Ebbe und Flut.

Von M. Vodušek.

Die Ebbe und Flut ist eine schon von römischen Schriftstellern, wie Cäsar, Plinius, erwähnte Erscheinung, vermöge welcher die Gewässer des Oceans eine Zeit lang anschwellen und dann wieder fallen; es findet eine fortwährende Oscillation der flüssigen Bestandtheile unserer Erdmasse und gewiss auch der sie umgebenden Atmosphäre statt. Am Äquator ist diese Bewegung sehr regelmäßig; durch ungefähr $6\,^1/_4$ Stunden steigt das Wasser bis zu einer gewissen Höhe und fällt dann ebenso lange und ebenso tief, als es früher angeschwollen war, so dass innerhalb von 25 Stunden zweimal Flut und zweimal Ebbe eintritt. Allein je weiter man sich vom Äquator entfernt, desto unregelmäßiger wird diese Oscillation, und wenn die Declination des Mondes halbwegs anwächst, so ändert sich dieselbe schon in mittleren Breiten so weit, dass innerhalb der genannten Frist nur einmal Flut und nur einmal Ebbe eintrifft.

Die Ursache der Ebbe und Flut liegt in der verschiedenen Anziehung, mit welcher Mond und Sonne auf den Mittelpunkt der Erde und auf ein außerhalb dieses Mittelpunktes gelegenes Massentheilchen wirken, denn offenbar wird ein an der Oberfläche der Erde liegendes, dem Monde zugekehrtes Theilchen mehr angezogen als der Mittelpunkt der Erde selbst. Die Schwerkraft der Erde verhält sich dabei ganz indifferent; sie hat auf die Ebbe und Flut gar keinen Einfluss. Die Größe dieser Bewegung für verschiedene Orte und Zeiten zu bestimmen ist aber eine Aufgabe, die auf elementarem Wege nicht gelöst werden kann, dieselbe ist ein eigentliches Störungsproblem, ganz ähnlich demjenigen, welches man das Problem der drei Körper genannt hat und welches die Störungen eines Planeten durch einen anderen behandelt; denn ein flüssiges Massentheilchen der Erde, welches sich infolge der täglichen Drehung um die Erdachse bewegt, ist gleichsam auch ein kleiner Planet, auf welchen der Mond und die Sonne als störende Körper einwirken.

Zur Lösung des Dreikörperproblems reichen aber die aus dem Gravitationsgesetze abgeleiteten Fundamentalgleichungen von Lagrange für sich allein nicht aus, weil sie nur eine Art von Momentgleichungen liefern; es sind zwei Arten derselben nothwendig, damit dann durch die Gleichsetzung der rechten Seiten die eigentlichen Störungsgleichungen zustande kommen. Man hat dies übersehen und konnte daher trotz langer und großer Anstrengungen das Problem und daher auch die vorliegende Aufgabe nicht lösen. Die zweite Art von Momentgleichungen ergibt sich aber aus dem sogenannten Flächensatz, wie der Verfasser an einem anderen Orte gezeigt und das Problem der Lösung zugeführt hat.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Auf dieselbe Weise werden wir auch bei der hier gestellten Aufgabe verfahren; wir bilden zwei Momentgleichungen, eine nach Lagrange, die andere aus dem Flächensatz und setzen dann die rechten Seiten gleich, wodurch die eigentliche Störungsgleichung entsteht. Wir beginnen mit dem Flächensatze; derselbe lässt sich aus dem Rotationsproblem (vergl. des Verfassers «Grundzüge der theoretischen Astronomie», IV. Abschnitt) auf zweierlei Weise ableiten und erlaubt schließlich eine Verification; weil wir jedoch mit dem Raume sparen müssen, so verzichten wir auf die eigentliche Ableitung und begnügen uns mit der Verification, weil sie selbständig durchgeführt werden kann und vollkommen hinreicht, das ganze Problem zu entrollen.

Wir legen durch den Mittel- und zugleich Schwerpunkt der Erde ein festes, unbewegliches Achsensystem; die XY-Ebene sei die Äquatorebene, so dass die OZ-Achse mit der Erdachse zusammenfällt und nach dem Nordpol gerichtet ist; die OX-Achse falle mit der Nachtgleichenlinie zusammen, so dass sie, gehörig verlängert, den Frühlingspunkt trifft, welcher demnach in die XZ-Ebene zu stehen kommt. Um den wirklichen Verhältnissen Rechnung zu tragen, könnten wir das «fest und unbeweglich» so weit einschränken, dass wir das Achsensystem mit der Erde um die Sonne sich bewegen lassen, nur muss das System immer zu sich selbst parallel bleiben, so dass die OX-Achse immer nach dem Frühlingspunkte schaut. Von der translatorischen Bewegung der Erde wird aber hier ganz abgesehen, wir halten den Schwerpunkt der Erde fest, und es kommt nur die tägliche Drehung um die OZ-Achse in Betracht, daher das Coordinatensystem als fix und unbeweglich gelten muss.

Die Erde dreht sich von links nach rechts, von West gegen Ost; bei dieser Drehung kommt die Meridianebene eines Ortes, dessen rechtwinklige Coordinaten x, y, z sein mögen, einmal in die Ebene der XZ, in welcher, wie gesagt, der Frühlingspunkt und Zählungsanfang liegt, zu stehen; nach einer vollständigen Umdrehung um die OZ-Achse, wobei der Ort einen Parallelkreis beschreibt, steht sie abermals in der XZ-Ebene; die Zeit, welche sie dazu benöthigt, ist ein Sterntag. Die Meridianebene eines Ortes legt daher an einem Sterntag einen vollen Umkreis von 360^0 oder 2π in Bogen zurück. Der Winkel, welchen sie bei dieser täglichen Drehung irgendeinmal mit der XZ-Ebene bildet, wird der Stundenwinkel des Frühlingspunktes oder kurzweg Sternzeit genannt und mit ϑ bezeichnet. Ist dann ϱ die Entfernung des Ortes (x, y, z) vom Mittelpunkte der Erde, dem Ursprung unseres festen Achsensystemes, und φ' die sogenannte verbesserte geographische Breite des Ortes, so ist in aller Strenge

$$x = \varrho \cos\varphi' \cos\vartheta, \quad y = \varrho \cos\varphi' \sin\vartheta, \quad z = \varrho \sin\varphi' \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

wobei also auf die Abplattung der Erde Rücksicht genommen ist, obwohl dies in unserer Aufgabe nicht gerade als nothwendig erscheint.

Daraus erhält man

$$\frac{y}{x} = tg\,\vartheta$$

Differenziert man diese Gleichung, so wird

$$\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = d\vartheta$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Berechnet man $x^2 + y^2$ aus 1), indem man daselbst quadriert, und dividiert dann mit dt, einem constanten, in mittlerer Zeit ausgedrückten Zeittheilchen, so kommt

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = \varrho^2 \cos^2 \varphi' \cdot \frac{d\vartheta}{dt}$$

Lässt man t mittlere Tage bedeuten, wie dies gewöhnlich ist, so bedeutet der Quotient $\frac{d\vartheta}{dt}$ die tägliche Bewegung in Sternzeit, also eine Constante. An einem Sterntage beträgt diese Bewegung 360^0 oder 2π in Bogen, wie wir früher gesehen haben, an einem mittleren Tage etwas mehr. Während nämlich die Erde in $U = 365 \cdot 256595$ mittleren Tagen einen vollen Umkreis um die Sonne beschreibt, hat sie sich dabei $U + 1$ mal um ihre Achse gedreht, wie dies leicht einzusehen ist, also kommen auf U mittlere Tage $U + 1$ Umdrehungen, jede davon zu 2π gerechnet, gibt $2\pi(U + 1)$ in Bogen; dividiert man diesen Betrag mit U, so kommt auf einen mittleren Tag

$$n = \frac{d\vartheta}{dt} = 2\pi\left(1 + \frac{1}{U}\right) = 2\pi \,.\, 1{\cdot}0027378 \quad \ldots\ldots \quad 2)$$

im Bogenmaße; bedenkt man ferner, dass $\varrho \cos \varphi' = R$ die Senkrechte ist, welche man vom Orte (x, y, z) auf die Erdachse OZ fällt, so wird schließlich

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = nR^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

Dies ist der Flächensatz, wie wir ihn aus dem Rotationsproblem auf zweifachem Wege hätten ableiten können; die hier gegebene Ableitung ist nur eine Verification desselben. In der Theorie der Centralbewegung gibt es drei solche Gleichungen, hier kommt nur eine zustande, weil die z-Coordinate zur Drehung nichts beiträgt. Es ist aber nR^2, wie man auch ohne unsere Erinnerung bemerkt, die doppelte mit $1{\cdot}0027378\ldots$ multiplicierte Fläche des Parallelkreises, an welchem der Ort (x, y, z) sich befindet; n ist eine feste Constante, R hingegen muss wenigstens dort, wo es Wassermassen gibt, infolge der Anziehung des Mondes und der Sonne als veränderlich gelten. Differenzieren wir daher in 3), so gelangen wir zur Momentgleichung in Bezug auf die OZ- oder Erdachse, nämlich

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 2nR\frac{dR}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

Weil R senkrecht auf der Erdachse steht, so geschieht auch die Bewegung in Ebbe und Flut senkrecht zu dieser Achse. Die zweiten Differentialquotienten links drücken die Beschleunigungen aus, welche die wirkenden Kräfte in einem Massentheilchen dm, dessen Coordinaten x, y, z sind, parallel zu den Coordinatenachsen OY und OX erzeugen. Diese Beschleunigungen lassen sich aber nach dem Gesetze der Gravitation bestimmen.

Wie die Centralkraft der Sonne auf den sie umkreisenden Planeten, so wirkt vor allem die Schwerkraft der Erde auf das im Parallelkreise sich drehende Massentheilchen dm. Ist daher k die Beschleunigung, welche die Erde in der mittleren Entfernung a' des Mondes von der Erde irgendeinem Körper an einem mittleren Tage ertheilt, indem sie ihn geradlinig zu ihrem Mittel- und Schwerpunkte zieht, und ϱ der Erdradius des Ortes (x, y, z),

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wo dm sich befindet, so ist die Beschleunigung, mit welcher dm geradlinig zum Erdmittelpunkte gezogen wird, d. i. die Wirkung der Schwerkraft der Erde, ausgedrückt durch

$$\frac{k}{\varrho^2}$$

Hierin ist ϱ in Einheiten von a' gegeben zu denken, also ungefähr $\varrho = 1 : 60 \cdot 3$; zerlegen wir diese Beschleunigung in Componenten, welche mit den Coordinatenachsen parallel laufen, so wird in Hinsicht der OX- und OY-Achse, welche hier allein in Betracht kommen,

$$-\frac{k}{\varrho^2} \cdot \frac{x}{\varrho}, \qquad -\frac{k}{\varrho^2} \cdot \frac{y}{\varrho}$$

Ist ferner m' die in Einheiten der Erdmasse ausgedrückte Mondmasse und e die Entfernung des Theilchens dm vom Mondmittelpunkte, so ist die Beschleunigung, mit welcher dm geradlinig vom Monde angezogen wird, ausgedrückt durch

$$\frac{m'k}{e^2}$$

worin e sowie früher ϱ in Einheiten von a' auszudrücken ist; später werden wir für k die große Constante einführen, wodurch die in der Aufgabe vorkommenden Distanzen von a' unabhängig werden. Wir zerlegen auch diese Beschleunigung parallel zu den Coordinatenachsen. Sind nämlich x', y', z' die rechtwinkligen Coordinaten des Mondmittelpunktes in unserem eingangs beschriebenen festen Achsensystem, so ist zunächst

$$e^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2$$

Sind ferner A, B, C die Winkel, welche die Entfernung e mit den Coordinatenachsen einschließt, so wird

$$\cos A = \frac{x' - x}{e}, \qquad \cos B = \frac{y' - y}{e}, \qquad \cos C = \frac{z' - z}{e}$$

und die Componenten parallel zu den Achsen OX und OY

$$\frac{m'k}{e^2} \cdot \frac{x' - x}{e}, \qquad \frac{m'k}{e^2} \cdot \frac{y' - y}{e}$$

Wir verfolgen hier genau den Weg, den wir im Störungsproblem auf Seite 326 unserer «Grundzüge» eingeschlagen haben und werden so auf die Fundamentalgleichungen von Lagrange kommen.

Die Anziehung, welche Mond und Sonne auf die Erde ausüben, erstreckt sich auf alle Massentheilchen, also auch auf den Mittelpunkt derselben, wo der Ursprung des festen Coordinatensystemes liegt; setzen wir daher in den obigen Ausdrücken für die Componenten $x = y = z = 0$ und statt e die Entfernung r' zwischen den beiden Mittelpunkten von Erde und Mond, so haben wir die Beschleunigungen

$$\frac{m'k}{r'^2} \cdot \frac{x'}{r'}, \qquad \frac{m'k}{r'^2} \cdot \frac{y'}{r'}$$

mit welchen der Erdmittelpunkt parallel zu den Coordinatenachsen OX und OY in Bewegung gesetzt wird. Dadurch wird der Ursprung des festen Coordinatensystemes in der That aus seiner Lage gebracht. Um dieser

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Schwierigkeit für die Rechnung zu begegnen, verschieben wir das ganze System parallel mit sich selbst so, dass der Ursprung in seine frühere Lage zurückkehrt, ein Mittel, welches wir im vorjährigen Programm-Aufsatze zu wiederholtenmalen angewendet haben, um das Coordinatensystem in seiner ursprünglichen Lage zu erhalten. Durch diese Verschiebung werden aber die Componenten der Beschleunigung, welche das Theilchen dm erfährt, um ebensoviel verringert, als der Ursprung bewegt worden ist. Das Coordinatensystem wird also fest und ruhig bleiben können, wenn wir die Beschleunigungen des Erdmittelpunktes an die Beschleunigungen des Theilchens dm mit entgegengesetztem Zeichen anbringen. Somit wird im ganzen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{kx}{\varrho^3} + \frac{m'k}{e^3}(x' - x) - \frac{m'k}{r'^3} \cdot x'$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{ky}{\varrho^3} + \frac{m'k}{e^3}(y' - y) - \frac{m'k}{r'^3} \cdot y'$$

Multiplicieren wir die erste dieser beiden Gleichungen mit y, die zweite mit x und subtrahieren, so erscheint die Momentgleichung

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = -m'k\left(\frac{1}{e^3} - \frac{1}{r'^3}\right)(x'y - y'x)$$

genau übereinstimmend mit der ersten diesbezüglichen Gleichung auf Seite 327 der «Grundzüge». Die Schwerkraft der Erde verschwindet demnach ganz aus dem Problem, und es bleibt nur der Unterschied der beiden Beschleunigungen, welche der Mond auf dm und den Erdmittelpunkt ausübt, in der Rechnung. Die linken Seiten hier und in 4) sind einander gleich, also müssen es auch die rechten sein, mithin

$$2nR\frac{dR}{dt} = -m'k\left(\frac{1}{e^3} - \frac{1}{r'^3}\right)(x'y - y'x) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

Dies ist die eigentliche Störungsgleichung, aus welcher die Bewegung in R zu bestimmen ist; $x'y - y'x$ ist das auf die XY-Ebene projicierte Raumdreieck zwischen dm, Erd- und Mondmittelpunkt, welches sich leicht berechnen lässt. Ist nämlich r' wie früher die Entfernung des Mondes von der Erde, α seine Rectascension und δ seine Declination, so haben wir

$$x' = r' \cos\delta \cos\alpha, \qquad y' = r' \cos\delta \sin\alpha, \qquad z' = r' \sin\delta \quad \ldots \quad 6)$$

Aus 1) und 6) ergibt sich aber sofort

$$x'y - y'x = r'\varrho \cos\varphi' \cos\delta \sin(\vartheta - \alpha)$$

Weil $\varrho \cos\varphi' = R$ ist, so übergeht 5) in

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{m'k}{2n}\left(\frac{1}{e^3} - \frac{1}{r'^3}\right) r' \cos\delta \sin(\vartheta - \alpha) \quad \ldots\ldots \quad 7)$$

$\vartheta - \alpha$ ist bekanntlich der Stundenwinkel eines Gestirnes für einen Ort, dessen Sternzeit im Augenblicke ϑ ist, in unserem Falle des Ortes (x, y, z); bezeichnet man mit h die Höhe eines Gestirnes über dem Horizont und mit ω sein Azimuth, so ist $\cos\delta \sin(\vartheta - \alpha) = \cos h \sin\omega$

Die Entfernung e des Ortes (x, y, z) der Erde vom Mondmittelpunkt ist gegeben durch

$$e^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 = r'^2 + \varrho^2 - 2r'\varrho \cos\gamma$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wo γ den Winkel bezeichnet, welchen r' und ϱ im Erdmittelpunkte miteinander einschließen. Dieser Winkel gibt den Abstand des Mondes vom Zenithe des Ortes an; denn denkt man sich den Erdradius ϱ gehörig verlängert, so kommt man in den Zenith des Ortes, verfolgt man anderseits vom Erdmittelpunkt aus die Spur von r', so kommt man in den Mondmittelpunkt; beschreibt man dann vom Erdmittelpunkt aus einen Kreis, welcher den Mond und die Zenithlinie trifft, so gibt der Bogen desselben zwischen Zenith und Mond die Zenithdistanz des Mondes an; der entsprechende Winkel im Erdmittelpunkt ist wie gesagt γ. Substituiert man oben auf der rechten Seite $r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$ und $\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2$, so erhält man nach Entwickelung der Quadrate links

$$r'\varrho \cos\gamma = xx' + yy' + zz'$$

Führt man hier auf der rechten Seite statt der rechtwinkligen die Polarcoordinaten aus 1) und 6) ein, so wird

$$\cos\gamma = \sin\varphi' \sin\delta + \cos\varphi' \cos\delta \cos(\vartheta - \alpha) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 8)$$

Der mit dem Horizontsystem vertraute Leser findet hier bestätigt, was wir früher inbetreff von γ gesagt haben; bezeichnet man wie früher mit h die Höhe des Gestirnes über dem Horizonte, so ist $h = 90 - \gamma$ und $\cos\gamma = \sin h$.

Die Differenz $\frac{1}{e^3} - \frac{1}{r'^3}$ wird genau so bestimmt wie in der Störungsrechnung für den Fall, dass der störende Körper weiter von der Sonne entfernt ist als der gestörte. Schlägt man daher das Verfahren ein, welches wir auf Seite 333 ff. der «Grundzüge» befolgen, so erhält man

$$\frac{1}{e^3} - \frac{1}{r'^3} = \frac{3\varrho\cos\gamma}{r'^4} - \frac{3\varrho^2}{2r'^5}(1 - 5\cos^2\gamma) + \; . \; . \; .$$

infolgedessen geht 7) über in

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{3m'k\varrho}{2nr'^3}\left[\cos\gamma - \frac{\varrho}{2r'}(1 - 5\cos^2\gamma) + \; . \; . \; .\right]\cos\delta\sin(\vartheta - \alpha)$$

Wir nehmen innerhalb der eckigen Klammern nur das erste Glied $\cos\gamma$ mit, denn die weiteren mit Potenzen von $\varrho : r' = tg\,p$ ansteigenden fallen sehr klein aus; p bedeutet die Parallaxe des Mondes. Wir erhalten auch so ein sehr anschauliches Bild von der Erscheinung der Ebbe und Flut. Substituieren wir für $\cos\gamma$ den in 8) gefundenen Wert, so wird

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{3m'k\varrho}{4nr'^3}\left[\sin\varphi'\sin 2\delta\sin(\vartheta - \alpha) + \cos\varphi'\cos^2\delta\sin 2(\vartheta - \alpha)\right] \; . \; . \; . \; 9)$$

Wie sich aus dem Vorangehenden ergibt, ist der in eckige Klammern eingeschlossene Ausdruck gleich $\sin 2h \sin\omega$, allein mit den Coordinaten des Horizontsystemes ist uns wenig geholfen, wir müssen auf dem Äquator bleiben, um integrieren zu können. Dazu bedürfen wir einer kleinen Vorbereitung; es ist nämlich

$$d\cos(\vartheta - \alpha) = -\sin(\vartheta - \alpha)\,d\vartheta$$

denn auf die Veränderlichkeit der Mondcoordinaten r', α, δ können wir vorderhand keine Rücksicht nehmen und betrachten das Gestirn als stillstehend;

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

die translatorische Bewegung von Erde und Mond erscheint vorderhand ganz aufgehoben, und es kommt einzig und allein die Drehung der Erde um ihre Achse in Betracht, denn auch so muss die Einwirkung des Mondes, der Sonne auf das flüssige Massentheilchen dm unverfälscht zutage treten. Zufolge 2) ist nun $d\vartheta = ndt$, folglich

$$d\cos(\vartheta - \alpha) = -\sin(\vartheta - \alpha)\,ndt$$

und das allgemeine Integral

$$\int \sin(\vartheta - \alpha)\,dt = -\frac{1}{n}\cos(\vartheta - \alpha)$$

auf ebendieselbe Weise erhält man

$$\int \sin 2(\vartheta - \alpha)\,dt = -\frac{1}{2n}\cos 2(\vartheta - \alpha)$$

multipliciert man demnach in 9) mit dt und integriert, so wird zunächst, wenn C die Integrationsconstante bedeutet,

$$R = \frac{3m'k\varrho}{4n^2r'^3}\left[\sin\varphi'\sin 2\delta\cos(\vartheta - \alpha) + \tfrac{1}{2}\cos\varphi'\cos^2\delta\cos 2(\vartheta - \alpha)\right] + C$$

Für den Augenblick, wo der in die eckigen Klammern eingeschlossene Ausdruck verschwindet, wird $R = R_0$, dem normalen Radius des Parallelkreises der geographischen Breite φ', daher $R_0 = 0 + C$, woraus sich $C = R_0 = \varrho\cos\varphi'$ ergibt; folglich

$$R = R_0 + \frac{3m'k\varrho}{4n^2r'^3}\left[\sin\varphi'\sin 2\delta\cos(\vartheta - \alpha) + \tfrac{1}{2}\cos\varphi'\cos^2\delta\cos 2(\vartheta - \alpha)\right]$$

Jetzt ist es an der Zeit, dass wir die Constante $m'k$ für den Mond und dann auch für die Sonne bestimmen. In Hinsicht des Mondes ist in Einheiten der Erdmasse

$$m' = \frac{1}{65\cdot 852}$$

wie wir im vorjährigen Programm-Aufsatz auf Grund guter Daten gefunden haben. Bedeutet ferner a' die mittlere Entfernung des Mondes von der Erde und $U' = 27\cdot 321663$ Tage die siderische Umlaufszeit des Mondes um die Erde, so ist die große Constante (siehe «Grundzüge» Seite 90)

$$k = \frac{4\pi^2 a'^3}{U'^2(1 + m')} = \frac{\mu'^2 a'^3}{1 + m'}$$

wo $\mu' = 2\pi : U'$ die mittlere tägliche Bewegung des Mondes bezeichnet; darnach wird in Hinsicht des Mondes

$$\frac{3m'k}{4n^2r'^3} = \tfrac{3}{4}\cdot\frac{m'}{1 + m'}\cdot\left(\frac{\mu'}{n}\right)^2\cdot\left(\frac{a'}{r'}\right)^3$$

Bekanntlich lautet die Polargleichung der Ellipse

$$r' = \frac{a'(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon\cos v} = a'(1 - \varepsilon\cos E)$$

wo die Bedeutung der Buchstaben dem Leser bekannt sein wird, mithin

$$\left(\frac{a'}{r'}\right)^3 = \left(\frac{1}{1 - \varepsilon\cos E}\right)^3 = f^3$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wo wir der Kürze wegen den Buchstaben f einführen; bezeichnet man den Mondcoëfficienten mit M und berechnet, was sich aus den früheren Angaben berechnen lässt, so erhält man

$$M = \frac{3m'k}{4n^2r'^3} = \tfrac{3}{4} \cdot \frac{m'}{1+m'} \cdot \left(\frac{\mu'}{n}\right)^2 \cdot f^3 = 0{\cdot}0000149471 \,.\, f^3$$

Dasselbe Verfahren ist auch in Hinsicht der Sonne einzuschlagen; man kann aber auch direct aus M den Sonnencoëfficienten, den wir mit S bezeichnen wollen, ableiten. Wie nämlich im Mondcoëfficienten m' in Einheiten der Erdmasse ausgedrückt ist, so wollen wir auch die Sonnenmasse in dieser Einheit ausdrücken; wenn nun $m = \frac{1}{332090}$ die in Einheiten der Sonnenmasse gegebene Erdmasse ist, so ist reciprok $\frac{1}{m} = 332090$ die in Einheiten der Erdmasse gegebene Sonnenmasse. Setzen wir daher im Mondcoëfficienten statt m' die Sonnenmasse $\frac{1}{m}$, weiters $\mu = 2\pi : U$ statt μ', wo also μ die mittlere tägliche Bewegung der Erde ist, und beziehen f auf die Erdbahn-Ellipse, so wird in Hinsicht der Sonne

$$S = \frac{3m'k}{4n^2r'^3} = \tfrac{3}{4} \cdot \frac{1}{1+m} \cdot \left(\frac{\mu}{n}\right)^2 \cdot f^3 = 0{\cdot}000005590995 \,.\, f^3$$

Fassen wir die beiden Coëfficienten durch den Buchstaben K zusammen, so dass K einmal M, das anderemal S vertritt, so haben wir die gewünschte Schlussformel:

$$R = R_0 + K\varrho\,[\sin\varphi' \sin 2\delta \cos(\vartheta - \alpha) + \tfrac{1}{2}\cos\varphi' \cos^2\delta \cos 2(\vartheta - \alpha)]$$

woraus sich $R - R_0$, die Fluthöhe oder im negativen Falle die Ebbe, sehr genau berechnen lässt; die Rectascension α und Declination δ des Mondes und der Sonne entnimmt man den Ephemeriden und berücksichtigt nun auch so die translatorische Bewegung der Erde und des Mondes; für einzelne Parallelkreise können $\varrho \sin\varphi'$ und $\varrho \cos\varphi'$ ein- für allemal berechnet und in die Formel eingeführt werden.

Für den Äquator verschwindet das erste Glied innerhalb der eckigen Klammern; hier ist $\varrho = 6379170^m$ dem Äquatorhalbmesser, daher hinsichtlich des Mondes

$$R - R_0 = 47{\cdot}675^m f^3 \cos^2\delta \cos 2(\vartheta - \alpha)$$

Man sieht ohneweiters, dass für $\vartheta - \alpha = 0^0, 180^0$, oder in der oberen und unteren Culmination des Mondes ein Maximum in $R - R_0$ oder die Flut, hingegen für $\vartheta - \alpha = \mp 90^0$, oder für den Aufgang und Untergang des Mondes ein Minimum, also die Ebbe eintritt.

Setzt man nämlich in 8) $\cos\gamma = \sin h = 0$, so erhält man für den Auf- und Untergang eines beliebigen Gestirnes die Gleichung

$$\cos(\vartheta - \alpha) = -\,tg\varphi' tg\delta, \qquad h = 0$$

woraus erhellt, dass am Äquator oder für $\varphi' = 0$ jedes Gestirn im Stundenwinkel -90^0 aufgeht und im Stundenwinkel $+90^0$ untergeht; dasselbe findet auch in anderen Breiten statt, wenn das Gestirn die Declination $\delta = 0$ besitzt oder im Äquator steht. Selbstverständlich muss in allen anderen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fällen $\varphi' + \delta < 90^0$ sein, wenn $cos(\vartheta - \alpha)$ möglich sein soll, denn über die angegebene Grenze hinaus wird das Gestirn circumpolar und h bleibt immer positiv.

In Hinsicht der Sonne wird am Äquator

$$R - R_0 = 17 \cdot 833^m . f^3 cos^2 \delta \, cos 2 (\vartheta - \alpha)$$

Die Rechnung ist der früheren analog; zur Zeit der Syzygien, wo die Rectascensionen beider Gestirne gleich oder um 180^0 verschieden sind, addieren sich die Wirkungen, und die Flut beträgt im Mittel $47 \cdot 675^m + 17 \cdot 833^m = 65 \cdot 508^m$ (Springflut), in den Quadraturen hingegen $47 \cdot 675^m - 17 \cdot 833^m = 29 \cdot 842^m$ (Nippflut). Die so berechneten theoretischen Werte erreicht aber das Wasser nicht; die Hochwelle, dem Gestirne folgend, wälzt sich von Meridian zu Meridian, stößt aber dabei auf mancherlei Hindernisse, wie Reibung, Trägheit der nachbarlichen weniger bewegten Massen, Luftströmungen u. s. w., so dass sie erstens nicht so hoch steigt, zweitens aber auch in der Zeit einigermaßen zurückbleibt.

Es tritt demnach an zwei Orten, welche in geographischer Länge um 180^0 auseinander liegen, zu gleicher Zeit Flut ein; dies erscheint auf den ersten Augenblick paradox, da man versucht ist zu glauben, dass, wenn an der dem Gestirne zugewendeten Seite das Meer anschwillt, es auf der entgegengesetzten fallen muss. Allein man muss bedenken, dass vermöge der vom Gestirn ausgehenden Anziehung die ganze Erdmasse sammt ihrem Mittelpunkte aus ihrer Lage gebracht und dem Gestirne thatsächlich etwas genähert wird, wie wir dies früher gesehen haben, infolge wovon die an der abgewendeten Seite liegenden schwächer angezogenen Wassermassen zurückbleiben und hier eine Anschwellung bewirken.

Um die Verschwindungspunkte, wo $R - R_0 = 0$ wird, zu finden, setze man den Ausdruck innerhalb der eckigen Klammern gleich der Null und löse die so gebildete Gleichung nach $cos(\vartheta - \alpha)$ auf; weil $cos 2 (\vartheta - \alpha) = 2 cos^2 (\vartheta - \alpha) - 1$ ist, so hat man zunächst

$$cos^2 (\vartheta - \alpha) + 2 \, tg \varphi' tg \delta \, cos (\vartheta - \alpha) - \tfrac{1}{2} = 0$$

woraus sich ergibt

$$cos(\vartheta - \alpha) = - tg \varphi' tg \delta \pm \sqrt{\tfrac{1}{2} + tg^2 \varphi' tg^2 \delta} \qquad R - R_0 = 0$$

Es kommen also im allgemeinen zwei Werte für $cos(\vartheta - \alpha)$ zum Vorscheine, weil aber einem jeden derselben zwei Winkel entsprechen, da $cos(\pm x)$ einerlei Wert besitzt, so erhält man für $\vartheta - \alpha$ vier verschiedene Winkel, bei denen der normale Zustand in R eintritt. Am Äquator ist immer $cos(\vartheta - \alpha) = \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}}$, daher $\vartheta - \alpha = 45^0, 135^0, 225^0, 315^0$; diese Werte gelten auch in anderen Breiten für $\delta = 0$, wenn also das Gestirn im Äquator steht.

Während aber am Äquator und für $\delta = 0$ Ebbe und Flut sehr regelmäßig wechseln, gestalten sich die Verhältnisse schon in mittleren Breiten ganz anders, wenn die Declination des Mondes, der Sonne etwas anwächst und infolgedessen das erste Glied in der Schlussformel mitzuspielen beginnt. Da wird $cos(\vartheta - \alpha)$ im Ausdrucke für die Verschwindungspunkte sehr bald unmöglich, wenn man vor der Wurzel das negative Vorzeichen nimmt und δ dabei positiv ist; ebenso wenn man das positive Vorzeichen nimmt und δ

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

negativ ist. Betrachten wir den ersten Fall; das Minimum, dessen $cos(\vartheta - \alpha)$ fähig ist, beträgt -1, es wird dann

$$-1 = -tg\,\varphi' tg\,\delta - \sqrt{\tfrac{1}{2} + tg^2\varphi' tg^2\delta}$$

aus welcher Gleichung man

$$tg\,\varphi' tg\,\delta = \tfrac{1}{4} \qquad R - R_0 = 0$$

erhält. Bei diesem Werte von $tg\,\varphi' tg\,\delta$ ist also $cos(\vartheta - \alpha) = -1$ daher noch möglich, wobei $R - R_0 = 0$ wird, allein weil $\vartheta - \alpha = 180^0$ ist, so steht das Gestirn schon in unterer Culmination, und das untere Maximum bleibt aus. Hier gibt es nur mehr drei Verschwindungspunkte, welche stattfinden bei $cos(\vartheta - \alpha) = -\tfrac{1}{4} \pm \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{16}} = -\tfrac{1}{4} \pm \tfrac{3}{4} = \tfrac{1}{2}, -1$; die entsprechenden Winkel sind $\pm 60^0$, 180^0.

Wächst demnach δ von Null an gegen Norden, was für die Bewohner der nördlichen Erdhälfte die positive Seite ist, so kommt es eine Zeit lang noch zu einem unteren Maximum in $R - R_0$, dasselbe wird aber immer kleiner und verschwindet endlich, wenn $tg\,\varphi' tg\,\delta = \tfrac{1}{4}$ wird; dabei wird aber das obere Maximum bei $\vartheta - \alpha = 0$ immer erheblicher und die beiden Minima des Auf- und Unterganges bleiben indessen. Wird nun $tg\,\varphi' tg\,\delta > \tfrac{1}{4}$, so gibt es nur noch zwei Verschwindungspunkte, wo $R - R_0 = 0$ wird, an die Stelle des unteren Maximums tritt ein Minimum ein, entstanden aus den beiden Minima des Auf- und Unterganges.

Bei größeren Declinationen des Mondes, der Sonne haben daher schon die mittleren Breiten nur noch e i n Maximum bei $\vartheta - \alpha = 0$ und e i n Minimum bei $\vartheta - \alpha = 180^0$, wobei aber das Maximum, die Flut, ungemein anwächst.

Die Sache verkehrt sich ins Gegentheil, wenn das Gestirn südliche Declinationen annimmt; bis $tg\,\varphi' tg\,\delta = -\tfrac{1}{4}$ gibt es noch zwei Maxima und Minima, allein das obere Maximum wird immer kleiner, das untere immer größer; an der besagten Grenze nun verschwindet das obere Maximum und geht dann, wenn $tg\,\varphi' tg\,\delta$ über $-\tfrac{1}{4}$ hinauskommt, durch die Null hindurch in ein Minimum über. Bei bedeutenderen südlichen Declinationen des Gestirnes haben also die Bewohner nördlicher Breiten bei $\vartheta - \alpha = 0$ ein Minimum, die Ebbe, und ein Maximum, die Flut, bei $\vartheta - \alpha = 180^0$, welche sehr hoch ansteigt.

Nehmen wir beispielsweise $\varphi = 45^0$ an, so wird $\varphi' = 44^0\,48'\,47{\cdot}3''$, $lg\,\varrho = 6{\cdot}8040595$ in Metern und für Mond, Sonne

$$R - R_0 = \left.\begin{matrix}67{\cdot}094^m\\25{\cdot}096^m\end{matrix}\right\} f^3 sin\,2\delta\,cos(\vartheta - \alpha) + \left.\begin{matrix}33{\cdot}77^m\\12{\cdot}63^m\end{matrix}\right\} f^3 cos^2\delta\,cos\,2(\vartheta - \alpha)$$

In mittlerer Entfernung, wo $f = 1$ ist und für $\delta = 0$, wird in oberer und unterer Culmination des Mondes die Fluthöhe $33{\cdot}8^m$; ist aber beispielsweise $\delta = 24^0$, so wird in oberer Culmination die Flut $78{\cdot}0^m$, in unterer Culmination die Ebbe $-21{\cdot}7^m$; für $\delta = -24^0$ wird umgekehrt in oberer Culmination die Ebbe $-21{\cdot}7^m$, in unterer die Flut $78{\cdot}0^m$.

Laibach, Ende April 1900.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf