III. Arithmetik und Algebra.

Lehrbücher: Holzmüller, vgl. II. Planimetrie. Reidt, Aufgaben-Sammlung z. Arithm. u. Alg., 3. Aufl., 1892. Greve, Fünfstell. logarithm. u. trigonom. Tafeln, 5. Aufl., 1893. (Prima.)

A. Tertia.

Lehraufgabe: Die Grundrechnungen mit absoluten Zahlen. Bestimmungsgleichungen ersten Grades. Anwendung derselben auf Aufgaben aus dem bürgerlichen Leben und dem sog. kaufmännischen Rechnen.

Unterrichtsstoff.

Das Gebiet der (absoluten) ganzen Zahlen. HA 1—32.

1. Einführung in das Zahlengebiet; bestimmte und *allgemeine Zahlen (Buchstaben); ganze, *positive Zahlen.

*2. **Addieren;** Summe, Glieder einer Summe oder Summanden.

3. $a + b = b + a$, $a + b + c + \cdots = a + c + b + \cdots = b + c + a + \cdots$ u. s. w., d. h. eine Summe ändert ihren Wert nicht, wenn man ihre Glieder beliebig umstellt.

*4. $a + b + c + d + e = (a + b) + (c + d + e) = (a + b + d) + (c + e)$ u. s. w., d. h. die Glieder einer Summe können beliebig zusammengefaßt (gruppiert) werden; *Klammern.

*5. **Subtrahieren;** Minuend, Subtrahend, Differenz.

6. Aus $a - b = c$ folgt $a - c = b$, d. h. Subtrahend und Differenz können ihre Stellen vertauschen.

7. $(a - b) + b = a$ oder: Differenz + Subtrahend = Minuend.

*8. $(a + b) - b = a$ oder: Addition und Subtraktion derselben Zahl heben sich gegenseitig auf.

9. Aus jeder der Gleichungen $a + b = c$, $c - a = b$, $c - b = a$ folgen die beiden andern.

*10. $a - b - c = a - (b + c)$, d. h.: Sind von einer Zahl mehrere andere abzuziehen, so kann man auch die Summe derselben von der erst genannten Zahl abziehen.

*11. $a - (b + c) = a - b - c$, d. h.: Eine Summe wird von einer Zahl subtrahiert, indem man die einzelnen Glieder subtrahiert.

12. Auch gruppenweises Abziehen ist gestattet.

*13. $a + (b - c) = (a + b) - c$, d. h.: Eine Differenz wird zu einer Zahl addiert, indem man den Minuend addiert und den Subtrahend subtrahiert.

*14. $a - (b - c) = a - b + c$, d. h.: Eine Differenz wird subtrahiert, indem man den Minuend subtrahiert und den Subtrahend addiert.

*15. Binom, Trinom, Polynom.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

*16. $a + (b + c - d + e - f - g) = a + b + c - d + e - f - g$ und $a - (b + c - d + e - f - g) = a - b - c + d - e + f + g$, d. h.: Soll eine Klammer addiert werden, so läßt man das Klammerzeichen einfach weg; soll eine Klammer subtrahiert werden, so sind alle Additionsglieder derselben zu subtrahieren, alle Subtraktionsglieder zu addieren. (Umkehrung der Vorzeichen.) [Auflösen der Klammern.]

17. Enthält eine Klammer andere Klammern, so kann man beim Auflösen erst die äußeren oder erst die inneren Klammern entfernen. Also:
$a - [b - (c - d) - e] = a - b + (c - d) + e = a - b + c - d + e$,
oder:
$a - [b - (c - d) - e] = a - [b - c + d - e] = a - b + c - d + e$.

*18. **Multiplizieren**; Multiplikand, Multiplikator; Produkt; Faktoren.

19. $a \cdot b = b \cdot a$, d. h. Multiplikator und Multiplikand können mit einander vertauscht werden, ohne daß das Produkt sich ändert.

20. Man schreibt: ab (statt $a \cdot b$; ferner ist $a \cdot 1 = a$, $a \cdot 0 = 0$.

*21. $abc = (ab)c = a(bc) = acb = bac = bca = cab = cba$, d. h. der Wert eines Produkts ist unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren.

*22. Ein Produkt wird mit einer Zahl multipliziert, indem man einen seiner Faktoren mit ihr multipliziert.

23. Man multipliziert mit einem Produkt, indem man mit seinen einzelnen Faktoren multipliziert.

*24. $(a + b)c = c(a + b) = ca + cb = ac + bc$, oder: Eine Summe wird mit einer Zahl multipliziert, indem man die einzelnen Glieder mit der Zahl multipliziert (und die entstandenen Produkte addiert). — Eine Zahl wird mit einer Summe multipliziert, indem man die Zahl mit den einzelnen Gliedern der Summe multipliziert (u. d. entst. Prod. add.).

*25. $ac + bc = c(a + b)$, oder: Kommt in einer Summe von Produkten derselbe Faktor in jedem Gliede vor, so kann man ihn absondern, d h. man befreit jedes Glied von dem Faktor und multipliziert mit diesem die Summe der bleibenden Zahlen. [Absondern des gemeinschaftl. Faktors.]

26. $(a + b)(c + d) = (a + b)c + (a + b)d = ac + bc + ad + bd$,
oder: $(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd$.

*27. $(a - b)c = c(a - b) = ca - cb = ac - bc$, oder: Eine Differenz wird mit einer Zahl multipliziert, indem man den Minuend und den Subtrahend für sich mit der Zahl multipliziert (und vom ersteren Produkte das letztere abzieht). — Eine Zahl wird mit einer Differenz multipliziert, indem man die Zahl erst mit dem Minuend, dann mit dem Subtrahend multipliziert (u. v. erst. Prod. d. letzt. abz.).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

28. $(a + b)(c - d) = (a + b)c - (a + b)d = ac + bc - (ad + bd) = ac + bc - ad - bd$.

29. $(a - b)(c - d) = (a - b)c - (a - b)d = ac - bc - (ad - bd) = ac - bc - ad + bd$.

*30. $(a + b)(a + b) = aa + ba + ab + bb = aa + 2ab + bb$. Statt aa schreibt man a^2 (gelesen: „a Quadrat" oder „a hoch 2"; daher ist $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, d. h.: Das Quadrat der Summe zweier Zahlen ist gleich der Summe der Quadrate der einzelnen Zahlen, vermehrt um das doppelte Produkt aus beiden Zahlen. (Vgl. II. Planimetrie, B 67.)

*31. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, d. h.: Das Quadrat der Differenz zweier Zahlen ist gleich der Summe der Quadrate der einzelnen Zahlen, vermindert um das doppelte Produkt beider Zahlen. (Vgl. II. Planimetrie, B 68.)

*32. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, d. h.: Das Produkt aus Summe und Differenz zweier Zahlen ist gleich der Differenz ihrer Quadrate.

33. $(a + b)^2 + (a - b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + (a^2 - 2ab + b^2) = 2(a^2 + b^2)$.

34. $(a + b)^2 - (a - b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2) = 4ab$.

*35. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. [$a^3 (= aaa)$ lies „a hoch 3", oder „a zur dritten".]

*36. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$. [Abwechselnde Vorzeichen.]

*37. $(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$, oder: Das Quadrat einer Summe ist gleich der Summe der Einzelquadrate vermehrt um die Summe der möglichen doppelten Produkte.

*38. **Dividieren;** Dividend, Divisor (Zähler, Nenner); Quotient (Bruch).

39. Aus jeder der Gleichungen $\frac{a}{b} = c$, $a = bc$, $\frac{a}{c} = b$ folgen die beiden andern. Sie lauten in Worten: **Quotient** = Dividend durch Divisor, **Dividend** = Divisor mal Quotient, **Divisor** = Dividend durch Quotient.

*40. Divisor und Quotient können vertauscht werden.

*41. $\frac{a}{a} = 1$, d. h. jede Zahl ist in sich selbst ein Mal enthalten.

42. $\frac{a}{1} = a$, d. h. eine Zahl bleibt bei der Division durch 1 ungeändert; der Divisor 1 darf also weggelassen werden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

*43. $\left(\frac{a}{b}\right) b = a$. — Multiplikation und Division durch dieselbe Zahl heben sich gegenseitig auf.

*44. $\frac{ac}{b} = \frac{a}{b} \cdot c = c \cdot \frac{a}{b}$, oder: a) Ein Produkt wird durch eine Zahl dividiert, indem man einen der Faktoren dnrch die Zahl dividiert (und den Quotienten mit dem andern Faktor multipliziert); b) Ein Quotient wird mit einer Zahl multipliziert, indem man den Dividend mit der Zahl multipliziert (und das Produkt durch den Divisor dividiert); c) Eine Zahl wird mit einem Quotienten multipliziert, indem man sie mit dem Dividend multipliziert und das Produkt durch den Divisor dividiert.

*45. $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} = \frac{a}{bc} = \frac{\left(\frac{a}{c}\right)}{b}$, oder: a) Ein Quotient wird durch eine Zahl dividiert, indem man den Divisor mit der Zahl multipliziert; b) Eine Zahl wird durch ein Produkt dividiert, indem man sie erst durch den einen Faktor und dann den Quotienten durch den anderen Faktor dividiert. Die Reihenfolge der Divisionen ist dabei gleichgiltig.

*46. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{bd} \cdot c = \frac{ac}{bd}$, oder: Ein Quotient wird mit einem Quotienten multipliziert, indem man die beiden Dividenden und ebenso die beiden Divisoren mit einander multipliziert.

*47. $\frac{a}{b} \cdot \frac{n}{n} = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$, oder: a) Multiplikation des Dividenden und des Divisors mit derselben Zahl ändert den Quotienten nicht (Erweitern des Quotienten); b) Läßt sich vom Dividenden und vom Divisor derselbe Faktor absondern, so kann dieser bei beiden gestrichen werden, ohne daß der Quotient sich ändert (Kürzen des Quotienten).

*48. $\frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)} = \frac{ac}{b}$,

*49. $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

} oder: Man dividiert durch einen Quotienten, indem man ihn umkehrt und damit multipliziert, d. h. indem man mit dem Divisor multipliziert und durch den Dividenden dividiert.

*50. $\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$, oder: Quotienten mit demselben Divisor werden addiert [subtrahiert], indem man die Dividenden addiert [subtrahiert] und die Summe [Differenz] durch den Divisor dividiert.

*51. $\frac{a \pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}$, oder: Eine Summe [Differenz] wird durch eine Zahl dividiert, indem man jedes einzelne Glied [den Minuend und den Subtrahend] durch die Zahl dividiert und die Quotienten addiert [subtrahiert].

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

*52. $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$, oder: Zwei Quotienten mit ungleichem Divisor werden addiert, indem man jeden von beiden so erweitert, daß gleiche Divisoren entstehen, und dann die neuen Quotienten addiert. Dasselbe gilt vom Subtrahieren. (Gleichnamig machen.)

53. Division algebraischer Summen durch algebraische Summen. (Nur ganz einfache Uebungsbeispiele.)

Negative und gebrochene Zahlen. HA 33—47.

*54. **Negative** Zahlen sind Differenzen, deren Minuend Null ist. Positive, entgegengesetzte Zahlen. Vorzeichen, absoluter Zahlenwert. Veranschaulichung der positiven und negativen ganzen Zahlen.

55. $a - b = -(b - a)$, wenn $b > a$.

*56. $a + (-c) = a + (0 - c) = (a + 0) - c = a - c$, $a - (-c) = a - (0 - c) = (a - 0) + c = a + c$, d. h. Addition [Subtraktion] einer negativen Zahl bedeutet dasselbe, wie Subtraktion [Addition] der entsprechenden positiven.

57. Veranschaulichung von 56) an den Punkten einer Geraden.

*58. Alle Gruppierungsgesetze der Addition bleiben für das Gebiet der negativen Zahlen bestehen.

*59. $(-a) \cdot (+b) = -ab$, oder: Ist der Multiplikand negativ und der Multiplikator positiv, so ist das Produkt negativ.

*60. $(+b) \cdot (-a) = -ab$ u. $(-a) \cdot (-b) = ab$, oder: Man multipliziert mit einer negativen Zahl genau wie mit einer positiven, giebt aber dem Produkt das entgegengesetzte Vorzeichen.

*61. Bei abgekürzter Sprechweise ist für die Multiplikation:

$+ \cdot + = +$ (plus mal plus = plus),
$- \cdot + = -$ (minus mal plus = minus),
$+ \cdot - = -$ (plus mal minus = minus),
$- \cdot - = +$ (minus mal minus = plus),

oder: Beim Multiplizieren geben gleiche Vorzeichen **plus**, ungleiche **minus**.

*62. $\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$, $\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$, $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$, d. h. die 61) entsprechende Vorzeichentabelle und Regel gelten auch beim Dividieren.

*63. **Gebrochene** Zahlen sind Teile einer oder mehrerer Einheiten, z. B. $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{6}{6}, \frac{20}{11}, \frac{1}{b}, \frac{a}{c}, \frac{-a}{c}, \frac{a}{-c}, \frac{-a}{-c}$. Bruch, Zähler, Nenner.

64. $\frac{1}{b}$ ist die umgekehrte Größe von b, b die umgekehrte von $\frac{1}{b}$.

65. $a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$, d. h. die Multiplikation mit $\frac{1}{b}$ bedeutet dasselbe, wie die Division durch b.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

66. Die Division durch $\frac{1}{b}$ ist dasselbe, wie die Multiplikation mit b.

67. Die Multiplikation mit [Division durch] $\frac{a}{b}$ ist dasselbe, wie die Multiplikation mit [Division durch] a und die Division durch [Multiplikation mit] b.

*68. Jeder **Bruch** ist ein Quotient; der Zähler braucht nicht ein Vielfaches des Nenners zu sein. — Mit Brüchen wird ebenso gerechnet, wie mit Quotienten.

*69. Erweitern, Kürzen, Addieren und Subtrahieren von Brüchen erfolgen nach 47), 50) und 52).

*70. Beim Addieren und Subtrahieren von Brüchen, deren Nenner gemeinschaftliche Faktoren haben, darf nicht das Produkt der Einzelnenner als Hauptnenner genommen werden; das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Einzelnenner ist Hauptnenner.

*71. Alle Formeln und Regeln des vorigen Abschnittes gelten auch für negative und gebrochene Zahlen.

*72. Allgemeineres Divisionsverfahren:

$$\begin{array}{l}
(8a^3 + 18a^2b + 19ab^2 + 15b^3) : (2a + 3b) = 4a^2 + 3ab + 5b^2 \\
\underline{8a^3 + 12a^2b} \\
\qquad\quad 6a^2b + 19ab^2 \\
\qquad\quad \underline{6a^2b + 9ab^2} \\
\qquad\qquad\qquad 10ab^2 + 15b^3 \\
\qquad\qquad\qquad 10ab^2 + 15b^3
\end{array}$$

Anm. Bei jeder Aufgabe müssen Dividend und Divisor zuerst gleichmäßig geordnet werden. — Die Divisionen brauchen nicht immer aufzugehen; ein Restglied kann bleiben.

Anhang. HA 48.

73. **Primzahlen** sind solche ganze Zahlen, die (von 1 und der Zahl selbst abgesehen) durch keine ganze Zahl ohne Rest teilbar sind; alle anderen Zahlen heißen **zusammengesetzte** Zahlen.

74. **Primfaktoren** sind die Primzahlen, in deren Produkt sich jede zusammengesetzte Zahl zerlegen läßt.

75. Jede Zahl läßt sich nur auf **eine** Art in Primfaktoren zerlegen.

76. **Relative Primzahlen** sind solche Zahlen, die, ohne selbst Primzahlen zu sein, keinen gemeinschaftlichen Teiler haben.

*77. **Aufg.** Den größten gemeinschaftlichen Teiler zweier Zahlen zu finden.

Zur **Einübung** der angeführten Regeln dienen die Aufgaben in Reidt, S. 1—54, unter denen jedoch sorgfältig auszuwählen ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Gleichungen.

78. Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten, und zwar:

a) nach HA 68—73 (Gleichung, Seiten einer Gleichung, Glieder; Umstellungen, Division, Multiplikation, Klammern; identische Gleichung, Bestimmungsgleichung, unbekannte Größe; Auflösen einer Gleichung; Einteilung der Gleichungen; Normalform einer Bestimmungsgleichung ersten Grades; falsche bezw. unmögliche Gleichungen).

b) nach Reidt, S. 114—123.

79. Eingekleidete Aufgaben aus Reidt, S. 128—164 sorgfältig auszuwählen.

B. Secunda.

Lehraufg.: Lehre v. d. Potenzen u. Wurzeln. Gleichungen einschließlich einfacher quadratischer m. einer Unbekannten.

Unterrichtsstoff.

Potenzen u. Wurzeln m. ganzen positiven Exponenten.

HA 87—95.

*1. **Erkl.** Der Ausdruck a^n (lies: a hoch n) heißt **die n^{te} Potenz** von a, die Zahl a heißt **Grundzahl** (Basis) der Potenz, n heißt der **Potenz-Exponent.** — Die Potenz ist ein Produkt gleicher Faktoren.

*2. **Regel.** $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. — Potenzen derselben Grundzahl werden mit einander multipliziert, indem man die Grundzahl mit der Summe der Exponenten potenziert.

3. **Umk.** $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$.

*4. **Regel.** $a^m : a^n = a^{m-n}$. — Eine Potenz wird durch eine andere derselben Grundzahl dividiert, indem man von dem Exponenten der ersteren den der letzteren abzieht und die Grundzahl mit der Differenz potenziert. (Vorläufig sei $m > n$.)

5. **Umk.** $a^{m-n} = a^m : a^n$.

*6. **Regel.** $a^m : a^n = \frac{1}{a^{n-m}}$, wenn $n > m$ ist.

*7. **Regel.** $(a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}$. — Eine Potenz wird potenziert, indem man die Grundzahl mit dem Produkt der beiden Exponenten potenziert.

8. **Umk.** $a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m$.

*9. **Regel.** $a^n \cdot b^n = (ab)^n$. — Gleich hohe Potenzen werden mit einander multipliziert, indem man das Produkt der Grundzahlen ebenso hoch potenziert.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

*10. **Umk.** $(ab)^n = a^n \cdot b^n$. — Ein Produkt wird potenziert, indem man die einzelnen Faktoren potenziert und die entstandenen Potenzen mit einander multipliziert.

*11 **Regel.** $a^n : b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$. — Gleich hohe Potenzen werden durch einander dividiert, indem man den Quotienten der Grundzahlen ebenso hoch potenziert.

*12. **Umk.** $\left(\frac{a}{b}\right)^n = a^n : b^n$. — Ein Bruch wird potenziert, indem man den Zähler und den Nenner potenziert und dann dividiert.

*13. **Erkl.** $\sqrt[n]{a}$ (lies: n^{te} **Wurzel aus** a) ist diejenige Zahl, deren n^{te} Potenz gleich a ist. — n heißt der **Wurzelexponent,** a der **Radikand.**

*14. **Folg.** $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$; $\sqrt[n]{a^n} = a$.

*15. **Regel.** $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$. — Wurzeln mit gleichen Exponenten werden mit einander multipliziert, indem man die gleich hohe Wurzel aus dem Produkte der Radikanden auszieht.

*16. **Umk.** $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$. — Die Wurzel wird aus einem Produkte ausgezogen, indem man sie aus den einzelnen Faktoren auszieht und das Produkt der Einzelwurzeln bildet.

*17. **Regel.** $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$. — Eine Wurzel wird durch eine andere mit demselben Exponenten dividiert, indem man den Radikanden der ersten durch den der zweiten dividiert und aus dem Bruche die Wurzel auszieht.

*18. **Umk.** $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$. — Ein Bruch wird radiziert, indem man Zähler und Nenner einzeln radiziert und die erste der entstandenen Wurzeln durch die zweite dividiert.

*19. **Regel.** $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$. — Eine Wurzel wird potenziert, indem man den Radikanden potenziert und dann die Wurzel auszieht.

*20. **Umk.** $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$. — Man zieht die Wurzel aus einer Potenz aus, indem man sie aus der Grundzahl auszieht und die so entstandene Wurzel zur entsprechenden Potenz erhebt.

21. **Folg.** Hat man eine Zahl zu potenzieren und zugleich zu radizieren, so ist die Reihenfolge gleichgiltig.

*22. **Regel.** $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$. — Soll eine Zahl mehrfach nacheinander radiziert werden, so kann man sie mit dem Produkte der Exponenten radizieren.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

*23. **Umk.** $\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$. — Man radiziert eine Zahl durch ein Produkt, indem man mit den einzelnen Exponenten nacheinander radiziert.

*24. **Regel.** $\sqrt[m]{a^b} = \sqrt[mp]{a^{bp}} = \sqrt[m:p]{a^{b:p}}$. — Die Wurzel aus einer Zahl bleibt ungeändert, wenn man die beiden Exponenten mit derselben Zahl multipliziert oder durch dieselbe Zahl dividiert. (Vorläufig seien $m:p$ und $b:p$ ganze Zahlen.)

Potenzen u. Wurzeln m. negativen u. gebrochenen Exponenten.

HA 103 u. 104.

*25. $a^0 = 1$. — Jede Zahl, zur 0ten Potenz erhoben, ist gleich 1.

*26. $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$; $a^m = \frac{1}{a^{-m}}$. — Eine Potenz mit negativem Exponenten bedeutet den umgekehrten Wert der entsprechenden Potenz mit positivem Exponenten.

*27. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[\frac{n}{m}]{a}$.

28. $a^{-\frac{m}{n}} = 1 : \sqrt[n]{a^m}$.

*29. Alle für Potenzen mit ganzen positiven Exponenten angegebenen Regeln gelten auch für negative und gebrochene Exponenten.

*30. $a^1 = a$, $0^a = 0$, $\overline{(-a)^{2n}} = a^{2n}$, $(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}$.

31. $\sqrt[1]{a} = a$, $\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}$, $\sqrt[2n]{+a} = \pm\sqrt[2n]{a}$; $\sqrt{-a} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}$.

32. Quadratwurzeln, HA 80—84 und Reidt S. 98—102.

33. Irrationale Zahlen (können weder durch eine ganze Zahl, noch durch einen Bruch genau ausgedrückt werden), HA 59 u. 85 und Reidt S. 93—95.

34. Kubikwurzeln, HA 96 und Reidt S. 102 u. 103.

Zur **Einübung** der angeführten Regeln dienen die Aufgaben in Reidt, S. 67—98, unter denen jedoch sorgfältige Auswahl zu treffen ist, besonders in den §§ 21, 24 u. 26.

Gleichungen.

35. Schwierigere **angesetzte** Gleichungen **ersten** Grades mit **einer** Unbekannten aus Reidt, S. 122—128 auszuwählen.

36. Schwiegere **eingekleidete** Aufgaben aus Reidt, S. 128 bis 164 auszuwählen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

37. **Angesetzte** Gleichungen **ersten** Grades mit **zwei und drei** Unbekannten, und zwar:

a) nach HA 74—78 (Normalform, Substitutionsmethode, Kombinationsmethode, Additions- bezw. Subtraktionsmethode);

b) nach Reidt, S. 164—170 u. S. 182—186.

38. **Eingekleidete** Aufgaben aus Reidt, S. 170—182 und S. 186—188.

39. **Einfache quadratische** Gleichungen mit **einer** Unbekannten:

a) nach HA 79, 80 u. 86 (rein quadratische, gemischt quadratische Gleichung, Normalformen, Wurzeln der Gleichung);

b) nach Reidt, S. 196—199 u. 208—209.

C. Prima.

Lehraufg.: Das Wichtigste über Begriff und Anwendung des Logarithmus nebst Uebungen im logarithmischen Rechnen. Quadratische Gleichungen.

Unterrichtsstoff.

Logarithmen. HA 105—112.

*1. **Erkl.** Der **gemeine Logarithmus** einer Zahl a ist der Exponent α, mit dem man die Grundzahl 10 potenzieren muß, um a zu erhalten. — a heißt der **Numerus** zum Logarithmus α.

Wenn also $10^\alpha = a$ ist, so ist $\log a = \alpha$.

2. Bem. Es giebt auch Logarithmen mit anderen Grundzahlen.

*3. **Folg.** Da $10^0 = 1$, $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$, $\cdots$ ist, so ist $\log 1 = 0$, $\log 10 = 1$, $\log 100 = 2$, $\log 1000 = 3$, $\cdots$

*4. **Folg.** Da $0{,}1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}$, $0{,}01 = \frac{1}{100} = 10^{-2}$, $0{,}001 = \frac{1}{1000} = 10^{-3}$, $\cdots$ ist, so ist $\log 0{,}1 = -1$, $\log 0{,}01 = -2$, $\log 0{,}001 = -3$, $\cdots$

5. Berechnung der Numerus, deren Logarithmen $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \cdots$ $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3} \cdots$ u. s. w. sind.

6. Bem. Hieraus ist die Möglichkeit **logarithmischer Tabellen** zu erkennen.

*7. Die Logarithmen positiver 1, 2, 3, 4, $\cdots\cdots$ n-stelliger Zahlen beginnen bezw. mit 0, 1, 2, 3, $\cdots\cdots$ $(n-1)$.

*8. Die Logarithmen echter Brüche sind negativ, und zwar gilt folgendes:

Liegt die Zahl zw.	0 u. 0,1	, so liegt der Logarithmus zw.	0 u. — 1,
„ „ „ „	0,1 „ 0,01	, „ „ „ „ „	— 1 „ — 2,
„ „ „ „	0,01 „ 0,001	, „ „ „ „ „	— 2 „ — 3,

u. s. w.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

9. Möglichkeit der Berechnung des Logarithmus zu einem Numerus.

*10. **Erkl.** Jeder Logarithmus besteht aus der **Kennziffer** (d. i. die Zahl vor dem Komma) und der **Mantisse** (d. i. der Decimalbruch).

*11. Alle gemeinen Logarithmen, welche nicht ganze Zahlen sind (vgl. 3 u. 4), sind irrationale Zahlen, haben also eine Mantisse mit unendlich vielen Ziffern.

12. Einrichtung und Gebrauch der Logarithmentafeln.

*13. $\log(ab) = \log a + \log b$ (**I. Grundformel**).

*13a. **Regel.** Man logarithmiert ein **Produkt**, indem man die Logarithmen der einzelnen Faktoren addiert.

*14. $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$ (**II. Grundformel**).

*14a. **Regel.** Man logarithmiert einen **Bruch**, indem man vom Logarithmus des Zählers den des Nenners subtrahiert.

*15. $\log(a^n) = n \log a$ (**III. Grundformel**).

*15a. **Regel.** Man logarithmiert eine **Potenz**, indem man den Logarithmus der Grundzahl mit dem Exponenten multipliziert.

*16. $\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log a$ (**IV. Grundformel**).

*16a. **Regel.** Man logarithmiert eine **Wurzel**, indem man den Logarithmus des Radikanden durch den Wurzelexponenten dividiert.

17. Die Grundformeln führen in Verbindung mit den Logarithmentafeln auf ganz außerordentliche Rechen-Erleichterungen; besonders das Ausziehen höherer Wurzeln wird ermöglicht bezw. erleichtert.

18. Durch Anwendung der Logarithmen wird das Multiplizieren zum Addieren, das Dividieren zum Subtrahieren, das Potenzieren zum Multiplizieren, das Radizieren zum Dividieren.

19. Addition und Subtraktion lassen sich nicht m. Hilfe d. Log. vereinfachen.

*20. Die **negativen** Logarithmen schreibt man positiv, zieht jedoch von dem Decimalbruch die ganzzahlige Kennziffer ab. ($-0{,}00782 = 0{,}99218 - 1$.)

*21. Logarithmen mit abzuziehender Kennziffer werden dividiert, indem man den Logarithmus und die abzuziehende Kennziffer um dieselbe Zahl so vermehrt, daß die Division d. abzuzieh. K. aufgeht. $(0{,}99218 - 1) : 3 = (2{,}99218 - 3) : 3 = 0{,}99739 - 1$.

22. **Eingehende Uebungen** im logarithmischen Rechnen nach Reidt, S. 103—114, insbes. nach S. 108—112.

23. **Anwendung** der Logarithmen zur Lösung von Exponentialgleichungen. (Beispiele siehe Reidt, S. 263.)

24. **Anwendung** d. Log. zur Lös. von einfachen Aufgaben der Zinseszinsrechnung.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

*$k = cq^n$; $\log k = \log c + n \log q$; $\log c = \log k - n \log q$; *$\log q = \frac{1}{n}(\log k - \log c) = \log N$; $p = 100\,N - 1$; $n = \frac{\log k - \log c}{\log q}$. (Beispiele siehe Reidt, S. 300—304.)

*25. Die **praktisch wichtigste Anwendung** der Logarithmenlehre findet für die Schule in dem Gebiete der Trigonometrie statt.

26. **Quadratische Gleichungen** mit **einer** Unbekannten:

a) nach HA 70, 80, 86 u. 97—101 (rein u. gemischt quadratische Gleichungen, Normalformen, Wurzeln der Gleichung, Summe und Produkt der Wurzeln, imaginäre Wurzeln);

b) nach Reidt, S. 196—225. (Sorgf. Ausw.)

27. **Ganz einfache** quadratische Gleichungen mit **zwei** (bezw. **drei**) Unbekannten (vgl. Reidt, S. 225—243).

---

* IV. Trigonometrie, Prima.

Lehrbücher: Holzmüller, vgl. II. Planimetrie. Greve, vgl. III. Arithm. u. Algebra.

Lehraufg.: Anfangsgründe der Trigonometrie und Berechnung von Dreiecken.

Unterrichtsstoff.

Die trigonometrischen Funktionen am rechtwinkligen Dreieck.

HT 1—10.

1. Erklärung des Wortes Trigonometrie.

2. Erklärung der Bezeichnungen Sinus, Cosinus, Tangens, Cotangens; trigonometrische Funktion.

3. Trigonometrische Funktionen der Winkel $45^0, 30^0, 60^0, 18^0, 72^0$.

4. Einrichtung der trigonometrischen Tafeln.

5. Aufschlagen der Funktionen zu gegebenen Winkeln bezw. der Logarithmen dieser Funktionen.

6. Aufschlagen der Winkel zu gegebenen Funktionswerten bezw. ihren Logarithmen.

7. Berechnung der fehlenden Seiten und Winkel und des Flächeninhaltes einiger rechtw. Dreiecke zur Einübung von 5) und 6), und zwar aus a und c oder b und c, a und b, c und α oder c und β, a und α oder b und β, a und β oder b und α.

8. Beziehungen zwischen den Funktionen eines Winkels und denen seines Complementwinkels:

$\sin \alpha = \cos (90^0 - \alpha)$, $\cos \alpha = \sin (90^0 - \alpha)$, $\operatorname{tang} \alpha = \operatorname{cotg} (90^0 - \alpha)$, $\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{tang} (90^0 - \alpha)$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

9. Die auf 8) gegründete Einrichtung der trigonometrischen Tafeln.

10. Beziehungen zwischen Funktionen desselben Winkels: $\operatorname{tang}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\operatorname{tang}\alpha = \frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha}$, $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tang}\alpha}$; $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$, $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$.

11. **Werte** der trigonometrischen Funktionen für 0^0 und 90^0: $\sin 0^0 = 0$, $\cos 0^0 = 1$, $\operatorname{tang} 0^0 = 0$, $\operatorname{cotg} 0^0 = \infty$ (unendl. groß); $\sin 90^0 = 1$, $\cos 90^0 = 0$, $\operatorname{tang} 90^0 = \infty$, $\operatorname{cotg} 90^0 = 0$.

12. Die sog. logarithmischen Differenzen werden beim Aufschlagen der Logarithmen der Funktionen Sinus und Tangens addiert; sie werden dagegen beim Aufschlagen der Logarithmen der Funktionen Cosinus und Cotangens subtrahiert.

Berechnung rechtwinkliger und gleichschenkliger Dreiecke und regelmäßiger Vielecke. HT 11—14.

13. Rechtwinklige Dreiecke.

a) Die Bestimmungsstücke sind ausschließlich Seiten und Winkel (vgl. 7);

b) eins derselben ist weder Seite noch Winkel;

c) keines derselben ist Seite oder Winkel.

Bei b) und c) können vorkommen: r, ρ, F, u, h.

14. Gleichschenklige Dreiecke. a), b) und c) wie unter 13).

15. Regelmäßige Vielecke.

a) r und n sind gegeben;

b) statt r ist neben n eines der Stücke a, ρ, F, u gegeben.

Die Funktionen des stumpfen Winkels und das allgemeine Dreieck. HT 15—24.

16. Die Funktionen eines stumpfen Winkels.

17. Beziehungen zwischen den Funktionen eines Winkels und denen seines Supplementswinkels:

$\sin\alpha = \sin(180^0 - \alpha)$, $\cos\alpha = -\cos(180^0 - \alpha)$, $\operatorname{tang}\alpha = -\operatorname{tang}(180^0 - \alpha)$, $\operatorname{cotg}\alpha = -\operatorname{cotg}(180^0 - \alpha)$.

18. Die Nummern 5) und 6) für stumpfe Winkel.

19. Der Sinussatz, HT 16: $a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$.

20. Der Cosinussatz, HT 17: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

21. Der Inhaltssatz, HT 18: $F = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

22. $\triangle$ a, b, γ (HT 19).

23. $\triangle$ a, β, γ (a, α, β) (HT 20).

24. $\triangle$ a, b, c, (HT 21).

24. $\triangle$ a, b, α bei $a > b$ (HT 22).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

25. $\triangle$ a, b, β bei $a > b$ (HT 23).
26. $a = 2r \sin \alpha$ u. s. w. (HT 24).
27. Bem. Alle Aufgaben, die man als Dreieckskonstruktionen mit Zirkel und Lineal durchführen kann, lassen sich auch als trigonometrische Rechnungsaufgaben ausführen; jedesmal müssen drei voneinander unabhängige Stücke gegeben sein.

Vermischte Aufgaben.

28. Aufgaben im Anschluß an die Berechnung rechtwinkliger und gleichschenkliger Dreiecke und regelmäßiger Vielecke.
29. Aufgaben im Anschluß an die Berechnung des allgemeinen Dreiecks.

Bem. Die Aufgaben finden sich in den Aufgabensammlungen und sind so auszuwählen, daß aus ihnen der Wert und die Bedeutung der Trigonometrie für das praktische Leben (z. B. für die Messung von Höhen und unzugänglichen Entfernungen) zu ersehen sind. Vgl. auch HT 4 d, e u. 25—28.

---

* V. Stereometrie, Prima.

Lehrbuch: Holzmüller, vgl. II. Planimetrie. Greve, vgl. III. Arithm. u. Algebra.

Lehraufg.: Die notwendigsten stereometrischen Sätze über Ebenen und Gerade; die einfachen Körper nebst Berechnungen von Kantenlängen, Oberflächen und Inhalten.

Unterrichtsstoff.

1. **Erkl. Stereometrie** ist die Lehre von den Raumgrößen, die nicht in einer Ebene liegen. HP 14.
2. **Erkl.** Eine **Ebene** ist eine endlose Fläche, in der sich von jedem Punkte aus nach jedem andern Punkte eine Gerade ziehen läßt, die nirgends aus der Fläche heraustritt. HP 13.
3. **Erkl.** Eine Ebene ist bestimmt durch:
a) drei Punkte im Raume, die nicht in einer Geraden liegen, HP 13,
b) eine Gerade und einen Punkt außerhalb derselben, HP 13,
c) zwei sich schneidende Gerade, HP 13,
d) zwei parallele Geraden. HP 27.
4. **Erkl.** a) Zwei Geraden im Raume schneiden sich, wenn sie einen Punkt gemeinsam haben;
b) sie sind parallel, wenn sie in einer Ebene liegen, aber keinen Punkt gemeinsam haben;
c) sie heißen sich kreuzende (windschiefe) Gerade, wenn sie weder sich schneiden, noch parallel sind. HP 13.
5. **Folg.** Zu einer Geraden giebt es durch einen außerhalb derselben gelegenen Punkt nur **eine** Parallele.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Lage von Punkten und Geraden zu einer Ebene.

6. **Folg.** (aus 2). Eine Gerade, die mit einer Ebene zwei Punkte gemeinsam hat, liegt ganz in ihr.

7. **Erkl.** Hat eine Gerade mit einer Ebene nur einen Punkt gemeinsam, so schneidet sie die Ebene; Schnittpunkt der Geraden und der Ebene.

8. **Erkl.** Hat eine Gerade mit einer Ebene keinen Punkt gemeinsam, so heißt sie zur Ebene parallel.

9. **Erkl.** Eine Gerade steht auf einer Ebene senkrecht, wenn sie auf allen durch ihren Schnittpunkt mit der Ebene gehenden Geraden in dieser Ebene senkrecht steht.

10. **Erkl.** Eine Gerade, die auf einer Ebene senkrecht steht, heißt **Lot,** ihr Schnittpunkt mit der Ebene heißt **Fußpunkt.**

11. **Satz.** Eine Gerade steht auf einer Ebene senkrecht, wenn sie auf zwei in der Ebene liegenden Geraden in deren Schnittpunkt senkrecht steht.

12. **Satz.** Stehen mehrere Geraden in demselben Punkte einer Geraden auf dieser senkrecht, so liegen sie in einer Ebene.

13. **Satz.** Das Lot ist die kürzeste aller Geraden, welche sich von einem Punkte außerhalb einer Ebene nach Punkten der Ebene ziehen lassen. (Entfernung des Punktes von der Ebene.) — Die Verbindungslinien, deren Schnittpunkte mit der Ebene vom Fußpunkte des Lotes gleiche Entfernung haben, sind gleich; sie sind um so größer, je größer die genannte Entfernung ist.

14. **Zus.** Von einem Punkte außerhalb einer Ebene giebt es nur ein Lot auf diese.

15. **Zus.** Auf einer Ebene giebt es in einem Punkte nur ein Lot.

16. **Satz.** In einem Punkte einer Geraden giebt es nur eine zu ihr senkrechte Ebene.

17. **Satz.** Gerade, die auf derselben Ebene senkrecht stehen, sind parallel.

18. **Satz.** Steht von zwei parallelen Geraden die eine auf einer Ebene senkrecht, so steht auch die andere darauf senkrecht.

19. **Aufg.** Vom Punkte P außerhalb der Ebene E das Lot auf diese zu fällen.

20. **Aufg.** Im Punkte P der Ebene E das Lot auf dieser zu errichten.

21. **Satz.** Zwei Gerade, welche derselben dritten parallel sind, sind unter einander parallel.

22. **Satz.** Winkel im Raume, deren Schenkel parallel sind, sind gleich oder betragen zusammen $2R$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

23. **Erkl.** Der kleinste aller Winkel, welche eine Gerade mit einer Ebene (d. h. mit Geraden, die durch ihren Schnittpunkt mit der Ebene in dieser Ebene gehen), bildet, heißt Neigungswinkel der Geraden zur Ebene.

24. **Erkl.** Die Verbindungslinie der Fußpunkte der Lote, welche von den Endpunkten einer Strecke auf eine Ebene gefällt werden, heißt die **Projektion** der Strecke auf die Ebene.

25. **Satz.** Der Winkel zwischen einer Geraden und ihrer Projektion auf eine Ebene ist der Neigungswinkel der Geraden gegen die Ebene.

26. **Satz.** Eine Gerade ist zu einer Ebene parallel, wenn sie zu einer Geraden dieser Ebene parallel ist. HP 30.

Die Lage zweier oder mehrerer Ebenen im Raume.

27. **Erkl.** Zwei Ebenen schneiden sich oder haben in ihrer ganzen Ausdehnung keinen Punkt gemeinsam.

28. **Erkl.** Zwei sich schneidende Ebenen haben eine Linie, die Schnittlinie der beiden Ebenen, gemeinsam.

29. **Folg.** Die Schnittlinie zweier sich schneidenden Ebenen ist eine Gerade; dieselbe ist durch zwei Schnittpunkte der Ebenen ganz bestimmt. HP 20.

30. **Erkl.** Ebenen, welche überall denselben Abstand haben und sich nirgends schneiden, heißen parallele Ebenen. HP 30.

31. **Erkl.** Errichtet man in einem Punkte der Schnittlinie zweier sich schneidenden Ebenen auf dieser Lote in beiden Ebenen, so heißt der Winkel zwischen den Loten der **Neigungswinkel** der Ebenen. HP 50.

32. **Erkl.** Zwei Ebenen stehen auf einander senkrecht, wenn der Neigungswinkel gleich R ist.

33. **Satz.** Steht eine Gerade auf einer Ebene senkrecht, so steht auch jede durch die Gerade gelegte Ebene auf der Ebene senkrecht.

34. **Satz.** Errichtet man in einer von zwei senkrechten Ebenen ein Lot auf der Schnittlinie, so steht dasselbe senkrecht auf der andern.

35. **Satz.** Stehen zwei sich schneidende Ebenen senkrecht auf einer dritten Ebene, so steht auch ihre Schnittlinie auf derselben senkrecht.

36. **Satz.** Ebenen, die auf derselben Geraden senkrecht stehen, sind parallel. HP 30.

37. **Satz.** Eine Gerade, die auf einer von zwei parallelen Ebenen senkrecht steht, steht auch auf der andern senkrecht.

38. **Satz.** Winkel mit paarweis parallelen Schenkeln liegen in parallelen Ebenen.

39. **Satz.** Zwei Ebenen, welche derselben dritten parallel sind, sind unter sich parallel.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

40. **Satz.** Werden zwei parallele Ebenen von einer dritten Ebene geschnitten, so sind ihre Schnittlinien parallel.

41. **Satz.** Schneiden sich drei Ebenen, so sind die drei Schnittlinien entweder parallel oder gehen durch einen Punkt oder fallen zusammen.

Bem. Weitere hierzu gehörige Erklärungen, Folgerungen u. s. w. enthalten die Nummern 13, 14, 19—21, 27, 31 von Holzmüllers Planimetrie.

Die einfachen Körper.

42. **Erkl.** Ein rings umschlossener Teil des Raumes heißt **Körper;** derselbe wird von einer oder mehreren **Flächen** begrenzt. — Es giebt **ebenflächige, krummflächige** und **gemischtflächige** Körper.

43. Ueber das Zeichnen der Körper, darstellende Geometrie und Projektionen vgl. HSt 2.

Prisma, Parallelepiped, Würfel.

44. **Erkl.** Legt man durch die Seiten eines n-Ecks zu diesem senkrechte Ebenen, so entsteht ein n-seitiger **prismatischer Raum.** (Seiten, Kanten des prismat. Raumes.)

45. **Satz.** Die Kanten eines prismatischen Raumes sind einader parallel.

46. **Erkl.** Schneidet man die Kanten eines n-seitigen prismatischen Raumes durch zwei parallele Ebenen, so entsteht zwischen denselben ein n-seitiges **Prisma.** (Grundflächen, Grundkanten; Seitenflächen, Seitenkanten; Mantel, Oberfläche.)

47. **Satz.** Die Grundflächen eines n-seitigen Prismas sind kongruente n Ecke, die Seitenflächen Parallelogramme.

48. **Erkl.** Der senkrechte Abstand der Grundflächen heißt die Höhe des Prismas.

49. **Erkl.** Stehen die Seitenkanten zu den Grundflächen senkrecht, so heißt das Prisma gerade.

50. **Folg.** Die Seitenflächen eines geraden Prismas sind Rechtecke.

51. **Erkl.** Ein Prisma, dessen Grundflächen Parallelogramme sind, heißt ein **Parallelepiped.** (Schiefes, gerades Parallelepiped.)

52. **Erkl.** Ein gerades Prisma, dessen Grundflächen Rechtecke sind, heißt ein **rechtwinkliges** Parallelepiped.

53. **Erkl.** Ein rechtwinkliges Parallelepiped mit gleichen Grund- und Seitenkanten heißt ein **Würfel.**

54. **Folg.** Die Oberfläche eines rechtwinkligen Parallelepipeds besteht aus sechs Rechtecken, die eines Würfels aus sechs Quadraten.

55. **Erkl.** Die **Raumeinheit** ist der Würfel, dessen Kante gleich der Längeneinheit ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

56. **Bem.** Den Längeneinheiten m, dm, cm, mm entsprechen die bezgl. Raumeinheiten cbm, cdm, ccm, cmm.

57. **Satz.** Der Inhalt eines Würfels mit der Kante a ist $V = a^3$.

58. **Satz.** Der Inhalt eines rechtwinkligen Parallelepipeds mit den Kanten a, b, c, ist $V = abc$.

59. **Grundsatz des Cavalieri.** Liegen zwei Körper zwischen parallelen Ebenen, und schneidet jede zu diesen Ebenen parallele Ebene die Körper in flächengleichen Figuren, so sind die Körper inhaltsgleich, HSt 22—24.

60. **Folg.** (aus 58 u. 59). Der Inhalt eines jeden Parallelepipeds ist gleich dem Produkte aus Grundfläche und Höhe. $V = G \cdot h$.

61. **Satz.** Der Inhalt eines jeden Prismas ist $V = G \cdot h$. HSt 17.

62. **Folg.** Prismen von gleicher Grundfläche und Höhe sind inhaltsgleich.

Die Pyramide.

63. **Erkl.** Legt man durch die Ecken eines n-Ecks ein Strahlenbüschel und durch je zwei benachbarte Strahlen eine Ebene, so entsteht ein n-seitiger **pyramidaler Raum.** (Seiten, Kanten des pyramid. Raumes.)

64. **Erkl.** Schneidet man die Kanten eines n-seitigen pyramidalen Raumes durch eine Ebene, so entsteht eine n-seitige **Pyramide.** (Spitze; Grundfläche, Grundkanten; Seitenflächen, Seitenkanten; Höhe.)

65. **Erkl.** Eine Pyramide heißt gerade, wenn die Spitze senkrecht über dem Mittelpunkte der Grundfläche liegt. (Die Seitenkanten einer geraden Pyramide sind gleich.)

66. **Satz.** Jede zur Grundfläche parallele Ebene schneidet eine Pyramide in einer der Grundfläche ähnlichen Figur.

67. **Satz.** Die Figuren, welche aus einer Pyramide durch Ebenen parallel zur Grundfläche ausgeschnitten werden, verhalten sich wie die Quadrate ihrer Abstände von der Spitze.

68. **Satz.** Der Inhalt einer dreiseitigen Pyramide ist $V = \frac{1}{3} G \cdot h$.

69. **Zus.** Der Inhalt einer jeden Pyramide ist $V = \frac{1}{3} G \cdot h$.

70. **Folg.** Pyramiden von gleicher Grundfläche und Höhe sind inhaltsgleich. HSt 26.

Der gerade Cylinder.

71. **Erkl.** Denkt man sich eine Gerade um eine in derselben Ebene liegende Parallele AB so gedreht, daß ihr Abstand von AB derselbe bleibt, so entsteht die **Cylinderfläche.** Dieselbe enthält alle Punkte und alle Parallelen des Raumes, die von AB dieselbe Entfernung haben. (Achse.) HP 27.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

72. **Erkl.** Schneidet man die Cylinderfläche durch zwei zur Achse senkrechte Ebenen, so entsteht ein gerader **Cylinder.** (Grundflächen, Mantel, Oberfläche; Achse, Höhe, Seitenlinie; Achsenschnitt.)

73. **Erkl.** Ein gerader Cylinder entsteht auch durch Drehung eines Rechtecks um eine Seite als Achse.

74. **Folg.** Jeder Achsenschnitt eines geraden Cylinders ist ein Rechteck.

75. **Satz.** Der Mantel eines geraden Cylinders ist $M = 2r\pi h$, die Oberfläche $O = 2r\pi(r + h)$. HSt 19.

76. **Satz.** Der Inhalt eines Cylinders ist $V = G \cdot h = r^2\pi h$. HSt 19.

Der gerade Kegel.

77. **Erkl.** Denkt man sich den einen Schenkel eines Winkels um den andern als Achse gedreht, so entsteht eine **Kegelfläche.**

78. **Erkl.** Schneidet man die Kegelfläche durch eine zur Achse senkrechte Ebene, so entsteht ein gerader **Kegel.** (Spitze; Grundfläche, Mantel, Oberfläche; Achse, Höhe, Seitenlinie; Achsenschnitt.)

79. **Erkl.** Ein gerader Kegel entsteht auch durch Drehung eines rechtwinkligen Dreiecks um eine Kathete als Achse.

80. **Folg.** Jeder Achsenschnitt eines geraden Kegels ist ein gleichschenkliges Dreieck.

81. **Folg.** Jede Schnittfläche parallel der Grundfläche eines geraden Kegels ist ein Kreis.

82. **Satz.** Der Mantel eines geraden Kegels ist $M = r\pi s$, die Oberfläche $O = r\pi(r + s)$; s ist die Seitenlinie. HSt 30.

83. **Satz.** Der Inhalt eines geraden Kegels ist $V = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3} r^2\pi h$. HSt 26.

Die Kugel.

84. **Erkl.** Die **Kugelfläche** ist eine krumme, überall in sich zurücklaufende Fläche; ihre sämtlichen Punkte haben von einem festen Punkte, dem Mittelpunkte oder Centrum, dieselbe Entfernung; der von der Fläche eingeschlossene Körper heißt die **Kugel.** (Radius, Durchmesser; Oberfläche.) HP 37 u. 38.

Erkl. Die Kugel ist ein Körper von vollkommener Regelmäßigkeit. HP 39.

85. **Erkl.** Eine Kugelfläche bezw. Kugel entsteht auch durch Drehung eines Halbkreises um seinen Durchmesser als Achse. HP 43.

86. **Satz.** Jede Ebene schneidet aus einer Kugel einen Kreis aus. (Größter Kreis, kleine Kreise; Meridiane, Parallelkreise.)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

87. **Aufg.** Berechne den Inhalt einer Kugel aus dem Radius r. ($V = \frac{4}{3} r^3 \pi$.) HSt 29.

88. **Aufg.** Berechne die Oberfläche einer Kugel aus dem Radius r. ($O = 4 r^2 \pi$.) HSt 28.

89. **Erkl.** Schneidet eine Ebene eine Kugel, so heißen die beiden Teile, in welche die Kugelfläche zerfällt, **Kugelhauben**. (Höhe einer Kugelhaube.)

90. **Aufg.** Berechne eine Kugelhaube aus dem Kugelradius r und der Höhe der Kugelhaube h.

91. **Erkl.** Der Teil der Kugelfläche, welcher zwischen zwei parallelen Ebenen liegt, heißt **Kugelzone**. (Höhe einer Kugelzone.)

92. **Aufg.** Berechne eine Kugelzone aus dem Kugelradius r und der Höhe der Kugelzone h.

Der Pyramidenstumpf; der Kegelstumpf.

93. **Erkl.** Legt man durch eine Pyramide [einen geraden Kegel] eine Ebene parallel der Grundfläche, so heißt der zwischen den parallelen Ebene liegende Teil **Pyramidenstumpf [Kegelstumpf]**. (Grundflächen, Mantel, Oberfläche; Höhe; Ergänzungspyramide[-kegel].

94. **Satz.** Der Inhalt eines Pyramidenstumpfs ist $V = \frac{1}{3} h [G + \sqrt{Gg} + g]$. G u. g sind die Grundflächen, h ist ihr Abstand.

95. **Satz.** Der Mantel eines Kegelstumpfs ist $M = \pi s (r + \rho)$. s ist die Seitenlinie, r und ρ sind die Radien der Grundfläche.

96. **Satz.** Der Inhalt eines Kegelstumpfs ist $V = \frac{1}{3} \pi h (r^2 + r\rho + \rho^2)$. Bezgl. h vgl. 94.

Bem. Zu dem Abschnitt „die einfachen Körper" Gehörendes enthalten auch die Nummern 35—41 von Holzmüllers Planimetrie.

Aufgaben

(im Anschluß an die Nummmern 57, 58, 60, 61, 68, 69, 75, 76, 82, 83, 87, 88, 90, 92, 94, 95, 96).

97. Aufgaben, in welchen es sich nur um **einen** einfachen Körper handelt, und zwar Berechnung von

a) Linien (Kanten, Diagonalen, Höhen, Abständen, Seitenlinien, Radien, Schnittlinien),

b) Ebenen (Schnittfiguren, Grundflächen, Achsenschnitten),

c) Flächen und Flächenteilen (Oberflächen, Mäntel, Kugelhaube, Kugelzone),

d) Inhalten,

e) Winkeln (zwischen Linien, zwischen Linien und Flächen). Vgl. HSt 3a—d, 4, 6e, f, 8a, 10a, 16, 18, 20 und 32a.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

98. Gewichtsbestimmungen. (Das Gewicht eines Körpers ist $p = V \cdot p'$, wo p' das spezifische Gewicht des Stoffes ist.)

Bem. Das Gewicht eines Kubikcentimeters Wasser (chemisch rein, im Zustande größter Dichtigkeit, bei 4° Celsius) heißt Gramm, das eines Kubikdecimeters heißt Kilogramm, das eines Kubikmeters Tonne. HP 35.

Gramm, Kilogramm, Tonnen erhalten sich wie 1 : 1000 : 1000000. HP 35.

99. Größenbestimmungen bei bekanntem Gewichte. Vgl. HSt 3e, f, 32d.

100, Anwendung der Aufgaben unter 97—99 auf Verhältnisse und Gegenstände des bürgerlichen Lebens.

101. Aufgaben, in denen es sich um **zwei** einfache Körper derselben oder verschiedener Art handelt, z. B. Verwandlung eines Körpers in einen anderen bei bestimmten Festsetzungen, Vergleichung der Ausdehnungen, Oberflächen und Inhalte von Körpern, der Gewichte bei stofflich verschiedenen Körpern u. s. w. Vgl. HSt 6a—d, 8b, c, 10b, 20, 21, 32b, c, e—h, 33.

102. Berechnung von Körpern, die aus einfachen Körpern zusammengesetzt sind.

103. Anwendung von 101 u. 102 wie unter 100.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

98. Gewic … Körpers
ist $p = V \cdot p'$, wo … ft.)

Bem. Das … nisch rein,
im Zustande größter … das eines
Kubikdecimeters heiß … HP 35.
Gramm, Kilog … 0. HP 35.

99. Größ … hte. Vgl.
HSt 3 e, f, 32 d.

100, Anwen … rhältnisse
und Gegenstände …

101. Aufga … e Körper
derselben oder ver … ng eines
Körpers in einen … gleichung
der Ausdehnungen … der Ge=
wichte bei stofflich … t 6 a—d,
8 b, c, 10 b, 20, 21

102. Berech … rpern zu=
sammengesetzt sind

103. Anwe …

TIFFEN® Gray Scale
© The Tiffen Company, 2007

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf