Die geometrische Konstruktionsaufgabe.

Von

Dr. R. von Fischer-Benzon,
Oberlehrer am Gymnasium zu Kiel.

REALGYMNASIUM DÜSSELDORF BIBLIOTHEK

Mit einer lithographierten Tafel.

Kiel.
Druck von H. Fiencke.
1884.

1884. Progr.-No. 257.

9Ki
1 (1884)
646,18b

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die geometrische
Konstruktionsaufgabe.

Von

Dr. R. von Fischer-Benzon,

Oberlehrer am Gymnasium zu Kiel.

Mit einer lithographierten Tafel.

Kiel.

Druck von H. Fiencke.

1884.

1884. Progr.-No. 257.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

UNIVERSITÄTS- UND LANDESBIBLIOTHEK DÜSSELDORF

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die methodische Behandlung der alten Sprachen hat im Laufe der Jahrhunderte eine feste und allgemein anerkannte Form gewonnen, wenigstens giebt es auf diesem Gebiete kaum Streitfragen von wesentlicher Bedeutung. Gleich günstiger Umstände hat die Mathematik sich nicht zu erfreuen. Einmal hat dieselbe nur über einen Bruchteil der Zeit zu verfügen gehabt, welche die alten Sprachen zur Ausbildung ihrer Methode haben benutzen können, und dann mufste sie von Anfang an mit mancherlei Widerwärtigkeiten kämpfen. Man betrachtete sie als Eindringling und begegnete ihr mit Mifstrauen, und es gab und giebt noch immer nicht ganz wenig Philologen, die sich rühmen, von „diesen Dingen" nichts zu verstehen, wenn auch anerkannt werden mufs, dafs die Zahl derselben im Abnehmen begriffen ist. Überdies erfand man das Vorurteil, dafs für das Erlernen der Mathematik eine besondere Befähigung erforderlich sei. Unter solchen Umständen hatte der Lehrer der Mathematik keine leichte Stellung. Die Schüler pflegen ein feines Gefühl dafür zu haben, ob ein Unterrichtsfach für voll angesehen wird oder nicht, und sie sind stets geneigt, sich die Befähigung für das Erlernen eines ihnen unbequemen Gegenstandes abzusprechen, namentlich wenn sie hierbei durch die Reden besorgter Eltern oder Verwandten unterstützt werden.

Gegenwärtig hat man die Theorie von der besonderen Befähigung für Mathematik so ziemlich fallen lassen. An Gymnasien wie an Realschulen zeigt die Erfahrung, dafs jeder Schüler bei vernünftiger Anleitung so viel Mathematik lernen kann, als das Reglement verlangt, und mit Recht macht man jetzt die Methode für das verantwortlich, was man früher der Sache selbst zur Last legte. Die Fälle, in denen ein Schüler es in der Mathematik zu nichts bringt, sind nicht häufiger, als diejenigen, wo er in den Sprachen nichts Nennenswertes leistet. Man soll nur nicht, wie es gelegentlich geschieht,[1]) den Anspruch erheben, dafs die Schüler gerade in der Mathematik Ausgezeichnetes oder Hervorragendes leisten, denn das thun sie in den übrigen Fächern auch nur selten. Ausgezeichnete Köpfe oder Talente gehören überall nicht zu den häufigen Vorkommnissen.

Das Gymnasium stellt sich die Aufgabe, seine Zöglinge für das wissenschaftliche Studium vorzubereiten, und zwar für das Studium in jeder Fakultät. Bei dem Aufschwunge, den die Naturwissenschaften in den letzten Decennien genommen haben, und bei der Stellung, welche die Medicin gegenwärtig als beobachtende und experimentierende Naturwissenschaft einnimmt, würde

---

[1]) H. von Treitschke, Einige Bemerkungen über unser Gymnasialwesen, Preufsische Jahrbücher, Bd. 51, 1883, S. 182.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

das alte humanistische Gymnasium seiner Aufgabe nicht mehr gerecht werden können. Den Einflufs, den der Unterricht in den Sprachen, speciell in den alten Sprachen, auf die Schulung des Denkens ausübt, wird Niemand ernstlich bestreiten wollen, aber es ist gleichfalls nicht zu verkennen, dafs die Ausbildung der Anschauung, des Beobachtungs- und Kombinationsvermögens, die Ausbildung des Sehens, durch den Unterricht in den Sprachen nicht die wünschenswerte Förderung findet. Für den künftigen Mediciner[1]) und Naturforscher genügt es nicht, dafs er nachdenken lernt, er mufs auch lernen, die Dinge selbst richtig wahrzunehmen, zu vergleichen, zu unterscheiden und zu ordnen,[2]) er mufs lernen richtig zu beobachten, richtig zu sehen. Hierfür sollen die Mathematik und die Naturwissenschaften eintreten.[3]) Auf den Bildungswert der Naturwissenschaften näher einzugehen wird hier nicht beabsichtigt; auch von der Mathematik kann nur ein Teil Berücksichtigung finden: Die ebene Geometrie (Planimetrie) und im besonderen die geometrische Konstruktionsaufgabe.

Der Bildungswert jedes Unterrichtsgegenstandes ist in erster Linie von der Art und Weise seiner Behandlung abhängig. Herrscht aber über die Art der Behandlung so wenig Einigkeit, wie bei der Geometrie, so erscheint es angebracht, in Kürze zu untersuchen, wie denn die Geometrie in der Schule behandelt werden mufs, um möglichst günstig auf die Ausbildung der Schüler wirken zu können.

In der ersten Hälfte dieses Jahrhunderts war die Mehrzahl der Mathematiker geneigt, ausschliefslich im Euklid das wahre Muster geometrischer Methode zu erblicken,[4]) und ganz ist diese Ansicht noch heute nicht verschwunden. Das beweisen nicht nur eine grofse Zahl der jetzt noch gebräuchlichen Lehrbücher, sondern auch mancherlei Aussprüche in Fach- und Zeitschriften. In der Encyklopädie des gesamten Erziehungs- und Unterrichtswesens von K. A. Schmid hat Professor Erler in Züllichau den Artikel »Ebene Geometrie« geschrieben.[5]) Professor Erler nennt als formalen Zweck der Geometrie die Ausbildung des Kombinations- und Schlufsvermögens,

---

[1]) Auf den ersten Blick mufs es befremdlich erscheinen, dafs gerade unter den künftigen Medicinern eine verhältnismäfsig grofse Zahl sich mit Energie gegen das Erlernen von Mathematik und Physik sträubt. Die Gründe für ein solches Verhalten sind nicht schwer zu durchschauen: Der praktische Arzt braucht keine Mathematik, und Physik muss jeder Student der Medicin auf der Universität hören. — Andererseits mufs hier aber konstatiert werden, dafs diejenigen, welche das mathematische und physikalische Pensum des Gymnasiums mit Erfolg absolvierten, sich als genügend vorbereitet für das Studium der Medicin erwiesen haben.

[2]) J. K. Becker, Die Mathematik als Lehrgegenstand des Gymnasiums, Berlin 1883, S. 6 u. 8.

[3]) Obgleich Mathematik und Naturwissenschaften ohne Zeichnen nicht zu behandeln sind, so ist es doch zu bedauern, dafs der Zeichenunterricht selbst keine gröfsere Ausdehnung am Gymnasium erlangt hat. Wenn, wie von einzelnen Seiten behauptet wird, die Schüler der Realgymnasien für das Studium der Medicin und Naturwissenschaften besonders gut vorbereitet sind, so wird dies in erster Linie auf Rechnung der gröfseren Durchbildung im Zeichnen zu stellen sein.

[4]) Man vergleiche die Vorrede in Dr. E. S. Unger, Die Geometrie des Euklid, Leipzig 1833; Dr. Mensing, Über die Behandlungsarten geometrischer Elementaraufgaben, Grunerts Archiv, Bd. II, 1842, S. 341 u. s. w. u. s. w.

[5]) K. A. Schmid, Encyklopädie des gesamten Erziehungs- und Unterrichtswesens, 2. Auflage, Bd. II. Gotha 1878, S. 926 ff.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und meint, dafs die Geometrie dafür in ihren Beweisen u. s. w. ein vorzügliches Material liefere.[1]) Auf die Anschaulichkeit der geometrischen Wahrheiten und Resultate, sowie auf die Schwierigkeit, zu richtigen Resultaten zu gelangen wird aufmerksam gemacht, aber von dem Einflusse der Geometrie auf die Ausbildung der Anschauung selbst ist wenig die Rede. Sucht man aber den Hauptzweck des Unterrichtes in der Geometrie in der Ausbildung des Schlufs- und Kombinationsvermögens, also in der Ausbildung des Nachdenkens, so ist es doch fraglich, ob man wohl daran thue, hierfür einen so spröden Stoff zu wählen, und ob nicht der Unterricht im Deutschen und in den alten Sprachen diesen Zweck auch erfülle. Für die Übung im Denken und Schliefsen wäre es dann vielleicht am besten, wie das auch vielfach geschehen, einen Abrifs der Logik in das Pensum des Gymnasiums aufzunehmen, und hernach die Geometrie ganz zu streichen. Unter den Philologen wird es nicht wenige geben, die dieser Ansicht sein würden, und der Nachweis, dafs dieselben Unrecht hätten, würde schwer genug zu führen sein.

Wie aber bei dem Unterricht in den Sprachen die Grammatik das Mittel ist, um die Kunst des Übersetzens zu lernen, so könnten die Lehrsätze der Geometrie das Mittel sein, um geometrische Aufgaben zu lösen. Durch das Lösen solcher Aufgaben würde das Wissen des Schülers eigentlich erst lebendig werden,[2]) denn dieser würde genötigt sein, das Gegebene auf seine Verwendbarkeit zu prüfen, Brauchbares von nicht Brauchbarem zu sondern u. s. w. Diesem Verlangen stellt Professor Erler sich skeptisch gegenüber: „Die Lösung von Konstruktionsaufgaben," sagt er,[3]) „kann ebenso wenig, wie das Finden einer versteckten Sache, zu einer bestimmten Anforderung gemacht werden.[4]) Allerdings hat der bedeutende Fortschritt, den die Methodik gerade auf dem Gebiete der Mathematik gemacht hat, mannigfache allgemeinere Methoden auch hier, gelehrt, welche die Lösung selbst dem Schwächeren ermöglichen; auch kann durch eine ausgedehnte Übung eine grofse Gewandtheit darin erzielt werden; bis zu einem gewissen Grade aber wird die Lösung in jedem einzelnen Falle immer noch Sache der Erfindung, des Scharfsinns bleiben, der bei der Gesamtheit nicht vorausgesetzt werden darf Es ist aber sehr mifslich für den Lehrer, seinen Schülern Aufgaben zu stellen, deren Lösung er nicht absolut verlangen kann, und überhaupt solche, zu denen sich die Schüler auf eine äufserst verschiedene Weise verhalten, indem der eine in den ersten fünf Minuten die Lösung entdeckt, in ihr also keine eigentliche Arbeit findet, der andere dagegen stundenlang vergeblich und ohne jedes aufweisbare Resultat sitzen kann, also auch keine Arbeit daran hat. Das trifft nun ganz besonders die geometrischen Konstruktionsaufgaben." Diese Auseinandersetzung ist nun freilich nicht ganz frei von Widersprüchen. Wenn man mannig-

---

[1]) Professor Erler sagt, dafs sich in dem logischen Aufbau der Geometrie kein Platz für Schlüsse der Induktion oder Analogie finde. Wie will man aber den Satz über das Mafs der Peripheriewinkel, oder einen Satz über einen geometrischen Ort ableiten, aufser durch Induktion? Und ist nicht schliefslich jeder geometrische Lehrsatz ein Schlufs vom Einzelnen aufs Allgemeine, von einem Fall auf alle Fälle? Man vergl. K. Kromann, Unsere Naturerkenntnis, Kopenhagen 1883, Kap. 7.

[2]) Dr. v. Nagel, Geometrische Analysis in Schmid's Encyklopädie, S. 940.

[3]) a. a. O., S. 928.

[4]) In ganz ähnlichem Sinne spricht sich V. Schlegel aus: Ueber Ziele und Methoden der Schul-Geometrie, Zeitschrift für math. u. naturw. Unterricht, 7. Jahrgang, Leipzig 1876, S. 182. Die Thatsache aber, dafs in den Abiturienten-Arbeiten die Konstruktionsaufgaben unter allen am wenigsten mit Erfolg bearbeitet werden, würde, die allgemeine Richtigkeit derselben zugegeben, ebensowohl zu dem Schlufs führen können, dafs es an einer richtigen Methode auf diesem Gebiet gefehlt habe.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

fache allgemeinere Methoden kennt, die es selbst dem Schwächeren ermöglichen, Konstruktionsaufgaben zu lösen, ja wenn man es durch Übung selbst zu einer grofsen Gewandtheit im Aufgabenlösen bringen kann, so hat man ja alles, was man verlangen kann. Würde Jemand sagen: Eine allgemeine Regel für die Anfertigung von deutschen Aufsätzen läfst sich nicht geben, deshalb ist es mifslich, die Ausarbeitung deutscher Aufsätze von Schülern zu verlangen, so würde Jeder antworten: „Das ist zu weit gegangen, denn eine allgemeine Methode ist hier garnicht erforderlich. Vom Schüler hat man nur Aufmerksamkeit und Nachdenken zu verlangen, vom Lehrer einen vernünftigen vorbereitenden Unterricht und ein passend gewähltes Thema. Dann geht es!" Und Ähnliches sollte in der Geometrie nicht möglich sein? Wenn Professor Erler und V. Schlegel meinen, dafs es eine allgemeine Methode zur Auflösung aller möglichen Konstruktionsaufgaben nicht giebt, so mufs man ihnen unbedingt Recht geben. Anders würde die Sache aber sein, wenn man aus der ungeheuren Fülle von Konstruktionsaufgaben diejenigen auswählte, welche dem Wissen und Können der Schüler entsprächen, und diese methodisch zu behandeln versuchte. Dann würde man, wie das auch verschiedentlich verlangt und erstrebt wird, den Unterricht so einrichten können, dafs er die Schüler auf das Lösen von Konstruktionsaufgaben vorbereitet. Aber eine derartige Behandlung des Unterrichts will Professor Erler offenbar auch nicht; ihm ist gerade der systematische Aufbau,[1]) nicht das Lösen von Aufgaben die Hauptsache; die Lösung von Aufgaben soll nur daneben den Beweis liefern, in wieweit das Gelernte auch ein selbständig verwendbares Eigentum des Schülers geworden ist.

Wenn man die Anstrengungen verfolgt, die in den letzten Decennien für die Ausbildung der Methode des geometrischen Unterrichts gemacht sind, so mufs man zu dem Resultat kommen, dafs der von Professor Erler vertretene Standpunkt mehr und mehr verlassen wird. Der Unterricht in der Geometrie soll die Schüler nicht nur im richtigen Schliefsen, also im Nachdenken üben, er soll in erster Linie auf die Ausbildung ihres räumlichen Anschauungsvermögens wirken. Daneben liefert die Geometrie auch noch reiches Material, an dem der Schüler lernen kann,[2]) selbständig Begriffe zu bilden und Beobachtungen zu machen. Auch darf man den Vorteil nicht gar zu gering anschlagen, der dem Schüler daraus erwächst, dafs er lernt, sich mit einiger Sicherheit auf einem Gebiete zu bewegen, das den Anschauungen des täglichen Lebens zum Teil so fern liegt, und endlich möge man bedenken, dafs die geometrischen Aufgaben die einzigen sind, die ihm eine erschöpfende Behandlung gestatten, und deshalb die einzigen, denen er schon auf der Schule eine Behandlung zu Teil werden lassen kann, die auf die Bezeichnung wissenschaftlich Anspruch erheben darf.

Soll der Unterricht in der Geometrie auf die angedeutete Weise wirken, so ist man genötigt, von Euklid und seinen Nachfolgern nicht unerheblich abzuweichen, man „mufs das Vorurteil aufgeben, dafs die bewiesene Wahrheit für die Jugend irgend einen Vorzug vor der anschaulich erkannten habe".[3]) Im Euklid und in denjenigen Lehrbüchern, welche wesentlich im Geiste des grofsen griechischen Mathematikers abgefafst sind, werden auch solche Sätze

---

[1]) Zeitschrift für Gymnasial-Wesen, XXXV. Jahrgang, Berlin 1881, S. 758. Man vergleiche auch die Anmerkung von A. L. Crelle in »Die Elemente der Geometrie« von A. M. Legender, Berlin 1873, S. 53.

[2]) J. K. Becker, a. a. O. S. 24.

[3]) Nur in dieser Form und mit der hier vorgenommenen Einschränkung kann der Ausspruch Schopenhauers (die Welt als Wille und Vorstellung, Leipzig 1873, Bd. I, S. 87) Anspruch auf Gültigkeit erheben.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

bewiesen,[1]) deren Richtigkeit sofort durch Anschauung klar wird, und man hat denkenden Schülern gegenüber einen harten Stand, wenn man ihnen die Notwendigkeit eines Beweises darthun will. Den strengen Beweis wird Niemand im Ernste aus der Welt schaffen wollen; im Verlauf des Unterrichts ergiebt sich ganz von selbst die Notwendigkeit, die logische Kontrole oder den Beweis zu Hülfe zu nehmen, denn die Anschauung allein reicht bei komplicierten Figuren nicht mehr aus, und man macht überdies die Erfahrung, dafs die Anschauung täuschen kann.[2])

Um die Geometrie anschaulich behandeln zu können, ist es vor allem notwendig, dafs man die Figuren nicht als absolut starr auffafst. Als von einem Orte zum anderen transportierbar hatte Euklid dieselben schon betrachtet, wenn auch nur zum Zwecke der Deckung kongruenter Figuren; aber man mufs sich die Figuren nicht nur als Ganzes, sondern auch in ihren Teilen beweglich denken, man mufs dieselben nicht nur beliebig schieben, drehen und umwenden können, sondern man mufs sie auch als veränderlich mit Beziehung auf Gestalt und Gröfse betrachten. Dieselben gewinnen dadurch gleichsam Leben, und sie werden dem Verständnis des Schülers wesentlich näher gerückt, wenn er sieht, dafs er mit ihnen umgehen kann wie mit greifbaren Dingen auch.

Für die anschauliche Gestaltung der Geometrie auf Grund der Arbeiten von Steiner, von Staudt, Möbius u. s. w. ist namentlich in den letzten Jahren viel geschehen, und hier sind eine ganze Reihe von Namen zu nennen: J. H. T. Müller,[3]) J. C. V. Hoffmann,[4]) Hubert Müller,[5]) V. Schlegel,[6]) Milinowski,[7]) Henrici und Treutlein,[8]) u. s. w. Bei einigen der angeführten Schriften kann man aber zweifelhaft sein, ob der Umfang derselben für Schüler nicht etwas gar zu grofs geworden ist; in der Bibliothek des Lehrers sollten dieselben billigerweise nicht fehlen. Vielleicht hat bei den Verfassern die Freude an der Gestaltung des Stoffes, das Interesse für die Wissenschaft, die Oberhand gewonnen über das Interesse für die Schüler. Diese werden ihrer Natur nach im allgemeinen ein kleineres Lehrbuch, in welchem die Hauptsätze kurz und präcis ausgesprochen sind, einem gröfseren vorziehen, wenn auch das gröfsere mehr Ansprnch auf strenge Wissenschaftlichkeit erheben darf. Man mufs eben bedenken, dafs die Schüler erst zu wissenschaftlichem Denken erzogen werden sollen. Hubert Müller hat sich denn auch entschlossen, ein kleineres Heft[9]) herauszugeben, welches die für Schüler unentbehrlichen Lehrsätze enthält, überall Rücksicht auf Konstruktionen nimmt und als Leitfaden für den Unterricht vollkommen ausreichend sein wird.

Ohne Schwierigkeit hat sich die Einführung vernünftiger Reformen in die Geometrie übrigens nicht vollzogen. Schon 1826 hatte von Münchow[10]) auseinandergesetzt, dafs die

---

[1]) z. B. Euklid, 3. Buch, Satz 11 und 12.

[2]) Man vergleiche K. Kroman, Unsere Naturerkenntnis, Kopenhagen 1883, Kap. 8.

[3]) J. H. T. Müller, Lehrbuch der Geometrie, Halle 1844.

[4]) J. C. V. Hoffmann, Vorschule der Geometrie, Halle 1874.

[5]) Hubert Müller, Leitfaden der ebenen Geometrie, 2. Aufl. Leipzig 1878.

[6]) Victor Schlegel, Lehrbuch d. elementaren Mathematik, 2. Teil, Geometrie, Braunschweig 1879.

[7]) A. Milinowski, Die Geometrie für Gymnasien und Realschulen, 1. Teil, Planimetrie, Leipzig 1881.

[8]) J. Henrici und P. Treutlein, Lehrbuch der Elementar-Geometrie, Leipzig 1881—83.

[9]) Die Elemente der Planimetrie, ein Beitrag zur Methode des geometrischen Unterrichts, Metz-Diedenhofen 1883; derselben Art ist das Lehrbuch der elementaren Planimetrie von J. Petersen, Kopenhagen 1881.

[10]) K. D. von Münchow, Trigonometrie, Bonn 1826, S. 15, 16.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Euklidische Definition des Winkels nicht ausreiche, und den Winkel als „Drehungsgröfse" definiert. Diese natürliche und anschauliche Erklärung, die den Winkel von vornherein mit dem Kreise in Verbindung bringt, die auf das ungezwungenste zu positiven und negativen Winkeln, zu Winkeln von mehr als 360° u. s. w. führt, wurde anfangs wenig beachtet.[1]) Erst neuerdings findet von Münchow's Definition allgemeineren Eingang in die Lehrbücher. Ähnlich ist es mit der Theorie der perspektivisch ähnlichen Figuren ergangen. Der Ähnlichkeitspunkt wird zwar fast überall benutzt, aber keineswegs immer als solcher genannt, gerade wie die geometrischen Örter, die auch stets angewendet, aber nicht als solche genannt werden.[2]) Euler hatte schon 1777 gezeigt,[3]) wie man für zwei ähnliche Figuren, die derselben Ebene angehören, den Ähnlichkeitspunkt konstruieren könne, auch für den Fall, wo die homologen Seiten der beiden Figuren nicht parallel sind. In dem letzteren Falle bilden die einander entsprechenden Ähnlichkeitsstrahlen einen konstanten Winkel mit einander. Für die Einführung in die Theorie der perspektivisch ähnlichen Figuren ist die Beschränkung auf die Fälle, wo dieser konstante Winkel entweder 0° oder 180° beträgt, gewifs ratsam, aber auf einer höheren Stufe sollte man dieselben fallen lassen, umsomehr, da die allgemeinere Theorie sich in manchen Büchern doch nur hinter geometrischen Örtern verbirgt.[4]) — Ein gleich eigentümliches Schicksal hat die axiale Symmetrie erfahren. Es wird schwierig sein, ein Lehrbuch der Geometrie zu finden, in dem nicht gelegentlich die Eigenschaften symmetrischer Gebilde benutzt würden, und doch giebt es nur verhältnismäfsig wenig Bücher, welche der Symmetrie einen Abschnitt oder gar ein Kapitel widmen. Aber auch das wird jetzt anders, und wahrscheinlich ist der Zeitpunkt nicht mehr fern, wo man die schöne Lehre von der axialen Symmetrie allgemein zur Einführung in die Geometrie benutzen wird.

Bedeutsam für den Unterricht in der Geometrie ist die Bestimmung des neuen Lehrplans, wonach in der Quinta geometrisches Zeichnen getrieben werden soll. Diese Beschäftigung kann nach recht wohl in der Quarta in den für die Geometrie bestimmten Lehrstunden fortgesetzt werden. Durch das geometrische Zeichnen hat man Gelegenheit, die Schüler in ähnlicher Weise in die Geometrie einzuführen, wie durch das gewöhnliche Rechnen in die Arithmetik und Algebra; man verschafft ihnen dadurch nicht allein Gewandtheit im Umgehen mit Zirkel und Lineal, sondern man kann ihnen auch, selbstverständlich ohne eigentliche Geometrie zu treiben, eine Reihe von Kenntnissen anschaulich zu eigen machen, die ihnen später erst begrifflich klar werden.

Die letzten hundert Jahre haben eine grofse Zahl von Büchern und Gelegenheitsschriften hervorgebracht, die sich die Aufgabe gestellt haben, dem Auflösen von Konstruktionsaufgaben zu Hülfe zu kommen. Wenn man diese Schriften durchmustert, so mufs man erstaunen über den aufgewendeten Scharfsinn, aber man mufs sich auch darüber wundern, wie wenig es versucht ist,

---

[1]) Man vergleiche van Swindens Geometrie von C. F. A. Jacobi, Jena 1834, S. 6, Anmerkung.

[2]) Dr. Richard Heger hat in seiner Planimetrie, Breslau 1882, den Ausdruck »geometrischer Ort« ganz vermieden. Indessen ist kein Grund einzusehen, warum man hier nicht dem Herkommen folgen sollte.

[3]) Nova acta academiae scientiarum imp. Petropolitanae, Tom. IX, Petersburg 1795, S. 154, L. Euler, De centro similitudinis. Diese Abhandlung wurde der Akademie schon am 23. Oct. 1777 vorgelegt.

[4]) z. B. Nagel, Geometrische Analysis, 2. Aufl. Ulm 1876, 17. und 18. Ort, S. 216—17.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

möglichst viele Aufgaben von demselben Gesichtspunkte aus zu betrachten. Der Reiz, den die Lösung von Konstruktionsaufgaben auf jeden ausübt, der sich etwas genauer damit beschäftigt, hat offenbar fortwährend zur Bewältigung neuer Aufgaben angetrieben, und in dem Bestreben, möglichst viele Aufgaben zu lösen, hat man vergessen, dem nachzuspüren, was den verschiedenen Lösungen als gemeinsamer Ausgangspunkt zu Grunde lag. Zwar findet man schon früh Versuche, dieselbe methodische Behandlung auf einige ähnliche Aufgaben anzuwenden, aber zu der Aufstellung von bestimmt formulierten Methoden ist man erst sehr spät gelangt.

Der erste Versuch, allgemeinere Principien für die Auflösung geometrischer Konstruktionsaufgaben aufzustellen rührt von Holleben und Gerwien her.[1]) In ihrer „geometrischen Analysis" werden über 2000 Aufgaben behandelt und gelöst, und man hat vielfach Gelegenheit, nicht nur über den Fleifs, sondern auch über den Scharfsinn der Verfasser zu erstaunen. Ihr Einflufs ist denn auch ein bedeutender gewesen und ist noch bis auf die neueste Zeit hin zu verspüren. Dafs moderne Aufgabensammlungen einen Teil ihrer Aufgaben von ihnen haben entlehnen müssen, liegt in der Natur der Sache; aber auch in kürzlich erschienenen Büchern findet man die von ihnen vorgeschlagene Behandlung der Aufgaben reproduciert. Ein etwas genaueres Eingehen auf die Arbeit von Holleben und Gerwien wird hier wegen des Folgenden am Platze sein.

Nach einer Einleitung, welche die Einteilung der Aufgaben, die Bedingungen für die Aufgabe (Anzahl der notwendigen Bestimmungsstücke) und die Gliederung derselben (Analysis, Auflösung, Determination, Beweis) behandelt, beginnt eine genauere Betrachtung der geometrischen Analysis: „Eine streng wissenschaftliche Scheidung[2]) der geometrischen Analysis in solche Klassen, von denen die eine oder die andere notwendig zur Auflösung jeder Aufgabe führt, ist unstatthaft, da hier sehr viele Wege zu demselben Ziele führen. Für den Schüler ist es aber nützlich, ein gewisses Fachwerk zu besitzen, nach welchem derselbe arbeiten kann, da hierdurch einzelne Zielpunkte im Raume gegeben werden, deren allmähliche Verfolgung in jedem Fall die Arbeit erleichtert." In diesem Sinne werden von den Verfassern die folgenden Arten der geometrischen Analysis beim Unterricht benutzt:

1) Analysis durch Lehrsätze[3]) (Aschenborn,[4]) Nagel,[5]) Junghans,[6]) Spieker[7]).)

2) Analysis durch Benutzung der geometrischen Örter (Aschenborn, Nagel, Junghans, Spieker).

3) Analysis durch Benutzung der sogenannten Daten (Aschenborn, Nagel, Junghans).

---

[1]) H. von Holleben und P. Gerwien, Geometrische Analysis, 2 Bände, Berlin 1831 u. 1832.

[2]) a. a. O. Bd. I, S. 105.

[3]) Die Verfasser sagen: Analysis durch passende Benutzung der im System der Geometrie mitgeteilten Gesetze der geforderten und gegebenen Gröfsen, oder, wo diese nicht unmittelbar genügen sollten, durch Aufsuchung von neuen, welche mit der Aufgabe in Zusammenhang stehen. — Die Namen solcher Verfasser, welche die Einteilung von Holleben und Gerwien ganz oder zum Teil adoptiert haben, sind bei jeder Abteilung in Klammern hinzugefügt.

[4]) Dr. K. H. M. Aschenborn, Lehrbuch der Geometrie, 1. Abschnitt, 2. Aufl., Berlin 1873, § 174.

[5]) Dr. von Nagel, Oberstudienrath, Geometrische Analysis, 2. Auflage, Ulm 1876, S. 90 ff.

[6]) Dr. K. F. Junghans, Lehrbuch der ebenen Geometrie, Berlin 1879, § 241.

[7]) Dr. Th. Spieker, Lehrbuch der ebenen Geometrie, 15. Auflage, Potsdam 1881, § 94.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

4) Analysis durch Reduktion (Zurückführung) auf schon bekannte Aufgaben, oder durch das Bilden von Hülfsaufgaben, (Aschenborn, Nagel, Junghans, Spieker).

5) Analysis, welche aus zwei oder mehreren der vorstehenden Arten zusammengesetzt ist, (Junghans).

Die Absicht der Verfasser, dem Schüler hierdurch „ein gewisses Fachwerk mitzuteilen, nach dem er arbeiten könne," scheint aber nur unvollständig erreicht zu sein. Eine genauere Betrachtung der einzelnen angeführten Arten der Analysis wird dies mit einiger Deutlichkeit ergeben.

1) **Analysis durch Lehrsätze.** Zunächst liefse sich bemerken, dafs es keine einzige Aufgabe geben kann, welche sich ohne solche Lehrsätze, wie sie beim Unterricht in der Geometrie mitgeteilt worden, lösen läfst, vielmehr mufs der Schüler im Besitz von möglichst vielen Lehrsätzen sein, um überhaupt Aufgaben lösen zu können. Jede Analysis einer geometrischen Aufgabe würde also unter die Analysis durch Lehrsätze gehören. Freilich giebt es auch Fälle, bei denen eine besondere Auflösung sich auf einen besonderen Satz gründen läfst.[1]) An solche Fälle haben die Verfasser aber nicht gedacht, und da es hierbei häufig auf das ankommen würde, was man einen guten Einfall zu nennen pflegt, so würde es unrichtig sein, auf einen so unsicheren Boden eine besondere Methode gründen zu wollen. Aber wenn man auch eine Analysis durch Lehrsätze als Methode anerkennen wollte, so müfste man doch vom Standpunkte der Schüler aus fragen, wozu denn die Lehrsätze zu benutzen seien, oder wie man dieselben für die Konstruktion zu verwerten habe. Darüber sagen die Verfasser nichts Positives; sie zeigen an einigen Beispielen, wie sich Lehrsätze für die Konstruktion verwenden lassen, setzen aber dabei voraus, dafs die Schüler schon konstruieren können; sie geben an, dafs es bei dieser Art der Analysis namentlich darauf ankomme zu untersuchen, in welcher Beziehung alle Bedingungen der Aufgabe mit der geforderten Gröfse stehen, und welche früher gekannten Gesetze hiermit zusammenhängen. Indessen ist das viel zu allgemein ausgedrückt. Wenn man dem Schüler nicht ganz bestimmt angeben kann, was er mit Hülfe der Lehrsätze erreichen soll, so giebt man ihm ein Instrument in die Hand, ohne ihm den Gebrauch desselben zu zeigen.

2) **Analysis durch Benutzung der Örter.** Die Verfasser zeigen, wie gewisse unbestimmte Aufgaben statt auf einen Punkt auf eine Linie führen, deren sämtliche Punkte die verlangte geometrische Eigenschaft besitzen, entwickeln daraus den Begriff des geometrischen Orts, und zeigen, dafs ein Punkt durch zwei sich schneidende Örter bestimmt ist. „Da es nun bei der Konstruktion einer geometrischen Gröfse nur auf das Festlegen von Punkten ankommt, so springt hierdurch schon der grofse Nutzen der geometrischen Örter für das Lösen von Aufgaben hervor; ja wollte man darin weiter gehen, so könnte man wohl alle Konstruktionen auf das Schneiden von geometrischen Örtern zurückführen, und in sofern alle Arten von geometrischer Analysis in dieser zusammenfassen".[2]) Es ist in der That zu bedauern, dafs die Verfasser diesem Gedanken nicht weiter nachgegangen sind; die methodische Behandlung der Konstruktionsaufgaben würde durch ein solches Vorgehen wesentlich gefördert worden sein, und wir wären heute weiter als wir sind. Dafs jeder Punkt durch zwei sich schneidende Linien bestimmt wird, bedarf keiner besonderen

---

[1]) Man vergl. weiter unten Aufgabe 9.

[2]) Holleben und Gerwien, a. a. O. Bd. I, S. 110.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Auseinandersetzung. Aber andererseits zeigt sich auch, dafs zur Konstruktion (Festlegung oder Bestimmung) eines Punktes stets zwei Bedingungen erforderlich sind. Lassen sich die beiden Linien konstruieren, deren Punkte diese Bedingungen erfüllen, so ist der Punkt konstruierbar. Dies wird noch einleuchtender, wenn man die konstruierende Geometrie mit der analytischen vergleicht: was die eine graphisch thut, das thut die andere rechnend. „Die Örter sind das, was die Gleichungen zwischen zwei veränderlichen Gröfsen in der Analysis. So wie in dieser die Verbindung zweier solcher Gleichungen eine determinierte Aufgabe auflöset, so geschieht solches in der Geometrie durch die Durchschnittspunkte zweier Örter".[1]) In den geometrischen Örtern hat man also faktisch eine gemeinsame Grundlage, oder richtiger, die notwendige Voraussetzung für alles Konstruieren, und wenn man die Analysis durch Lehrsätze etwas aufmerksamer betrachtet, so findet man, dafs der angezogene Lehrsatz das Mittel ist, entweder einen Ort für den zu konstruierenden Punkt zu bestimmen, oder einen Teil der Figur ausfindig zu machen, der sich mit Hülfe der gegebenen Stücke konstruieren läfst und dann als Basis für die Konstruktion der ganzen Figur dient, natürlich wieder mit Hülfe von Örtern.

Man kann sich nur darüber wundern, dafs die geometrischen Örter nicht schon lange mit gröfserer Entschiedenheit als das hingestellt sind, was sie für die Konstruktionsaufgaben zu bedeuten haben. Vielleicht hat man Anstofs genommen an der grofsen Zahl der aufgestellten Örter, von denen manche selten oder gar nicht in Betracht kommen. Camerer hatte bereits 1796 durch seine deutsche Übersetzung die von Robert Simson wiederhergestellten ebenen Örter des Apollonius einem gröfseren Leserkreise zugänglich gemacht, und er bemerkt als Einleitung zu einer angehängten Aufgabensammlung: „Auflösungen geometrischer Aufgaben mit Hülfe der Örter kommen sehr häufig vor, ohne dafs man eben immer den Namen „Örter" braucht, wobei aber natürlich die Sache selbst immer dieselbe bleibt".[2]) Nichtsdestoweniger ist in den späteren Aufgabensammlungen und Lehrbüchern von Örtern wenig oder gar nicht die Rede,[3]) ja ein so tüchtiger Mathematiker wie Meier Hirsch spricht sogar 1805 die Meinung aus, dafs „die Vervollkommnung der Analysis die Örter jetzt gröfstenteils entbehrlich mache".[4]) Ganz unverständlich aber ist es, wenn man sich noch heutigen Tages, wie das von Fahle[5]) geschehen ist, gegen die allgemeine Anwendung der Örter sträubt.

3) **Analysis durch Data.** Die Data des Euklid haben in Deutschland zuerst gröfsere Verbreitung gefunden durch die deutsche Übersetzung, welche Schwab von der durch Simson besorgten englischen Ausgabe herausgegeben hat.[6]) Unter einem Datum hat man nicht ein gegebenes Stück, sondern ein durch die gegebenen Stücke mitbestimmtes Stück zu verstehen. So ist durch zwei Punkte ihre Verbindungsgerade mitgegeben, durch einen Punkt und eine Gerade die Entfernung des Punktes von der Geraden, durch eine der Länge nach gegebene Sehne eines gegebenen Kreises ihre Entfernung vom Kreismittelpunkte u. s. w. Neben solchen Daten, die man unmittelbare nennen könnte,[7]) kann man auch noch mittelbare unterscheiden. Diese spielen

---

[1]) G. J. Klügel, Mathematisches Wörterbuch, Bd. I, 1803, S. 99.
[2]) J. W. Camerer, Apollonius von Pergen ebene Örter etc. Leipzig 1796, S. 389.
[3]) Darüber klagt schon Wöckel, Programm der Studienanstalt zu Nürnberg, 1838—39, S. 9.
[4]) Meier Hirsch, Sammlung geometrischer Aufgaben, Berlin 1805, Teil I, S. 238.
[5]) Altes und Neues aus der Schule, Jahrbücher für Philologie und Pädagogik, 1882, Bd. II, S. 130—131.
[6]) J. Chr. Schwab, Euklids Data etc. Stuttgart 1780.
[7]) Holleben und Gerwin, a. a. O. Bd. I, Seite 116 ff.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

aber heute nicht mehr die Rolle, die man denselben früher zuerkannte, und man reiht sie einfach unter die Lehrsätze des Systems ein, denn sie sind doch nichts weiter als Konsequenzen oder Umkehrungen gewisser Lehrsätze Hängen n Stücke einer Figur derartig mit einander zusammen, dafs eins derselben durch die n—1 übrigen mitbestimmt ist, so nennt man dieses eine ein Datum der übrigen. Eine derartige gegenseitige Abhängigkeit von n Stücken wird sich aber immer durch einen Lehrsatz aussprechen lassen, und der Schüler hat einen solchen Satz offenbar erst dann ganz verstanden, wenn er befähigt ist, alle Konsequenzen zu ziehen, die derselbe mit sich bringt, oder alle Formen anzugeben, unter denen der Satz sich aussprechen läfst.[1]) Es ist also nicht thunlich, eine besondere Methode der Analysis auf Anwendung der Daten zu gründen. Denn wenn die gegebenen Stücke zur Auffindung der nötigen Örter nicht unmittelbar ausreichen, so liegt doch gewifs die Frage nahe, welche Stücke durch die gegebenen mittelbar bestimmt oder gegeben sind und welche Örter sich hierdurch ergeben.[2]) In letzter Instanz handelt es sich also auch hier wieder um Bestimmung von Örtern, und man kann auch hier sagen, dafs die Data dem Schüler nichts nützen können, wenn er nicht weifs, wozu er sie gebrauchen soll.

4) **Analysis durch Reduktion.** Die Analysis einer Aufgabe durch Reduktion derselben auf eine andere oder früher gelöste kommt häufig genug vor, denn es darf wohl als selbstverständlich betrachtet werden, dafs man den Versuch macht, die Schwierigkeiten, welche eine Aufgabe darbietet, eine nach der anderen zu überwinden. So lassen sich Vierecksaufgaben häufig, wenn auch keineswegs immer, auf Dreiecksaufgaben reducieren, und schliefslich wird jede Aufgabe auf das Ziehen einer Geraden oder eines Kreises reduciert. Ist die Aufgabe, auf welche man eine gegebene zurückführt, bereits gelöst, so ist die Sache in Ordnung, ist sie aber nicht gelöst, so fängt die Arbeit von vorne an. Auch können, wie schon Steiner bemerkt hat,[3]) bei solchen Reduktionen die praktischen Schwierigkeiten derartig wachsen, dafs der erreichte Vorteil durchaus illusorisch wird. Häufig wird unter Reduktion einer Aufgabe gar nur eine Umformung ihrer Einkleidung verstanden.[4]) Es geht also jedenfalls nicht an, eine besondere Methode der geometrischen Analysis auf Reduktion gründen zu wollen, denn eine bestimmte Anleitung zur Handhabung einer solchen Methode läfst sich nicht geben.

5) **Gemischte Analysis.** Nach dem Gesagten kann von einer gemischten Analysis als besonderer Methode nicht die Rede sein. Es wird zwar wenig Aufgaben geben, bei denen die Analysis nicht gemischt im Sinne der Verfasser wäre, aber Regeln für die Anwendung der gemischten Analysis lassen sich noch weniger geben wie für die Analysis durch Reduktion.

Es würde also schliefslich von allen von den Verfassern angeführten Arten der Analysis nur die Analysis durch Örter übrig bleiben. Sind aber, wie oben angegeben wurde, die geometrischen Örter die Grundlage und Voraussetzung für alles Konstruieren, so kann von einer Analysis durch Örter als Methode überhaupt nicht die Rede sein. Die Aufgabe der Methode wird vielmehr

---

[1]) Man vergleiche: Friedrich Mann, Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Würzburg 1883.

[2]) Man vergleiche weiter unten Aufgabe 10.

[3]) J. Steiner, die geometrischen Konstruktionen etc. Berlin 1833, S. 88—89; Gesammelte Werke, Bd. I, Berlin 1881, S. 509—510.

[4]) Fraglich ist es, ob man, wie Spieker a. a. O. S. 74 meint, bei Dreiecksaufgaben von einer Reduktion auf »Hülfsdreiecke« sprechen darf, denn hierbei findet keine Verminderung, sondern eine Vermehrung der Bedingungen statt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

darin bestehen müssen, Wege anzugeben, auf welchen man Örter für die Punkte einer verlangten Figur finden kann.

Ein Buch, welches im wesentlichen dieselben Principien verfolgt, wie die geometrische Analysis von Holleben und Gerwien, ist die oben erwähnte geometrische Analysis von Oberstudienrath Dr. von Nagel.[1]) Auch hier werden fünf verschiedene Methoden der Analysis oder Auflösung unterschieden, von denen vier mit den von Holleben und Gerwien aufgestellten zusammenfallen. Die Analysis durch Örter erscheint bei Nagel als letzte. Freilich bemerkt der Verfasser,[2]) dafs diese wohl die wichtigste Art von Auflösungsmethoden sei, dafs die Sätze über geometrische Örter ebensowohl Lehrsätze seien, wie die Sätze über Data, und dafs die Auflösung der Aufgaben durch geometrische Örter nur einen besonderen Fall der Auflösung durch Lehrsätze bilde. Dafs die Sache im Grunde anders liegt, ist oben bemerkt worden. Eine gemischte Analysis wird von Nagel nicht unterschieden; als neu erscheint bei ihm die Analysis durch Analogie, aber es mufs stark bezweifelt werden, ob sich hierauf eine besondere Methode wird gründen lassen. Zunächst ist es ganz ungewifs, worin die Analogie jedesmal zu bestehen habe. Gruppen von verwandten Aufgaben lassen sich leicht zusammenstellen, und die Auflösung solcher Aufgaben würde gewifs Analogien darbieten, aber man müfste doch immer erst eine Aufgabe gelöst haben, bevor man die übrigen nach Analogie der gelösten behandeln könnte. Wie löst man aber diese eine? Überdies würde für jede neue Gruppe eine neue Analogie zu suchen sein, und ein einheitlicher Gesichtspunkt läfst sich also auf diesem Wege nicht erreichen. Eine vernünftige Methodik mufs die Forderung stellen, dafs dem Anfänger nicht bunt durcheinander gewürfelte Aufgaben vorgelegt werden, sondern solche, die nach ihren Schwierigkeiten geordnet sind, und dabei ergiebt sich auf allen Gebieten die Analogie als Führerin. Man kann die Sache aber nicht umkehren, und die Analogie als Auflösungsmethode benutzen.

Wozu oder wie lassen sich nun die von Holleben und Gerwien sowohl wie von Nagel aufgestellten Arten oder Methoden der geometrischen Analysis benutzen? Was kann man daraus entnehmen? Die Antwort wird etwa folgende sein müssen: Man sieht daraus, dafs bei Auflösung einer Aufgabe Örter, Lehrsätze und Data zur Anwendung kommen, dafs bei sehr vielen Aufgaben eine Reduktion auf früher gelöste eintritt, und dafs die Auflösungen vieler Aufgaben gewisse Analogien darbieten. Aber wie man eine Aufgabe anzufassen habe, um hinter die Konstruktion zu kommen, das kann man mit Hülfe dieser Methoden nicht lernen.

Obgleich, wie im Vorhergehenden erwähnt, schon früh auf die Nützlichkeit und Bedeutung der geometrischen Örter aufmerksam gemacht worden ist,[3]) so hat es doch lange ganz an Versuchen gefehlt, die geometrischen Örter zur alleinigen Grundlage der geometrischen Analysis zu machen. Der erste Versuch dieser Art rührt von Alexander Schwarz[4]) her. In seinen

---

[1]) Nagel meint, dafs die geometrische Analysis von Holleben und Gerwien die weitaus reichhaltigste Sammlung sei, wenngleich dieselbe einen mehr kompilatorischen Charakter trage, (K. A. Schmid, Encyklopädie etc. Bd. II. S. 944). Indessen ist nicht einzusehen, wie das bei einer Aufgabensammlung anders sein könne.

[2]) a. a. O. S. 180.

[3]) Hier wäre noch ganz besonders aufmerksam zu machen auf die Abhandlung von Prof. O. Schulz über die geometrische Analysis der Alten im Lehrbuch der ebenen Geometrie von E. G. Fischer, Berlin und Leipzig 1820. Anmerkungen, S. 153 ff.

[4]) Dr. Alexander Schwarz, Anfänge der geometrischen Analysis, Halle 1857.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Anfängen der geometrischen Analysis untersucht er die gegenseitige Lage und die „Entfernungsverhältnisse“ zwischen einem Punkte und einer Geraden, einem Punkte und einem Kreise, einer Geraden und einem Kreise, sowie zwischen zwei Kreisen. Hieraus leitet er dann eine Anzahl von geometrischen Örtern ab und schliefst daran Aufgaben über den Kreis und das Dreieck, die sich mittels derselben lösen lassen. — Das Buch von Schwarz scheint trotz der Vorzüge, die es im einzelnen besitzt, keinen grofsen Einflufs gehabt zu haben. Der Grund hierfür mag wohl darin liegen, dafs der Verfasser nicht immer ganz natürlich zu Werke geht. Er untersucht die gegenseitige Lage und die Entfernungsverhältnisse zwischen Punkt und Gerade u. s. w., aber nicht zwischen zwei Geraden. Dadurch bringt er sich um einen sehr wichtigen Ort: Die Symmetrieaxen zweier Geraden. Auch ist die vom Verfasser aufgestellte Zahl von Örtern für den Anfänger etwas zu grofs. Dieser hätte an dem dritten Teil derselben für den Anfang genug gehabt, zumal da die meisten übrigen sich aus diesem Drittel ohne sonderliche Mühe ableiten lassen.

Ein zweiter Versuch, die geometrische Analysis auf Örter zu gründen, rührt von A. Hoffmann[1]) her. Aufser den Örtern führt Hoffmann noch die Zurückführung der Aufgabe auf eine bekannte als Hülfsmittel an, um die Beziehung zwischen den gegebenen und gesuchten Gröfsen aufzufinden, bemerkt aber gleich, dafs beide Hülfsmittel sich nicht vollständig von einander trennen lassen, und dafs die Zurückführung der Aufgabe auf eine andere nur eine Vereinfachung der Auflösung sei. Die Aufgabensammlung von Hoffmann gehört unstreitig zu den bedeutendsten in Deutschland erschienenen, und zwar ist dieselbe, soweit mir bekannt, die einzige, welche Anleitung giebt, wie man zu verfahren habe, um Örter zu suchen, sobald diese sich nicht unmittelbar aus den Bedingungen der Aufgabe ergeben. Das Unbestimmte, was diese Anleitungen auf den ersten Blick haben, wird durch die sorgfältige Auswahl und Anordnung der Aufgaben zum grofsen Teil wieder aufgehoben. Indessen lassen sich auch bei dieser Sammlung einige Bedenken nicht unterdrücken. Die gegebenen Anleitungen führen allerdings zu einer richtigen Konstruktion, aber es ist doch oft nicht recht ersichtlich, warum gerade diese Anleitung gegeben ist; viele Aufgaben würden sich natürlicher und einfacher behandeln lassen. Auch ist die Zahl der Zurückweisungen auf frühere Aufgaben recht erheblich.[2])

Endlich hat noch Reidt[3]) bei seinen Versuchen, eine methodische Behandlung der Konstruktionsaufgaben durchzuführen, die geometrischen Örter etwas genauer berücksichtigt. Er unterscheidet eine Methode der Örter, der Hülfsfiguren, der ähnlichen Figuren, der algebraischen und der trigonometrischen Analysis. Dafs von einer Methode der Örter nicht eigentlich die Rede sein kann, ist schon oben bemerkt worden,[4]) und von der algebraischen und trigonometrischen Analysis mufs an dieser Stelle ganz abgesehen werden. Als neu erscheinen bei Reidt die Methoden der Hülfsfiguren und der ähnlichen Figuren. Diese letztere Methode bezeichnet einen

---

[1]) Professor Dr. A. Hoffmann, Sammlung planimetrischer Aufgaben, Paderborn, 3. Aufl., 1880.

[2]) Das Buch von Hoffmann erscheint mir als eine praktische Ausführung der Gedanken und Winke, welche Newton in seiner Arithmetica universalis, Leiden 1732, S. 87, giebt. Indessen enthalten die Worte des grofsen Britten so viel für geometrische Konstruktionen Verwendbares, dafs man aus denselben bei einigem Talent für Interpretation fast alle Konstruktionsmethoden herauslesen kann.

[3]) Professor Dr. F. Reidt, Programm des Gymnasiums zu Hamm 1873; Handbuch der Mathematik, herausgegeben von Schlömilch, Breslau 1880, S. 309 ff; Reidt, Planimetrische Aufgaben, 2 Teile, Breslau 1882.

[4]) Man vergleiche meine Recension der planimetrischen Aufgaben von Reidt in Zeitschrift für math. und naturw. Unterricht, Bd. 13, Leipzig 1882, S. 208 ff.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wesentlichen Fortschritt, denn sie ist natürlich und gut begründet und in der Anwendung sehr fruchtbar. Dieselbe wird später Gegenstand einer eingehenden Besprechung werden.

Bei einer ganzen Reihe von Aufgabensammlungen spielen die geometrischen Örter eine mehr untergeordnete Rolle. Dieselben werden freilich angeführt, z. T. allerdings nur als Anhang, aber auf die grofse Bedeutung, welche denselben faktisch zukommt, wird nicht aufmerksam gemacht. Hat man aber keinen Standpunkt adoptiert, von dem aus sich alle Aufgaben behandeln lassen, so hat es grofse Schwierigkeiten, mit dem ungeheuren Material von Aufgaben fertig zu werden. Verschiedene Wege sind denn auch zu diesem Zwecke eingeschlagen worden. Der nächstliegende Gedanke ist wohl der, die Aufgaben in Gruppen zu sondern, wie etwa: Aufgaben über das Dreieck, das Viereck, den Kreis u. s. w., entsprechend der Aufeinanderfolge der Lehrsätze im Lehrbuche der Geometrie. Aber so natürlich eine solche Gruppierung auch auf den ersten Blick erscheinen mag, so entdeckt man doch bei einer sorgfältigen Untersuchung, dafs man dadurch in vielen Fällen Zusammengehöriges auseinander reifst. Da es in letzter Instanz immer auf das Festlegen von Punkten ankommt, so kann derselbe Gedankengang, der zur Konstruktion eines Dreiecks führt, auch zur Konstruktion eines Kreises führen. Nichtsdestoweniger ist die genannte Einteilung die herrschende.

Wöckel[1]) hat sich dadurch zu helfen gesucht, dafs er jeder Aufgabe eine Anzahl von Hinweisungen auf Lehrsätze, Örter oder früher gelöste Aufgaben hinzufügt. Offenbar wird durch ein solches Verfahren dem Vorurteil, dafs das Auflösen von Konstruktionsaufgaben eine Art von Rätselraten sei, Vorschub geleistet. Bedarf es bei jeder neuen Aufgabe abermals einer Zusammenstellung der erforderlichen Hülfsmittel, so fehlt es also an einer allgemeinen Methode. Die wenigsten Schüler werden es versuchen, selbständig eine Lösung zu finden, die Zahlenreihe unter der Aufgabe enthält ja den Schlüssel zur Lösung. Wird aber dieser Schlüssel benutzt, so macht sich ein neuer Übelstand geltend. Das Zurückschlagen ist an und für sich ermüdend, aber nun soll der Schüler z. B. aus sechs und manchmal noch viel mehr Sätzen und Aufgaben sich das zusammensuchen, was zur Lösung der gestellten Aufgabe dienen kann. In einzelnen Fällen scheint das nur möglich zu sein, wenn der Schüler die Auflösung der betreffenden Aufgabe überhaupt schon kennt. Es soll z. B. ein Dreieck gezeichnet werden,[2]) dessen Höhe ebenso grofs ist wie die Grundlinie, wenn die beiden anderen Seiten gegeben sind. Für die Auflösung (Konstruktion) ist auf Folgendes verwiesen: einen rechten Winkel zu zeichnen; die Schenkel eines Winkels gleich einer gegebenen Strecke zu machen; über einer gegebenen Strecke als Durchmesser einen Halbkreis zu beschreiben; von einem gegebenen Punkte aus als Mittelpunkt mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben, der eine gegebene gerade oder krumme Linie durchschneidet; zweimal durch zwei gegebene Punkte eine gerade Linie zu ziehen. Alle diese Hinweisungen sind rein äufserlich und enthalten durchaus garnichts, wodurch der Zusammenhang zwischen den gegebenen und gesuchten Stücken klar würde.

Gandtner und Junghans[3]) ordnen die Aufgaben nach den für die Auflösung be-

---

[1]) Dr. L. Wöckel, Über geometrische Aufgaben und deren Lösung, Herbstprogramm der Studienanstalt zu Nürnberg 1838—39, und: Die Geometrie der Alten, Nürnberg, 1. Auflage, 1839, 12. Auflage, besorgt von Prof. Th. E. Schröder, 1880.

[2]) Wöckel, Die Geometrie der Alten, No. 803.

[3]) Dr. J. O. Gandtner und Dr. K. F. Junghans, Sammlung von Lehrsätzen und Aufgaben aus der Planimetrie, 2 Bände, Berlin, 4. und 2. Aufl., 1879 und 1870.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

nutzten Lehrsätzen, teilen dieselben dann wieder in Gruppen, je nachdem Punkte, Linien, Dreiecke u. s. w. konstruiert werden sollen, und verweisen bei schwierigeren Aufgaben auf vorangegangene Örter, Data und Aufgaben. Lange[1]) gruppiert die Aufgaben nach Hauptlehrsätzen und Örtern. Lieber und von Lühmann[2]) haben in ihrer reichhaltigen Sammlung die Aufgaben in Gruppen geteilt, und jeder Gruppe eine Anleitung zur Auflösung vorangeschickt, ähnlich wie das von Féaux[3]) für Dreiecksaufgaben geschehen ist. Dafs das in den genannten Sammlungen eingeschlagene Verfahren zum Ziele führt, wenn man das Auflösen von Aufgaben als alleiniges Ziel hinstellt, ist unbezweifelbar, und ebenso wird niemand läugnen, dafs der Nutzen und der Wert der genannten Schriften ein bedeutender ist. Dafür bürgt die weite Verbreitung, die einzelne derselben gefunden haben. Aber es würde doch immer noch die Frage sein, ob sich nicht durch eine methodische Behandlung etwas mehr Einheit in das Ganze bringen liefse. Es giebt gar zu viele einzelne Gruppen, und dadurch werden an das Gedächtnis nicht unerhebliche Ansprüche gemacht; bei manchen Gruppen stimmen die für die Auflösung einzuschlagenden Wege in den wesentlichsten Punkten überein, und hier liefse sich eine Verschmelzung denken. Nicht wenige der angedeuteten Lösungen werden aber den Schüler leicht zu der Frage bringen: Wie in aller Welt kommt man nur darauf? Der Umstand, dafs die angedeutete Lösung faktisch zu einem richtigen Resultate führt, dient doch nur zu einer äufserlichen Motivierung des Verfahrens. Lieber und von Lühmann[4]) „sind bei der Anordnung der Aufgaben hauptsächlich von dem Grundsatz ausgegangen, dafs dieselben, wenn die Gesamtheit der Schüler imstande sein soll, sie zu lösen, systematisch behandelt und in bestimmte Gruppen geteilt werden müssen, für welche die Grundzüge der Lösung anzugeben sind. Nur in diesem Falle können die Schüler wirklich in der Lösung von Aufgaben unterrichtet werden.“ Ob diese Bemerkungen in allen Punkten richtig sind, ist aber doch fraglich. Man könnte gewifs beim Unterricht in der Geometrie so weit auf Konstruktionen Rücksicht nehmen, dafs man bei den Lehrsätzen auf ihre Verwendbarkeit für solche Zwecke aufmerksam machte und die besonderen Eigenschaften der Dreiecke u s w. mit Rücksicht auf Transversalen, berührende Kreise u. s. w. genauer zur Darstellung brächte. Dann würde es überflüssig werden, jeder Gruppe von Aufgaben specielle Andeutungen zur Lösung voranzustellen. Vor allen Dingen hätte man dann aber alle Aufgaben auszusondern, bei denen man den Schülern nicht zugleich bis ins Einzelne klar machen kann, auf welchem Wege man zu der Lösung gelangt ist. Es würden immer noch weit über Tausend Aufgaben zur Verfügung stehen, und man mufs doch immer bedenken, dafs es nicht so sehr darauf ankommt, was gemacht wird, sondern vielmehr darauf, wie es gemacht wird.

Aus dem Vorstehenden erhellt zur Genüge, wie viele verschiedene Wege eingeschlagen sind, um die Auflösung geometrischer Konstruktionsaufgaben zu ermöglichen, aber es geht auch daraus hervor, wie wenig man versucht hat, „die Idee zu finden, welche zur Lösung führte, und dem Gedankengang nachzuspüren, der zu dieser Idee führte,“ um hieran anknüpfend Ratschläge

---

[1]) Dr. Theodor Lange, Aufgaben aus der Elementar-Geometrie, 3 Hefte, Berlin 1867—73, in mehreren Auflagen.

[2]) Dr. H. Lieber und F. von Lühmann, Geometrische Konstruktionsaufgaben, Berlin, 1. Aufl. 1870, 5. Aufl. 1880.

[3]) Dr. Féaux, Über Dreiecks-Zeichnungen, Programm des Gymnasium Theodorianum zu Paderborn 1862.

[4]) a. a. O., Vorrede, und die Vorrede zu den trigonometrischen Aufgaben derselben Verfasser, Berlin 1878.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

zu geben, wie man eine Konstruktionsaufgabe anzufassen habe. Das hat zum ersten Male Dr. Julius Petersen in Kopenhagen in seinen „Methoden und Theorien zur Auflösung geometrischer Konstruktionsaufgaben", 1879,[1]) gethan. Der Einflufs dieses Buches tritt seit einigen Jahren mit immer gröfserer Deutlichkeit zu Tage, und wer die „Methoden und Theorien" dem Unterrichte zu Grunde legt, der macht die Erfahrung, dafs dadurch ganz neues Leben in die Behandlung der Konstruktionsaufgaben hinein kommt. Wie Petersen selber sagt, mufs sein Buch nicht nur gelesen, sondern studiert werden. Die folgenden Blätter enthalten das Resultat eines solchen Studiums, also vielleicht nur das, was sich jeder sagen kann, der die „Methoden und Theorien" mit Aufmerksamkeit liest. Da auf die Bedürfnisse deutscher Gymnasien Rücksicht zu nehmen war, so mufste eine Beschränkung in der Auswahl des Stoffs eintreten. Erweiterungen und Verbesserungen sind sicher noch möglich, und dazu würden die „Methoden und Theorien" selbst reichliches Material darbieten.

---

[1]) Die erste Auflage des Originals erschien 1866.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Bei jeder Konstruktionsaufgabe pflegt man vier Teile zu unterscheiden: Analysis, Konstruktion, Beweis und Determination oder Diskussion. Die Schlufsreihe, durch welche der Zusammenhang zwischen den gegebenen und gesuchten Stücken derartig aufgedeckt wird, dafs sich das Gesuchte aus dem Gegebenen durch Zeichnung darstellen läfst, oder der Gedankengang, der durchlaufen werden mufs, um hinter die Konstruktion zu kommen, wird Analysis genannt. In der Konstruktion wird die Zeichnung der Figur auf dem in der Analysis dargelegten Wege ausgeführt; hieran schliefst sich, falls es erforderlich sein sollte, die logische Kontrole oder der Beweis, und in der Determination ist dann endlich noch zu untersuchen, welche Bedingungen die gegebenen Stücke erfüllen müssen, damit die Konstruktion möglich sei, und wie viele Auflösungen die Aufgabe zulasse. Von diesen vier Teilen ist die Analysis der schwierigste und wichtigste, aber zugleich der am meisten vernachlässigte. Von Konstruktionen, die dem Scharfsinn des Erfinders alle Ehre machen, besitzen wir eine grofse Anzahl, aber bei den allermeisten ist nicht zu sehen, auf welchem Wege sie gefunden worden sind. Für den Schüler ist es aber viel wichtiger, dafs er lernt sich Rechenschaft abzulegen, wie er zu einer bestimmten Konstruktion gelangt ist, als dafs er die Konstruktion überhaupt machen kann.

Eine gute Analysis darf keine logischen Sprünge enthalten, jedes Folgende mufs sich aus dem Vorhergehenden auf einfache Weise ergeben, jedes Folgende mufs auch logische Folge des Vorhergehenden sein. Jeder etwas geübtere Schüler wird aber die Erfahrung machen, dafs ihm, während er mit Nachdenken über die Lösung beschäftigt ist, diese selbst plötzlich fertig entgegentritt. Dann wird es seine Aufgabe sein, sich über die unbewufste Geistesarbeit, durch die ein solcher plötzlicher Sprung zur Lösung möglich wurde, nachträglich klar zu werden, und die Lösung statt durch einen Sprung durch zusammenhängende Schritte zu erreichen. Damit aber der Schüler immer in der Lage ist, das, was er vornimmt, gründlich zu motivieren, und die Frage, wie er darauf komme, von vornherein abzuweisen, ist es notwendig, ihn mit Methoden für die Auflösung von Konstruktionsaufgaben vertraut zu machen, und diese Methoden werden um so besser sein, je einfacher sie aus der Sache selbst gewissermafsen hervorwachsen.

Indessen liegt es in der Natur der Sache, dafs man sich auf unfehlbare Methoden keine Hoffnung machen darf. Eine und dieselbe Aufgabe läfst sich in der Regel von verschiedenen Seiten betrachten, und ob dieselbe auf diese oder jene Weise, mit Hülfe oder ohne Hülfe einer Methode zu lösen ist, das wird nicht nur vom Ermessen, sondern auch vom Können des Auflösenden selbst abhängig sein. Alles, was im Folgenden gesagt ist, bezieht sich nur auf solche Aufgaben, die von Schülern bewältigt werden können, und soll nur helfen, geometrische Aufgaben in der Schule zu behandeln. Dafs es Aufgaben giebt, die sich durch die hier anzugebenden Methoden nicht lösen lassen, wird nicht bezweifelt, ändert aber an der Brauchbarkeit dieser Methoden auch nichts.

Sollen nun für die Auflösung von Konstruktionsaufgaben bestimmte Methoden angewandt werden, so mufs man auch imstande sein, von vornherein zu entscheiden, wann eine gewisse Me-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

thode anwendbar ist und wann nicht. Das läfst sich in der That erreichen, und zwar liefern die für die Konstruktion der Figur gegebenen Bedingungen, nicht die Figur selbst, die Mittel für eine solche Entscheidung.

Nach dem früher Gesagten bedarf es wohl nicht wieder eines besonderen Hinweises auf die Wichtigkeit oder vielmehr auf die Notwendigkeit der geometrischen Örter; es könnte höchstens zur Frage kommen, wie man den geometrischen Ort am zweckmäfsigsten definiere. Da bei manchen Aufgaben eine Linie gegeben ist, auf der ein bestimmter Punkt der verlangten Figur liegen soll, so definiert man vielleicht am besten und für die Schüler trotz der Allgemeinheit am verständlichsten: Diejenige Linie (Gerade oder Kreis), auf der ein Punkt den gegebenen oder geforderten Bedingungen zufolge liegen mufs, heifst geometrischer Ort des Punktes. Daneben ist es aber durchaus notwendig zu zeigen, wie man zu geometrischen Örtern gelangt: Ist für die Bestimmung eines Punktes nur eine Bedingung gegeben, oder wird nur eine berücksichtigt, so wird der Punkt unbestimmt, aber alle Punkte, welche diese Bedingung erfüllen, werden auf einer geraden oder krummen Linie liegen. Eine Betrachtungsweise, die der hier auf den Punkt angewandten ähnlich ist, läfst sich nun auch unter Umständen auf Figuren anwenden, um geometrische Örter für die Punkte derselben zu gewinnen. Vernachlässigt man nämlich bei gewissen Aufgaben eine der gestellten Bedingungen, so erhält man nicht eine, sondern unendlich viele Figuren, welche den übrigen Bedingungen genügen. Es wäre nun denkbar, dafs man eine dieser Figuren zur Erfüllung der vernachlässigten Bedingung bringen könnte, und zwar durch eine mit derselben vorgenommene zweckmäfsige Bewegung. Sind die Linien, welche die Punkte der Figur hierbei beschreiben, gerade Linien oder Kreise, so wird die Aufgabe mit Hülfe von Zirkel und Lineal lösbar sein. Man könnte also etwa folgendermafsen fragen: Welcher Art müssen die gegebenen Bedingungen sein, damit die Aufgabe unter Vernachlässigung einer bestimmten derselben unbestimmt wird, und zwar unbestimmt in dem oben genannten Sinne?

Die für die Konstruktion einer Figur gegebenen Bedingungen können sich auf Lage, Gröfse und Gestalt derselben beziehen, und es ist entweder möglich, dafs keine Bedingungen für die Lage, oder dafs solche gegeben sind. Bei den Aufgaben der ersten Art (unörtliche Aufgaben, Holleben und Gerwien) werden Strecken, Winkel und Verhältnisse als Bedingungen oder Bestimmungsstücke gegeben sein. Sind lauter Strecken gegeben, so wird die verlangte Figur durch diese der Gestalt und Gröfse nach bestimmt sein und sich also aus denselben durch Zeichnung darstellen lassen. Ein Gleiches wird der Fall sein können, wenn aufser Strecken auch noch Winkel und Verhältnisse gegeben sind. Ist aber nur eine Strecke gegeben, so müssen die aufserdem gegebenen Winkel und Verhältnisse die Gestalt der Figur bestimmen. Vernachlässigt man also die gegebene Strecke, so wird die Aufgabe unbestimmt. Aus den gegebenen Winkeln und Verhältnissen läfst sich eine beliebig grofse Figur zeichnen, welche der gesuchten ähnlich ist, und es würde nun darauf ankommen, diese mit Hülfe der gegebenen Strecke auf die verlangte Gröfse zu bringen. Bemerkt mag hier noch werden, dafs alle unörtlichen Aufgaben, also auch die letztgenannten, zu örtlichen werden, sobald man einen Teil derselben durch Zeichnung festgelegt hat.

Sind Bedingungen über die Lage der Figur gegeben (örtliche Aufgaben, Holleben und Gerwien), so können diese darin bestehen, dafs Seiten der Figur durch gegebene Punkte gehen, oder Punkte der Figur auf gewissen Linien liegen sollen. In vielen Fällen wird es möglich sein, die verlangte Figur aus lauter Bedingungen für die Lage zu konstruieren, z. B. einen Kreis, der durch drei Punkte geht oder drei Gerade berührt, ein Quadrat, dessen Seiten durch vier Punkte

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

gehen u. s. w. In anderen Fällen können aufser Bedingungen für die Lage noch Strecken, Winkel und Verhältnisse gegeben sein. Reichen diese letzteren Bestimmungsstücke allein nicht aus, um die verlangte Figur zu konstruieren, so müssen die für die Lage gegebenen Bedingungen die fehlenden Örter für gewisse Punkte derselben liefern, z. B. über einer der Lage nach gegebenen Strecke als Grundlinie ein gleichschenkliges Dreieck zu zeichnen, wenn die Spitze desselben auf einer gegebenen Linie liegen soll. Es kann aber auch der Fall eintreten, dafs die gegebenen Bedingungen, welche sich nicht auf die Lage beziehen, eine Figur bestimmen, welche der gesuchten entweder kongruent oder ähnlich ist. Diese letztere Figur wird man im allgemeinen so zeichnen können, dafs sie die für die Lage gegebenen Bedingungen mit Ausnahme einer erfüllt. Die Aufgabe wird dann wieder unbestimmt werden, und es würde nun also darauf ankommen, die konstruierte Figur in die richtige Lage, beziehungsweise in die richtige Lage und auf die dadurch bedingte Gröfse zu bringen.

Endlich wäre noch zu erwähnen, dafs eine Figur der Gröfse oder der Gröfse und Lage nach gegeben sein kann, und auf eine besondere Gestalt gebracht oder in gewisse Teile geteilt werden soll (Verwandlungs- und Teilungsaufgaben.)

Aus dem Voranstehenden folgt nun, wenn man die Aufgaben über Verwandlung und Teilung ausschliefst, dafs es wesentlich auf die Beantwortung von zwei Fragen ankommt:

1) Wie bringt man eine Figur, welche ihrer Gestalt und Gröfse nach bestimmt ist, aber eine für ihre Lage gegebene Bedingung noch nicht erfüllt, zur Erfüllung dieser letzten Bedingung?

2) Wie bringt man eine Figur, welche ihrer Gestalt nach bestimmt ist, auf eine verlangte Gröfse, oder wenn dieselbe eine Bedingung für ihre Lage noch nicht erfüllt, in die verlangte Lage und auf die dadurch bedingte Gröfse?

Die Beantwortung dieser beiden Fragen wird dadurch wesentlich erleichtert, dafs man nicht nötig hat, ganze Figuren der Untersuchung zu unterwerfen. Hat man nämlich von einer der Gröfse und Gestalt nach bestimmten Figur eine Strecke festgelegt, so ist dadurch die Lage der ganzen Figur bestimmt, sobald man weifs, welche von den beiden Lagen mit Beziehung auf die festgelegte Strecke als Symmetrieaxe die Figur einnehmen soll. Das Gleiche gilt für Figuren, welche der Gestalt nach bestimmt sind. Soll eine der Gestalt nach bestimmte Figur mit Hülfe einer gegebenen Strecke auf eine bestimmte Gröfse gebracht werden, so ist durch diese Strecke ein Punkt der gesuchten Figur bestimmt und dadurch wieder die Lage und Gröfse der übrigen Stücke derselben. Es kommt also der Hauptsache nach darauf an, die Lage einer Strecke zu bestimmen, und man könnte sich demnach auf die Beantwortung einer einzigen Frage beschränken:

Wie bringt man eine Strecke, welche gewisse Bedingungen hinsichtlich ihrer Lage erfüllt, zur Erfüllung einer ferneren Bedingung?

Da man bei einer Strecke zugleich an die unendliche Gerade, der sie angehört (ihren Träger), zu denken hat,[1]) so ist es im Interesse der Vollständigkeit geboten, auch auf diese Rücksicht zu nehmen. Die Frage würde dann lauten:

Wie zieht man eine Gerade durch einen (im Endlichen oder im Unendlichen liegenden) Punkt, so dafs gewisse Punkte derselben bestimmte Bedingungen erfüllen?

---

[1]) Es entspricht nicht nur modernen Anschauungen, sondern erweist sich auch in hohem Grade als nützlich, wenn man sich bei allen Konstruktionen zur Regel macht, bei der Verbindungslinie zweier Punkte A und B oder bei der Strecke AB zugleich immer die durch A und B bestimmte unendliche Gerade zu berücksichtigen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Endlich mufs man noch aus Gründen der Zweckmäfsigkeit und der Vollständigkeit ähnliche Fragen mit Beziehung auf den Kreis stellen. Die Beantwortung dieser Fragen ergiebt sich gleichsam von selbst bei Beantwortung der oben genannten.

Dafs die Beantwortung der oben aufgestellten Fragen wünschenswert ist, ergiebt sich auch noch auf einem andern Wege. Legt man sich die Frage vor, worauf es denn eigentlich bei der Konstruktion einer Figur ankomme, so wird man zu dem Resultat gelangen, dafs es in letzter Instanz auf die Bestimmung von Punkten hinausläuft, da eine Gerade im allgemeinen durch zwei Punkte, ein Kreis durch seinen Mittelpunkt und einen Punkt der Peripherie bestimmt ist. Ist aber für die Konstruktion eines Kreises aufser anderen Bedingungen auch der Radius desselben gegeben, so wird die Aufgabe gelöst sein, sobald ein Radius in eine bestimmte Lage gebracht ist. Ebenso wird es bei der Konstruktion von Vielecken, sowie bei vielen anderen Aufgaben darauf hinauslaufen, entweder eine gegebene Strecke in eine bestimmte Lage zu bringen, oder eine Gerade so zu ziehen, dafs gewisse Punkte derselben bestimmte Bedingungen erfüllen.

A. Methode der Verschiebung und Drehung.

1) Parallelverschiebung (Petersen)[1].

Läfst man (Fig. 1) eine Gerade G unter Beibehaltung ihrer Richtung mit einem ihrer Punkte A auf einer Geraden L gleiten, so beschreiben alle übrigen Punkte der G gerade Linien, welche der L parallel sind. Ein beliebiger Punkt A′ der Geraden G beschreibt also die Parallele L′, oder: Gleitet die Strecke AA′ unter Beibehaltung ihrer Richtung mit dem einen Endpunkt auf der Geraden L, so beschreibt A′ die der L parallele Gerade L′. Beschreibt A die Strecke AB, so beschreibt A′ die gleiche (kongruente) Strecke A′B′. Homologe Punkte der Strecken AA′ und BB′ liegen auf Geraden, die der L parallel sind, homologe Punkte der Strecken AB und A′B′ auf solchen, die der G parallel sind. — Verschiebt man L parallel mit sich in der Richtung AA′ und um die Strecke AA′, so erhält man die Parallele L′, und alle Punkte der L beschreiben Strecken, welche der AA′ gleich und parallel sind.

Gleitet G unter Beibehaltung ihrer Richtung mit einem ihrer Punkte A auf einer Kreislinie K (Fig. 2), so beschreiben alle übrigen Punkte der G Kreislinien, welche K kongruent sind. Ein beliebiger Punkt A′ der Geraden G beschreibt also die Kreislinie K′, oder: Gleitet die Strecke AA′ unter Beibehaltung ihrer Richtung mit dem einen Endpunkt A auf einer Kreislinie K, so beschreibt A′ die kongruente Kreislinie K′; die Entfernung der beiden Kreismittelpunkte M und M′ ist der AA′ gleich und parallel. Beschreibt A den Bogen AB, so beschreibt A′ den kongruenten Bogen A′B′. Homologe Punkte der Strecken AA′ und BB′ liegen auf der Peripherie von Kreisen, die K kongruent sind, und deren Mittelpunkte auf der durch M und M′ bestimmten Geraden liegen. Homologe Punkte der Bogen AB und A′B′ liegen auf Geraden, welche der G parallel sind. — Verschiebt man einen Kreis K in der Richtung AA′ um die Strecke AA′, so erhält man den Kreis K′, und alle Punkte von K beschreiben Strecken, welche der AA′ gleich und parallel sind; es ist also MM′ gleich und parallel der AA′.

---

[1]) J. Petersen, Methoden und Theorien, S. 39, 55, 49 ff. Man vergl. Ebene Örter d. Apollonius von Perga etc. übersetzt von J. W. Camerer, Satz 20 und 21.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2) Drehung (Petersen)[1].

Dreht man eine Gerade G (Fig. 3), während die Entfernung PD derselben von einem Punkte P konstant bleibt, um diesen Punkt P, so beschreiben alle Punkte der Geraden koncentrische Kreise mit dem Mittelpunkt P. Betrachtet man zwei Punkte A und A′ der Geraden G, so beschreiben diese zwei koncentrische Kreise K und K′. Liegt also eine Strecke AA′ mit dem einen Endpunkt A auf einer Kreislinie K, und dreht man dieselbe um P, so dafs A auf K gleitet und der Winkel PAA′ konstant bleibt, so beschreibt A′ die koncentrische Kreislinie K′. Beschreibt A den Bogen AB, so beschreibt A′ den ähnlichen Bogen A′B′, und es ist demnach Winkel APB = A′PB′. Es drehen sich also alle Punkte der Strecke um gleiche Winkel (Drehungswinkel). Homologe Punkte der Strecken AA′ und BB′ liegen auf mit K und K′ koncentrischen Kreisen. Homologe Punkte der Bogen AB und A′B′ liegen auf Geraden, welche den Kreis mit dem Radius PD berühren. (Geht die Gerade AA′ durch P, so gestaltet die Sache sich wesentlich einfacher.) — Man kann sich die Kreislinie K′ auch dadurch entstanden denken, dafs man die Kreislinie K wachsen, beziehungsweise abnehmen läfst, bis sie durch A′ geht, eine Auffassung, die bei der Auflösung von Berührungsaufgaben eine weitgehende Anwendung findet. Läfst man den Bogen AB wachsen, während A auf der AA′ gleitet, so beschreibt B die Strecke BB′, welche der AA′ gleich (kongruent) ist, oder: Durch einen Punkt P gehen zwei Strahlen, welche den konstanten Winkel φ mit einander bilden; auf dem einen Strahl ist ein Punkt A, auf dem andern ein Punkt B angenommen, und zwar soll PA stets gleich PB sein; durchläuft A eine Gerade G, so durchläuft B gleichfalls eine Gerade G′; beschreibt A eine Strecke, einen Bogen oder einen Kreis, so beschreibt B eine Strecke, einen Bogen oder einen Kreis von gleicher Gröfse (ein kongruentes Gebilde). Durch Drehung um einen Winkel φ lassen sich die beschriebenen Figuren zur Deckung bringen. Verbindet man A mit B, und A′ mit B′, so sind die gleichschenkligen Dreiecke PAB und PA′B′ ähnlich. Liegt ein gleichschenkliges Dreieck PAB mit seiner Spitze auf einem festen Punkte P, so beschreiben die Punkte A und B bei irgend einer Bewegung kongruente Figuren, wenn das Dreieck PAB seine Gestalt bewahrt, d. h. wenn der Winkel APB konstant bleibt. Die Verallgemeinerung dieses Falles folgt später unter 4.

3. Perspektivische Verschiebung.[2]

Multiplikation und Ähnlichkeitsmethode (Petersen)[3].

Methode der ähnlichen Figuren (Reidt)[4].

Gleitet eine Gerade G (Fig. 4), die durch einen festen Punkt P geht, mit einem ihrer

---

[1]) J. Petersen, a. a. O. S. 40.

[2]) Diese Bezeichnung, die für den Unterricht sehr zweckmäfsig ist, wird gebraucht von C. F. Hertter, Zeichnende Geometrie, Stuttgart, 2 Hefte, 1882 und 1883, 2. Heft, S. 6 ff.

[3]) J. Petersen, Methoden und Theorien, S. 22 ff. und 28 ff.

[4]) F. Reidt, Programm des Gymnasiums zu Hamm, 1873. Wem das Recht der Priorität zuzusprechen ist, läfst sich schwierig entscheiden, jedenfalls ist es aber Petersen's unbestreitbares Verdienst, die Methode der perspektivischen Verschiebung umfassender und eingehender geschildert zu haben, als irgend ein anderer. Vereinzelte Beispiele für Anwendung der perspektivischen Verschiebung kommen fast in allen älteren Aufgabensammlungen vor, am frühesten vielleicht bei J. C. Schwab, Euklids Data 1780, Aufgabe XV. und XII. Nach einer Bemerkung in seiner Vorrede verdankt Schwab die Lösung der Hauptaufgabe XV Herrn Le Sage in Genf. Man vergl. auch Ebene Örter des Apollonius von J. W. Camerer, Satz 4 und 5, sowie Satz 31.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Punkte A auf einer Geraden L, so beschreibt ein Punkt A′, welcher die PA so teilt, dafs $PA' : PA = p : q$ ist, eine der L parallele Gerade L′, oder: Gleitet eine Strecke AA′, welche auf einer durch einen festen Punkt gehenden Geraden liegt, mit dem einen Endpunkt A auf einer Geraden L, und ändert AA′ seine Gröfse in der Weise, dafs stets $PA' : PA = p : q$ ist, so beschreibt A′ die der L parallele Gerade L′. Beschreibt A die Strecke AB, so beschreibt A′ die ähnliche Strecke A′B′, und es ist $A'B' : AB = PA' : PA = p : q$, mithin $A'B' = AB \cdot \frac{p}{q}$. Homologe Punkte der Strecken AA′ und BB′ liegen auf Geraden, die der L parallel sind, homologe Punkte der Strecken AB und A′B′ auf durch P gezogenen Geraden.

Gleitet A auf der Peripherie eines Kreises K (Fig. 4), so beschreibt A′ eine Kreislinie K′, die K perspektivisch ähnlich ist mit Beziehung auf P als Ähnlichkeitspunkt, oder: Gleitet eine Strecke AA′, deren Träger beständig durch P geht, mit dem einen Endpunkt auf einer Kreislinie K, und ändert AA′ seine Gröfse in der Weise, dafs $PA' : PA = p : q$ ist, so beschreibt A′ eine Kreislinie K′, welche der K perspektivisch ähnlich ist mit Beziehung auf P als Ähnlichkeitspunkt. Beschreibt A den Bogen AC, so beschreibt A′ den Bogen A′C′, und es ist $\widehat{A'C'} : \widehat{AC} = A'B' : AB = PA' : PA = p : q$. Homologe Punkte der Strecken AA′ und CC′ liegen auf Kreislinien, welche K und K′ perspektivisch ähnlich sind. Homologe Punkte der Bogen AC und A′C′ liegen auf durch P gezogenen Geraden.

Ähnlich wie oben kann man sich A und A′, L und L′, K und K′ u. s. w. eins aus dem anderen durch Verschiebung (perspektivische Verschiebung) entstanden denken. Punkt und unendliche Gerade ändern bei dieser Verschiebung nur ihre Lage, Strecken, Bogen, Kreise u. s. w. aber Lage und Gröfse, und zwar ändert sich die Gröfse proportional der Verschiebung. Denkt man sich AB durch Verschiebung in die Lage A′B′ gebracht, so ist $A'B' : AB = PA' : PA = p : q$, mithin $A'B' = AB \cdot \frac{p}{q}$. Petersen nennt die Operation, eine Figur F′ zu zeichnen, die einer gegebenen Figur F perspektivisch ähnlich ist, wenn der Ähnlichkeitspunkt P und das Seitenverhältnis $p : q$ gegeben ist: F mit $\frac{p}{q}$ mit Beziehung auf P multiplicieren, und zwar mit $\pm \frac{p}{q}$, je nachdem P äufserer oder innerer Ähnlichkeitspunkt ist.[1])

Die Parallelverschiebung erfolgte zwischen parallelen Geraden, die hier angedeutete Verschiebung findet zwischen konvergierenden Geraden oder den Strahlen eines Büschels statt. Während man vorhin kongruente Gebilde erhielt, so erhält man nunmehr ähnliche und zwar perspektivisch ähnliche Gebilde. Dadurch rechtfertigt es sich, im allgemeinen von perspektivischer Verschiebung zu sprechen. Bei der Anwendung derselben kann man aber nicht gut umhin, den Ausdruck „Multiplikation" zu benutzen. Derselbe ist zutreffend und kurz.

4. Perspektivische Drehung.

Drehungstheorie (Petersen)[2]), z. T.

Zwei Gerade (Fig. 5), welche durch denselben Punkt P gehen, bilden einen konstanten

---

[1]) Dr. E. Schindler hat in seinen neuerdings erschienenen Elementen der Planimetrie (Berlin 1883) den Ausdruck „Multiplikation" adoptiert. (Heft III, § 159). Henrici und Treutlein umgehen den Ausdruck; sie nehmen $p : q$ positiv für den inneren, und negativ für den äufseren Ähnlichkeitspunkt (Elementar-Geometrie, Teil II, S. 32.)

[2]) J. Petersen, Methoden und Theorien, S. 70 ff. Man vergl. Ebene Örter des Apollonius von J. W. Camerer, Satz 6 und 7.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Winkel φ mit einander. Auf der einen Geraden ist ein Punkt A, auf der anderen ein Punkt A′ angenommen, und es wird vorausgesetzt, dafs PA′ und PA stets in dem konstanten Verhältniss $\frac{p}{q}$ zu einander stehen. Dieselben Betrachtungen, die vorhin bei der perspektivischen Verschiebung angestellt wurden, lassen sich hier mit geringen Modifikationen wiederholen. Beschreibt A eine Gerade L, so beschreibt A′ eine Gerade L′; beschreibt A eine Strecke AB, so beschreibt A′ die ähnliche Strecke A′B′, und es ist $A'B' = AB \cdot \frac{p}{q}$ u. s. w. Während bei der perspektivischen Verschiebung homologe Punkte auf demselben Ähnlichkeitsstrahl lagen, so bilden bei der perspektivischen Drehung die an homologe Punkte gezogenen Änlichkeitsstrahlen den konstanten Winkel φ miteinander. Dreht man die eine Figur um einen Winkel φ, so ist sie der zweiten perspektivisch ähnlich mit Beziehung auf P; A′B′ würde beispielsweise durch eine solche Drehung der AB parallel werden und mit ihren Endpunkten auf die Strahlen PA und PB fallen; durch eine Multiplikation mit $\frac{p}{q}$ würde AB mit A′B′ zur Deckung gebracht werden. Durch eine Verbindung von Multiplikation und Drehung läfst sich also die eine Figur aus der anderen ableiten. J. Petersen nennt P den Drehungspunkt, φ den Drehungswinkel, $\frac{p}{q}$ oder kürzer f das Drehungsverhältnis. Sind eine Figur F, der Punkt P, das Verhältnis f und der Winkel φ gegeben, so läfst sich eine Figur F′ zeichnen, welche der F ähnlich ist, so dafs die Seiten in dem Verhältnis $\frac{p}{q}$ stehen, und die beiden an zwei homologe Punkte von P aus gezogenen Strahlen den Winkel φ miteinander bilden. Diese Operation nennt Petersen: Eine Figur mit $f\varphi$ mit Beziehung auf P multiplicieren.

Verbindet man zwei homologe Punkte mit einander, z. B. A mit A′, B mit B′, C mit C′ u. s. w., so sind die Dreiecke PAA′, PBB′, PCC′ u. s. w. unter einander ähnlich. Liegt ein Dreieck PAA′ mit seinem Eckpunkt P auf einem festen Punkte, so beschreiben die Eckpunkte A und A′ bei irgend einer Bewegung ähnliche Figuren, wenn das Dreieck seine Gestalt bewahrt.

Mit Hülfe des Dargestellten lassen sich nun eine ganze Reihe von allgemeinen Aufgaben (Fundamentalaufgaben) lösen, die von der gröfsten Wichtigkeit für geometrische Konstruktionen sind.

I. Eine gegebene Strecke XY in gegebener Richtung mit ihren Endpunkten auf zwei gegebenen Linien L und L′ zu legen. [1])

Angenommen, es solle X auf L und Y auf L′ liegen; will man Y bestimmen, so ist ein Ort für Y in L′ gegeben; einen zweiten Ort erhält man, wenn man L in der gegebenen Richtung um die Länge der Strecke verschiebt; eine durch Y in der gegebenen Richtung gezogene Gerade schneidet L in X. Man könnte X auch dadurch bestimmen, dafs man mit XY als Radius um Y als Mittelpunkt einen Kreis beschreibt. Will man zuerst X bestimmen, so hat man in entsprechender Weise zu verfahren.

II. Mittels Parallelverschiebung und Drehung lassen sich eine grosse Zahl von Aufgaben lösen; um das dabei einzuschlagende Verfahren im allgemeinen zu charakterisieren, soll hier nur eine etwas genauer behandelt werden, nämlich: Durch einen gegebenen Punkt P eine Gerade zu ziehen, so dafs das zwischen zwei Parallelen oder zwei koncentrischen Kreisen abgeschnittene Stück XY eine gegebene Länge habe.

a) Zwei Parallelen L und L′ und ein Punkt P seien gegeben (Fig. 6). Man sehe von der Bedingung ab, dafs die Gerade durch P gehen soll, und trage zwischen die Parallelen eine Strecke AB von der gegebenen Länge ein. Den Punkt P′, welcher dem gegebenen Punkte P

[1]) J. Petersen, a. a. O. S. 55.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

homolog ist, konstruiert man durch eine durch P zur L gezogene Parallele. Nun giebt PP′ die Gröfse der Verschiebung an, und man erhält die gewünschte Linie, wenn man BX = P′P macht und PX zieht. Eine zweite Linie PX′ erhält man durch Drehung der PX. P′B giebt aber auch die Länge der PX an, und man kann also auch X durch einen Kreisbogen um P mit PB′ bestimmen.

b) Zwei koncentrische Kreise K und K′ mit dem Mittelpunkt M und ein Punkt P seien gegeben (Fig. 7). Sieht man ebenso wie oben von der Bedingung ab, dafs die XY durch P gehen soll, so kann man eine Strecke AB von der gegebenen Länge beliebig zwischen die beiden Peripherien eintragen. Um dieselbe in die verlangte Lage zu bringen, mufs man die Gröfse der erforderlichen Drehung kennen. Diese erhält man, wenn man den Punkt P′ auf AB bestimmt, welcher P homolog ist, und das geschieht durch einen Kreisbogen mit MP als Radius. Winkel P′MP giebt dann die Gröfse der Drehung an. Macht man also beispielsweise $\widehat{AX} = \widehat{CC'}$, so ist X bestimmt. Ferner ergiebt sich, dafs P′A = PX, und dadurch läfst sich gleichfalls X bestimmen.

Bei a) erfährt die Konstruktion eine Vereinfachung dadurch, dafs man die Parallelen durch Abschieben mittels zweier Dreiecke oder eines Dreiecks und eines Lineals zu konstruieren pflegt. Durch ein solches Verfahren (ein mechanisches im Sinne der Alten) werden übrigens die Probleme, welche in dieser Aufgabe stecken, zum Teil verdeckt.

Bei b) kann man eine besondere Konstruktion auch darauf stützen, dafs der Träger der Strecke AB bei der Drehung von AB einen Kreis von bekanntem Radius umhüllt. Die Aufgabe läfst sich hierdurch auf die andere reducieren: von einem gegebenen Punkte an einen gegebenen Kreis eine Tangente zu ziehen.

Liegt nun eine Figur, welche der Gestalt und Gröfse nach bestimmt ist, auf einem System von Parallelen oder koncentrischen Kreisen, so kann man dieselbe durch Verschiebung oder Drehung zur Erfüllung einer ferneren auf die Lage bezüglichen Bedingung bringen, z. B. dafs eine Seite durch einen gegebenen Punkt geht oder einen gegebenen Kreis berührt, oder dafs ein Punkt auf einer gegebenen Linie liegt u. s. w. Bei vielen Aufgaben kann man sich ein solches System von Parallelen oder koncentrischen Kreisen herstellen. Gelingt es nämlich unter Vernachlässigung einer für die Lage gegebenen Bedingung eine Figur, welche der gesuchten kongruent ist, mit zwei Punkten auf eine Gerade oder einen Kreis zu legen,[1]) wobei ein Berührungspunkt als Doppelpunkt für zwei Punkte zählt, so beschreiben die Punkte der Figur bei einer vorgenommenen Verschiebung oder Drehung ein System von Parallelen oder von koncentrischen Kreisen, und nunmehr kann man die Figur zur Erfüllung der vernachlässigten Bedingung bringen.

III. Durch einen Punkt P eine Gerade zu ziehen, welche zwei gegebene Linien L und L′ beziehungsweise in den Punkten A und A′ so schneidet, dafs PA′ : PA = p : q.[2])

Von zwei perspektivisch ähnlichen Figuren F und F′ mit dem Ähnlichkeitspunkt P ist die eine der geometrische Ort für alle Punkte, welche die von P an die Punkte der anderen

---

[1]) Es würde gleichfalls genügen, wenn ein Punkt der Figur auf der Geraden oder dem Kreise liegt, sobald nur der Winkel bekannt ist, den eine durch den Punkt gehende Linie der Figur mit der Geraden oder dem Kreise bildet.

[2]) J. Petersen, a. a. O. S. 23.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Figur gezogenen Ähnlichkeitsstrahlen nach konstantem Verhältnis teilen. Will man A′ bestimmen, so multipliciere man L mit $\frac{p}{q}$ mit Beziehung auf P; will man aber A bestimmen, so hat man L′ mit $\frac{q}{p}$ zu multiplicieren. Hat man einen von den Punkten bestimmt, so ist der andere leicht gefunden, denn liegen drei Punkte auf einer Geraden, so ist die Verbindungsgerade von zweien ein geometrischer Ort für den dritten.

Die Multiplikation spielt bei der Auflösung von Konstruktionsaufgaben eine wichtige Rolle. Kann man mit Vernachlässigung einer gegebenen Strecke a aus den übrigen Bestimmungsstücken eine Figur herstellen, welche der gesuchten ähnlich ist, so betrachte man einen Punkt derselben als Ähnlichkeitspunkt, und zwar aus Gründen der Ökonomie am besten einen der Endpunkte der Strecke a′, welche der gegebenen Strecke homolog ist Dann hat man nur noch eine Multiplikation mit $\frac{a}{a'}$ auszuführen.

Soll eine Figur, welche der Gestalt nach gegeben ist, gewisse Bedingungen mit Rücksicht auf ihre Lage erfüllen, so suche man unter Vernachlässigung einer der gegebenen Bedingungen eine der gesuchten ähnliche Figur auf zwei sich schneidende Gerade zu legen. Betrachtet man den Durchschnittspunkt P der Geraden als Ähnlichkeitspunkt, die Geraden selbst als Ähnlichkeitsstrahlen, und verschiebt die Figur perspectivisch zwischen diesen Ähnlichkeitsstrahlen, so beschreiben alle Punkte derselben gerade Linien, welche durch P gehen. Soll nun ein Punkt A der gesuchten Figur auf einer Linie L liegen, so verbinde man den Punkt A′, welcher A homolog ist, mit P; die PA′ schneidet L in A. Soll eine Strecke a der Figur durch einen Punkt O gehen, so bestimme man auf der a homologen Strecke a′ den Punkt O′, welcher O entspricht, indem man OP zieht. In beiden Fällen findet das Weitere sich leicht. Im ersteren Falle ist eine Multiplikation mit PA : PA′, im letzteren mit PO : PO′ vorzunehmen.

IV. Ein Dreieck PXY, welches einem gegebenen ähnlich ist, so zu legen, dafs der eine Eckpunkt auf einen gegebenen Punkt P, und die beiden anderen X und Y beziehungsweise auf zwei gegebenen Linien L und L′ fallen.[1])

Nimmt man P als Drehungspunkt, den Winkel φ, dessen Scheitelpunkt auf P fallen soll, als Drehungswinkel, und das Verhältnis der diesen Winkel einschliefsenden Seiten, PY : PX = f, als Drehungsverhältnis, so erhält man den auf L′ liegenden Eckpunkt Y, wenn man L mit $f\varphi$ multipliciert. X bestimmt man, indem man φ in P an PY anträgt. Ebenso gut hätte man zuerst X bestimmen können; dann wäre L′ mit $\frac{1}{f}\varphi$ zu multiplicieren gewesen. Ist das Dreieck PXY gleichschenklig, so bedarf es nur einer einfachen Drehung.

Jedem, der geometrische Konstruktionen mit Aufmerksamkeit betrachtet, wird es nicht entgehen können, dafs die geschilderte Methode der Verschiebung und Drehung vielfach benutzt wird, oft freilich ohne als solche erkannt zu werden. Ist z. B eine Gerade L und ein Punkt P gegeben, und soll man auf L einen Punkt X bestimmen, so dafs PX gleich einer gegebenen Strecke a ist, so nimmt man a zwischen die Zirkelspitzen, setzt den einen Zirkelfufs auf P und beschreibt einen Kreisbogen, der dann L in dem gesuchten Punkte X schneidet; man sieht also von der Forderung, dafs X auf L liegen soll, vorläufig ab, konstruiert einen Punkt, der die gegebene Entfernung von P hat, und bringt diesen durch Drehung in die gewünschte Lage. Ähnliche Fälle giebt es in grosser Zahl. Viele der gebräuchlichsten geometrischen Örter kann man

---

[1]) J. Petersen, a a O. S. 71. Für den Fall, dafs L und L′ gerade Linien sind, hat Camerer die Aufgabe schon 1796 gelöst, Ebene Örter des Apollonius S. 406, Aufgabe 6.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

sich durch Verschiebung und Drehung, also auf anschauliche Weise entstanden denken.[1]) Geometrische Örter herstellig zu machen ist ja eben der Zweck der Methode, und wird dabei Anschauung in Anspruch genommen, so ist damit ein fernerer Zweck erreicht. Man wird nun freilich die Erfahrung machen, dafs es nicht ganz leicht ist, die Schüler mit der Methode der Verschiebung und Drehung vertraut zu machen, denn es fehlt den meisten zunächst an der nötigen Anschauung. Ein planmäfsiger Unterricht kann jedoch diesem Mangel abhelfen, oft in kurzer Zeit. Der Gewinn aber, den die Schüler aus einer solchen anschaulichen Behandlung der Konstruktionsaufgaben ziehen, ist ein wichtiger und bleibender.

Es mögen nun einige Aufgaben folgen, welche unter Anwendung der voranstehenden Methode gelöst sind. Einige von diesen Aufgaben sind bekannten Sammlungen entlehnt. Die hier gegebene Auflösung unterscheidet sich von der in der Sammlung gegebenen oft sehr wesentlich, denn dieselbe beansprucht durchgehends die Anwendung von sehr viel weniger Scharfsinn, läfst aber dafür erkennen, wie man dahinter gekommen ist.

Aufgabe 1. Ein Viereck ABCD zu konstruieren aus AB, BC, CD, und den Winkeln A und D.

Eine Untersuchung der Figur zeigt (Fig. 8), dafs das Viereck sich nicht aus Teildreiecken herstellen läfst. Man mufs deshalb versuchen, zunächst einen Teil der Figur zu zeichnen und diesen gleichsam als Basis für die Konstruktion des Restes zu verwenden. Trägt man also an eine beliebige Gerade G den Winkel A an und macht den einen Schenkel gleich AB, so hat man zwei Eckpunkte des Vierecks bestimmt. Ein Kreisbogen um B als Mittelpunkt mit BC als Radius liefert einen Ort für C. Nun kommt es daranf an, die Strecke CD so mit ihren Endpunkten auf diesen Bogen und die Gerade G zu legen, dafs Winkel CDA dem gegebenen Winkel D gleich ist (I). Trägt man also an einem beliebigen Punkte D′ der Geraden G den gegebenen Winkel D an und macht C′D′ = CD, so liefert eine durch C′ zu der G gezogene Parallele einen zweiten Ort für C. Will man D zuerst bestimmen, so hat man den Kreis um B in der Richtung C′D′ um die Strecke CD zu verschieben. Dann gelangt B nach B′. Ein Kreisbogen um B als Mittelpunkt mit BC als Radius schneidet die G in D.

Aufgabe 2. Ein Dreieck ABC zu konstruieren aus dem Radius des umbeschriebenen Kreises r und der von A aus gezogenen Höhe h und Mediane m.

Denkt man sich die Aufgabe gelöst, und ist Dreieck ABC (Fig. 9) das verlangte, AD die gegebene Höhe, AE die gegebene Mediane, M der Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises, so ergiebt sich, dafs das Dreieck AED bestimmt ist und sich also hinzeichnen läfst. Damit ist der Eckpunkt A des Dreiecks festgelegt und zugleich ist durch BE ein Ort für die Eckpunkte B und C gegeben. Einen zweiten Ort für B und C hat man in der Peripherie des umbeschriebenen Kreises. Da man r kennt, hat man also M zu bestimmen. Ein Ort für M ist die in E auf ED errichtete Senkrechte, ein zweiter ein Kreisbogen um A als Mittelpunkt mit r als Radius.

Schwieriger wird die Sache, wenn man die Aufgabe als örtlich auffafst: In einen gegebenen Kreis ein Dreieck ABC zu zeichnen, von dem man die Höhe AD und die Mediane AE kennt. Aus der Figur (Fig. 9) ergiebt sich, dafs AD dem Durchmesser ME parallel ist.

---

[1]) Deshalb ist es um so weniger zu begreifen, wie man sich gegen die Anwendung der Parallelverschiebung u. s. w. sträuben kann. Fahle, Altes und Neues aus der Schule, Jahrbücher für Philologie und Pädagogik, Berlin 1882, Bd. II, S. 141.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zieht man in dem gegebenen Kreise (Fig. 10) einen Durchmesser FG, so kann man das Dreieck AED so hineinzeichnen, dafs entweder E auf den Durchmesser, oder A auf die Peripherie fällt, während AD dem Durchmesser parallel ist. Durch Verschiebung bringt man dies zuerst gezeichnete Dreieck A'E'D' in die richtige Lage. Im ersten Falle trifft die verlängerte A'D' die Peripherie in dem gesuchten Eckpunkt A; im zweiten Falle beschreibt E' einen Kreisbogen, den man erhält, wenn man den Kreis um M in der Richtung A'E' um die Strecke A'E' verschiebt. Zieht man MM' gleich und parallel der A'E', so schneidet ein Kreisbogen um M' mit r als Radius den Durchmesser FG in dem gesuchten Punkte E.

Aufgabe 3. An einen gegebenen Kreis K von einem gegebenen Punkte P eine Tangente zu ziehen.

a) Sieht man von der Forderung ab, dafs die Tangente durch P gehen soll, so kann man zunächst an den Kreis eine beliebige Tangente legen und diese dann durch Drehung zur Erfüllung der vernachlässigten Bedingung bringen. Man zieht also eine beliebige Tangente G, welche den Kreis in A berührt (Fig. 11). Es kommt nun darauf an, die Gröfse der erforderlichen Drehung zu bestimmnn. Beschreibt man um K mit KP als Radius einen Kreisbogen, so schneidet dieser die G im Punkte P', welcher P homolog ist. Der Drehungswinkel ist also PKP' = BKC. Macht man $\widehat{AX} = \widehat{CB}$, so ist X der Berührungspunkt. Es ist aber auch P'A gleich der Länge der verlangten Tangente, und man kann also X bestimmen, indem man um P als Mittelpunkt mit P'A als Radius einen Bogen beschreibt.[1])

b) Sieht man von der Forderung ab, dafs die durch P gezogene Gerade den Kreis P berührt, so lassen sich unzählig viele gerade Linien durch P ziehen; eine derselben sei PD (Fig. 12). Es würde also darauf ankommen, diese Gerade so lange zu drehen, bis sie K berührt. Um den Drehungswinkel zu bestimmen, hat man in diesem Falle einen Kreis K' zu konstruieren, der K homolog ist; der Mittelpunkt dieses Kreises mufs auf einem Kreise liegen, der um P als Mittelpunkt mit PK als Radius beschrieben ist. Da K die PD berühren soll, so mufs sein Mittelpunkt auf einer (zwei) Parallelen liegen, deren Entfernung von PD gleich dem Radius des Kreises K ist. Man dreht also den Kreis K bis er PD berührt. Macht man $\widehat{BC} = \widehat{KK'}$,[2]) so ist PC die verlangte Tangente. Durch PD ist aber zugleich die Länge der Tangente bestimmt, und ein Kreisbogen mit PD als Radius trifft den Kreis K im Berührungspunkte X.

Durch Betrachtungen, welchen den bei Auflösung der voranstehenden Aufgabe verfolgten gleichen, gelangt man zu dem Begriff des geometrischen Orts für gerade Linien. Petersen hat diesen Örtern einen besonderen Abschnitt gewidmet[3]) und die wichtigsten derselben angegeben. Geo-

---

[1]) Die von Euklid (III. 17) gegebene Konstruktion der Tangente läfst sich durch das hier angegebene Verfahren verständlich machen; man hätte statt in A auch in B eine Tangente zeichnen können. Durch den hior angegebenen Gedankengang wird Euklid seine Konstruktion schwerlich gefunden haben, vielmehr wird er bestrebt gewesen sein, ein Dreieck zu bestimmen, welches dem Dreieck PKX kongruent ist.

[2]) Der Punkt B mufs in der Figur auf der PD liegen.

[3]) J. Petersen, a a O. S. 42 ff. Geometrische Örter für gerade Linien kommen in der Literatur mehrfach vor, ohne dafs gerade diese Bezeichnung gewählt wird, z. B. Alex. Schwarz, Anfänge der geometrischen Analysis, S. 15, Ort 1, S. 16, Ort 4 u. 7; A. Hoffmann, Sammlung planimetrischer Aufgaben, S. 10. — H. Heilermann und J. Helmes sprechen vom geometrischen Ort einer Geraden (Dr. Heilermann, Sammlung geometrischer Aufgaben, Coblenz 1873, S. 43; J. Helmes, die Elementar-Mathematik, 2. Teil, 2. Aufl., Hannover 1874 u. 1876, Abteilung I, S. 98).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

metrische Örter für Geraden sind nicht durchaus notwendig, aber sie sind sehr nützlich und dienen oft zur Vereinfachnng einer Analysis, oft eröffnen sie ganz neue Gesichtspunkte für die Auflösung.

Aufgabe 4. Ein Viereck ABCD zu konstruieren, wenn die Diagonale AC und aufserdem die vier Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gegeben sind, welche die vier Seiten mit der nichtgegebenen Diagonale BD machen.

Denkt man sich die Diagonale AC hingelegt, so hat man in den über AC beschriebenen Kreisbogen, welche die Winkel $\beta + \alpha$, beziehungsweise $\gamma + \delta$ fassen, je einen Ort für die Eckpunkte B und D. Es kommt also darauf an, eine Gerade so durch die beiden Kreisbogen zu ziehen, dafs der eine Peripheriewinkel in die Teile β und α, der andere in die Teile γ und δ geteilt wird. Nun ist der geometrische Ort für die Geraden, welche alle Peripheriewinkel auf gegebenem Bogen in dieselben beiden Winkel teilen, ein Punkt des Bogens, den man erhält, wenn man einen beliebigen der Peripheriewinkel auf die gegebene Weise teilt.[1]) Zeichnet man also in den Kreisabschnitt ABC einen Peripheriewinkel β, und in den Kreisabschnitt ADC einen Peripheriewinkel δ, so bestimmt man dadurch die Punkte E und F. Die EF schneidet dann die Peripherie der Kreise in den gesuchten Eckpunkten B und D des Vierecks.

Da für die Konstruktion des Vierecks nur eine Strecke gegeben ist, so läfst sich die Aufgabe auch nach der Ähnlichkeitsmethode oder durch perspektivische Verschiebung lösen. An eine beliebig gewählte Strecke db trage man die gegebenen Winkel an; die Schenkel der Winkel mögen sich in a und c schneiden; ac ist dann die zweite Diagonale des Vierecks. Nun wähle man a oder c als Ähnlichkeitspunkt und multipliciere mit AC : ac.

Nicht selten kann man sich in solchen Fällen, wo eine Figur F in eine andere Figur G so hineingezeichnet werden soll, dass ihre Eckpunkte auf dem Umfang von G liegen, die Sache dadurch erleichtern, beziehungsweise ermöglichen, dafs man die Aufgabe umkehrt: Man zeichnet eine der F ähnliche Figur F′, und um diese eine der G ähnliche G′ und bringt dann das Ganze auf die verlangte Gröfse.[2])

Aufgabe 5. Ein Parallelogramm ABCD zu konstruieren aus dem Winkel A, der Seite AD und dem Winkel φ, welchen die Diagonalen mit einander bilden.

Legt man AD hin (Fig. 14), trägt in A den gegebenen Winkel an gleich B′AD, und zieht DC′ ∥ AB′, so hat man für B und C je einen Ort; für den Durchschnittspunkt der Diagonalen hat man einen Ort in dem über AD als Sehne beschriebenen Kreisbogen, der den Winkel φ fafst. Es würde jetzt darauf ankommen, etwa durch D eine Gerade DB bis an AB′ zu ziehen, welche von dem Kreisbogen in E halbiert wird. Multipliciert man AB′ mit $^1/_2$ mit Beziehung auf D, so erhält man den Punkt E; multipliciert man den Kreis M mit 2 mit Beziehung auf D, so erhält man den Punkt B u s. w.

Da nicht gesagt ist, ob φ oder $180 - \varphi$ der Seite AD gegenüberliegen soll, so gestattet die Aufgabe zwei Lösungen; die Figur enthält die für die zweite Lösung erforderlichen Örter.

Aufgabe 6. In einem gegebenen Dreieck ABC soll eine Transversale DE so gezogen werden, dass $DE = 2DB = 2CE$ ist.[3])

---

[1]) J. Petersen, a. a O., S. 43, Ort o.

[2]) Vergl. J. Petersen, a. a. O. Aufg. 150 und 153; V. Schlegel, Lehrbuch der elementaren Mathematik, Teil II, Geometrie, S. 187.

[3]) Dr. W. A. Diesterweg, Geometrische Aufgaben, 2. Sammlung, Elberfeld 1828, Aufgabe 62. Die Einkleidung der Aufgabe ist hier etwas anders. Die von Diesterweg gegebene Auflösung rührt von dem verstorbenen Professor E. Heis her.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aus den Bedingungen der Aufgabe ergiebt sich, dafs das Viereck BDEC der Gestalt nach bestimmt ist, denn man kennt zwei Winkel B und C und zwei Seitenverhältnisse, DE : DB = DE : EC = 2. Mit Hülfe der Aufgabe 1, S. 25 läfst sich also leicht ein Viereck BFHJ konstruieren, welches BDEC ähnlich ist. Verschiebt man dieses perspektivisch, indem man BH bis E verlängert und durch E die ED ∥ FH zieht, so ist ED die verlangte Transversale. Durch ein ganz ähnliches Verfahren erhält man eine zweite Transversale zwischen den Verlängerungen der Dreiecksseiten.

Aufgaben über Transversalen des Dreiecks lassen sich auf die geschilderte Weise in grosser Zahl lösen. Freilich ist dafür ein genaueres Eingehen auf Kongruenz und Ähnlichkeit der Vierecke erforderlich. Das würde aber kein ernstliches Hindernis sein. Eine Aufgabe, welche in manchen Lehrbüchern unter den ersten Aufgaben vorkommt, die dem Schüler zur Lösung vorgelegt werden, würde auch hierher gehören: In einem Dreieck ABC eine Transversale DE parallel der BC zu ziehen, welche gleich der Summe oder Differenz der Abschnitte DB und EC ist. Dafs die durch die Mittelpunkte der Berührungskreise zu BC gezogenen Parallelen diese Bedingung erfüllen, ist allerdings unbestreitbar, aber es ist ebenso unbestreitbar, dafs man einen Schüler der unteren Stufe nur durch einen Machtspruch zu dieser Erkenntnis bringen kann.

Aufgabe 7. In ein gegebenes Parallelogramm ABCD ein Quadrat zu beschreiben.[1])

Eine Untersuchung der Figur (Fig. 16) ergiebt, dafs das Quadrat XYZU und das Parallelogramm ABCD denselben Mittelpunkt E haben. Nun ist ein Quadrat bekannt, sobald man eine Seite der Grösse und Lage nach kennt, und man kann sich also auf die Konstruktion etwa der Seite XU beschränken. XU ist Hypotenuse des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks XEU. Demnach kommt es darauf an, ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit dem Scheitelpunkt des rechten Winkels auf E und mit den beiden anderen Endpunkten auf die Geraden AD und DC zu legen. Dreht man AD um E um den Winkel von 90° (multipliciert AB mit $1_{90°}$), so erhält man U u. s. w.

Aufgabe 8. Von einem Fünfeck ABCDE kennt man AB = a, BC = b und die Winkel ABC = ε, AEB = α, BDC = β, BED = γ und BDE = δ; das Fünfeck soll gezeichnet werden.[2])

Das Dreieck ABC (Figur 17) ist der Gestalt und Gröfse nach bestimmt durch zwei Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel (a, b, ε); das Dreieck EBD der Gestalt nach durch zwei Winkel (γ und δ); von den beiden Dreiecken AEB und BDC kennt man je eine Seite und den ihr gegenüberliegenden Winkel, mithin kennt man je einen Ort für die Punkte E und D. Beschreibt man die Kreisbogen über AB und BC, welche die gegebenen Winkel α und β fassen und deren Mittelpunkte M und N sein mögen, so würde es nun darauf ankommen, das Dreieck EBD, welches der Gestalt nach bekannt ist, mit dem einen Eckpunkt auf B und mit den anderen Eckpunkten auf zwei Kreisperipherien zu legen. Bezeichnet man den Winkel EBD mit φ und das Verhältnis BE : BD mit f, so findet man E, wenn man den Kreis N mit fφ mit Beziehung auf B multipliciert. Zu dem Ende ziehe man BN, mache Winkel BNH gleich δ und trage in H an HN den Winkel γ an. Der Schenkel desselben möge BN in J schneiden. Nun verschiebe man die HJ bis sie durch B geht, ziehe also BN′ ∥ HJ, dann ist N′ der Mittelpunkt des mit fφ multiplicierten Kreises N. Ein Kreisbogen um N′ als Mittelpunkt mit N′B

[1]) C. Adams, Geometrische Aufgaben, Winterthur 1849, Aufgabe 16

[2]) Meier Hirsch, Sammlung geometrischer Aufgaben, 1. Teil, Berlin 1805, S. 177

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

als Radius schneidet den Kreis um M in E. Macht man Winkel EBD = N'BN, so erhält man den Punkt D.

Eine zweite Konstruktion ergiebt sich auf folgende Weise. Da die Dreiecke ABC und BED beide der Gestalt nach bestimmt sind, so ist es möglich ein Fünfeck zu zeichnen, welches dem gesuchten ähnlich ist, und dieses mittels der gegebenen BA oder BC auf die verlangte Gröfse zu bringen. Trägt man die Winkel α, γ, δ und β an eine beliebig gewählte Strecke ed an, so schneiden sich die Schenkel der Winkel γ und δ in einem Punkte b, und es würde nun darauf ankommen, ein Dreieck abc, welches ABC ähnlich ist, mit dem einen Eckpunkt auf b und mit den beiden anderen Eckpunkten auf die Schenkel der Winkel α und β zu legen.

Meier Hirsch liefert eine andere Konstruktion, indem er die beiden Punkte F und G bestimmt, in welchen die ED die Kreise N und M zum zweiten Male schneidet. Dies läfst sich ohne Mühe mit Hülfe der gegebenen Winkel γ und δ erreichen, ähnlich wie bei Aufgabe 4.

Aufgabe 9. Ein gleichschenkliges Dreieck ABC von gegebener Höhe zu zeichnen, dessen Grundlinie auf einer Geraden G liegt, und dessen Schenkel durch zwei gegebene Punkte P und Q gehen. [1])

Ist ABC (Fig. 18) das gesuchte Dreieck, so ergiebt sich zunächst ein Ort für A, die zu BC in der Entfernung AD gezogene Parallele FH, wenn AD die gegebene Höhe ist. Am einfachsten gelangt man zu einer Konstruktion, wenn man bedenkt, dafs die Geraden BA und CA symmetrisch sind mit Beziehung auf FH als Axe. Durch Umwenden der BA um die Axe fällt P auf den bekannten Punkt P', und P'Q liefert einen zweiten Ort für A. [2]) Eine leichte Konstruktion läfst sich auch darauf gründen, dafs F, P, E und Q harmonische Punkte sind, u. s. w. Hier sollte indessen eine Auflösung angegeben werden, die sich auf einen besonderen Satz gründet. Dieser Satz lautet: Gleitet ein Dreieck ABC mit den Winkeln α, β, γ unter Beibehaltung seiner Gestalt mit den Eckpunkten B und C auf den Schenkeln eines Winkels PQR = α, so dafs A und Q immer auf derselben Seite von BC liegen, so beschreibt A eine durch Q gehende Gerade MN, und zwar ist Winkel NQR = β und MQP = γ. [3]) Ist das Dreieck ABC gleichschenklig, so halbiert MN den Nebenwinkel von α. — Mit Hülfe dieses Satzes ergiebt sich, dafs der Winkel PAQ (Fig. 18) bekannt ist: Konstruiert man die Mittelsenkrechte der PQ, welche die FA in H schneidet, so ist Winkel PHQ = PAQ. Ein Kreis um das Dreieck PHQ schneidet also die FH in A, der gesuchten Spitze des gleichschenkligen Dreiecks ABC.

Aufgabe 10. Gegeben sind zwei Parallelen L und L' und drei Punkte A, B und C. Man soll durch A eine Gerade ziehen, welche die Parallelen in M und N so schneidet, dafs die Geraden BM und CN parallel sind. [4])

Kann man eine von den Parallelen BM oder CN zeichnen (Fig. 19), so ist die andere auch bestimmt. Es würde also darauf ankommen einen zweiten Punkt etwa der BM zu bestimmen. Nun ist in der Figur nur das Verhältnis AM : AN bekannt, denn da L und L' gegeben sind, so

---

[1]) Tidsskrift for Mathematik, 5. Reihe, 1. Jahrgang, Kopenhagen 1883, S. 93, Aufgabe 13, gestellt von Oberlehrer Pullich.

[2]) J. Petersen, a. a. O., S. 65.

[3]) J. Petersen, a. a. O., S. 80, § 9 am Ende.

[4]) Tidsskrift for Mathematik, Kopenhagen 1883, S. 64, Aufgabe 7, (gestellt von Pullich).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ist AM : AN = AD : AE, wo AE eine beliebig gezogene Gerade ist. Jede Gerade, welche die beiden Parallelen BM und CN trifft, mufs aber nach demselben Verhältnifs AD : AE geteilt werden. Wählt man auf der einen Parallellen den Punkt C, so läfst sich leicht ein Punkt X bestimmen, der so liegt, dafs entweder AX : AC oder AC : AX gleich AD : AE ist. BX ist dann die eine der gesuchten Parallelen.

B. Methode der Umformung.

Umformung der Figur (Petersen)[1].

Die im Vorhergehenden geschilderten Mittel der Konstruktion führen keineswegs immer zum Ziel, sondern es giebt viele Fälle, bei denen dieselben vorläufig versagen müssen. Der Grund kann ein mehrfacher sein. Statt Seiten und Winkel der Figur können Summen und Differenzen von Seiten oder Winkeln gegeben sein, oder die gegebenen Stücke können ein solche Lage einnehmen, dafs es unmöglich ist, mit Hülfe derselben unmittelbar die Figur oder einen Teil derselben zu koustruieren. Manche von diesen Fällen wird man mit Hülfe von Lehrsätzen bewältigen können, z. B. Fälle der ersten Art durch die Sätze über die durch die Berührungspunkte der ein- und anbeschriebenen Kreise des Dreiecks gebildeten Seitenabschnitte. Im allgemeinen aber hat man das Princip zu verfolgen, die Figur so umzuformen, dafs man die umgeformte Figur und daraus die verlangte konstruieren kann. Aufgaben, bei denen eine Umformung der Figur notwendig ist, setzen nicht nur gründliche Kenntnisse, sondern auch Selbständigkeit und ein reiferes Urteil voraus. Man kann allerdings schon einen Tertianer dahin bringen, ein Dreieck aus a, b + c und α zu konstruieren, aber es wird ihm ein Rätsel bleiben müssen, wie man darauf kommt, die Seite b um c zu verlängern, und den Endpunkt D der Verlängerung mit B zu verbinden. Dem Schüler der oberen Klassen kann man aber klar machen, dafs es sich hier um den Durchschnitt zwischen einer Ellipse und einer Geraden handelt, und dafs die Mittelsenkrechte auf BD eine Tangente der Ellipse ist.[2])

Für die Umformung benuzt Petersen Parallelverschiebung, Umlegung und die Eigenschaften symmetrischer Figuren. Aus Mangel an Raum mufs hier von einer genaueren Darstellung der Methode Abstand genommen werden. Indessen sei nur noch bemerkt, dafs es mit Hülfe der methodischen Umformung der Figur möglich wird, selbst schwierigere Aufgaben dem Verständnis der Schüler zu erschliefsen. Ein einziges Beispiel möge das beweisen:

Ein Sehnenviereck aus seinen vier Seiten zu konstruieren.

Nimmt mann zunächst ein Viereck ABCD, in dem zwei aufeinander folgende Seiten AB und BC gleich grofs sind (Fig. 20), so zeigt eine Untersuchung der Figur, dafs eine Konstruktion derselben aus Teildreieken nicht möglich ist, denn in jedem der mit Hülfe einer Diagonale hergestellten Dreiecke kennt man nur zwei Seiten. Die beiden Dreiecke ADB und BDC stimmen aber in den Winkeln bei D, deren Gröfse allerdings unbekannt ist, überein. AD und CD sind also symmetrisch mit Beziehung auf BD als Axe. Klappt man CD um BD um, so fällt C auf den bekannten Punkt C′; von dem gleichschenkligen Dreieck ABC′ kennt man nun die Seiten,

---

[1]) J. Petersen, a a. O. S. 49—69.

[2]) Man vergleiche übrigens J. Petersen, a. a. O. S. 15 unten.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

kann dasselbe also konstruieren, und mit Hülfe dieses das Viereck ABCD.[1]) — Es ist aber ferner Winkel C das Supplement von Winkel A. Legt man das Dreieck BCD so um, dafs B liegen bleibt und C auf A fällt, so bildet die CD die Verlängerung von AD und es fällt D nach D'. Die DD' ist also bekannt (AD + DC), und für B hat man zwei Örter: Die Mittelsenkrechte auf D'D und einen Kreisbogen um A als Mittelpunkt mit AB als Radius, u. s. w.

Ist das Viereck ABCD ungleichseitig (Figur 21), und bringt man Dreieck BCD durch dieselbe Umlegung wie vorhin in die Lage B'AD', so läfst sich B'D' durch perspectivische Verschiebung in die Lage BD'' bringen. Dann ist $D''A : D'A = D''B : D'B' = BA : B'A = BA : BC$. D'' ist also ein bekannter Punkt, und aufserdem ist, da $D'B' = DB$, das Verhältnis $D''B : BD$ bekannt. Man hat also für B zwei geometrische Örter: Einen Kreis über der Entfernung der beiden Punkte, welche D'' und D nach dem Verhältniss $BA : BC$ harmonisch trennen, als Durchmesser[2]) und einen Kreisbogen um A als Mittelpunkt mit AB als Radius. — Diese Auflösung enthält die erste als besonderen Fall in sich. Bemerkenswert ist es, dafs Professor Klingenstjerna in Stockholm, der diese Aufgabe 1743 löste, durch die Lösung des besonderen Falles auf die des allgemeinen geführt worden ist.[3])

---

[1]) Diese Auflösung findet sich schon bei M. Joh Prätorius, Problema quod jubet ex quatuor rectis lineis datis quadrilaterum fieri etc. Nürnberg, 1618. Vergl Daniel Schwenter, Geometriae practicae novae Tractatus I, Nürnberg (1618), S. 164.

[2]) Ort des Apollonius.

[3]) Abhandlungen der Kön. schwedischen Akademie der Wissenschaften auf das Jahr 1743, übersetzt von Kästner, Band V. Hamburg 1751, S. 203.

Kiel, den 1. Februar 1884.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

kann dasselbe also konstruie : ABCD.[1]) — Es ist aber ferner
Winkel C das Supplement ck BCD so um, dafs B liegen
bleibt und C auf A fällt, so n AD und es fällt D nach D′.
Die DD′ ist also bekannt (ei Örter: Die Mittelsenkrechte
auf D′D und einen Kreisbo Radius, u. s. w.

Ist das Viereck AB ngt man Dreieck BCD durch
dieselbe Umlegung wie vorh ′D′ durch perspectivische Ver-
schiebung in die Lage BD″ b B′ = BA : B′A = BA : BC. D″
ist also ein bekannter Punkt , das Verhältnis D″B : BD be-
kannt. Man hat also für B über der Entfernung der beiden
Punkte, welche D″ und D isch trennen, als Durchmesser[2])
und einen Kreisbogen um A — Diese Auflösung enthält die
erste als besonderen Fall in fessor Klingenstjerna in
Stockholm, der diese Aufgal besonderen Falles auf die des
allgemeinen geführt worden

---

[1]) Diese Auflösung find Problema quod jubet ex quatuor rectis
lineis datis quadrilaterum fieri chwenter, Geometriae practicae
novae Tractatus I, Nürnberg (16

[2]) Ort des Apollon i

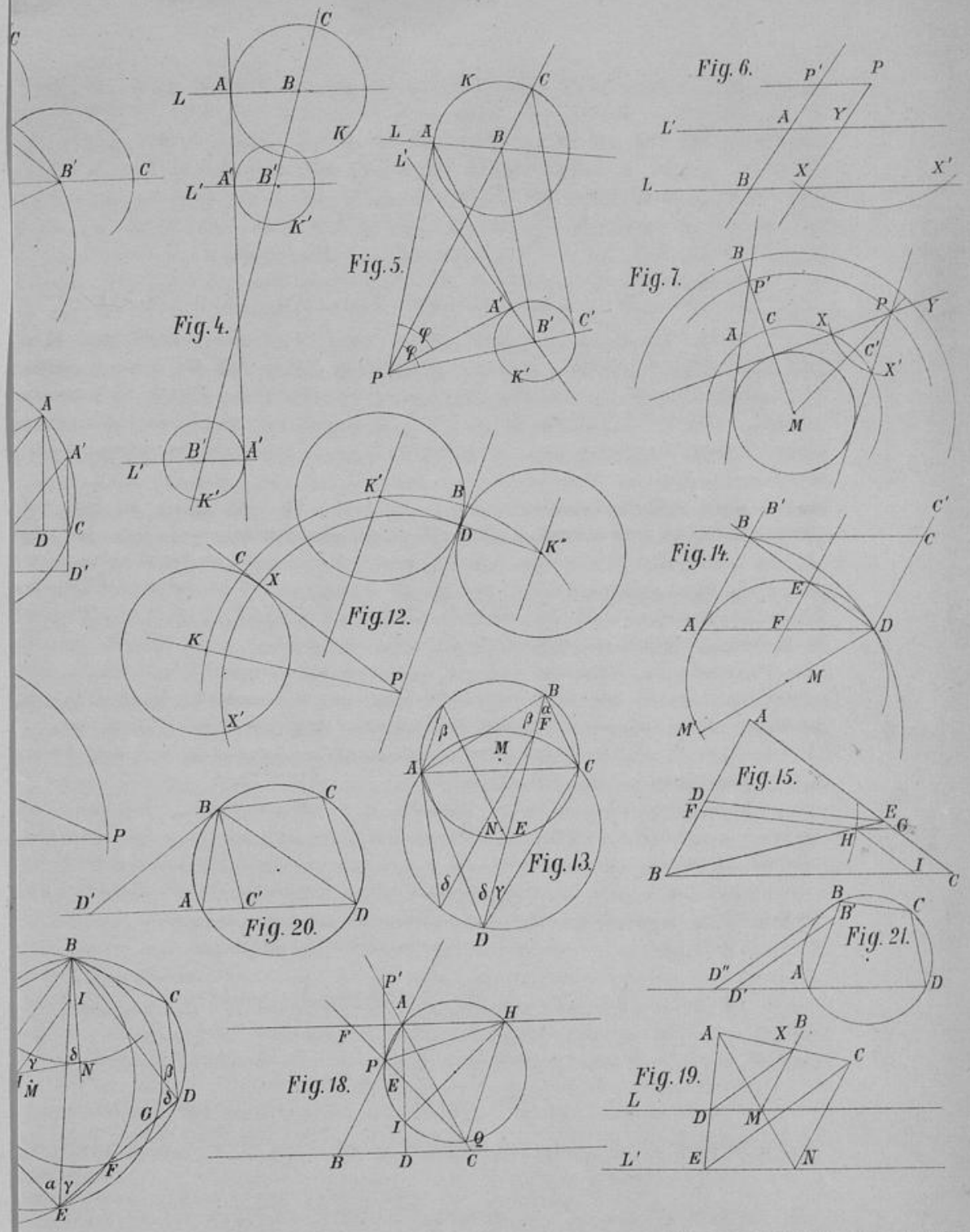
[3]) Abhandlungen der K en auf das Jahr 1743, übersetzt von
Kästner, Band V. Hamburg

Kiel, den 1. Febr

TIFFEN Gray Scale
© The Tiffen Company, 2007

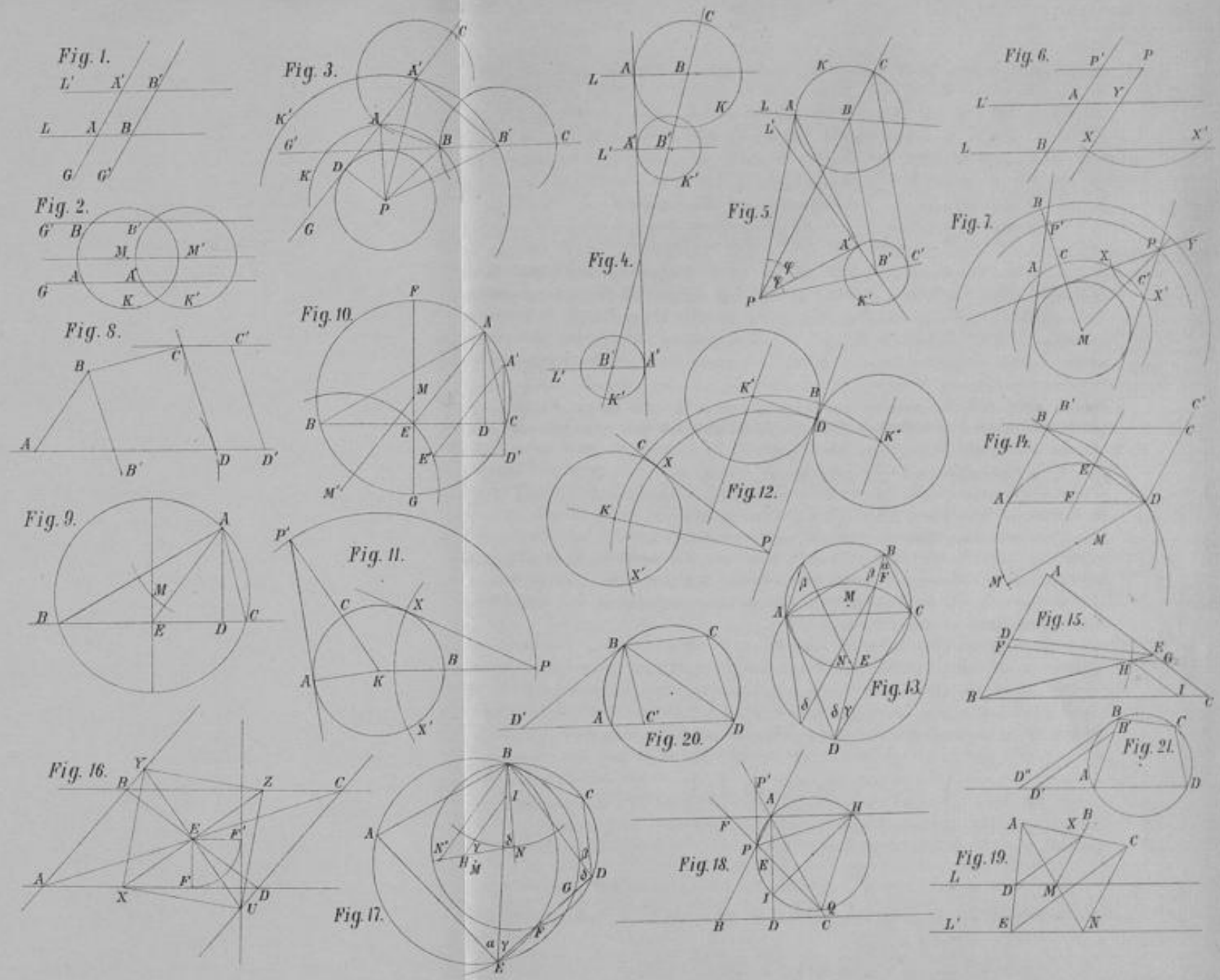
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



Lith. v. Otto Blunck Kiel, Schumachersir. 4.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



Gez. von R. v. Flecher-Benzon.

Lith. v. Otto Blunck, Kiel, Schumacherstr. 4.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf