Über die Anzahl der Darstellungen einer gegebenen Zahl A durch die Form $\sum p_n x_n$; in welcher die p gegebene, unter sich verschiedene Primzahlen, x_n ganze positive Zahlen mit Ausschluß der Null sind.

Es seien $p_1, p_2 \ldots p_{n+1}$ unter sich verschiedene Primzahlen, dann läßt sich eine positive ganze Zahl A von hinreichender Größe auf verschiedene Arten durch die Form darstellen

$$A = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_{n+1} x_{n+1}$$

in welcher $x_1, x_2, \ldots x_{n+1}$ positive ganze Zahlen mit Ausschluß der Null bezeichnen. Die Anzahl dieser Darstellungen zu ermitteln, bildet den Gegenstand der folgenden Untersuchung.

Bezeichnungen: Unter Zahl wird hier nur die positive ganze Zahl mit Ausschluß der Null verstanden, wenn nicht durch die Hinzufügung „negativ" der Begriff auf alle übrigen ganzen Zahlen ausgedehnt wird.

Das Zeichen $E(\alpha)$ drückt das größte in α enthaltene Ganze aus, gleichviel ob α positiv oder negativ ist. Hiernach würde sein $E(1{,}7) = 1$; $E(0{,}3) = 0$; $E(-2{,}8) = -3$. In Betreff negativer α mag gleich die Formel bemerkt werden:

$$E\left(-\frac{n}{p}\right) = -1 - E\left(\frac{n-1}{p}\right)$$

Ferner wird zur Vereinfachung des Drucks gesetzt

$$p_1 = p;\ p_2 = q;\ p_3 = r;\ p_4 = t;\ p_5 = \varrho \ldots$$

§. 1.

Der einfachste Fall ist

$$p x_1 + q x_2 = A$$

Die Anzahl der Darstellungen von A durch die vorgelegte Form sei

$$N = f(A)$$

Sind a und b die kleinsten Zahlen, welche die Gleichung erfüllen

(1) $$pa - qb = 1$$

so hat man bekanntlich:

$$a = p^{q-2} - qE\left(\frac{p^{q-2}}{q}\right)$$

$$b = \frac{p^{q-1} - 1}{q} - pE\left(\frac{p^{q-2}}{q}\right)$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Alle Darstellungen von x_1 und x_2 liegen dann in den beiden Formen:

(2) $$\begin{cases} x_1 = Aa - nq \\ x_2 = np - Ab \end{cases}$$

Damit dieselben für x_1 und x_2 nur positive Werte mit Ausschluß der Null liefern, muß n innerhalb der Grenzen liegen:

$$E\left(\frac{aA-1}{q}\right) \geqq n \geqq 1 + E\left(\frac{bA}{p}\right)$$

Daher ist:

(3) $$f(A) = E\left(\frac{aA-1}{q}\right) - E\left(\frac{bA}{p}\right)$$

Setzt man hier $A = npq + h$, so entsteht

$$f(npq+h) = n(ap-bq) + E\left(\frac{ah-1}{q}\right) - E\left(\frac{bh}{p}\right)$$

d. h.

(4) $$f(npq+h) = n + f(h)$$

Dieses ist die Formel für die Periodicität.

Da $pa = 1 + qb$ ist, so ergiebt sich aus (3):

(5a) $$f(p+q+h) = E\left(\frac{ah}{q}\right) - E\left(\frac{bh-1}{p}\right) \text{ und}$$

(5b) $$f(npq-h) = n + E\left(\frac{-ah-1}{q}\right) - E\left(\frac{-bh}{p}\right)$$
$$= n - E\left(\frac{ah}{q}\right) + E\left(\frac{bh-1}{p}\right)$$

Die Addition von (5a) und (5b) führt zu der wichtigen Gleichung:

(5) $$f(npq-h) + f(p+q+h) = n$$

Man lasse nun in (4) durch Definition negative h zu, so erhält man:

$$f(npq-h) = n + f(-h)$$

Daher wird:

(6) $$f(-h) = -f(p+q+h)$$

und es ist ersichtlich, daß für $h = o$ die Gleichung entspringt:

(7) $$f(o) = -f(p+q) = -1$$

Die an sich bedeutungslosen Zeichen $f(-h)$ und $f(o)$ sind also durch die Werte aus (6) und (7) zu ersetzen, damit die Gleichung (4) auch auf negative h mit Einschluß der Null ausgedehnt werden kann.

Zu bemerken ist noch, daß eine der Zahlen p und q, ja selbst beide gleich der Einheit gesetzt werden dürfen, ohne die Richtigkeit der bewiesenen Formeln aufzuheben.

§. 2.

Es sei jetzt:

$$px_1 + qx_2 + rx_3 = A$$

und die Anzahl aller Darstellungen von A durch die gegebene Form

$$N = f_2(A)$$

Man setze nun für x_3 einen der Werte $\varsigma = 1, 2, 3, \ldots m$, wo m den größten Wert bezeichnet, welchen x_3 überhaupt annehmen kann, so ist nach §. 1 die Anzahl aller Darstellungen von

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$A - r\varrho \text{ durch die Form } p x_1 + q x_2$$
$$N = f(A - r\varrho)$$

Daher wird:

(1) $$f_2(A) = \sum_1^m f(A - r\varrho)$$

Wird A um $npqr$ vermehrt, so wächst m um npq an und man erhält:

(2) $$f_2(A + npqr) = \sum_1^m f(A + npqr - r\varrho) + \sum_{m+1}^{m+npq} f(A + npqr - r\varrho)$$

Nun ist:

$$\sum_{m+1}^{m+npq} f(A + npqr - r\varrho) = \sum_{m+1-npq}^{m} f(A - r\varrho)$$
$$= \sum_1^m f(A - r\varrho) + \sum_{m+1-npq}^{0} f(A - r\varrho)$$
$$= f_2(A) + \sum_{m+1}^{npq} f(A + npqr - r\varrho)$$
$$= f_2(A) + \sum_1^{npq} f(A + npqr - r\varrho) - \sum_1^m f(A + npqr - r\varrho)$$

Daher folgt aus (2):

(3) $$f_2(A + npqr) = f_2(A) + \sum_1^{npq} f(A + npqr - r\varrho)$$

Es sei nun:

(4) $$\Phi(A) = \sum_1^{pq} f(A + (m - 1) r)$$

und entsprechend

$$\Phi(A + (\varrho - 1) pqr) = \sum_1^{pq} f((\varrho - 1) pqr + A + (m - 1) r)$$
$$= \sum_1^{pq} \left\{ (\varrho - 1) r + f(A + (m - 1) r) \right\} \qquad \text{(cf. (4) §. 1)}$$
$$= (\varrho - 1) pqr + \Phi(A)$$

Setzt man nun für ϱ die Werte $1, 2, 3, \ldots n$ und addiert alle Gleichungen, so ergiebt sich mit Hilfe von (4)

$$\sum_1^{npq} f(A + npqr - r\varrho) = \frac{n(n-1)}{2} pqr + n\Phi A$$

Daher folgt aus (3):

(5) $$f_2(A + npqr) = f_2(A) + \frac{n(n-1)}{2} pqr + n\Phi A$$

Aus (4) und (4) §. 1 gewinnt man ferner:

$$\Phi(A + r) = r + \Phi A$$
$$\Phi(A + pq) = pq + \Phi A$$

und allgemein:

$$\Phi(A + hpq - ir) = hpq - ir + \Phi A$$

Über die Zahlen h und i kann man stets so verfügen, daß

$$hpq - ir = 1 \text{ wird.}$$

Dann ergiebt sich:

$$\Phi(A + 1) = 1 + \Phi A$$

oder

(6) $$\Phi(A) = A + \text{Const.}$$

wo die Konstante nur von p, q, r abhängig ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Um ihren Wert zu bestimmen, bemerke man nach (5) §. 1 die Gleichung:

$$f\left(A + p + q + (\varsigma - 1)\, r\right) + f\left(npq - A - (\varsigma - 1)\, r\right) = n$$

setze für ς alle Werte von 1 bis pq und addiere, so erhält man mit Hilfe von (4):

$$\Phi\,(A + p + q) + \Phi\left(npq - A - (pq - 1)\, r\right) = npq$$

und indem man von (6) Gebrauch macht:

$$2\ \text{Const.} + p + q + r + npq - pqr = npq$$

oder

$$\text{Const.} = \frac{pqr}{2} - \frac{p + q + r}{2}$$

Mit Hilfe dieses Wertes folgt aus (6)

(7) $$\Phi\, A = A + \frac{pqr}{2} - \frac{p + q + r}{2}$$

Jetzt gewinnt man aus (5) die Perodicitätsformel:

(8) $$f_2\,(A + npqr) = \frac{n^2}{2}\, pqr + n\left(A - \frac{p + q + r}{2}\right) + f_2\,(A)$$

Um dieselbe auch für solche Argumente, welche kleiner als der Umfang der Periode pqr sind, anwenden zu können, ist der Wert von $f_2\,(-A)$ zu ermitteln.

Dazu bilden wir aus (1), wenn $g < r$

$$f_2\,(pqr - g - ar) = \sum_{1}^{pq-a-1} f\,(pqr - g - ar - r\varsigma)$$

Nach (5) §. 1 ist nun:

$$f\,(pqr - g - ar - r\varsigma) = r - f\,(p + q + g + ar + r\varsigma)$$

Daher folgt:

$$\begin{aligned} f_2\,(pqr - g - ar) &= r\,(pq - a - 1) - \sum_{1}^{pq} f\,(p + q + g + ar + r\varsigma) \\ &\quad + \sum_{pq-a}^{pq} f\,(p + q + g + ar + r\varsigma) \\ &= r\,(pq - a - 1) - \Phi\,(p + q + r + g + ar) + \sum_{o}^{a} f\,(p + q + pqr + g + r\varsigma) \\ &= pqr - \Phi\,(p + q + r + g + ar) + \sum_{o}^{a} f\,(p + q + g + r\varsigma) \qquad \text{cf. (4) §. 1} \\ &= pqr - \Phi\,(p + q + r + g + ar) + f_2\,(p + q + r + g + ar) \end{aligned}$$

Da ferner $g + ar$ jede ganze Zahl darstellt, die wir mit h bezeichnen, so ergiebt sich:

(9a) $$f_2\,(pqr - h) = pqr - \Phi\,(p + q + r + h) + f_2\,(p + q + r + h)$$

oder durch Benutzung der Gleichung (7):

(9) $$f_2\,(pqr - h) = \frac{pqr}{2} - \left(h + \frac{p + q + r}{2}\right) + f_2\,(p + q + r + h)$$

Setzt man nun in (8) $n = 1$, $A = -h$, so ergiebt sich:

(10) $$f_2\,(-h) = f_2\,(p + q + r + h)$$

und für $h = o$

(11) $$f_2\,(o) = f_2\,(p + q + r) = 1$$

Es kann daher unter Anwendung der beiden letzten Gleichungen die Formel (8) auf negative A mit Einschluß der Null ausgedehnt werden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Beispiele.

I. Es sei zuerst $p = 2$; $q = 3$; $r = 5$; $f_2(x) = \vartheta(x)$, so erhält man aus (8) und (10):

(a) $$\vartheta(30n + x) = 15n^2 + (x - 5)n + \vartheta(x)$$

(b) $$\vartheta(-x) = \vartheta(10 + x)$$

Die ersten dreißig Werte von $\vartheta(x)$ ergeben sich aus der folgenden Tafel:

$\vartheta 1 = 0$	$\vartheta 6 = 0$	$\vartheta 11 = 0$	$\vartheta 16 = 2$	$\vartheta 21 = 4$	$\vartheta 26 = 7$
$\vartheta 2 = 0$	$\vartheta 7 = 0$	$\vartheta 12 = 1$	$\vartheta 17 = 2$	$\vartheta 22 = 5$	$\vartheta 27 = 8$
$\vartheta 3 = 0$	$\vartheta 8 = 0$	$\vartheta 13 = 1$	$\vartheta 18 = 3$	$\vartheta 23 = 5$	$\vartheta 28 = 9$
$\vartheta 4 = 0$	$\vartheta 9 = 0$	$\vartheta 14 = 1$	$\vartheta 19 = 3$	$\vartheta 24 = 6$	$\vartheta 29 = 9$
$\vartheta 5 = 0$	$\vartheta 10 = 1$	$\vartheta 15 = 2$	$\vartheta 20 = 4$	$\vartheta 25 = 7$	$\vartheta 30 = 11$

Hiernach kann man leicht die Richtigkeit von (a) und (b) prüfen.

II. Zur Untersuchung, auf wieviel Arten die Million durch die Form

$$10^6 = 23x + 43y + 101z$$

dargestellt werden kann, bilde man $pqr = 99889$ und $10^6 = 10\,pqr + 1110$, dann wird nach (8)

$$f_2(10^6) = \frac{99889}{2} \cdot 10^2 + \left(1110 - \frac{167}{2}\right) 10 + f_2(1110)$$

$$f_2(10^6) = 5\,004\,715 + f_2(1110)$$

Die Anzahl der brauchbaren Darstellungen von 1110 durch die vorgelegte Form ergiebt sich aus der Tafel

x	y	z
42	1	1
32	4	2
22	7	3
12	10	4
2	13	5
5	2	9

Das sind im ganzen 6 Darstellungen. Also läßt sich die Million auf 5 004 721 verschiedene Arten durch die vorgelegte Form darstellen.

Die Richtigkeit der bewiesenen Formeln wird dadurch nicht beeinträchtigt, daß man eine oder mehrere, ja selbst alle der Größen p, q, r gleich der Einheit setzt.

§. 3.

Es sei jetzt die Anzahl der Darstellungen von

$$px_1 + qx_2 + rx_3 + tx_4 = A$$

$$N = f_3(A)$$

Ferner sei der Kürze wegen

$$pqrt = P$$

$$p + q + r + t = S$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dann gelangt man auf ähnliche Weise wie in §. 2 zu den Resultaten:

(1) $$f_3(-A) = -f_3(A+S)$$

(2) $$f_3(A+nP) = f_3(A) + \frac{n^3P^2}{6} + \frac{n^2P}{2}\left(A - \frac{S}{2}\right) + \frac{n}{2}\left[\left(A - \frac{S}{2}\right)^2 - \frac{D}{12}\right]$$

wo D eine Konstante bezeichnet, welche nur von den Parametern p, q, r, t abhängig ist. Ihre Bestimmung verlangt die Anwendung besonderer Mittel.

Da D eine symmetrische Funktion der Parameter sein muß, so bestimmte ich dieselbe zunächst als Funktion von t, indem ich den übrigen Parametern die besonderen Werte $p = 2$; $q = 3$; $r = 5$ beilegte. Diese Funktion sei:

$$D = \psi(t)$$

Dann folgt aus (2) für $A = 1$, $n = 1$

(3) $$f_3(1+30t) = \frac{1141}{8}t^2 - 58t + 8 - \frac{\psi(t)}{24}$$

Es ist ferner mit Hilfe der in §. 2 definierten Funktion „ϑ"

(4) $$f_3(1+30t) = \sum_1^{29} \vartheta(1+30t-\varsigma t)$$

Sei nun h eine der durch 2, 3, 5 nicht teilbaren Zahlen 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, so kann nach den eingangs gemachten Voraussetzungen t nur von der Form sein

$$t = 30n + h$$

Mit Benutzung dieses Wertes ergiebt sich daher aus (4)

$$f_3(1+30t) = \sum_{m=1}^{29} \vartheta(30nm + mh + 1)$$

da $\vartheta(1) = 0$ ist.

Nun wende man die Formel an

$$\vartheta(30a+b) = 15a^2 + (b-5)a + \vartheta(b)$$

so ergiebt sich

$$\begin{aligned} f_3(1+30t) &= \sum_{m=1}^{29}\left\{15n^2m^2 + nhm^2 - 4nm + \vartheta(mh+1)\right\} \\ &= 128\,325\,n^2 + 8555\,hn - 1740\,n + \sum_1^{29}\vartheta(mh+1) \\ &= \frac{1711}{12}\left\{(30n+h)^2 - h^2\right\} - 58(30n+h-h) + \sum_1^{29}\vartheta(mh+1) \\ &= \frac{1711}{12}(t^2-h^2) - 58(t-h) + \sum_1^{29}\vartheta(mh+1) \end{aligned}$$

Da ferner

$$f_3(1+30h) = \sum_1^{29}\vartheta(mh+1)$$

so folgt endlich:

(5a) $$f_3(1+30t) - f_3(1+30h) = \frac{1711}{12}(t^2-h^2) - 58(t-h)$$

oder da $f_3(1+30h)$ nur von h abhängig ist:

(5) $$f_3(1+30t) = \frac{1711}{12}t^2 - 58t + C(h)$$

Die Bestimmung von $f_3(1+30h) = \sum_1^{29}\vartheta(mh+1)$ läßt sich mit Hilfe der Reduktionsformel

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\vartheta\,(30\,a + b) = 15\,a^2 + (b - 5)\,a + \vartheta\,(b)$$

immer auf die Summe:

$$\sum_1^{29} \vartheta\,(m + 1) = 91$$

zurückführen und man erhält für die 8 verschiedenen h durch direkte Berechnung die Summenwerte

$$\begin{array}{llll}
h = 1 & ; & \sum_1^{29} \vartheta\,(m + 1) & = 91 \\
h = 7 & ; & \Sigma\,\vartheta\,(7\,m + 1) & = 6\,587 \\
h = 11 & ; & \Sigma\,\vartheta\,(11\,m + 1) & = 16\,621 \\
h = 13 & ; & \Sigma\,\vartheta\,(13\,m + 1) & = 23\,349 \\
h = 17 & ; & \Sigma\,\vartheta\,(17\,m + 1) & = 40\,227 \\
h = 19 & ; & \Sigma\,\vartheta\,(19\,m + 1) & = 50\,377 \\
h = 23 & ; & \Sigma\,\vartheta\,(23\,m + 1) & = 74\,099 \\
h = 29 & ; & \Sigma\,\vartheta\,(29\,m + 1) & = 118\,237
\end{array}$$

Führt man in (5) für t diese Werte von h und für $f_3\,(1 + 30\,h)$ die Summenwerte ein, so ergiebt sich, daß

(6) $$C_h = \frac{77}{12}$$ eine absolute Konstante wird.

Daher aus (5):

(7) $$f_3\,(1 + 30\,t) = \frac{1711}{12}\,t^2 - 58\,t + \frac{77}{12}$$

für sämtliche Werte, welche t überhaupt annehmen darf.

Die Vergleichung von (5) und (7) führt nun zu dem Resultat:

(8) $$\psi\,(t) = 38 + t^2$$

Da ferner D symmetrisch in p, q, r, t ist, so folgt unmittelbar

$$D = p^2 + q^2 + r^2 + t^2 + C$$

Der Wert von C reduciert sich auf Null, da für $p = 2$, $q = 3$, $r = 5$, D in $38 + t^2 + C = 38 + t^2$ übergeht.

Also ist für D der Wert:

(9) $$D = p^2 + q^2 + r^2 + t^2$$

in (2) einzusetzen.

§. 4.

Der folgende Fall

$$p\,x_1 + q\,x_2 + r\,x_3 + t\,x_4 + \varrho\,x_5 = A$$

mit der Anzahl der Darstellungen $f_4\,(A)$ hat keine besonderen Schwierigkeiten.

Setzt man der Kürze wegen

$$\begin{aligned}
p\,q\,r\,t\,\varrho &= P \\
p + q + r + t + \varrho &= S \\
p^2 + q^2 + r^2 + t^2 + \varrho^2 &= Q
\end{aligned}$$

so erhält man die Fundamentalformeln:

(1) $$f_4\,(-A) = f_4\,(A + S)$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$(2) \qquad f_4(A + nP) = f_4(A) + \frac{n^4 P^3}{24} + \frac{n^3 P^2}{6}\left(A - \frac{S}{2}\right) + \frac{n^2 P}{4}\left[\left(A - \frac{S}{2}\right)^2 - \frac{Q}{12}\right]$$
$$+ \frac{n}{6}\left[\left(A - \frac{S}{2}\right)^3 - \left(A - \frac{S}{2}\right)\frac{Q}{4}\right]$$

Aus (2) findet man B. h., daß die Million durch die Form

$$3x + 7y + 11z + 13u + 37v$$

auf $N = 374947\ 127460\ 708210$ verschiedene Arten in ganzen positiven Zahlen mit Ausschluß der Null dargestellt werden kann.

Bemerkung. Durch Vergleichung der verschiedenen Formeln wird man gesehen haben, daß

$$f_m(-A) = (-1)^m f_m(A + S)$$

und

$$f_{m-1}(A + nP) - f_{m-1}(A) = \frac{\partial f_m(A + nP)}{P\,\partial n} \text{ ist,}$$

wenn rechts der $(m + 1)^{te}$ Parameter als Faktor und Summand einfach weggelassen wird.

Ferner wird man bemerkt haben, daß, wenn alle Parameter gleich der Einheit gesetzt werden, die Anzahl der Darstellungen von

$$\sum_1^{m+1} x_\varrho = A$$

durch den Binomialkoëffizienten

$$N = \frac{(A-1)\ (A-2)\ \ldots\ (A-m)}{1.\quad 2\quad \ldots\quad m}$$

ausgedrückt wird.

Kiel, 15. Dezember 1885.

Meissel.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf