Planimetrische Erörterungen.

Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche zwei gegebene Kreise berühren, heisst ein Kegelschnitt.

Sind die Radien beider Kreise unendlich klein, die Kreise also Punkte, so ist der Ort der Mittelpunkte der durch beide gehenden Kreise eine gerade Linie.

Sind die Radien beider Kreise unendlich gross, die Kreise also gerade Linien, so ist der Ort der Mittelpunkte der, beide berührenden Kreise ebenfalls eine gerade Linie.

Ist der Radius des einen Kreises endlich, der des andern unendlich gross, so liegen die Mittelpunkte aller, den Kreis und die gerade Linie berührenden Kreise auf zwei confocalen Parabeln.

Ist der Radius des einen Kreises unendlich klein, der des andern unendlich gross, so ist der Ort der Mittelpunkte der durch den Punkt gehenden und die gerade Linie berührenden Kreise nur eine Parabel.

Liegt einer der beiden Kreise innerhalb des andern, so liegen die Mittelpunkte aller die beiden Grundkreise berührenden Kreise auf zwei confocalen Ellipsen.

Ist der Radius des innerhalb liegenden Grundkreises unendlich klein, so ist der Ort der Mittelpunkte der, durch den Punkt gehenden und den Grundkreis berührenden Kreise nur eine Ellipse.

Liegen die Kreise ausser einander, so liegen die Mittelpunkte der dieselben berührenden Kreise auf zwei confocalen Hyperbeln.

Ist der Radius des einen Grundkreises unendlich klein, so ist der Ort der Mittelpunkte der, durch den Punkt gehenden und den Kreis berührenden Kreise nur eine Hyperbel.

Sind die beiden Grundkreise concentrisch, so liegen die Mittelpunkte der beide Grundkreise berührenden Kreise auf zwei Kreisen, wenn aber der Mittelpunkt des innern Grundkreises unendlich klein ist, nur auf einem Kreise.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

1. **Die Parabel.**

1. Die Parabel ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise (Parabelkreise), welche durch einen gegebenen Punkt (Brennpunkt) gehen, und eine gegebene gerade Linie (Leitlinie) berühren.

Liegt der Brennpunkt auf der Leitlinie, so wird die Parabel zu einer auf der Leitlinie im Brennpunkt senkrecht stehenden Linie.

2. Der Durchschnittspunkt der Mittelsenkrechten, die auf einer, den Brennpunkt mit einem Punkte der Leitlinie verbindenden Geraden errichtet ist, und der in demselben Punkt der Leitlinie auf derselben errichteten Senkrechten ist der Mittelpunkt eines Keises, der durch den Brennpunkt geht und die Leitlinie berührt, also ein Punkt der Parabel.

3. Der Mittelpunkt des kleinsten Parabelkreises ist der Mittelpunkt, der, vom Brennpunkt auf die Leitlinie gefällten Senkrechten.

Die durch den Brennpunkt gehende auf der Leitlinie senkrecht stehende Linie heisst Axe der Parabel.

4. Werden Linien vom Brennpunkte nach zwei Punkten der Leitlinie gezogen, die gleich weit von der Axe entfernt sind, so sind die zugehörigen Parabelpunkte gleich weit von der Axe entfernt. Die Parabel ist also symmetrisch in Beziehung auf die Axe.

5. Werden die Linien vom Brennpunkt nach den unendlich entfernten Punkten der Leitlinie gezogen, so liegen die zugehörigen Punkte der Parabel in unendlicher Entfernung.

6. Eine gerade Linie schneidet die Parabel in zwei Punkten. Denn um einen Durchschnittspunkt einer geraden Linie und der Parabel zu bestimmen, ist ein Kreis zu schlagen, der durch den Brennpunkt geht und dessen Mittelpunkt auf der Geraden liegt, dann um den Durchschnittspunkt der Geraden in der Leitlinie ein Kreis, der diesen rechtwinklig schneidet. Die Senkrechte auf der Leitlinie in dem Punkte, in welchem der Orthogonalkreis die Leitlinie schneidet, trifft die gegebene Gerade im Mittelpunkt eines Kreises, der durch den Brennpunkt geht und die Leitlinie berührt, also in einem Punkte der Parabel. Der Orthogonalkreis schneidet aber die Leitlinie in zwei Punkten. Jede der beiden in diesen Punkten auf der Leitlinie errichteten Senkrechten trifft aber die gegebene Gerade in einem Punkte der Parabel. Folglich schneidet die Gerade die Parabel in zwei Punkten.

7. Die Mittelsenkrechte auf der Verbindungslinie des Brennpunktes mit irgend einem Punkte der Leitlinie ist eine Tangente an die Parabel.

Denn der durch den Brennpunkt gehende Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Mittelsenkrechten auf der vom Brennpunkt nach einem Punkt der Leitlinie gezogenen Linie liegt, schneidet die Leitlinie in demselben Punkt, in welchem die vom Brennpunkt gezogene Linie die Leitlinie schneidet. Der zu construirende Orthogonalkreis wird also zum Punkt und die in diesem Punkte errichtete Senkrechte trifft also die gegebene Mittelsenkrechte in dem einzigen Punkte,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

den die Mittelsenkrechte mit der Parabel gemeinschaftlich hat. Da also die gegebene Mittelsenkrechte nur einen Punkt mit der Parabel gemeinschaftlich hat, so ist sie eine Tangente.

8. Die von einem gegebenen Punkte ausserhalb der Parabel an dieselbe zu ziehende Tangente zu finden, zieht man durch den Mittelpunkt des kleinsten Parabelkreises (Scheitel der Parabel) eine Parallele zur Leitlinie (Mittellinie), schlägt um die Verbindungslinie des gegebenen Punktes mit dem Brennpunkte einen Kreis, der diese Verbindungslinie zum Durchmesser hat und zieht von dem gegebenen Punkte eine Gerade durch den Durchschnittspunkt der Mittellinie und dieses Kreises. Diese Gerade ist eine Tangente; denn sie ist die Mittelsenkrechte auf der vom Brennpunkt durch den Durchschnittspunkt von Kreis und Mittellinie bis an die Leitlinie gezogenen Geraden.

Dieser Kreis schneidet aber die Mittellinie in zwei Punkten. Folglich kann man von jedem Punkte aus zwei Tangenten an die Parabel legen.

9. Die durch einen in der Peripherie der Parabel gegebenen Punkt zu legende Tangente wird gefunden, indem man von diesem Punkte eine Senkrechte auf die Leitlinie fällt und den Durchschnittspunkt der Mittellinie und der, den Fusspunkt der Senkrechten mit dem Brennpunkt verbindenden Linie mit dem gegebenen Punkte verbindet. Diese Verbindungslinie ist die verlangte Tangente an die Parabel; denn sie ist die Mittelsenkrechte auf der, den Brennpunkt mit einem Punkte der Leitlinie verbindenden Linie.

Da es nur eine Mittelsenkrechte auf dieser Linie giebt, so kann man also durch einen Punkt der Peripherie der Parabel nur eine Tangente legen.

10. Die Tangente halbirt den Winkel, welchen die vom Berührungspunkt nach dem Brennpunkt gezogene Linie mit der vom Berührungspunkte auf die Leitlinie gefällten Senkrechten bildet. Ebenso bildet auch die auf der Tangente im Berührungspunkt errichtete Senkrechte (Normale) gleiche Winkel mit der vom Berührungspunkte nach dem Brennpunkte und der von demselben Punkte parallel mit der Axe gezogenen Linie.

11. Die Berührungssehnen aller Tangentenpaare, die von einem Punkte der Leitlinie an die Parabel gelegt werden, gehen durch den Brennpunkt.

Denn sind BD und BF Tangenten an die Parabel, so ist Fig. 1.

$$\begin{array}{l} \angle\, BEF = BAF = 1R \\ \angle\, BCD = BAD = 1R \\ \hline \angle\, BAD + BAF = 2R \end{array}$$

folglich DAF eine gerade Linie.

12. Jede durch den Brennpunkt gezogene Linie wird durch Leitlinie und Parabel harmonisch getheilt.

Denn errichtet man auf einer durch den Brennpunkt gezogenen Linie eine Senkrechte im Brennpunkte, so schneiden die Halbirungslinien der Winkel, welche

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

diese Linie mit der Leitlinie bildet, die gegebene Linie in zwei Punkten der Parabel.
Fig. 1. Denn Dreieck ABD $\cong$ CBD, folglich AD = DC, wenn DC senkrecht steht auf BE, folglich D, und aus gleichen Gründen auch F, ein Punkt der Parabel. Nun sind BA, BC, BD und BF als die Schenkel eines Winkels und die Halbirungslinien desselben und seines Nebenwinkels vier harmonische Strahlen, folglich A, G, D und F vier harmonische Punkte.

13. Die Berührungssehne der, vom Durchschnittspunkt von Leitlinie und Axe an die Parabel gelegten Tangenten steht senkrecht auf der Axe und heisst Parameter. Die beiden Tangenten halbiren den Winkel, den Leitlinie und Axe bilden.

14. Der Punkt, in welchem eine Tangente die Axe schneidet, und der Fusspunkt der vom Berührungspunkt auf die Axe gefällten Senkrechten sind gleichweit vom Scheitel der Parabel entfernt.

Fig. 2.

Vor. AC = BC
EF $\perp$ AD
FL $\perp$ AB
Beh. CK = CL
Denn CK = FG
CL = FG

CK = CL.

15. Der Berührungspunkt einer Tangente und ihr Durchschnittspunkt in der Axe sind gleich weit von dem Brennpunkte entfernt.

Fig. 2.

Vor. AC = CB
CG $\perp$ AB
EF $\perp$ AD
DF $\perp$ BD
Beh. AF = AK
Denn AF = DF
AR = DF

AF = AK.

16. Die gemeinschaftlichen Sehnen je zweier Parabelkreise gehen durch den Brennpunkt.

Die gemeinschaftlichen Sehnen des kleinsten und irgend eines anderen Parabelkreises und des Parameterkreises schneiden sich in der Leitlinie.

Denn die gemeinschaftliche Sehne des Parameterkreises und eines Parabelkreises trifft die Leitlinie im Mittelpunkte eines Kreises, der alle drei Kreise rechtwinklig schneidet.

Die gemeinschaftlichen Sehnen je zweier Parabelkreise (mit Ausnahme des kleinsten) und des Parameterkreises schneiden sich in einem Punkte, welcher der Mittelpunkt eines Kreises ist, der von allen drei Kreisen unter dem Durchmesser geschnitten wird.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Der Parameterkreis schneidet also alle Kreise, die den kleinsten und je einen andern Parabelkreis rechtwinklig schneiden, auch rechtwinklig, und alle Kreise, die von zwei Parabelkreisen ausser dem kleinsten unter dem Durchmesser geschnitten werden, ebenfalls unter dem Durchmesser.

17. Die gemeinschaftliche Sehne irgend eines Parabelkreises und des Parameterkreises berührt den kleinsten Parabelkreis.

Denn nimmt man den Parameterkreis als Grundkreis einer Verwandtschaft an, so ist, da die Parabelkreise durch seinen Mittelpunkt gehen, jedem Parabelkreise die gemeinschaftliche Sehne mit dem Parameterkreise verwandt. Zwei Kreise aber und ihre verwandten Kreise schneiden sich unter gleichen Winkeln. Da nun der Leitlinie der kleinste Parabelkreis verwandt ist, und alle andern Parabelkreise die Leitlinie berühren, so berühren die gemeinschaftlichen Sehnen je eines Parabelkreises und des Parameterkreises den kleinsten Parabelkreis.

18. Die Linie, welche den Winkel halbirt, den die aus den Endpunkten einer Parabelsehne nach dem Brennpunkt gezogenen Linien bilden, und die Leitlinie theilen die Parabelsehne harmonisch.

Denn die Halbirungslinie des Winkels der beiden durch den Brennpunkt gehenden Parabelkreise theilt die Centrallinie derselben im Verhältniss der beiden Radien, trifft also ihren inneren Aehnlichkeitspunkt, während die Leitlinie den äusseren Aehnlichkeitspunkt trifft. Die beiden Mittelpunkte und die beiden Aehnlichkeitspunkte sind aber vier harmonische Punkte.

19. Der Durchschnittspunkt zweier Parabeltangenten ist der Mittelpunkt eines Kreises, der geht durch die Endpunkte der Projection der Berührungssehne auf der Leitlinie und den Brennpunkt.

Denn sind BD und CD Tangenten, also die Mittelsenkrechten auf AG und AF, so ist DA = DG, DA = DF, folglich DA = DG = DF. Fig. 3.

20. Die Senkrechte, vom Durchschnittspunkte zweier Parabeltangenten auf die Leitlinie gefällt, halbirt die Berührungssehne.

Denn steht DK senkrecht auf FG, so ist FK = KG, und da DK paralell GB und FC, so ist auch BE = CE. Fig. 3.

21. Die Senkrechte vom Brennpunkte auf eine Parabelsecante trifft die Leitlinie im Mittelpunkte der Projection des Sehnenabschnitts dieser Secante.

Denn um auf dieser Secante die beiden Punkte zu bestimmen, welche sie mit der Parabel gemeinschaftlich hat, ist eine Senkrechte auf die Secante vom Brennpunkte zu fällen, und um den Durchschnittspunkt derselben in der Leitlinie ein Kreis zu schlagen, der einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Secante liegt und der durch den Brennpunkt geht, rechtwinklig schneidet. Die Parallelen zur Axe durch die zwei Punkte, in welchen der Orthogonalkreis die Leitlinie schneidet, treffen die Secante in den beiden Punkten der Parabel, sind also die, die Parabelsehne auf die Leitlinie projicirenden Linien.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

22. Die Mittelpunkte der Projectionen zweier parallelen Parabelsehnen auf der Leitlinie fallen zusammen. Die Projectionen sind also Durchmesser concentrischer Kreise.

Denn die vom Brennpunkte auf die eine gefällte Senkrechte ist zugleich die auf die andere zu fällende Senkrechte.

23. Die Mittelpunkte paralleler Parabelsehnen liegen auf einer geraden Linie, welche der Axe parallel ist, nämlich auf der, durch den gemeinschaftlichen Mittelpunkt der Projectionen der parallelen Sehnen parallel zur Axe gezogenen Linie.

24. Die Mittelpunkte der Projectionen von Parabelsehnen, die alle durch denselben Punkt gehen, sind Mittelpunkte von Kreisen, die alle den Kreis, dessen Mittelpunkt der Durchschnittspunkt der Sehnen und dessen Radius die Entfernung dieses Durchschnittspunktes vom Brennpunkt ist, rechtwinklig schneiden und die deshalb die, durch den Durchschnittspunkt der Sehnen parallel zur Axe gezogene Linie zur gemeinschaftlichen Chordale haben.

Denn die Fusspunkte der, auf die Sehnen vom Brennpunkte gefällten Senkrechten liegen in der Peripherie des Kreises, der die Entfernung des Durchschnittspunktes vom Brennpunkte zum Durchmesser hat, folglich die Endpunkte der verdoppelten Senkrechten in der Peripherie des Kreises, der die Entfernung des Sehnendurchschnittspunktes vom Brennpunkte zum Radius und den Sehnendurchschnittspunkt zum Mittelpunkte hat. Die, um die Durchschnittspunkte der, auf die Sehnen gefällten Senkrechten in der Leitlinie geschlagenen Kreise nun, welche die durch die Endpunkte der verdoppelten Senkrechten gehenden Kreise rechtwinklig schneiden, schneiden auch alle den, durch den Brennpunkt und die Endpunkte aller verdoppelten Senkrechten gehenden Kreis rechtwinklig. Folglich ist die durch seinen Mittelpunkt, also durch den Durchschnittspunkt der Secanten gehende, der Axe der Parabel parallele Linie die Chordale aller der bezeichneten Kreise.

25. Jeder durch die Endpunkte der Projection einer Berührungssehne auf der Leitlinie gehende Kreis schneidet jeden Kreis, der durch die Endpunkte der Projection einer durch den Tangentendurchschnittspunkt gehenden Parabelsehne auf der Leitlinie geht, rechtwinklig.

Denn die Senkrechte vom Tangentendurchschnittspunkt auf die Leitlinie ist die Chordale aller Kreise, deren Durchmesser die Projectionen solcher Sehnen sind, die durch den Tangentendurchschnittspunkt gehen. Folglich haben die Projectionen der beiden Berührungspunkte dieselbe Chordale. Folglich schneidet der Kreis, der durch diese beiden Punkte, nämlich die Projectionspunkte der Berührungspunkte geht, jeden Kreis rechtwinklig, dessen Durchmesser die Projection einer durch den Tangentendurchschnittspunkt gehenden Sehne ist.

Fig. 5. Zweiter Beweis. Fällt man vom Brennpunkt eine Senkrechte auf die Secante, verlängert sie bis an die Leitlinie, schlägt um den Durchschnittspunkt einen Kreis, der einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Secante liegt, und durch den Brennpunkt geht, rechtwinklig schneidet, so sind die Durchschnittspunkte dieses Orthogonalkreises L die Projectionen der Durchschnittspunkte der Secante in der Parabel. Nun ist die Tangente BD

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

die Mittelsenkrechte auf AE, die Tangente CD die Mittelsenkrechte auf AF. Die Mittelsenkrechte auf EF muss also durch ihren Durschnittspunkt gehen, durch D, folglich ist DF = DE = DA = DK, wenn AK senkrecht auf DN, und AG = GK. Folglich schneidet der Kreis FEKA den Kreis G in A und K und folglich den Kreis L rechtwinklig.

26. Die Projectionen solcher Parabelsehnen auf der Leitlinie, welche durch den Durschnittspunkt von Axe und Leitlinie gehen, sind Durchmesser von Kreisen, welche die Axe zur Chordale haben.

27. Die Strecke vom Tangentendurchschnittspunkt bis zur Berührungssehne auf einer durch den Tangentendurchschnittspunkt parallel mit der Axe gezogenen Linie wird durch die Parabel halbirt.

Denn die Mittelsenkrechten auf AG und GK schneiden sich in der Mittelsenkrechten auf AK und da die Mittelsenkrechte auf GK parellel GB, so ist BL = LD. Die Mittelsenkrechten auf AF und KF schneiden sich ebenfalls in der Mittelsenkrechten auf AK, und da die Mittelsenkrechte auf KF parallel FC, so ist DM = MC, folglich LM parallel BC, und folglich ist DE halbirt. Da aber LM die Mittelsenkrechte auf AK und KD senkrecht auf der Leitlinie, so ist der Durchschnittspunkt von KE und LM der Punkt, in welchem NM die Parabel berührt. Fig. 5.

28. Die Durchschnittspunkte je zweier Tangenten, welche durch die Endpunkte paralleler Sehnen gehen, liegen in der durch die Mitten der Sehnen gehenden Linie.

29. Die Linien, welche die Durchschnittspunkte einer Secante mit dem Brennpunkte verbinden, bilden mit der Linie, welche den Durchschnittspunkt von Secante und Leitlinie mit dem Brennpunkte verbindet, gleiche Winkel.

Denn der Durchschnittspunkt von Secante und Leitlinie ist der äussere Aehnlichkeitspunkt der beiden um die Durchschnittspunkte der Secante geschlagenen Parabelkreise. Folglich bilden die Radien, die nach dem Durchschnittspunkte der beiden Kreise (dem Brennpunkte) gezogen sind, mit der vom äusseren Aehnlichkeitspunkt nach dem Brennpunkte gezogenen Linie gleiche Winkel.

30. Geht die Secante durch den Durchschnittspunkt von Leitlinie und Axe, so bilden die Verbindungslinien der beiden Durchschnittspunkte in der Parabel mit dem Brennpunkte gleiche Winkel mit der Axe. Folglich bilden diese Verbindungslinien auch gleiche Winkel mit der im Brennpunkte auf der Axe errichteten Senkrechten. Die Secante wird also durch die Leitlinie und die im Brennpunkte auf der Axe errichtete Senkrechte harmonisch getheilt.

31. Legt man von einem Punkte der Leitlinie zwei Tangenten an die Parabel, so steht die Berührungssehne senkrecht auf der Linie, welche den Punkt der Leitlinie, von welchem aus die Tangenten gezogen sind, mit dem Brennpunkte verbindet.

Denn da diese Berührungssehne (11) durch den Brennpunkt geht, so ist, wenn D und F die Berührungspunkte sind und FC senkrecht auf der Leitlinie steht, $\angle$ FCB = FAB, und da $\angle$ FCB ein Rechter ist, so ist auch FAB ein Rechter. Fig. 1.

32. Jede durch einen in der Leitlinie liegenden Tangentendurchschnittspunkt gehende Sehne wird durch die Berührungssehne und die Leitlinie harmonisch getheilt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Denn die Linie, welche den Tangentendurschschnittspunkt mit dem Brennpunkt verbindet, die Berührungssehne und die vom Brennpunkt nach den Endpunkten der Sehne gezogenen Linien sind die Schenkel eines Winkels, die Halbirungslinie desselben und die seines Nebenwinkels.

33. Zieht man von dem Punkte der Leitlinie, in welchem eine Parabelsecante dieselbe schneidet Tangenten an den Kreis, der zum Durchmesser hat den Sehnenabschnitt der Secante und den Kreis, der zum Durchmesser hat die Projection dieser Sehne auf der Leitlinie, so schneiden sich die beiden Berührungssehnen in der Secante.

Denn die Verlängerung der Berührungsehne in dem Kreise, dessen Durchmesser die Projection der Sehne ist, theilt auch die Sehne harmonisch, trifft also den Durchschnittspunkt der diesem über der Sehne geschlagenen Kreise angehörenden Berührungssehne und der Secante.

34. Die beiden Kreise, die zu Durchmessern haben, der eine die Projection einer Berührungssehne auf der Leitlinie, der andere die Projection des Sehnenabschnittes einer durch den Tangentendurchschnittspunkt gehenden Secante auf der Leitlinie schneiden sich rechtwinklig.

Fig. 4. Vor. BD Tagente in B, also Mittelsenkrechte auf AE.

DC Tangente in C, also Mittelsenkrechte auf AF.

PN eine Parabelsehne.

Beh. Der Kreis mit dem Durchmesser EF schneidet den Kreis mit dem Durchmesser QR rechtwinklig.

Denn die Senkrechte aus dem Tangentendurchschnittspunkt D auf die Leitlinie trifft die Mitte der Projection der Berührungssehne,

also FM = ME

DF = DE
CF = CA n. Vor.

DF = DA

DE = DA.

Die Endpunkte der durch D gehenden Sehne, N und P, werden aber gefunden, indem man vom Brennpunkt A eine Senkrechte auf die Secante fällt, um sich selbst verlängert bis K, dann um AK einen Kreis schlägt und um den Durchschnittspunkt der verlängerten Linie AK in der Leitlinie einen Kreis, der den durch A und K gehenden rechtwinklig schneidet. Die in den Durchschnittspunkten des letzten Kreises in der Leitlinie errichteten Senkrechten treffen N und P. DN ist also die Mittelsenkrechte auf AK, folglich DK = DA = DE = DF. Folglich ist D der Mittelpunkt eines Kreises, der geht durch F, E, K und A. Nun schneidet der Kreis L den Kreis G, folglich auch den durch dieselben Punkte A und K gehenden Kreis D rechtwinklig. Da aber der Kreis D durch die Punkte F und E geht und von dem Kreise L rechtwinklig geschnitten wird, so wird auch der durch dieselben Punkte E und F gehende Kreis M von dem Kreise L rechtwinklig geschnitten.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

35. Zieht man von einem Punkte zwei Tangenten an die Parabel und eine Secante, so wird die Linie, welche den einen Berührungspunkt mit dem einen Secantendurchschnittspunkt verbindet durch Parallelen zur Axe, die durch den andern Secantendurchschnittspunkt und die beiden Berührungspunkte gehen, harmonisch getheilt.

Denn die Punkte F, E, Q und R sind, da die Kreise M und L einander rechtwinklig schneiden, vier harmonische Punkte. Fig. 4.

36. Der Kreis, welcher die Projection des, zwischen Tangentendurchschnittspunkt und Berührungssehne liegenden Secantenabschnittes auf der Leitlinie zum Durchmesser hat, schneidet den Kreis, welcher die Projection des Sehnenabschnittes derselben Secante auf der Leitlinie zum Durchmesser hat, rechtwinklig.

Beh. Der Kreis mit dem Durchmesser MU schneidet den Kreis mit dem Durchmesser QR rechtwinklig.

Denn ist DV senkrecht auf der Leitlinie, so ist die Mitte von DV ein Punkt der Parabel (27) und zwar die Parallele zu BC die Tangente in T. Diese Parallele durch T zu BC ist also die Mittelsenkrechte auf AM. Die drei Mittelsenkrechten auf den Seiten des Dreiecks AMU schneiden sich aber in einem Punkte. Die Mittelsenkrechten auf MU und MA treffen aber beide die Mitte von DS, folglich liegt der Durchschnittspunkt der drei Mittelsenkrechten P auf der Secante DN. Folglich ist PM = PU = PK = PA. Folglich ist P der Mittelpunkt eines Kreises, der durch die Punkte M, U, K und A geht. Nun schneidet der Kreis L den Kreis G, folglich auch den Kreis D rechtwinklig. Da aber der Mittelpunkt des Kreises L auf der gemeinschaftlichen Secante von dem Kreise D und dem Kreise mit dem Durchmesser MU liegt und der Kreis L (mit dem Durchmesser QR) den einen (D) rechtwinklig schneidet, so muss er auch den andern rechtwinklig schneiden. Fig. 4.

37. Tangentendurchschnittspunkt und Berührungssehne (Pol und Polare) theilen jede durch den Tangentendurchschnittspunkt gehende Parabelsehne harmonisch.

Denn die Punkte M. U, Q und R sind vier harmonische Punkte, folglich auch die Punkte D, S, P und M.

38. Der Kreis, welcher eine Parabelsehne zum Durchmesser hat, schneidet jeden durch die zwei auf der Sehne liegenden Pole gehenden Kreis rechtwinklig. Fig. 4.

39. Zieht man durch einen Tangentendurchschnittspunkt zwei Secanten, so schneiden sich die durch die vier Durchschnittspunkte in der Parabel gelegten Linien in der zu dem Tangentendurchschnittspunkt gehörenden Berührungssehne.

Denn der den beiden harmonisch getheilten Secanten gemeinschaftliche Punkt ist ein entsprechender Punkt in beiden Theilungen. Folglich schneiden sich die durch die andern entsprechenden Punkte gelegten Linien in einem Punkte.

40. Die Pole aller Polaren, welche durch einen Punkt gehen, liegen auf einer geraden Linie, nämlich auf der Polare dieses Punktes.

Denn fallen zwei von einem Tangentendurchschnittspunkt ausgehende Secanten zusammen, so werden die zusammengefallenen Durchschnittspunkte zu Tangenten,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

die sich also auch in der Berührungssehne jenes Tangentendurchschnittspunktes schneiden müssen.

41. Die Polaren aller Pole also, welche auf einer geraden Linie liegen, gehen durch einen Punkt, nämlich den Pol dieser Linie.

42. Die Mittelpunkte aller Kreise, welche eine gerade Linie und einen Kreis berühren, liegen auf zwei confocalen Parabeln.

Die Punkte der einen Parabel werden gefunden, indem man aus dem von der geraden Linie entfernteren Endpunkte des, auf der geraden Linie senkrecht stehenden Durchmessers des Grundkreises eine Linie bis an die Leitlinie zieht, durch den Durchschnittspunkt in der Peripherie des Grundkreises einen Radius, und im Durchschnittspunkt in der Leitlinie eine Senkrechte auf derselben. Der Durchschnittspunkt dieser Senkrechten und dieses Radius ist ein Punkt der Parabel.

Vergrössert man die Radien der Parabelkreise um den Radius des Grundkreises, so werden es Kreise, welche durch den Mittelpunkt des Grundkreises gehen und eine der gegebenen Leitlinie parallele, um den Radius des Grundkreises von derselben entfernte gerade Linie berühren.

Die Punkte der andern Parabel werden gefunden, indem man aus dem der geraden Linie näheren Endpunkte des auf derselben senkrecht stehenden Durchmessers des Grundkreises eine Linie bis an die Leitlinie und die Peripherie des Grundkreises zieht, dann durch den Durchschnittspunkt in derselben einen Radius und eine Senkrechte auf der Leitlinie. Der Durchschnittspunkt des Radius und der auf der Leitlinie errichteten Senkrechten ist ein Punkt der Parabel.

Vermindert man die Radien der Parabelkreise um den Radius des Grundkreises, so werden sie zu Kreisen, die durch den Mittelpunkt des Grundkreises gehen und eine der gegebenen Leitlinie parallele, um den Radius des Grundkreises demselben näher liegende gerade Linie berühren.

2. Die Ellipse.

1. Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche einen Kreis berühren und durch einen innerhalb desselben gegebenen Punkt gehen, ist eine Ellipse.

Der Mittelpunkt des gegebenen Kreises und der gegebene Punkt heissen Brennpunkte.

2. Punkte der Ellipse werden gefunden, indem man die beiden Brennpunkte mit einem Punkte der Peripherie des Grundkreises verbindet und auf der von dem gegebenen Punkt aus gezogenen Linie die Mittelsenkrechte errichtet. Der Durchschnittspunkt derselben in dem gezogenen Radius ist Mittelpunkt eines Kreises, der den Grundkreis berührt und durch den gegebenen Punkt geht, also ein Punkt der Ellipse.

3. Eine gerade Linie schneidet die Ellipse nur in zwei Punkten.

Die Durchschnittspunkte sind Mittelpunkte von Kreisen, die den Grundkreis berühren und durch den gegebenen Punkt gehen. Sie werden gefunden, indem man

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

von dem gegebenen Punkte eine Senkrechte auf die gerade Linie fällt und bis über die Peripherie des Grundkreises verlängert. Schlägt man dann um den Durchschnittspunkt dieser Linie und der gemeinschaftlichen Secante des Grundkreises und eines Kreises, der durch den Brennpunkt geht und dessen Mittelpunkt auf der schneidenden Geraden liegt, einen Kreis der den Grundkreis rechtwinklig schneidet und zieht nach den Punkten, in welchen dieser Orthogonalkreis den Grundkreis schneidet, zwei Radien des Grundkreises, so schneiden diese die gegebene Linie in zwei Punkten, welche den Grundkreis berühren und durch den gegebenen Punkt gehen, also in zwei Punkten der Ellipse.

4. Ist die gegebene Linie die Mittelsenkrechte auf der von dem gegebenen Punkte bis an die Peripherie des Grundkreises gezogenen Linie, so wird der genannte Orthogonalkreis zum Punkte. Dann giebt es also nur einen Radius des Grundkreises, dessen Durchschnittspunkt mit der gegebenen Linie ein Punkt der Ellipse ist. Die Mittelsenkrechte auf der von dem gegebenen Punkte bis an die Peripherie des Grundkreises gezogenen Linie hat also mit der Peripherie der Ellipse nur einen Punkt gemeinschaftlich, ist also eine Tangente.

5. Die Mittelpunkte der beiden Strecken des durch den gegebenen Punkt gehenden Durchmessers des Grundkreises, in welche derselbe durch den gegebenen Punkt getheilt wird, sind die Mittelpunkte des kleinsten und grössten Kreises, welche den Grundkreis berühren und durch den gegebenen Punkt gehen (Ellipsenkreise).

Die Entfernung dieser beiden Mittelpunkte heisst die grosse Axe der Ellipse. Sie ist gleich dem Radius des Grundkreises.

6. Je zwei Punkte der Ellipse, welche auf einer auf der grossen Axe senkrecht stehenden Linie liegen, sind von der grossen Axe gleich weit entfernt. Die grosse Axe theilt also die Ellipse in zwei congruente Theile.

7. Die Summe der Entfernungen irgend eines Ellipsenpunktes von den beiden Brennpunkten ist, wie die Construction der Ellipsenpunkte zeigt, gleich dem Radius des Grundkreises.

8. Die beiden Brennpunkte sind gleich weit von den Endpunkten der grossen Axe entfernt.

9. Je zwei vom Mittelpunkte der grossen Axe gleich weit entfernte, auf derselben senkrecht stehende Ellipsensehnen sind einander gleich. Die im Mittelpunkte der grossen Axe senkrecht auf derselben stehende Sehne theilt also die Ellipse in zwei congruente Theile. Sie heisst die kleine Axe.

10. Die Endpunkte der kleinen Axe werden gefunden, indem man auf der im Mittelpunkte der grossen Axe errichteten Senkrechten die zwei Ellipsenpunkte sucht, indem man also durch die zwei Brennpunkte einen Kreis schlägt, der den Grundkreis schneidet, dann um den Durchschnittspunkt der gemeinschaftlichen Sehne und der Axe einen Kreis, der beide rechtwinklig schneidet. Die nach den Durchschnittspunkten im Grundkreise gezogenen Radien desselben schneiden die auf der grossen Axe im Mittelpunkte derselben errichtete Senkrechte in den Endpunkten der kleinen Axe.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Oder man errichtet im Brennpunkte eine Senkrechte auf der grossen Axe bis an die Peripherie des Grundkreises. Die Mittelsenkrechte auf dieser Senkrechten schneidet die Mittelsenkrechte auf der grossen Axe im Endpunkt der kleinen Axe.

11. Von jedem ausserhalb der Ellipse gelegenen Punkte können an dieselbe zwei Tangenten gelegt werden.

Jede Tangente ist die Mittelsenkrechte auf einer vom Brennpunkte bis an die Peripherie des Grundkreises gezogenen Linie. Die Mitten aller vom Brennpunkt bis an die Peripherie des Grundkreises gezogenen Linien aber liegen in der Pheripherie eines Kreises, dessen Durchmesser hier die grosse Axe der Ellipse ist. Schlägt man also über der grossen Axe als Durchmesser einen Kreis und einen zweiten über der Linie, die den Punkt, von welchem die Tangenten gezogen werden sollen, mit dem Brennpunkte verbindet, so sind die beiden Durchschnittspunkte dieser Kreise zwei Punkte, durch welche die von dem ausserhalb der Ellipse liegenden Punkte an dieselbe zu legenden Tangenten gehen.

12. Die Linie, welche den Durchschnittspunkt zweier Tangenten mit dem Mittelpunkte des Grundkreises verbindet, halbirt den Winkel, welchen die vom Mittelpunkte des Grundkreises (Brennpunkte) nach den Berührungspunkten gezogenen Linien bilden.

Fig. 5.

Vor. FK Tangente in L
MK Tangente in M
EC Tangente an den Grundkreis in C
ED Tangente an den Grundkreis in D.
Beh. Winkel CAK = KAD.

Denn LK, die Mittelsenkrechte auf BC und KM, die Mittelsenkrechte auf BD, schneiden sich in der Mittelsenkrechten auf CD. Diese geht aber durch A und E und halbirt die Winkel A und E. Folglich liegt der Punkt K, der Durchschnittspunkt der Mittelsenkrechten auf BC und BD, also der Durchschnittspunkt der Tangenten KF und KM, auf der Halbirungslinie des Winkels LAM.

Ebenso ist Winkel LBK = KBM, wie aus gleichen Gründen folgt, wenn man um B einen dem Grundkreise congruenten Kreis schlägt und an demselben in den Endpunkten der Radien BL und BM Tangenten legt.

13. Der Durchschnittspunkt zweier Ellipsentangenten liegt also in einer geraden Linie mit dem Durchschnittspunkte zweier Grundkreistangenten, welche denselben in den Endpunkten derjenigen Radien berühren, auf denen die Berührungspunkte der Ellipsentangenten liegen.

Fig. 4. 14. Die Ellipse kann auch bestimmt werden als der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche den einen von zwei congruenten Kreisen, die so liegen, dass der Mittelpunkt des einen innerhalb des andern liegt, berühren und durch den Mittelpunkt des andern gehen. Die für den einen als Grundkreis construirte Ellipse fällt dann mit der für den andern als Grundkreis construirten zusammen. Jeder Punkt der Ellipse ist dann Mittelpunkt zweier concentrischen Kreise,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

deren einer den einen Grundkreis berührt und durch den Mittelpunkt des andern geht, während der zweite den andern Grundkreis berührt und durch den Mittelpunkt des ersten Grundkreises geht.

Denn die Mittelpunkte der aus A bis an die Peripherie des Kreises B gezogenen Linien liegen in der Peripherie eines Kreises, und die Mittelpunkte der aus dem Punkte B bis an die Peripherie des Kreises A gezogenen Linien in der Peripherie desselben Kreises. Ist nun AD parallel BF, so verhält sich BE : EF = AC : AD. Folglich schneiden sich FD und EC in AB. Nun ist CA = BK, Winkel ACM = MKB und Winkel CAM = MBK, folglich AM = BM. Die Linie CK geht also durch den Mittelpunkt des Kreises M und ist also ein Durchmesser desselben, folglich CEK ein rechter Winkel, folglich auch ACG ein rechter. Die Mittelsenkrechte auf BF ist also zugleich die Mittelsenkrechte auf AD. Nun ist der Durchschnittspunkt der Mittelsenkrechten auf AD in dem Radius BD ein Punkt der Ellipse für den Grundkreis B, und der Durchschnittspunkt der Mittelsenkrechten auf BF in dem Radius AF ein Punkt der Ellipse für den Grundkreis A. Die Radien AF und BD schneiden sich aber in CE. Folglich ist ihr Durchschnittspunkt ein Punkt der Ellipse für den Grundkreis A und zugleich der Ellipse für den Grundkreis B. Folglich fallen beide Ellipsen zusammen und jeder Punkt derselben ist Mittelpunkt eines Kreises, der durch A geht und den Kreis B berührt und zugleich Mittelpunkt eines Kreises, der durch B geht und den Kreis A berührt.

Zieht man zwei parallele Radien beider Kreise, so ist die Entfernung des Durchschnittspunktes des Radius des einen Kreises in der Peripherie des andern von dem Durchschnittspunkte des Radius des andern Kreises in der Peripherie des ersten constant, nämlich gleich der Entfernung der beiden Mittelpunkte (Excentricität der Ellipse).

Denn da CE die Mittelsenkrechte auf BF und AD, so ist ABDF ein gerades Trapez, also DF = AB.

15. Die Verbindungslinien der Berührungspunkte paralleler Ellipsentangenten gehen durch den Mittelpunkt der grossen Axe.

Denn zieht man aus den Mittelpunkten beider congruenten Kreise zwei Parallelen bis je an die Peripherie des andern, so sind die Mittelsenkrechten auf denselben parallele Tangenten an die Ellipse. Da nun alle gleichnamigen Punkte beider Constructionen zu beiden Seiten der Centrallinie gleichliegend, und ebenso gleichliegend in Beziehung auf die gemeinschaftliche Sehne sind, so geht die Verbindungslinie der beiden Berührungspunkte durch den Mittelpunkt der Centrallinie, also durch den Mittelpunkt der Ellipse.

16. Aus gleichen Gründen gehen die Verbindungslinien der Durchschnittspunkte zweier parallelen, also ein Parallelogramm bildenden Tangentenpaare durch den Mittelpunkt der Ellipse.

17. Die äusseren Aehnlichkeitspunkte je zweier Ellipsenkreise liegen auf der Chordale des Grundkreises und des Bestimmungspunktes.

Vor. Kreis M und Kreis N gehen durch den Bestimmungspunkt B und berühren den Grundkreis A. Fig. 7.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Beh. Der äussere Aehnlichkeitspunkt von M und N liegt auf der Chordale des Kreises A und des Punktes B.

Denn wenn M und N den Kreis A in E und F berühren und K der Durchschnittspunkt der Centrallinie und der Secante EF ist, so ist, da die Kreise M und N durch B gehen, $KF . KE = KB^2$. Wenn ferner KG Tangente an den Kreis A ist, so ist $KF . KE = KG^2$, folglich $KG = KB$, folglich K ein Punkt der Chordale des Kreises A und des Punktes B.

18. Zieht man von einem Punkte der Chordale des Grundkreises und des Bestimmungspunktes (Brennpunktes) eine Tangente an den Grundkreis und eine gerade Linie nach dem Bestimmungspunkte, so ist die Halbirungslinie des Winkels dieser beiden Linien eine Tangente an die Ellipse.

Denn die Tangente ist gleich der nach dem Bestimmungspunkte gezogenen Linie, die Halbirungslinie ihres Winkels also die Mittelsenkrechte auf der vom Bestimmungspunkte bis an die Peripherie des Grundkreises, nämlich nach dem Berührungspunkt der Tangente, gezogenen Linie.

19. Jede Tangente an die Ellipse schneidet also die Chordale von Grundkreis und Bestimmungspunkt im Mittelpunkte eines Kreises, der den um den Berührungspunkt der Ellipsentangente geschlagenen Ellipsenkreis und den Grundkreis rechtwinklig schneidet und durch den Bestimmungspunkt geht.

Fig.8b. 20. Die Berührungssehne der vom Durchschnittspunkt der grossen Axe und der Chordale von Grundkreis und Bestimmungspunkt an die Ellipse gelegten Tangenten steht senkrecht auf der grossen Axe im Bestimmungspunkte (Brennpunkte).

$$\begin{array}{rl} \text{Denn } BC & = BD \\ BE & = BE \\ \text{Winkel } ACE & = BDE \\ \hline \text{Winkel } CEB & = BED, \end{array}$$

folglich BE Tangente in E.

Diese Sehne heisst der Parameter.

21. Die gemeinschaftlichen Sehnen des über dem Parameter als Durchmesser geschlagenen Kreises (Parameterkreises) und der Ellipsenkreise berühren alle einen Kreis, nämlich denjenigen, welcher dem Grundkreise in Beziehung auf den Parameterkreis verwandt ist.

Denn da alle Ellipsenkreise durch den Mittelpunkt des Parameterkreises gehen, so sind denselben in Beziehung auf diesen die gemeinschaftlichen Sehnen des Parameterkreises mit den Ellipsensehnen verwandt Da aber Kreise und ihre verwandten Kreise sich unter denselben Winkeln schneiden und alle Ellipsenkreise den Grundkreis berühren, so müssen die Sehnen, welche der Parameterkreis mit den Ellipsenkreisen gemeinschaftlich hat, alle den, dem Grundkreise in Beziehung auf den Parameterkreis verwandten Kreis berühren.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

22. Die Berührungssehne der vom Durchschnittspunkte der grossen Axe und der Chordale von Grundkreis und Bestimmungspunkt an den über der grossen Axe als Durchmesser geschlagenen Kreis fällt auf den Parameter.

Denn dieser Punkt C der Chordale ist der äussere Aehnlichkeitspunkt des grössten und kleinsten Ellipsenkreises A und B, der Bestimmungspunkt D also, als ihr Berührungspunkt, der vierte harmonische Punkt zu den Mittelpunkten A und B und dem äusseren Aehnlichkeitspunkt C. Die Berührungssehne der von C an den Kreis mit dem Durchmesser AB (grosse Axe der Ellipse) gelegten Tangenten geht aber ebenfalls durch den vierten harmonischen Punkt zu C, A und B, fällt also mit der Ellipsenberührungssehne zusammen. Fig. 8.

23. Die gemeinschaftliche Tangente an den grössten und kleinsten Ellipsenkreis, die im Bestimmungspunkte einander berühren, berührt auch den über der grossen Axe als Durchmesser geschlagenen Kreis. Der Berührungspunkt an dem letzten Kreise ist gleichweit entfernt von den Berührungspunkten am grössten und kleinsten Ellipsenkreise.

Denn die Linie aus dem Mittelpunkte des Kreises AB nach dem Punkte der gemeinschaftlichen Tangente, welcher die Strecke zwischen den Berührungspunkten an den Kreisen A und B halbirt, ist als Mittellinie des Trapezes, dessen Grundlinien die Radien des grössten und kleinsten Ellipsenkreises, deren Summe gleich der grossen Axe, gleich der Hälfte der grossen Axe, also ein Radius des Kreises AB, und sie steht senkrecht auf der gemeinschaftlichen Tangente, weil sie den, nach den Berührungspunkten gezogenen Radien der Kreise A und B parallel ist. Fig. 8.

24. Die Berührungssehnen aller von einem Punkte der Chordale des Grundkreises und Bestimmungspunktes an die Ellipse gelegten Tangenten gehen durch den Bestimmungspunkt.

Denn zieht man CB und die Tangenten an den Grundkreis, CD und CE, so sind nach § 18 die Halbirungslinien der Winkel BCD und BCE Tangenten an die Ellipse und zwar in den Punkten F und G. Fig. 9.

$$\text{Nun ist } CD = CB$$
$$BF = FD$$
$$CF = CF$$
$$\text{folglich Winkel } CBF = CDF$$

und da CDF ein rechter Winkel ist, so ist auch CBF ein rechter. Aus gleichen Gründen ist Winkel CBG ein rechter, folglich GBF eine gerade Linie.

25. Die Durchschnittspunkte je zweier Ellipsentangenten, welche in den Endpunkten von Sehnen, die durch den Bestimmungspunkt gehen, berühren, liegen auf der Chordale von Grundkreis und Bestimmungspunkt.

26. Der Mittelpunkt eines Kreises, der den Grundkreis unter dem Durchmesser schneidet und durch den Bestimmungspunkt geht, ist der Durchschnittspunkt zweier Ellipsentangenten, deren Berührungssehne durch den Mittelpunkt des Grundkreises geht.

Denn der Mittelpunkt des schneidenden Kreises ist der Durchschnittspunkt der Mittelsenkrechten auf den vom Bestimmungspunkt bis an die Endpunkte des Durchmessers,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

unter welchem der Grundkreis geschnitten wird, gezogenen Linien und die Durchschnittspunkte dieser Mittelsenkrechten (Ellipsentangenten) in diesem Durchmesser sind die Berührungspunkte.

27. Die Durchschnittspunkte der Tangentenpaare, deren Berührungssehnen durch den Mittelpunkt des Grundkreises (Brennpunkt) gehen, liegen auf einer auf der Axe senkrecht stehenden Linie.

Denn die Mittelpunkte aller Kreise, welche den Grundkreis unter dem Durchmesser schneiden und durch einen und denselben Punkt gehen, liegen auf einer geraden Linie, die senkrecht steht auf dem durch diesen Punkt gehenden Durchmesser des Grundkreises.

28. Die beiden, den Grundkreis rechtwinklig schneidenden Kreise, deren einer geht durch die Endpunkte der beiden Grundkreisradien, welche gezogen sind durch die Endpunkte einer Ellipsenberührungsehne, während der andere geht durch die Endpunkte einer durch den Durchschnittspunkt der betreffenden Ellipsentangenten gehenden Ellipsensehne, schneiden einander rechtwinklig.

Fig.10. Vor. GE Tangente in E
GF Tangente in F
C und N Punkte der Ellipse.

Beh. Der Kreis M schneidet den Kreis K rechtwinklig.

Denn N und O werden gefunden, indem man einen Kreis M schlägt, dessen Mittelpunkt liegt auf der von B auf GN gefällten Senkrechten und der den Grundkreis A und einen Kreis, der durch den Bestimmungspunkt B geht und dessen Mittelpunkt auf GN liegt, rechtwinklig schneidet. Die Radien des Grundkreises nach den beiden Durchschnittspunkten des Kreises M und des Grundkreises schneiden GN in Punkten der Ellipse. G ist nun der Durchschnittspunkt der Mittelsenkrechten auf BC und BD, folglich GC = GB = GD. G liegt aber auch nach Construction auf der Mittelsenkrechten von BL, folglich ist BG = AG. Folglich ist G der Mittelpunkt eines Kreises, der durch C, B, L und D geht. Nun schneidet der Kreis M den Kreis P rechtwinklig, folglich auch den Kreis CLBD. Der Kreis M schneidet aber auch den Grundkreis rechtwinklig, folglich liegt M auf der gemeinschaftlichen Sehne des Kreises A und des Kreises CBLD, nämlich auf CD, folglich schneidet der Kreis M auch den Kreis K, der ebenfalls durch C und D geht, rechtwinklig.

29. Ein Kreis, welcher die beiden Radien des Grundkreises, welche durch die Endpunkte einer Ellipsensehne gehen, berührt und den Grundkreis rechtwinklig schneidet, möge ein Projectionskreis der Ellipsensehne heissen.

Die Projectionskreise aller Ellipsensehnen, welche durch denselben Punkt gehen, haben eine gemeinschaftliche Chordale, nämlich die durch den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt der Sehnen und den Mittelpunkt des Grundkreises gehende Linie.

Denn fällt man vom Bestimmungspunkte eine Senkrechte auf eine dieser Sehnen, schlägt dann einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf derselben Sehne liegt, und der durch den Bestimmungspunkt geht und einen zweiten Kreis, der den ersteren und den Grundkreis

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

rechtwinklig schneidet und dessen Mittelpunkt auf der vom Bestimmungspunkt auf die Sehne gefällten Senkrechten liegt, so ist der letztere der Projectionskreis der Sehne. Die Endpunkte der, auf alle durch denselben Punkt gehenden Sehnen gefällten und um sich selbst verlängerten Senkrechten liegen aber in der Peripherie eines Kreises, der zum Mittelpunkte hat den gemeinschaftlichen Punkt der Sehnen, und zum Radius die Entfernung dieses gemeinschaftlichen Punktes vom Bestimmungspunkte. Dieser Kreis schneidet nun jeden der Kreise, die durch den Bestimmungspunkt gehen und deren Mittelpunkt auf einer der Sehnen liegt in zwei Punkten, auf deren Verbindungslinie der Mittelpunkt des Projectionskreises dieser Sehne liegt. Da nun jeder Projectionskreis einen der Kreise, die durch den Bestimmungspunkt gehen, und deren Mittelpunkt auf einer der Sehnen liegt, rechtwinklig schneidet, so schneidet auch jeder Projectionskreis den mit der Entfernung des gemeinschaftlichen Punktes der Sehnen vom Bestimmungspunkte um den gemeinschaftlichen Punkt geschlagenen Kreis rechtwinklig. Da aber jeder Projectionskreis auch den Grundkreis, also jeder dieselben beiden Kreise rechtwinklig schneidet, so haben sie die Verbindungslinie ihrer beiden Mittelpunkte zur gemeinschaftlichen Chordale und ihre eigenen Mittelpunkte liegen auf einer geraden Linie, nämlich der gemeinschaftlichen Sehne des Grundkreises und des um den gemeinschaftlichen Punkt der Sehnen geschlagenen Kreises.

30. Die Berührungssehne zweier Ellipsentangenten ist die Centrallinie der Projectionskreise aller durch den Tangentendurchschnittspunkt gehenden Ellipsensehnen.

Denn die Tangenten können betrachtet werden als Secanten, deren Sehnenabschnitt der Berührungspunkt ist.

31. Der Projectionskreis einer Berührungssehne schneidet den Projectionskreis jeder durch den Tangentendurchschnittspunkt gehenden Ellipsensehne rechtwinklig.

Denn die Projectionen der Berührungspunkte liegen auf der Peripherie des Grundkreises und des um den Tangentendurchschnittspunkt mit der Entfernung vom Bestimmungspunkte geschlagenen Kreises.

32. Eine Ellipsensehne und eine Grundkreissehne, welche zwischen denselben Radien des Grundkreises liegen, schneiden sich in der Chordale von Grundkreis und Bestimmungspunkt.

Vor. F und L sind Punkte der Ellipse. Fig.13.

Beh. GM und FL schneiden sich in PN.

Denn der äussere Aehnlichkeitspunkt der Ellipsenkreise F und L liegt auf der Chordale des Kreises A und des Punktes B (17). GD und FC schneiden sich also in NP. Folglich sind AE und AK projectivisch und in perspectivischer Lage. Ebenso schneiden sich MD und GC in PN. Folglich sind auch AE und AN projectivisch und in perspectivischer Lage, folglich auch AK und AN. MG und LF schneiden sich also in PN.

33. Eine Ellipsentangente und eine Grundkreistangente, deren Berührungspunkte sind die Durchschnittspunkte eines und desselben Grundkreisradius, schneiden sich in der Chordale von Grundkreis und Bestimmungspunkt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fig.11. Denn schlägt man mit der Grundkreistangente CE um ihren Durchschnittspunkt in der Chordale des Grundkreises und des Punktes B einen Kreis, so geht er durch B. Folglich ist EB = EC. Da aber die Ellipsentangente in D die Mittelsenkrechte auf BC ist, so geht sie durch E.

34. Der Durchschnittspunkt zweier Ellipsensehnen und der Durchschnittspunkt zweier Grundkreis-Sehnen liegen auf einem und demselben Grundkreis-Radius, wenn je eine Ellipsensehne und eine Grundkreis-Sehne zwischen denselben Grundkreis-Radien liegen.

Fig.12. Denn sind AB und CD Ellipsen-Sehnen, EF und GK Grundkreis-Sehnen, und MAE, MBF, MCG und MDK gerade Linien, so sind ME und MF projectivisch in perspectivischer Lage. Der, irgend einem Punkte der Sehne CD auf GK entsprechende Punkt ist also derjenige, welcher mit jenem auf demselben Grundkreis-Radius liegt. Ebenso der irgend einem Punkte der Sehne AB entsprechende Punkt auf EF ist der, welcher mit jenem auf demselben Radius des Grundkreises liegt. Folglich liegt der dem Durchschnittspunkte N der Sehnen AB und CD entsprechende Punkt sowohl auf EF als auf GK, ist also der Durchschnittspunkt von EF und GK. Folglich liegen N und P auf demselben Radius.

35. Der Durchschnittspunkt zweier Ellipsentangenten und der Durchschnittspunkt zweier Grundkreis-Tangenten liegen, wenn je ein Ellipsenberührungspunkt und ein Grundkreis-Berührungspunkt in demselben Grundkreis-Radius liegen, ebenfalls in ein und demselben Grundkreis-Radius.

36. Tangentendurchschnittspunkt und Berührungssehne teilen jede durch den Tangentendurchschnittspunkt gehende Ellipsensehne harmonisch.

Fig.14. Vor. BF Tangente in B.
DF Tangente in D. O und P Punkte der Ellipse.
Beh. F, O, Q und P vier harmonische Punkte.

AM und AR sind projectivisch und in perspectivischer Lage. G und F liegen in gerader Linie mit Punkt A, folglich sind P, O und F Punkte, die den Punkten R, M und G entsprechen. Dem Punkte Q, als dem Durchschnittspunkte von PF und BD entspricht S, der Durchschnittspunkt von CE und RG, d. h. A, Q und S liegen in ein und demselben Radius. Nun sind die Punkte G, M, S und R vier harmonische Punkte, weil der Kreistangenten-Durchschnittspunkt G und die Kreis-Berührungssehne die Kreissehne MR harmonisch teilen. Folglich sind AG, AM, AS, AR vier harmonische Strahlen, folglich F, O, Q und P vier harmonische Punkte.

37. Zieht man aus einem Punkte zwei Sekanten durch die Ellipse, so schneiden sich die Verbindungslinien der vier Durchschnittspunkte in der Berührungssehne jenes Punktes.

Denn dies findet beim Grundkreise statt in Beziehung auf den entsprechenden Tangentendurchschnittspunkt, entsprechende Sekanten und entsprechende Berührungssehne.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

38. Die Polaren aller Pole, welche auf einer geraden Linie liegen, gehen durch einen Punkt, nämlich den Pol jener Linie.

Die Pole aller Polaren, welche durch einen Punkt gehen, liegen auf einer geraden Linie, nämlich der Polare dieses Punktes.

39. Pascalscher Lehrsatz. Die Gegenseiten eines Sehnensechsecks schneiden sich in drei Punkten, welche in einer Geraden liegen.

40. Brianchonscher Lehrsatz. Die Hauptdiagonalen eines Tangentensechsecks schneiden sich in einem Punkte.

Denn diese drei Sätze gelten für den Grundkreis in Beziehung auf die entsprechenden Punkte und Linien.

41. Aus den beiden voranstehenden Sätzen folgt, dass die Ellipse bestimmt ist 1) durch fünf Punkte, 2) durch fünf Tangenten.

42. Ellipsensehnen, welche parallelen Sehnen des Grundkreises entsprechen, schneiden sich in einem Punkte und zwar in dem Kreisdurchmesser, welcher diesen Kreissehnen parallel ist; denn dieser Kreisdurchmesser und die entsprechende Ellipsensehne fallen zusammen.

43. Die Grund-Kreissehnen, welche parallelen Ellipsensehnen entsprechen, schneiden sich in einem Punkte, und zwar in dem Kreisdurchmesser, welcher diesen Ellipsensehnen parallel ist; denn die durch den Mittelpunkt des Grundkreises gehende, den vorigen parallele Ellipsensehne fällt mit dem Kreisdurchmesser als entsprechender Kreissehne zusammen.

44. Die Mittelpunkte paralleler Ellipsensehnen liegen in einer geraden Linie, welche durch den Mittelpunkt der Ellipse geht.

Denn da die von einem Punkte in den Grundkreis gezogenen Sekanten durch die Berührungssehne dieses Punktes harmonisch geteilt werden, so müssen die, diesen Teilungspunkten der Grundkreissehnen entsprechenden Punkte der Ellipsensehnen in gerader Linie liegen, da dies bei den Teilungspunkten der Kreissehnen der Fall ist, und sie müssen die Punkte sein, welche dem Punkte, durch welchen die Ellipsensehnen gehen, harmonisch zugeordnet sind. Da aber nach Voraussetzung der Punkt, durch welchen die Ellipsensehnen gehen, in unendlicher Entfernung liegt, so müssen diese Teilpunkte die Mittelpunkte der Sehnen sein.

45. Das Verhältnis der Entfernungen eines Punktes der Peripherie der Ellipse von dem Bestimmungspunkt (Brennpunkt) und der Chordale des Bestimmungspunktes und des Grundkreises ist constant.

Vor. Die Kreise C und F berühren den Grundkreis A in D und G. Fig.15.

LM Chordale des Kreises A und des Punktes B.

Beh. FB : FL = CB : CE.

Denn GD und FC treffen sich in der Chordale im äussern Aehnlichkeitspunkte von F und C, folglich trifft MB den Kreis F im Endpunkte eines Radius, der parallel CB, dem Radius des Kreises C.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\text{Folglich } CB : CE = FK : FL$$
$$FK = FB$$
$$CB : CE = FB : FL.$$

46. Die Berührungssehnen der von einem Punkte der grossen oder kleinen Axe an die Ellipse und an den Kreis, der die grosse resp. kleine Axe zum Durchmesser hat gelegten Tangenten fallen zusammen.

Denn beide stehen auf der betreffenden Axe senkrecht und teilen dieselbe harmonisch, gehen also beide durch den, dem auf der Axe gewählten Punkte harmonisch zugeordneten Punkt.

47. Umkehrung. Zwei Tangentenpaare an die Ellipse und den Kreis, welcher die Axe der Ellipse zum Durchmesser hat, in den Punkten, in welchen eine auf der Axe senkrecht stehende Linie Ellipse und Kreis schneidet, treffen sich in der Axe.

48. Zieht man aus einem Punkte der Axe eine Sekante durch die Ellipse, fällt aus den Durchschnittspunkten zwei Senkrechte auf die Axe, und zieht aus demselben Punkt der Axe eine Sekante in den Kreis, der die Axe zum Durchmesser hat, durch den Durchschnittspunkt der einen Senkrechten, so geht sie auch durch den zweiten Durchschnittspunkt.

Denn die Berührungssehnen der von demselben Punkte der Axe an Ellipse und Kreis gelegten Tangenten fallen zusammen und teilen Ellipse und Kreis harmonisch.

Fig.16. A, B, C und D sind also vier harmonische Punkte. Der vierte harmonische Punkt zu A, E und F aber liegt in MD und in der Peripherie des Kreises, ist also ihr Durchschnittspunkt.

49. Umkehrung. Zwei Sekanten der Ellipse und des Kreises, welcher die Axe der Ellipse zum Durchmesser hat, welche durch die Durchschnittspunkte zweier auf der Axe senkrecht stehenden Linien gelegt sind, schneiden sich in der Axe.

50. Die Ellipse teilt die auf der Axe der Ellipse senkrecht stehenden Sehnen des Kreises, welcher die Axe zum Durchmesser hat, in constantem Verhältnisse, nämlich im Verhältnis der grossen und kleinen Axe

Fig.16.

$$\text{Denn } KE : MG = AK : AM$$
$$KB : MD = AK : AM$$
$$KE : KB = MG : MD.$$

51. Die Polaren aller Punkte, welche auf der gemeinschaftlichen Sekante einer Ellipse und eines Kreises oder zweier Ellipsen liegen, schneiden sich in der gemeinschaftlichen Sekante.

Denn die gemeinschaftliche Sekante wird von beiden Polaren in demselben Punkte harmonisch geteilt.

52. Die Mittelpunkte aller Kreise, welche zwei in einander liegende Kreise berühren, liegen auf zwei confocalen Ellipsen, deren Brennpunkte die Mittelpunkte der beiden Grundkreise sind. Die grosse Axe der einen ist die Summe der Radien der beiden Grundkreise, die grosse Axe der andern die Differenz der Radien der beiden Grundkreise.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

53. Punkte der ersten Ellipse werden gefunden, indem man durch die Endpunkte zweier entgegengesetzt paralleler Radien der beiden Grundkreise eine Sekante und durch ihre Durchschnittspunkte in beiden Peripherien die Radien beider Grundkreise zieht. Der Durchschnittspunkt der beiden letzten Radien ist ein Punkt der Ellipse.

Denn vergrössert man die Radien der Kreise, welche die beiden Grundkreise berühren (Ellipsenkreise) um den Radius des innern Grundkreises, so werden sie zu Kreisen, die alle durch einen Punkt gehen (den Mittelpunkt des innern Grundkreises) und einen, dem innern Grundkreise concentrischen berühren. Ihre Mittelpunkte sind also Punkte einer Ellipse.

54. Punkte der zweiten Ellipse werden gefunden, indem man durch die Endpunkte zweier nach derselben Richtung parallelen Radien eine Sekante zieht und den Radius des innern Grundkreises bis an den nach dem zweiten Durchschnittspunkte der Sekante im äussern Grundkreise gezogenen Radius des äussern Grundkreises verlängert. Der Durchschnittspunkt ist ein Punkt der Ellipse.

Denn verkleinert man die Radien der die beiden Grundkreise berührenden Kreise um den Radius des innern Grundkreises, so werden sie zu Kreisen, die alle durch einen Punkt (den Mittelpunkt des innern Grundkreises) gehen und einen dem äusseren Grundkreise concentrischen berühren.

55. In beiden Fällen ist also die Differenz der Entfernungen eines Punktes der Ellipse von dem Mittelpunkte des innern Grundkreises (Brennpunkt) und von der Peripherie des äussern Grundkreises constant, nämlich gleich dem Radius des innern Grundkreises.

56. Die äusseren Aehnlichkeitspunkte je zweier Ellipsenkreise liegen auf der Chordale der beiden Grundkreise.

Denn der, um den Durchschnittspunkt der beiden, durch die zwei Paar Berührungspunkte zweier Ellipsenkreise mit den Grundkreisen, mit der Tangente an den äussern Grundkreis geschlagene Kreis schneidet auch den inneren Grundkreis rechtwinklig.

57. Liegen die äusseren Aehnlichkeitspunkte eines Grundkreises und anderer Kreise, deren Mittelpunkte auf der Peripherie des Grundkreises liegen, auf einer geraden Linie, so liegen die innern Aehnlichkeitspunkte auf einer Ellipse.

Denn sind D und E der äussere und innere Aehnlichkeitspunkt der Kreise A und B, und F und G der äussere und innere Aehnlichkeitspunkt der Kreise A und C, so sind A, E, B und D und ebenso A, G, C und F vier harmonische Punkte. Folglich schneiden sich CB und GE in DF. Schlägt man nun um E und G Kreise, welche den Kreis A in B und C berühren, so ist der Durchschnittspunkt von CB, GE und FD der äussere Aehnlichkeitspunkt der Kreise E und G. Folglich schneidet die Sekante KL die Kreise E und G in zwei Punkten, durch die ein Kreis gelegt werden kann, der die Kreise E und G unter gleichen Winkeln schneidet und dessen Mittelpunkt auf AB liegt. Da aber dieser Kreis den Kreis E berührt, so muss er auch den Kreis G berühren. Dasselbe gilt für den Kreis E und jeden dritten, in gleicher Weise wie E und G bestimmten Fig. 17.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Kreis, und da es nur einen Kreis giebt, der den Kreis E im Punkte L und noch einen andern Kreis berührt, so müssen alle Kreise, deren Mittelpunkte die oben bestimmten innern Aehnlichkeitspunkte sind, und die den Grundkreis A berühren noch einen und denselben anderen Kreis berühren. Folglich sind ihre Mittelpunkte, d. h. die genannten innern Aehnlichkeitspunkte die Punkte einer Ellipse.

58. Sind also gerade Linien, die von einem festen Punkte bis an eine feste gerade Linie gezogen sind, harmonisch geteilt, und liegen von den inneren Punkten die einen auf der Peripherie eines Kreises, so liegen die anderen, dem festen Punkte benachbarten, auf der Peripherie einer Ellipse.

59. Bewegt sich eine gerade Linie, in der drei feste Punkte gegeben sind, so, dass zwei benachbarte Punkte auf den Schenkeln eines rechten Winkels bleiben, so beschreibt der dritte Punkt eine Ellipse (Princip eines Ellipsenzirkels.)

Denn liegen die zwei festen Punkte auf den Schenkeln des rechten Winkels, so ist ihr Mittelpunkt von dem Scheitel des rechten Winkels um die Hälfte der Entfernung der beiden Punkte entfernt. In jeder Lage der zwei Punkte liegt also der Mittelpunkt zwischen den beiden Punkten auf der Peripherie eines Kreises, der den Scheitel des rechten Winkels zum Mittelpunkt und die Hälfte der Entfernung der beiden Punkte
Fig.18. zum Radius hat. Sind nun A, B und C die drei festen Punkte, schlägt man Kreise um A mit AB, AC und der Hälfte von AB und bringt man die Linie in die Lage EL, so dass EF = AB, so ist ED = DF und FL = BC. Ferner ist AD = DG. Folglich steht GF senkrecht auf AF. Verbindet man nun K mit L, so ist KG = FL nach Voraussetzung, Winkel KGF = LFG, folglich KL parallel FG. Nun ist Dreieck LMF ähnlich FEA, Dreieck FEA ähnlich AMK, folglich Dreieck LMF ähnlich AMK. Folglich KM, oder, was dasselbe ist, MN : ML = AK : FL = AC : BC. Da nun alle Senkrechten auf dem Durchmesser AM durch den Endpunkt L der so gleitenden Linie EL, dass E auf dem einen Radius, F auf dem darauf senkrechten bleibt, geteilt sind im Verhältnis von AC : BC, so beschreibt der Punkt L eine Ellipse, deren halbe grosse Axe AC, deren halbe kleine Axe BC oder, was dasselbe, AP.

3. Die Hyperbel.

1. Die Mittelpunkte aller Kreise, welche zwei ausser einander liegende Kreise berühren, liegen auf zwei confocalen Hyperbeln, deren Brennpunkte die Mittelpunkte der beiden Grundkreise sind. Wird der eine Grundkreis zum Punkt, so fallen die zwei Hyperbeln in eine zusammen.

2. Zieht man von dem Bestimmungspunkte eine Sekante durch den Kreis und durch die Durchschnittspunkte Radien desselben, so schneiden die Mittelsenkrechten auf den Strecken vom Bestimmungspunkt bis zu dem einen und bis zu dem andern Durchschnittspunkte die beiden Radien in zwei Punkten, welche die Mittelpunkte von Kreisen sind, welche durch den Bestimmungspunkt gehen und den Grundkreis berühren, also in zwei Punkten der Hyperbel.

3. Die Differenz der Entfernungen irgend eines Punktes der Hyperbel vom Be-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

stimmungspunkte und dem Mittelpunkte des Grundkreises (von den beiden Brennpunkten) ist constant, nämlich gleich dem Radius des Grundkreises.

4. Der Punkt, in welchem die Centrallinie zweier, durch den Bestimmungspunkt gehenden und den Grundkreis berührenden Kreise (Hyperbelkreise), welche den Grundkreis in den Durchschnittspunkten einer und derselben Sekante, die durch den Bestimmungspunkt geht, diese Sekante schneidet, ist der innere Aehnlichkeitspunkt dieser beiden Hyperbelkreise und ein Punkt der Chordale des Bestimmungspunktes und des Grundkreises.

Denn da die beiden Hyperbelkreise den Grundkreis ungleichartig berühren, so geht die Verbindungslinie der beiden Berührungspunkte durch ihren inneren Aehnlichkeitspunkt. Da aber G der innere Aehnlichkeitspunkt ist, so ist $GD \cdot GC = GA^2$. Die Fig.19. Tangente von G an den Grundkreis ist also gleich der Entfernung des Punktes G von A. Folglich ist G ein Punkt der Chordale von Punkt A und Kreis B.

Die innern Aehnlichkeitspunkte je zweier, den Grundkreis ungleichartig berührender Hyperbelkreise liegen auf der Chordale des Grundkreises und des Bestimmungspunktes.

5. Eine gerade Linie schneidet die Hyperbel in zwei Punkten.

Denn schlägt man einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf der geraden Linie liegt und der durch den Bestimmungspunkt geht, und einen zweiten Kreis, der diesen ersten und den Grundkreis rechtwinklig schneidet und dessen Mittelpunkt liegt auf der, vom Bestimmungspunkte auf die Gerade gefällten Senkrechten, so sind die beiden Punkte, in welchen die zwei Radien des Grundkreises, welche nach den beiden Punkten gezogen sind, in welchen der angegebene Orthogonalkreis den Grundkreis schneidet, die gerade Linie treffen, zwei Mittelpunkte von Kreisen, welche durch den Bestimmungspunkt gehen und den Grundkreis berühren, also zwei Punkte der Hyperbel.

6 Die Mittelsenkrechte auf dem Sekantenabschnitt zwischen dem Bestimmungspunkte und der Peripherie des Grundkreises ist also eine Tangente an die Hyperbel

7. Wird die, die Hyperbelpunkte bestimmende Sekante zur Tangente des Grundkreises, so wird die Mittelsenkrechte auf derselben von dem, durch den Berührungspunkt gehenden Radius in unendlicher Entfernung geschnitten und geht durch den Mittelpunkt der geraden Linie, welche den Bestimmungspunkt mit dem Mittelpunkte des Grundkreises verbindet.

Die durch diesen Mittelpunkt an die Hyperbel gelegte Tangente berührt die Hyperbel in unendlicher Entfernung (Asymptote.)

8. Die von einem ausserhalb der Hyperbel gegebenen Punkte an die Hyperbel gelegte Tangente ist die Mittelsenkrechte auf einer, von dem Bestimmungspunkte bis an die Peripherie des Grundkreises gezogenen Geraden. Die Mittelpunkte aller von einem Punkte bis an die Peripherie eines Kreises gezogenen Linien aber liegen auf der Peripherie eines Kreises Um also von einem ausserhalb gegebenen Punkte eine Tangente an die Hyperbel zu legen, construirt man diesen Kreis und schlägt einen zweiten Kreis, der die Verbindungslinie des gegebenen Punktes mit dem Bestimmungspunkte der Hyperbel zum Durchmesser hat. Die Linien, welche die beiden Durchschnittspunkte dieser beiden

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Kreise mit dem gegebenen Punkte verbinden, sind Tangenten an die Hyperbel. Von jedem Punkte können also zwei Tangenten an die Hyperbel gelegt werden.

9. Die äussern Aehnlichkeitspunkte je zweier Hyperbelkreise, welche den Grundkreis gleichartig berühren, liegen auf der Chordale des Bestimmungspunktes und des Grundkreises.

Fig.20. Denn sind C und D die Berührungspunkte der Hyperbelkreise M und N mit dem Grundkreise, so schneiden sich CD und MN im äussern Aehnlichkeitspunkte dieser beiden Hyperbelkreise. Nun ist $GD \cdot GC = GA^2$, folglich G ein Punkt der Chordale des Punktes A und des Grundkreises B.

10. Hieraus folgt auf dieselbe Weise wie bei der Ellipse, dass eine Grundkreissehne und eine Hyperbelsehne, die zwischen denselben Radien des Grundkreises liegen, sich in der Chordale von Bestimmungspunkt und Grundkreis schneiden, ebenso eine Grundkreistangente und eine Hyperbeltangente, deren Berührungspunkte auf einem und demselben Radius des Grundkreises liegen. Ebenso folgt, dass zwei Tangenten des Grundkreises und zwei Tangenten der Hyperbel, deren Berührungspunkte auf denselben Radien des Grundkreises liegen, sich in ein und demselben Radius des Grundkreises schneiden.

Hieraus ergeben sich die Sätze von der Polarität bei der Hyperbel wie bei der Ellipse.

11. Die Mittelpunkte aller Kreise, welche einen Kreis rechtwinklig schneiden und einen anderen berühren, liegen auf einer Ellipse oder einer Hyperbel.

Denn die Kreise, welche einen gegebenen Kreis rechtwinklig schneiden und einen anderen berühren, berühren noch einen zweiten Kreis, der mit dem ersten zusammen den Mittelpunkt des rechtwinklig geschnittenen zum äussern Aehnlichkeitspunkt hat. Die Mittelpunkte aller Kreise aber, welche zwei gegebene Kreise berühren, liegen auf einer Ellipse oder Hyperbel.

12. Die innern Aehnlichkeitspunkte des kleinsten und je eines andern Parabelkreises liegen auf einer Ellipse, deren kleine Axe die Strecke vom Scheitel der Parabel bis zum Brennpunkt ist.

Fig.21. Denn ist B der Mittelpunkt des kleinsten Parabelkreises und C der Mittelpunkt eines anderen, so teilt AD die Centrale BC im Verhältnis der Radien AB und CM. Folglich ist D der innere Aehnlichkeitspunkt der Kreise B und C. Ebenso ist L bestimmt als der innere Aehnlichkeitspunkt der Kreise B und E. Folglich sind G, B, D und C und ebenso K, B, L und E vier harmonische Punkte. Folglich schneiden sich CE und DL in FG. LD und CE sind also projectivisch und in perspectivischer Lage. Jedem Punkte von CE entspricht also ein Punkt von DL; folglich schneiden sich auch eine Tangente an die Parabel und eine Tangente an die Kurve BDL, wenn die Berührungspunkte auf demselben, durch den Scheitel der Parabel gehenden Strahle liegen, in FG, und da jede Parabelsehne durch Tangentendurchschnittspunkt und Berührungssehne harmonisch geteilt wird, so wird auch jede Sehne der Kurve BDL durch Tangentendurchschnittspunkt und Berührungssehne

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

harmonisch geteilt. Die Kurve ist also ein Kegelschnitt. Dem unendlich entfernten Punkte entspricht aber der Punkt A. Folglich ist die Kurve geschlossen, also eine Ellipse.

13. Die grosse Axe dieser Ellipse ist die Mittelsenkrechte auf AC. Ihr End- Fig. 22
punkt wird gefunden, indem man, wenn A der Brennpunkt und C der Scheitel der Parabel ist, über AD (= 3AC) als Durchmesser einen Kreis schlägt, von D durch den Durchschnittspunkt desselben in der Mittellinie CE eine Linie zieht, dann AE bis F, und von F eine Parallele zu AB bis an DE zieht, und endlich G mit C verbindet. Der Durchschnittspunkt von AF und CG ist der Endpunkt der grossen Axe der Ellipse, deren kleine Axe AC ist.

$$\begin{array}{rl} \text{Denn } AF & \perp DG \\ AE & = EF \\ \sphericalangle DAE & = EFG \\ \hline FG & = AD. \end{array}$$

Steht nun GL senkrecht auf DL, so ist

$$\begin{array}{l} BL = FG \\ \hline AD = BL \\ \hline BD = AL = BC \\ \hline CG = AF \\ \hline CK = AK. \end{array}$$

Da nun die Centrale der beiden Parabelkreise C und G in K geteilt ist im Verhältnis der Radien AC und FG, so ist K der innere Aehnlichkeitspunkt dieser Kreise, also ein Punkt der Ellipse und da er auf der Mittelsenkrechten auf der kleinen Axe derselben liegt, so ist K der Endpunkt der grossen Axe.

14. Das Quadrat über der grossen Axe dieser Ellipse ist doppelt so gross als das Quadrat über der kleinen Axe.

Denn $CM^2 : MK^2 = CL^2 : GL^2$ Fig. 22.

$$\begin{array}{l} CL = 2AC \\ GL^2 = AG^2 - AL^2 \\ AG = FG = 3AC \\ GL^2 = 9AC^2 - AC^2 = 8AC^2 \\ \hline CM^2 : MK^2 = 4AC^2 : 8AC^2 = 1 : 2. \end{array}$$

15. Ebenso liegen die innern Aehnlichkeitspunkte des kleinsten und je eines andern Ellipsenkreises auf einer Ellipse, deren kleine Axe ist die Strecke zwischen dem Mittelpunkte des kleinsten Ellipsenkreises und dem Bestimmungspunkte der ersten Ellipse. Jeder Punkt der zweiten Ellipse ist der Durchschnittspunkt der Centrale des kleinsten und des betreffenden andern Ellipsenkreises und der Linie, welche den Endpunkt eines, der grossen Axe der ersten Ellipse parallelen Radius des betreffenden

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ellipsenkreises mit dem Bestimmungspunkte der ersten Ellipse verbindet. Denn diese Linie teilt die Centrale der beiden Ellipsenkreise im Verhältnis ihrer Radien.

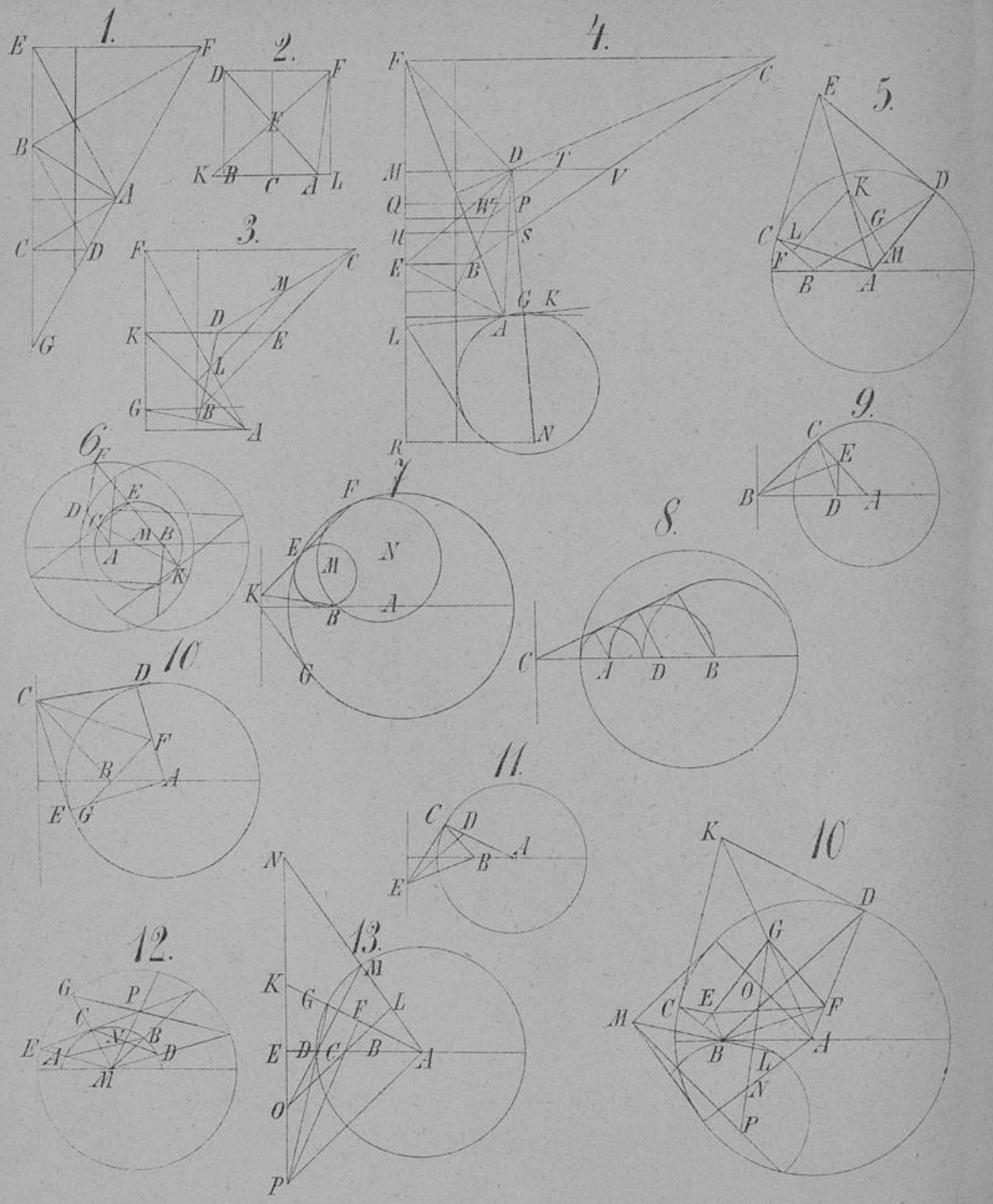
Entsprechendes ergiebt sich für die Hyperbel.

16. Liegen also die äussern Aehnlichkeitspunkte von Kreisen, die alle durch denselben Punkt gehen, auf einer geraden Linie, so liegen ihre Mittelpunkte auf einem Kegelschnitt und die innern Aehnlichkeitspunkte des kleinsten und je eines anderen ebenfalls auf einem Kegelschnitt.

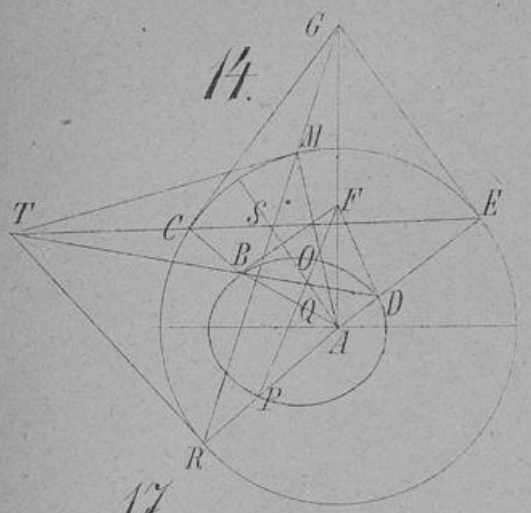
Faber.

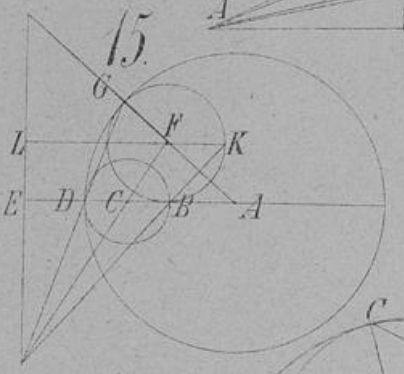
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

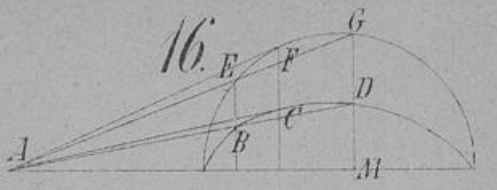
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

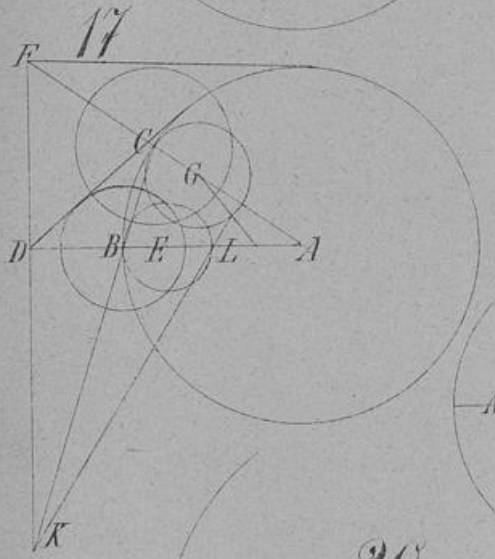


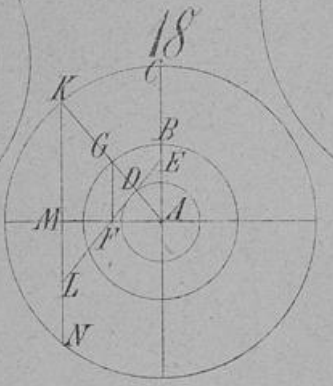
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

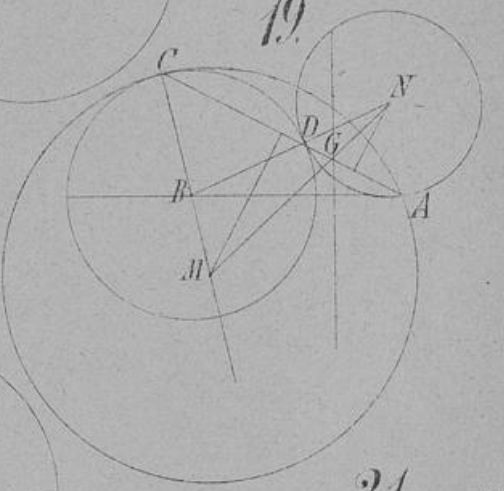


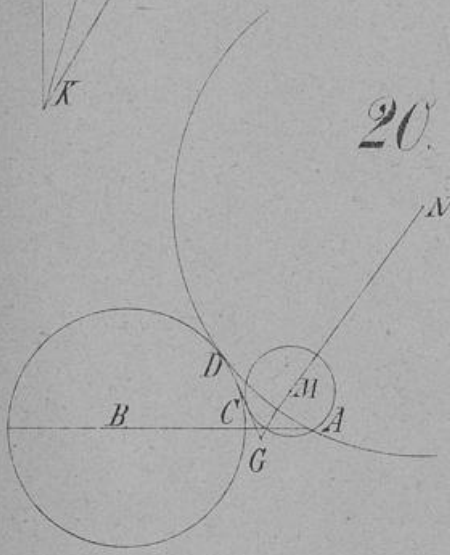


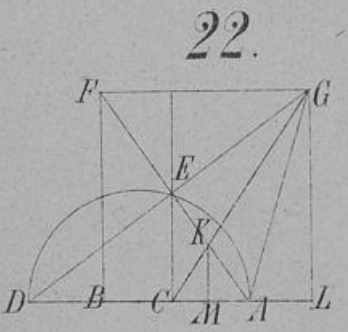


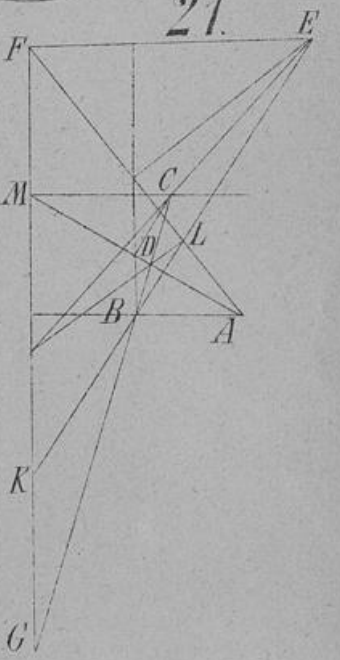












Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf