Wie behandelt man auf der Oberstufe höherer Schulen die Brechung einfarbigen Lichts durch das Prisma?

In den gebräuchlichen Lehrbüchern der Physik ist die Brechung einfarbigen Lichts durch das Prisma nicht erschöpfend behandelt.

Nicht nur, dass sich fast alle auf die Betrachtung solcher Prismen beschränken, bei denen das Brechungsverhältnis grösser als 1 ist, erörtern die meisten auch nur denjenigen Fall, wo die beiden Einfallslote im Prisma auf derselben Seite des Lichtstrahls liegen, ohne z. B. zu untersuchen, ob etwa die Gesamtablenkung in einem andern Falle noch kleiner sein kann als die kleinste Ablenkung, die in dem allein betrachteten Falle möglich ist.

Wenn auch für die Unterstufe, d. h. also für die Durchnahme der Optik in Untersekunda, eine solche Beschränkung gebilligt werden kann, ja vielleicht gefordert werden muss, so erscheint doch für die Oberstufe eine alle möglichen Fälle umfassende Behandlung des Gegenstandes, wie sie im Folgenden durchgeführt worden ist, geboten, wenn es auch nicht erforderlich sein wird, im Unterrichte selbst alle Fälle gleich eingehend zu erörtern, es vielmehr genügen dürfte, die Schüler nur darauf hinzuweisen und die genauere Untersuchung nach der nötigen Anleitung ihrem eigenen Nachdenken zu überlassen.

Es möge zunächst folgende Aufgabe zu lösen sein:

Gegeben ist der Einfallswinkel α, der brechende Winkel γ und das Brechungsverhältnis n. Man soll die Gesamtablenkung δ berechnen.

Auflösung: **A. $n > 1$.**

Man denkt sich den einfallenden Strahl um den Einfallspunkt gedreht, und zwar möge der Strahl erst zwischen dem Rücken des Prismas und dem Einfallslote liegen, und der Einfallswinkel von 90^0 bis 0^0 abnehmen; hierauf liege der Strahl zwischen dem Einfallslote und der brechenden Kante, und der Einfallswinkel wachse von 0^0 so lange, als noch ein Austritt des Strahls aus der Hinterfläche stattfindet. Dann hat man fünf verschiedene Fälle zu unterscheiden, die durch die umstehenden Figuren I bis V veranschaulicht werden. In diesen bedeutet γ den brechenden Winkel, der gleich 30^0 angenommen wurde; α ist der Einfalls- und β der Brechungswinkel an der Vorderfläche; β_1 ist der Einfalls- und α_1 der Brechungswinkel an der Hinterfläche; δ ist die Gesamtablenkung. Als Brechungsverhältnis wurde die Zahl 1,5 gewählt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

In den Figuren I, II und III liegt der einfallende Strahl zwischen dem Rücken des Prismas und dem Einfallslote, und zwar liegen in Fig. I die beiden Einfallslote innerhalb des Prismas auf verschiedenen Seiten des Strahls, so dass die Brechung an der Hinterfläche im entgegengesetzten Sinne erfolgt wie die an der Vorderfläche. In Fig. II trifft der Strahl die Hinterfläche senkrecht. In Fig. III liegen die Einfallslote innerhalb des Prismas auf derselben Seite des Strahls; beide Brechungen erfolgen also in demselben Sinne. In Fig. IV trifft der Strahl die Vorderfläche senkrecht. In Fig. V endlich, wo der einfallende Strahl zwischen dem Einfallslote und der brechenden Kante liegt, fallen die Einfallslote im Prisma wieder auf verschiedene Seiten des Strahls, so dass beide Brechungen im entgegengesetzten Sinne von statten gehen.

Die Gesamtablenkung δ findet man nun in den einzelnen Fällen auf folgende Weise.

I. Man berechnet zunächst β mit Hülfe der Gleichung

$$1)\ \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n},$$

hierauf $2)\ \beta_1 = \beta - \gamma,$

dann α_1 aus der Gleichung $3)\ \sin\alpha_1 = n\sin\beta_1$

und endlich $4)\ \delta = \alpha - \alpha_1 - \gamma.$

II. Da $\beta = \gamma$ ist, so folgt $\delta = \alpha - \gamma.$

III.

$$1)\ \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n},$$

$$2)\ \beta_1 = \gamma - \beta,$$

$$3)\ \sin\alpha_1 = n\sin\beta_1,$$

$$4)\ \delta = \alpha + \alpha_1 - \gamma.$$

IV. Da $\beta_1 = \gamma$ ist, so folgt

$$1)\ \sin\alpha_1 = n\sin\gamma,$$

$$2)\ \delta = \alpha_1 - \gamma.$$

V.

$$1)\ \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n},$$

$$2)\ \beta_1 = \beta + \gamma,$$

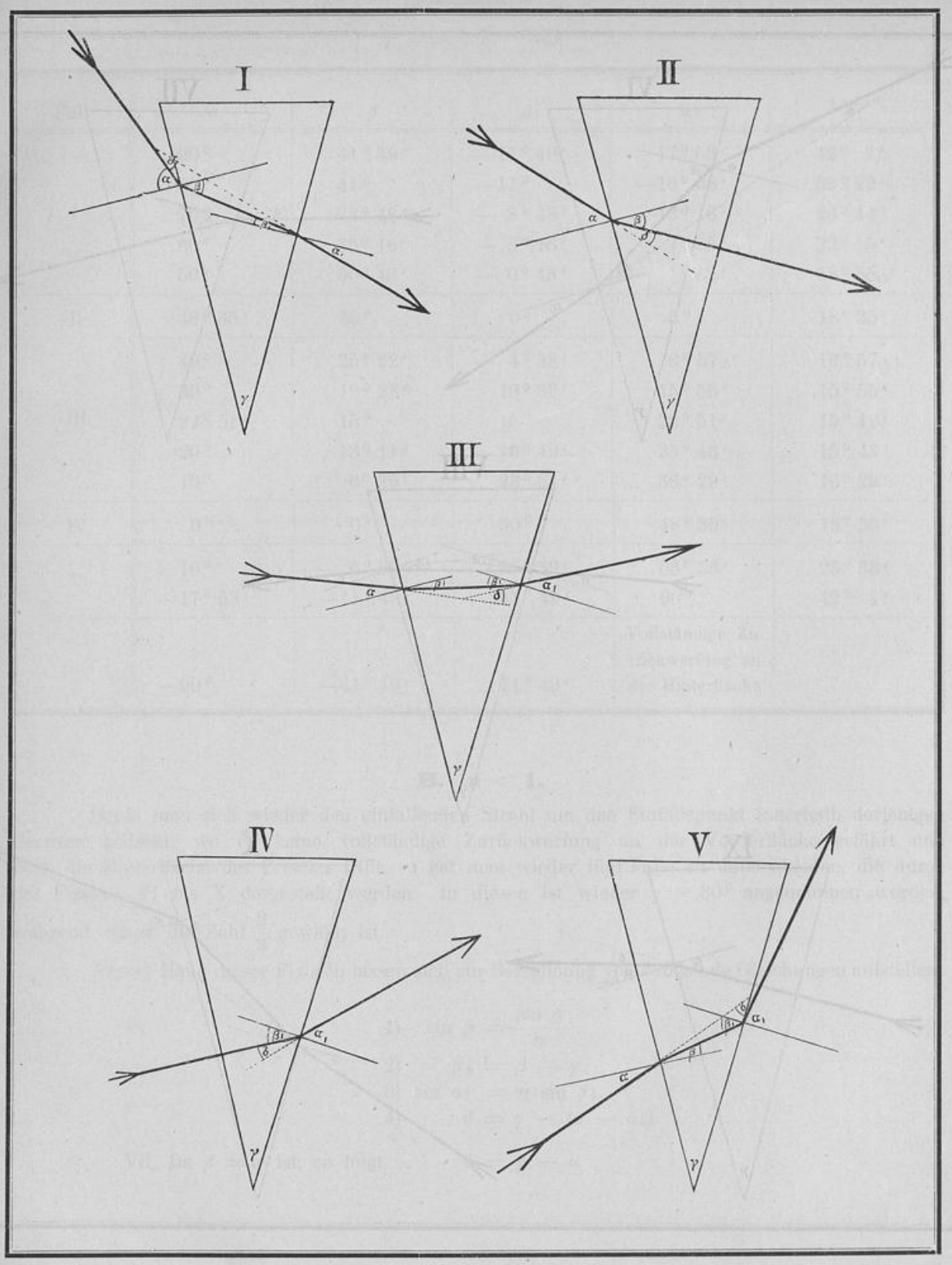
$$3)\ \sin\alpha_1 = n\sin\beta_1,$$

$$4)\ \delta = \alpha_1 - \alpha - \gamma.$$

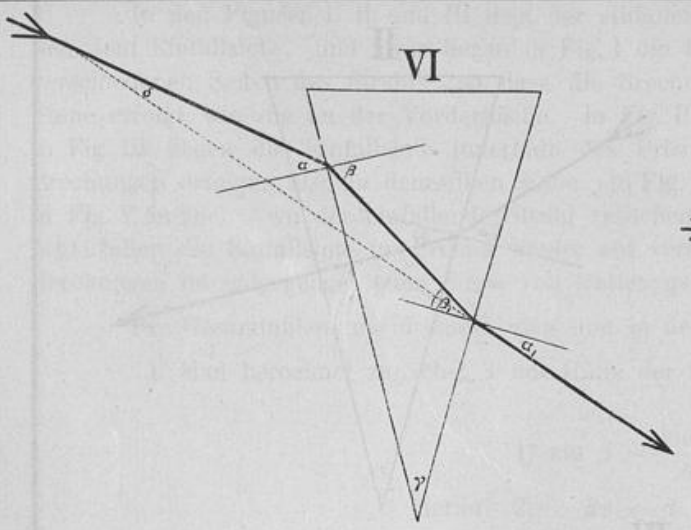
Man sieht also, dass man stets die im Falle III geltenden Formeln anwenden kann, wenn man in diesen für Fall II $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ und für Fall IV $\alpha = \beta = 0$ setzt, ferner für Fall I α_1 und β_1 und für Fall V α und β negativ in Rechnung zieht, d. h. diejenigen Winkel innerhalb des Prismas, die zwischen dem Einfallslote und dem Rücken des Prismas, desgleichen diejenigen Winkel ausserhalb des Prismas, die zwischen dem Einfallslote und der brechenden Kante liegen.

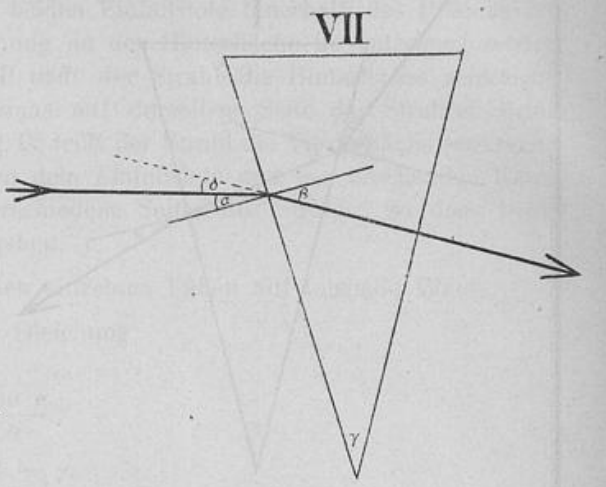
Damit die Schüler Gelegenheit zur Anwendung der obigen Formeln erhalten und gleichzeitig eine deutliche Anschauung von der Zu- und Abnahme der Gesamtablenkung gewinnen, lasse man nunmehr von ihnen eine Tabelle wie die umstehende berechnen.

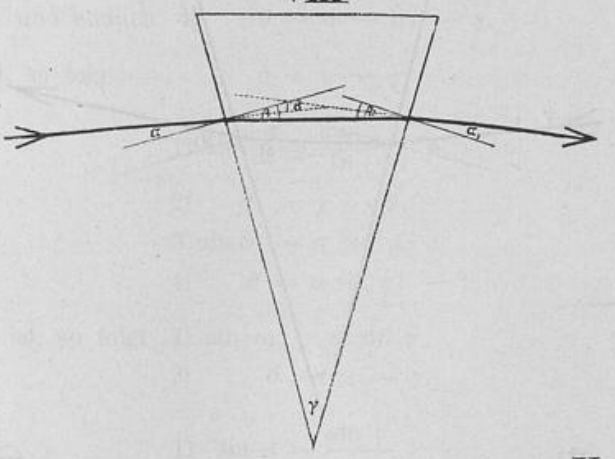
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

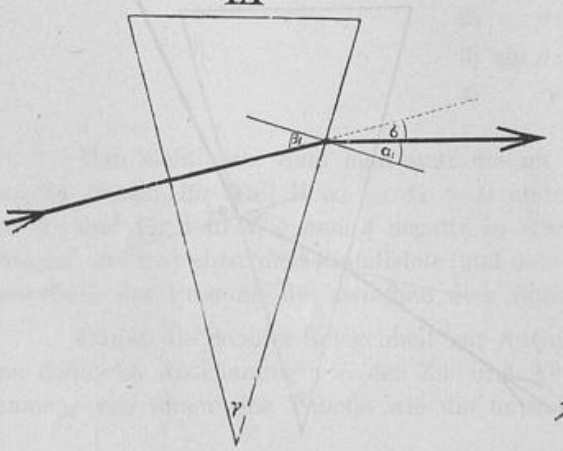


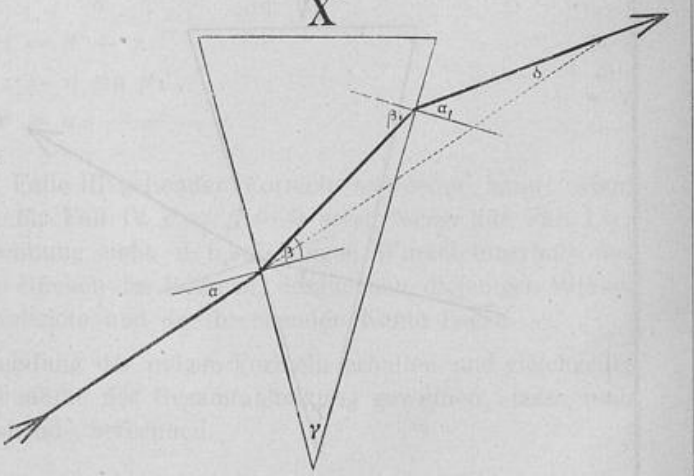
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf











Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$\gamma = 30^0$, $n = 1{,}5$.

Fall	α	β	β_1	α_1	δ
I	90^0	$41^0\,49'$	$-11^0\,49'$	$-17^0\,53'$	$42^0\,7'$
	80^0	41^0	-11^0	$-16^0\,38'$	$33^0\,22'$
	70^0	$38^0\,48'$	$-8^0\,48'$	$-13^0\,16'$	$26^0\,44'$
	60^0	$35^0\,16'$	$-5^0\,16'$	$-7^0\,55'$	$22^0\,5'$
	50^0	$30^0\,43'$	$-0^0\,43'$	$-1^0\,4{,}5'$	$18^0\,55{,}5'$
II	$48^0\,35'$	30^0	0^0	0^0	$18^0\,35'$
III	40^0	$25^0\,22'$	$4^0\,38'$	$6^0\,57{,}5'$	$16^0\,57{,}5'$
	30^0	$19^0\,28'$	$10^0\,32'$	$15^0\,55'$	$15^0\,55'$
	$22^0\,51'$	15^0	15^0	$22^0\,51'$	$15^0\,42'$
	20^0	$13^0\,11'$	$16^0\,49'$	$25^0\,43'$	$15^0\,43'$
	10^0	$6^0\,39'$	$23^0\,21'$	$36^0\,29'$	$16^0\,29'$
IV	0^0	0^0	30^0	$48^0\,35'$	$18^0\,35'$
V	-10^0	$-6^0\,39'$	$36^0\,39'$	$63^0\,33'$	$23^0\,33'$
	$-17^0\,53'$	$-11^0\,49'$	$41^0\,49'$	90^0	$42^0\,7'$
	⋮	⋮	⋮	Vollständige Zurückwerfung an der Hinterfläche	
	-90^0	$-41^0\,49'$	$71^0\,49'$		

B. $n < 1$.

Denkt man sich wieder den einfallenden Strahl um den Einfallspunkt innerhalb derjenigen Grenzen gedreht, wo er keine vollständige Zurückwerfung an der Vorderfläche erfährt und noch die Hinterfläche des Prismas trifft, so hat man wieder fünf Fälle zu unterscheiden, die durch die Figuren VI bis X dargestellt werden. In diesen ist wieder $\gamma = 30^0$ angenommen worden, während für n die Zahl $\frac{2}{3}$ gewählt ist.

An der Hand dieser Figuren lassen sich zur Berechnung von δ folgende Gleichungen aufstellen:

VI.

$$1)\quad \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n},$$

$$2)\quad \beta_1 = \beta - \gamma,$$

$$3)\quad \sin\alpha_1 = n\sin\beta_1,$$

$$4)\quad \delta = \gamma - (\alpha - \alpha_1).$$

VII. Da $\beta = \gamma$ ist, so folgt $\delta = \gamma - \alpha$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

VIII.

$$1)\quad \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n},$$
$$2)\quad \beta_1 = \gamma - \beta,$$
$$3)\quad \sin\alpha_1 = n\sin\beta_1,$$
$$4)\quad \delta = \gamma - (\alpha + \alpha_1).$$

IX.

$$1)\quad \sin\alpha_1 = n\sin\gamma,$$
$$2)\quad \delta = \gamma - \alpha_1.$$

X.

$$1)\quad \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n},$$
$$2)\quad \beta_1 = \beta + \gamma,$$
$$3)\quad \sin\alpha_1 = n\sin\beta_1,$$
$$4)\quad \delta = \gamma - (\alpha_1 - \alpha).$$

Dies sind dieselben Formeln wie diejenigen, die man oben für $n > 1$ erhalten hatte, nur ist δ jetzt mit dem umgekehrten Vorzeichen behaftet.

Jetzt lasse man wieder von den Schülern eine Tabelle wie die folgende aufstellen:

$$\gamma = 30^0,\ n = \frac{2}{3}.$$

Fall	α	β	β_1	α_1	δ
	90° ⋮	Vollständige Zurückwerfung an der Vorderfläche			
VI	41° 49′	90°	—60°	—35° 16′	23° 27′
	40°	74° 37′	—44° 37′	—27° 55′	17° 55′
	30°	48° 35′	—18° 35′	—12° 16′	12° 16′
	20°	30° 52′	— 0° 52′	— 0° 35′	10° 35′
VII	19° 28′	30°	0°	0°	10° 32′
VIII	10°	15° 6′	14° 54′	9° 52′	10° 8′
	9° 56′ 9″	15°	15°	9° 56′ 9″	**10° 7′ 42″**
	5°	7° 31′	22° 29′	14° 46′	10° 13′
IX	0°	0°	30°	19° 28′	10° 32′
X	—10°	—15° 6′	45° 6′	28° 11′	11° 49′
	—20°	—30° 52′	60° 52′	35° 37′	14° 23′
	—30°	—48° 35′	78° 35′	40° 48′	19° 12′
	—35° 16′	—60°	90°	41° 49′	23° 27′
	⋮ —41° 49′	⋮ —90°	Der Strahl trifft nicht die Hinterfläche, sondern den Rücken des Prismas		
	⋮ —90°	Vollständige Zurückwerfung an der Vorderfläche			

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nunmehr wird sich der Schüler ganz von selbst die Aufgabe stellen, allgemein nachzuweisen, was sich bei Berechnung jeder Tabelle bereits für einen besonderen Fall herausgestellt hat, dass nämlich die **Gesamtablenkung bei symmetrischem Durchgang** des Strahls **am kleinsten** ist.

Auch hierbei werden wieder die beiden Fälle $n > 1$ und $n < 1$ getrennt zu untersuchen sein.

A. $n > 1$.

Aus der Gleichung

$$\sin \alpha = n \sin \beta$$

folgt zunächst, dass bei wachsendem α auch β wächst.

Subtrahiert man ferner von beiden Seiten der vorigen Gleichung $\sin \beta$, so erhält man nach einigen Umformungen

$$\sin \frac{1}{2} (\alpha - \beta) = \frac{n-1}{2} \frac{\sin \beta}{\cos \frac{1}{2} (\alpha + \beta)},$$

woraus folgt, dass bei wachsendem α auch $(\alpha - \beta)$ wächst.

Endlich ist

$$\begin{array}{r} \sin \alpha = n \sin \beta \\ \sin \alpha_1 = n \sin \beta_1, \\ \hline \sin \alpha + \sin \alpha_1 = n (\sin \beta + \sin \beta_1) \text{ oder} \end{array}$$

$$\sin \frac{1}{2} (\alpha + \alpha_1) \cos \frac{1}{2} (\alpha - \alpha_1) = n \sin \frac{1}{2} (\beta + \beta_1) \cos \frac{1}{2} (\beta - \beta_1).$$

Handelt es sich nun um Fall III, so ist

$$\beta + \beta_1 = \gamma, \text{ daher}$$

$$\sin \frac{1}{2} (\alpha + \alpha_1) = n \sin \frac{\gamma}{2} \frac{\cos \frac{1}{2} (\beta - \beta_1)}{\cos \frac{1}{2} (\alpha - \alpha_1)} = n \sin \frac{\gamma}{2} \frac{\cos \frac{1}{2} (\beta_1 - \beta)}{\cos \frac{1}{2} (\alpha_1 - \alpha)}.$$

Ist nun 1. $\alpha > \alpha_1$, so ist auch

$$\alpha - \beta > \alpha_1 - \beta_1, \text{ also}$$

$$\alpha - \alpha_1 > \beta - \beta_1, \text{ folglich}$$

$$\frac{\cos \frac{1}{2} (\beta - \beta_1)}{\cos \frac{1}{2} (\alpha - \alpha_1)} > 1, \text{ und daher}$$

$$\sin \frac{1}{2} (\alpha + \alpha_1) > n \sin \frac{\gamma}{2}.$$

Ist ferner 2. $\alpha < \alpha_1$, so ist auch

$$\alpha - \beta < \alpha_1 - \beta_1, \text{ also}$$

$$\beta_1 - \beta < \alpha_1 - \alpha, \text{ folglich}$$

$$\frac{\cos \frac{1}{2} (\beta_1 - \beta)}{\cos \frac{1}{2} (\alpha_1 - \alpha)} > 1, \text{ und daher}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\sin \frac{1}{2} (\alpha + \alpha_1) > n \sin \frac{\gamma}{2}.$$

Ist dagegen 3. $\alpha = \alpha_1$, so ist auch $\beta = \beta_1$, also

$$\frac{\cos \frac{1}{2} (\beta - \beta_1)}{\cos \frac{1}{2} (\alpha - \alpha_1)} = 1 \text{ und daher}$$

$$\sin \frac{1}{2} (\alpha + \alpha_1) = n \sin \frac{\gamma}{2}.$$

Demnach hat $\sin \frac{1}{2} (\alpha + \alpha_1)$ und also auch $(\alpha + \alpha_1)$ den kleinsten Wert, wenn $\alpha = \alpha_1$ ist. Da nun im Fall III, um den es sich jetzt handelt, die Gesamtablenkung $\delta = \alpha + \alpha_1 - \gamma$ ist, so muss auch δ am kleinsten sein, wenn $\alpha = \alpha_1$ ist.*)

Dieser kleinste Wert, den δ im Fall III haben kann, werde mit δ_0 bezeichnet.

Es fragt sich nun, ob nicht in einem der Fälle I, II, IV und V δ einen Wert annehmen kann, der gleich δ_0 oder kleiner als δ_0 ist. Dass dies nicht möglich ist, ergiebt sich aus folgender Betrachtung.

Handelt es sich zunächst um Fall I, so hat man

$$\begin{array}{c} \sin \alpha = n \sin \beta \\ \sin \alpha_1 = n \sin \beta_1 \\ \hline \sin \alpha - \sin \alpha_1 = n (\sin \beta - \sin \beta_1) \text{ oder} \end{array}$$

$$\sin \frac{1}{2} (\alpha - \alpha_1) \cos \frac{1}{2} (\alpha + \alpha_1) = n \sin \frac{1}{2} (\beta - \beta_1) \cos \frac{1}{2} (\beta + \beta_1).$$

Weil nun im Falle I

$\beta - \beta_1 = \gamma$ ist, so folgt

$$\sin \frac{1}{2} (\alpha - \alpha_1) = n \sin \frac{\gamma}{2} \frac{\cos \frac{1}{2} (\beta + \beta_1)}{\cos \frac{1}{2} (\alpha + \alpha_1)}.$$

Da $n > 1$ sein soll, so ist

$$\begin{array}{c} \alpha > \beta \text{ und} \\ \alpha_1 > \beta_1 \\ \hline \alpha + \alpha_1 > \beta + \beta_1, \text{ folglich} \end{array}$$

$$\frac{\cos \frac{1}{2} (\beta + \beta_1)}{\cos \frac{1}{2} (\alpha + \alpha_1)} > 1, \text{ und daher}$$

$$\sin \frac{1}{2} (\alpha - \alpha_1) > n \sin \frac{\gamma}{2}.$$

*) Dieser Teil des Beweises für die kleinste Gesamtablenkung findet sich u. a. in Jochmann, Experimentalphysik.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es ist also, wenn Fall I vorliegt, $\sin \frac{1}{2} (\alpha - \alpha_1)$ immer grösser als der kleinste Wert, den $\sin \frac{1}{2} (\alpha + \alpha_1)$ im Falle III annehmen kann. Also ist auch $(\alpha - \alpha_1)$ im Falle I stets grösser als der kleinste Wert von $(\alpha + \alpha_1)$ im Falle III, und weil im Falle I $\delta = \alpha - \alpha_1 - \gamma$, so ist die Gesamtablenkung im Falle I immer grösser als δ_0.

Was ferner Fall II betrifft, so ist

$$\sin \alpha = n \sin \beta \text{ oder}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = n \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}.$$

Da nun im Fall II $\beta = \gamma$ ist, so wird

$$\sin \frac{\alpha}{2} = n \sin \frac{\gamma}{2} \frac{\cos \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}.$$

Weil $\alpha > \beta$ ist, so folgt

$$\frac{\cos \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} > 1, \text{ und daher}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} > n \sin \frac{\gamma}{2}.$$

Es ist also im Falle II α immer grösser als der kleinste Wert von $(\alpha + \alpha_1)$ im Falle III, und weil im Falle II $\delta = \alpha - \gamma$ ist, so ist die Gesamtablenkung auch im Fall II stets grösser als δ_0.

Fall IV erledigt sich wie Fall II und Fall V wie Fall I, wenn man überall α mit α_1 und β mit β_1 vertauscht.

B. $n < 1$.

Zunächst folgt wieder aus der Gleichung

$$\sin \alpha = n \sin \beta,$$

dass bei wachsendem α auch β wächst.

Wenn man ferner beide Seiten der vorigen Gleichung von $\sin \beta$ subtrahiert, so erhält man

$$\sin \frac{1}{2} (\beta - \alpha) = \frac{1 - n}{2} \frac{\sin \beta}{\cos \frac{1}{2} (\beta + \alpha)},$$

woraus sich ergiebt, dass bei wachsendem α auch $(\beta - \alpha)$ wächst.

Endlich erhält man wie unter A

$$\sin \frac{1}{2} (\alpha + \alpha_1) \cos \frac{1}{2} (\alpha - \alpha_1) = n \sin \frac{1}{2} (\beta + \beta_1) \cos \frac{1}{2} (\beta - \beta_1).$$

Ziehen wir nun zunächst Fall VIII in Betracht, so ist

$$\beta + \beta_1 = \gamma, \text{ daher}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\sin\frac{1}{2}(\alpha+\alpha_1) = n\sin\frac{\gamma}{2}\,\frac{\cos\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\alpha_1)} = n\sin\frac{\gamma}{2}\,\frac{\cos\frac{1}{2}(\beta_1-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha)}.$$

Ist nun 1. $\alpha > \alpha_1$, so ist auch
$\beta - \alpha > \beta_1 - \alpha_1$, also
$\beta - \beta_1 > \alpha - \alpha_1$, folglich

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\alpha_1)} < 1, \text{ und daher}$$

$$\sin\frac{1}{2}(\alpha+\alpha_1) < n\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Ist ferner 2. $\alpha < \alpha_1$, so ist auch
$\beta - \alpha < \beta_1 - \alpha_1$, also
$\alpha_1 - \alpha < \beta_1 - \beta$, folglich

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(\beta_1-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha)} < 1, \text{ und demnach}$$

$$\sin\frac{1}{2}(\alpha+\alpha_1) < n\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Ist dagegen 3. $\alpha = \alpha_1$, so ist auch
$\beta = \beta_1$, also

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\alpha_1)} = 1, \text{ und daher}$$

$$\sin\frac{1}{2}(\alpha+\alpha_1) = n\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Demnach hat $\sin\frac{1}{2}(\alpha+\alpha_1)$ und also auch $(\alpha+\alpha_1)$ den grössten Wert, wenn $\alpha = \alpha_1$ ist, und da in dem vorliegenden Falle VIII die Gesamtablenkung $\delta = \gamma - (\alpha+\alpha_1)$ ist, so hat diese wieder ihren kleinsten Wert, wenn $\alpha = \alpha_1$ ist.

Bezeichnen wir diesen kleinsten Wert, den δ im Falle VIII haben kann, wieder mit δ_0, so bleibt zu untersuchen, ob in einem der Fälle VI, VII, IX und X δ einen Wert annehmen kann, der gleich δ_0 oder kleiner als δ_0 ist.

Im Falle VI erhält man wie im Falle I

$$\sin\frac{1}{2}(\alpha-\alpha_1) = n\sin\frac{\gamma}{2}\,\frac{\cos\frac{1}{2}(\beta+\beta_1)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\alpha_1)}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Da $n < 1$ ist, so ist

$$\alpha < \beta \text{ und}$$

$$\alpha_1 < \beta_1$$

$$\alpha + \alpha_1 < \beta + \beta_1, \text{ folglich}$$

$$\frac{\cos \frac{1}{2} (\beta + \beta_1)}{\cos \frac{1}{2} (\alpha + \alpha_1)} < 1, \text{ und daher}$$

$$\sin \frac{1}{2} (\alpha - \alpha_1) < n \sin \frac{\gamma}{2}.$$

Also ist, wenn es sich um Fall VI handelt, $\sin \frac{1}{2} (\alpha - \alpha_1)$ immer kleiner als der grösste Wert, den $\sin \frac{1}{2} (\alpha + \alpha_1)$ im Fall VIII annehmen kann. Demnach ist auch $(\alpha - \alpha_1)$ im Falle VI stets kleiner als der grösste Wert von $(\alpha + \alpha_1)$ im Falle VIII, und weil im Falle VI $\delta = \gamma - (\alpha - \alpha_1)$, so ist die Gesamtablenkung in diesem Falle immer grösser als δ_0.

Im Falle VII ergiebt sich wie im Falle II

$$\sin \frac{\alpha}{2} = n \sin \frac{\gamma}{2} \frac{\cos \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}},$$

und da $\alpha < \beta$ ist, so folgt

$$\sin \frac{\alpha}{2} < n \sin \frac{\gamma}{2}.$$

Also ist α im Falle VII kleiner als der grösste Wert von $(\alpha + \alpha_1)$ im Falle VIII, und weil im Falle VII $\delta = \gamma - \alpha$, so ist die Gesamtablenkung in diesem Falle auch grösser als δ_0.

Endlich ist Fall IX wie Fall VII und Fall X wie Fall VI zu behandeln, wobei man nur α mit α_1 und β mit β_1 zu vertauschen braucht.

Kiel, im Mai 1898. **Prof. Dr. Richard Stolzenburg.**

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Da $n < 1$ ist, so ist
$\alpha < \beta$ und

lich

Also ist, wenn es sich immer kleiner als der grösste Wert, den $\sin \frac{1}{2} (\alpha + \alpha_1)$ im F st auch $(\alpha - \alpha_1)$ im Falle VI stets kleiner als der grösste W eil im Falle VI $\delta = \gamma - (\alpha - \alpha_1)$, so ist die Gesamtablenkung in

Im Falle VII ergiebt si

und da $\alpha < \beta$ ist, so folgt

Also ist α im Falle n $(\alpha + \alpha_1)$ im Falle VIII, und weil im Falle VII $\delta = \gamma - \alpha$ em Falle auch grösser als δ_0.

Endlich ist Fall IX w zu behandeln, wobei man nur α mit α_1 und β mit β_1 zu ve

Kiel, im Mai 189 r. Richard Stolzenburg.

© The Tiffen Company, 2007
TIFFEN Gray Scale
A 1 R 2 G 3 B 4 5 6 M 8 W 9 G 10 K 11 12 13 C 14 Y 15 B 17 M 18 19

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf