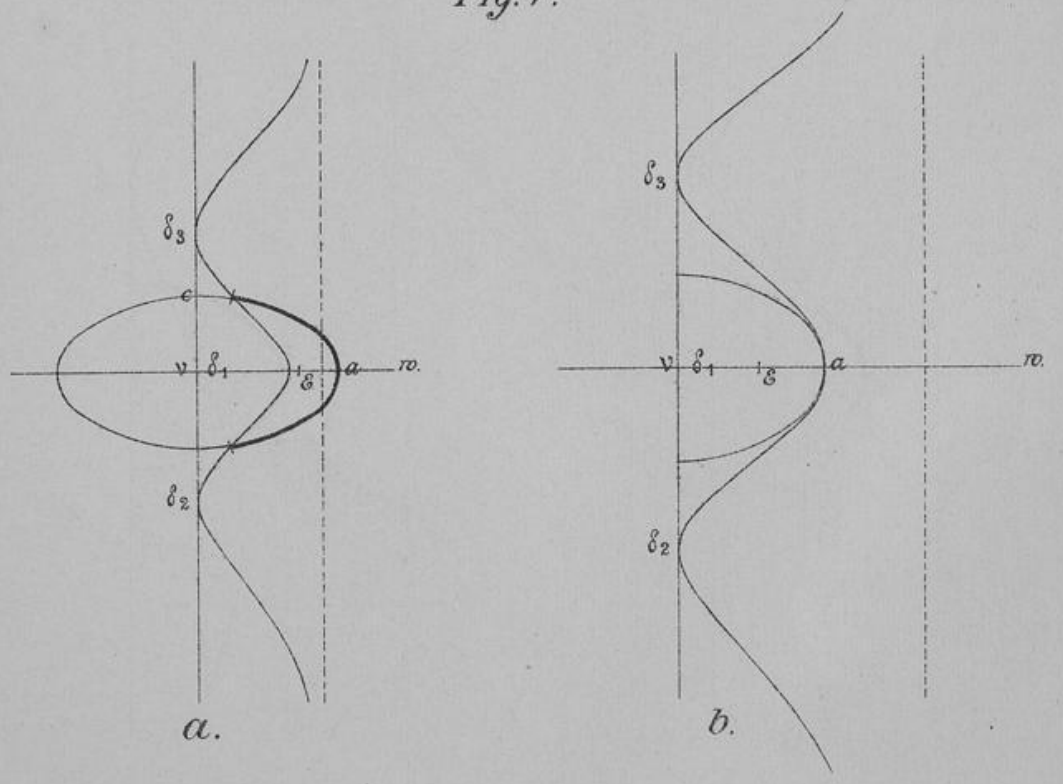


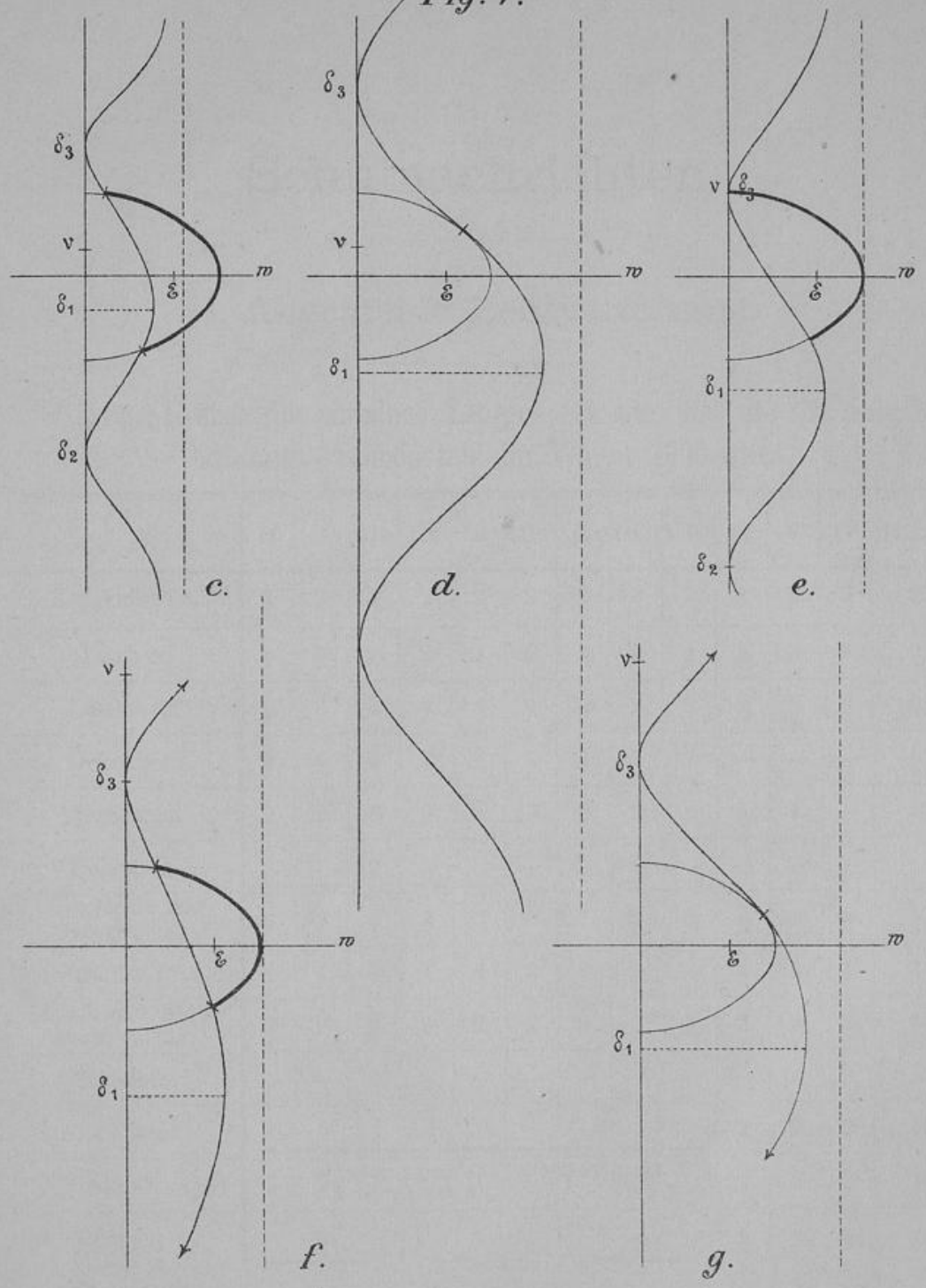
Fig. V.



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fig. V.



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf