1. Kleinigkeiten aus dem Gebiete der combinatorischen Operationen, der Binomialcoeffizienten, der figurirten Zahlen und der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Der Unterricht in der Elementar-Arithmetik findet an unsern Gymnasien in der Combinationslehre und den mit Leichtigkeit daran zu reihenden Disciplinen kleineren Umfangs einen Abschluß, während der Unterricht in der Elementar-Geometrie in Folge des Ausschlusses der sphärischen Trigonometrie und der Elemente der Kegelschnitte als abgeschlossen nicht angesehen werden kann. Ueber den Umfang und Methodik dieser abschließenden arithmetischen Disciplinen herrschen sehr abweichende Ansichten. Während auf der einen Seite nur eine ganz aphoristische Behandlung als zweckentsprechend empfohlen wird, macht man auf der andern die Forderung geltend, daß der Umfang derselben durch die Hinzunahme einer eigenen Theorie der Determinanten noch zu erweitern sei. Die Frage, ob es sich in didaktischer und paedagogischer Hinsicht lohnt, die Determinantentheorie dem Unterricht einzufügen, will ich hier nicht discutiren, gleichwohl erklären, daß eine Behandlung der Determinanten, welche sich blos auf die Begriffsentwicklung derselben erstreckt, keinen Lehrer berechtigt, im Jahresbericht unter den durchgenommenen Pensen die Theorie der Determinanten pomphaft aufzuführen, daß aber auch andererseits eine unzweifelhaft über die Elemente hinausgehende Theorie erst dann Aufnahme finden sollte, wenn der Elementarmathematik auch auf dem Gebiete der Geometrie der nöthige Abschluß gegeben werden kann. Es ist vielmehr meine Absicht, in diesen Zeilen die Combinationslehre mit ihren Anhängen so abgegrenzt vorzulegen, wie dieselbe nach meinem auf Erfahrung gestützten Urtheile zweckmäßig und mit Erfolg in der Prima behandelt werden kann. Für meine Schüler soll diese Abhandlung die Grundlage des Unterrichtes sein, für meine Fachgenossen möge sie ein Objekt kritischer Begutachtung abgeben und auf diese Weise der endlichen Klarstellung der Frage nach dem Umfange und der Methodik der fraglichen Theorieen dienen.

A. Die Combinationslehre.

§. 1. In den arithmetischen Operationen, wie sie stufenmäßig bis zu den Potenzen, Wurzeln und Logarithmen auf einander folgen, werden durch die Zeichen 1, 2, 3 u. s. w., sowie durch a, b, c u. s. w. numerische Größen in der Weise bezeichnet, daß die Ziffern und ihre Verbindungen nach den Gesetzen des decadischen Zahlensystems Größen von einer ganz bestimmten Menge Einheiten bedeuten, dagegen durch die Zeichen a, b, c u. s. w. und ihre Verbindungen nach den Gesetzen der

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

arithmetischen Operationen Größen von unbestimmt gelassener Menge Einheiten ausgedrückt werden. Abweichend hiervon kann man die Ziffern und Buchstaben auch anwenden, um verschiedene Dinge als Individuen zu bezeichnen, und dabei ganz davon absehen, welchen speziellen Zahlenwerth jene, und welchen allgemeinen Zahlenwerth diese repräsentiren. Bezeichnet man z. B. mit 1, 2, 3, 4 oder mit a, b, c, d vier verschiedeue Dinge als Individuen, so würden die Formen 1234 und 3124 etc. nicht Zahlen, und die Formen abcd und cbad etc. nicht Producte, sondern nur verschiedene Anordnungen der durch die Ziffern und Buchstaben bezeichneten Individuen ausdrücken. Der Theil der Arithmetik nun, welcher die Bildung der verschiedenen Anordnungen von in genannter Weise bezeichneten Individuen nach gewissen Bedingungen und die Bestimmung ihrer Anzahl zum Gegenstande hat, heißt die Combinationslehre. Hierbei heißen die durch Ziffern oder Buchstaben bezeichneten Individuen Elemente, irgend eine Anordnung mehrerer Elemente (per analogiam auch ein Element allein) heißt eine Complexion oder Gruppe. Die Elemente sind dabei in irgend einer Anordnung, der Normal-Complexion, gegeben, und jedes Element in dieser Normal-Complexion heißt in Bezug auf ein vorhergehendes ein höheres, in Bezug auf ein folgendes ein niederes Element. In jeder andern als der Normal-Complexion, möge sie nun alle oder nur einige der Elemente enthalten, bildet jedes Element mit jedem folgenden, welches in der Normal-Complexion ein niederes ist, eine sogenannte Inversion. Ist z. B. 12345 die Normal-Complexion, so enthält die Complexion 24153 vier Inversionen, welche von 2 und 1, 4 und 1, 4 und 3, 5 und 3 gebildet werden; die Complexion 3521 enthält deren fünf, gebildet von 3 und 2, 3 und 1, 5 nnd 2, 5 und 1, 2 und 1; die Complexion 245 dagegen enthält keine.

§. 2. Nach den für die Bildung der Complexionen aus gegebenen Elementen aufgestellten Bedingungen unterscheidet man zunächst zwei Arten combinatorischer Operation. Entweder wird nämlich die Bedingung aufgestellt, daß alle aus gegebenen Elementen zu bildenden Complexionen auch alle Elemente, also nur in verschiedener Anordnung, enthalten sollen, oder, daß nur eine bestimmte, aber für alle zu bildenden Complexionen gleiche Anzahl der Elemente darin vorkommen soll. Die Operation der ersteren Art heißt Permutation, die gebildeten Complexionen selbst Permutationsformen oder auch schlechtweg Permutationen der gegebenen Elemente.

Wird bei der Operation der zweiten Art jede Complexion gefordert, welche die bestimmte Anzahl Elemente, wenn auch in beliebiger Anordnung enthält, so wird die Operation Variation, die Complexionen selbst Variationsformen oder auch schlechtweg Variationen genannt. Sollen aber die zu bildenden Complexionen dieselben Elemente nur in einer Anordnung enthalten, so heißt die Operation Combination (im engern Sinne), die gebildeten Complexionen selbst Combinationsformen oder auch schlechtweg Combinationen (im engern Sinne).*)

§. 3. Die Zahl der Permutationen, welche aus n (verschiedenen) Elementen gebildet werden können, gebräuchlich bezeichnet durch P(n), ergiebt sich leicht durch die Betrachtung, daß jedes der n Elemente in jeder Permutationsform der übrigen n — 1 Elemente an n verschiedenen Stellen stehen kann, nämlich vor dem ersten, zweiten, dritten, ... (n — 1)-ten und hinter diesem, so daß aus jeder Permutationsform von n — 1 Elementen durch den Hinzutritt des n-ten Elementes n Permutationsformen gebildet werden können. Es ist daher $P(n) = n \,.\, P(n - 1)$. Da nun in

*) Im weitern Sinne heißt jede Verbindung von Elementen Combination, wie dies ja auch in dem Namen Combinationslehre ausgesprochen ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

gleicher Weise $P(n-1) = (n-1) \,.\, P(n-2)$, $P(n-2) = (n-2) \,.\, P(n-3)$ u. s. w., $P(2) = 2 \,.\, P(1)$, $P(1) = 1$ ist, so ist

$$P(n) = n \,.\, (n-1)\,(n-2) \,.\,.\,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1,$$

d. h. die Zahl aller möglichen Permutationen aus n (verschiedenen) Elementen ist gleich dem Producte der natürlichen Zahlen bis zur Zahl der Elemente.

Das Product $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\,.\,.\,.\, n$ bezeichnet man üblich durch $n!$ (gelesen: „n=Facultät"), es ist demnach $P(n) = n!$

§. 4. Diese Formel gilt indeß nur unter der Voraussetzung, daß in der Normal=Complexion dasselbe Element nicht wiederholt vorkommt. Denn ist dies der Fall, so wird die Zahl geringer. Um die Zahl der Permutation von n Elementen, worunter α gleiche vorkommen, und welche wir durch das Symbol $\underset{\alpha}{P}(n)$ bezeichnen wollen, zu bestimmen, nehmen wir an, das Element a komme in der Normal=Complexion α mal hintereinander vor. Wenn man nun diese wiederholten Elemente durch die Bezeichnung $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_\alpha$ unterscheidet, dann sämmtliche Permutionen gebildet denkt, so erhält man jede Complexion nach Weglassung der Unterscheidungs=Indices so oft mal, als α Elemente permutirt werden können, d. h. $\alpha!$ mal. Die Zahl der wirklich verschiedenen Permutationen ist daher $\underset{(\alpha)}{P}(n) = \frac{n!}{\alpha!}$. Käme außerdem noch ein anderes Element β mal vor, so ergiebt sich leicht durch eine ähnliche Betrachtung und in analoger Bezeichnung

$$\underset{(\alpha,\beta)}{P}(n) = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!}.$$

Beispiele. 1) Die Elemente abcde geben $5! = 120$ Permutationen. 2) 7 Personen, die täglich mit einander zu Mittag speisen, könnten in $7!$ oder 5040 verschiedenen Anordnungen an der Tafel sitzen. 3) Aus 11122344 lassen sich $\frac{8!}{3!\,2!\,2!} = 1680$ Permutationen bilden.

§. 5. Das Gesetz, wonach von einer gegebenen Anzahl von Elementen die sämmtlichen Permutationen gebildet werden, läßt sich folgendermaßen ausdrücken: Ausgehend von der Normal=Complexion, welche selbst als erste Permutation gilt, erhöhe man das letzte Element, welches einer Erhöhung fähig ist, d. h. mit einem höheren Elemente vertauscht werden kann, so wenig als möglich und belasse die folgenden Elemente in der Anordnung, in welcher sie in der Normal=Complexion auf einander folgen. Von den Elementen abcd erhält man hiernach folgende Permutationsformen:

abcd,	bacd,	cabd,	dabc,
abdc,	badc,	cadb,	dacb,
acbd,	bcad,	cbad,	dbac,
acdb,	bcda,	cbda,	dbca,
adbc,	bdac,	cdab,	dcab,
adcb,	bdca,	cdba,	dcba.

Von den Elementen 12223 erhält man diese Formen:

12223,	21223,	22132,	22321,	31222
12232,	21232,	22213,	23122,	32122
12322,	21322,	22231,	23212,	32212
13222,	22123,	22312,	23221,	32221.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 6. Mit Anwendung der in §§. 3 und 4 entwickelten Permutationszahl und des in §. 5 aufgestellten Bildungsgesetzes der Permutationen ist man im Stande, eine durch ihre Stellenzahl in der Reihe der sämmtlichen Permutationen gegebener Elemente bestimmte Permutationsform zu bilden, und ebenso die Stellenzahl einer gegebenen Permutation anzugeben, ohne erst alle Permutationen zu bilden.

Beispiele. 1) Wie heißt die 17. Permutation von roma?

Antwort. Mit r und o beginnen je $3! = 6$ Formen, da sich in beiden Fällen die übrigen 3 Elemente $3! = 6$ mal permutiren lassen. Von der 13. Form mroa an stehen r und o je 2 mal an 2. Stelle, die dann folgende 17. Form ist maro.

2) Die wievielte Permutation von examen ist nex mea?

Antwort. Es gehen vorher

mit e beginnend $5! = 120$ Permutationen,

$$\left.\begin{array}{l}\text{mit x}\\ \text{mit a}\\ \text{mit m}\end{array}\right\}\text{beginnend je } \frac{5!}{2!}\text{, zusammen 180 Permutationen.}$$

Die 301. Permutation ist also nexame. Die 3 letzten Elemente müssen daher zu mea permutirt werden; es gehen daher noch 2 voraus, die mit a, und noch eine (mae), die mit m beginnt. Dann folgt mea, so daß die gegebene Permutation nex mea die 304. Permutation von examen ist.

Zusatz. Aus heidelberg erhält man als 564394. Permutation: geld herbei (cf. Bardey, Aufgabensammlung); der Vers des Horaz: Grata superveniet quae non sperabitur hora giebt eine Permutation: Est ventura Rhosina parataque nubere pigro, die wiedrum Hexameter ist. Von den Permutationen der Wörter des Hexameters: Tot tibi sunt dotes, virgo, quot sidera coelo bilden 3312 Permutation wiederum einen Hexameter; Πτολεμαῖος läßt sich in ἀπὸ μέλιτος permutiren; aus Révolution française erhält man durch Permutation Un Corse voté la finira, aus Frère Jacques Clément erhält man: C'est l'enfer qui m'a créé. Ueberraschend sind die Permutationen, welche sich aus domus lescinia bilden lassen, nämlich: ades incolumis, omnis es lucida, lucida sis omen, mane sidus loci, sis columna dei, i! scande solium.*)

§. 7. Für die Bildung der Variationen aus einer gegebenen Anzahl Elemente ist außer dieser noch die Zahl der Elemente gegeben, welche in jeder Complexion vorkommen soll. Diese Zahl heißt Klasseninder, und es bezeichnen Variationen von gegebenen Elementen zur 3., 4. etc. Klasse solche Complexionen, die 3, 4 etc. von jenen Elementen enthalten. Ferner unterscheidet man Variationen ohne und mit Wiederholung, je nachdem in den einzelnen Complexionen jedes Element nur einmal oder wiederholt vorkommt. Das Symbol $\underset{k}{V}(n)$ bezeichnet die Zahl der Variationen von n Elementen zur kten Klasse ohne Wiederholung, ${}^{w}\underset{k}{V}(n)$ mit Wiederholung.

*) Als der spätere König Stanislaus Lescinski in seiner Jugend von Reisen zurückkam, versammelte sich das ganze Lescinski'sche Haus (domus lescinia) in Lissa, um seinen Stammerben zu bewillkommnen. Jablonsky, Rector der Schule zu Lissa, veranstaltete zu dieser Feierlichkeit einen Schulactus, in welchem von 13 Schülern, die als Helden verkleidet waren, Ballet getanzt wurde. Jeder Schüler trug einen Schild, worauf mit Gold einer der Buchstaben aus domus lescinia geschrieben war. Nach jedem Tanze stellten sich die Tänzer so auf, daß die Aufeinanderfolge der Buchstaben auf den Schilden einen der obigen Sprüche gab. Der letzte, i! scande solium, ging später in Erfüllung, als Stanislaus auf Verwenden Karl's XII. vom Reichstage zu Warschau (12. Juli 1704) an Stelle August II. zum Könige von Polen erwählt wurde. (Vergl. noch Heis, Aufgabensammlung.)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 8. Denkt man sich die Variationen von n Elementen zur (k — 1)ten Klasse (ohne Wiederholung), deren Zahl durch $\underset{k-1}{V}(n)$ bezeichnet wird, sämmtlich gebildet, so erhält man hieraus die Variationen zur kten Klasse, wenn man einer jeden dieser Complexionen jedes der nicht darin vorkommenden $n - (k-1) = n - k + 1$ hinzufügt. Es ist daher

$$\underset{k}{V}(n) = (n-k+1) \,.\, \underset{k-1}{V}(n).$$

Da in gleicher Weise $\underset{k-1}{V}(n) = (n-k+2) \,.\, \underset{k-2}{V}(n)$ ist, u. s. w. und $\underset{1}{V}(n) = n$, so ergiebt sich

$$\underset{k}{V}(n) = n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(n-k+1).$$

Denkt man sich die Factoren dieses Productes bis zu 1 fortgesetzt, und die hinzugefügten Factoren durch Division wieder gehoben, so erhält man $\underset{k}{V}(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Dieselbe Formel kann man mit Leichtigkeit ableiten, wenn man sich, ausgehend von der Zahl der Variationen zur 1. Klasse, nach und nach die der 2., 3. . . . . nten Klasse gebildet denkt. Es ist nämlich $\underset{2}{V}(n) = (n-1)\,n$; $\underset{3}{V}(n) = (n-2)\,(n-1)\,n$, u. s. w., wodurch man bei fortgesetzten Schlüssen obige Formel erhält.

Beispiele. 1) Wieviel 3-ziffrige Zahlen lassen sich aus den 9 Zahlzeichen (mit Ausschluß der Null) bilden, in denen keine Ziffer mehr als ein Mal vorkommt?

Antwort. $\underset{3}{V}(9) = 9 \,.\, 8 \,.\, 7 = 504.$

2) Wie würde das Resultat der Aufgabe lauten, wenn die Null auch vorkommen darf?

Antwort. Es giebt soviele Verbindungen von 3 Zahlzeichen, welche mit 0 beginnen und also keine 3-ziffrige Zahl darstellen, als wie oft sich die übrigen 9 Ziffern zur 2. Klasse (ohne Wiederholung) variiren lassen, also $\underset{2}{V}(9)$. Die fragliche Zahl ist also

$$\underset{3}{V}(10) - \underset{2}{V}(9) = 10 \,.\, 9 \,.\, 8 - 9 \,.\, 8 = 648.$$

§. 9. Die independente Bildung sämmtlicher Variationen von n Elementen zur kten Klasse ohne Wiederholung geschieht nach folgendem Gesetze. Ausgehend von der Complexion, welche die ersten k Elemente der Normal-Complexion enthält, ersetzt man immer das äußerste Element rechts, welches einer Erhöhung fähig ist, durch das nächst höhere, welches in der Complexion noch nicht vorkommt und läßt die übrigen noch nicht vorkommenden Elemente, mit dem niedrigsten beginnend, in der Reihenfolge der Normal-Complexion folgen. Hiernach erhält man die Variationen von 12345 zur 4. Klasse in folgender Reihenfolge.

1234	1324	1423	1523	2134	2314
1235	1325	1425	1524	2135	2315
1243	1342	1432	1532	2143	2341
1245	1345	1435	1534	2145	2345
1253	1352	1452	1542	2153	2351
1254	1354	1453	1543	2154	2354

u. s. w.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Eine recurrirende Methode, die Variationen von n Elementen zur kten Klasse zu bilden, besteht darin, daß man, ausgehend von den Variationsformen der 1. Klasse, d. h. von den einzelnen Elementen, dadurch jedes Mal die Variationen der nächsthöheren Klasse bildet, daß man jeder Variationsform der nächstniederen Klasse jedes der übrigen in ihr noch nicht enthaltenen Elemente in der Reihenfolge der Normal-Complexion hinzufügt. Wir erhalten hiernach die Variationen von 12345 zur 4. Klasse auf folgende Weise.

1. Klasse:	1,	2,	3,	4,	5.
2. Klasse:	12	21	31	41	51
	13	23	32	42	52
	14	24	34	43	53
	15	25	35	45	54
3. Klasse:	123	213			
	124	214			
	125	215			
	132	231			
	134	234			
	135	235			
	142	241	u. s. w.		
	143	243			
	145	245			
	152	251			
	153	253			
	154	254			
4. Klasse:	1234	1324			
	1235	u. s. w.			
	1243				
	1245				
	1253				
	1254				

Wie man sich leicht überzeugt, erhält man nach dieser recurrirenden Methode die Variationen in derselben Reihenfolge als durch die independente Bildung derselben.

§. 10. Wie bei der Permutation kann man auch bei der Variation aus der bekannten Variationszahl von n Elementen zur kten Klasse und aus dem vorhin entwickelten Bildungsgesetz eine durch ihre Stellenzahl in der Reihe der sämmtlichen Variationen gegebener Elemente und Klasse bestimmte Variation bilden und ebenso die Stellenzahl einer gegebenen Variation angeben, ohne erst alle Variationen zu bilden.

Beispiele. 1) Wie heißt die 391. der 3-ziffrigen Zahlen, welche, ohne daß eine Ziffer wiederholt wird, aus den Ziffern 123456789 gebildet werden können?

Antwort. Mit 1, 2, 3, 4, 5 und 6 beginnen je $8 \cdot 7 = 56$ Formen. Die 337. Variation heißt daher 712. Von den fernern beginnen nun mit 71, 72, 73, 74, 75, 76 und 78 je 7, also zusammen 49, so daß die 386. Variation 791 heißt, woraus sich 796 als die 391. ergiebt.

2) Die wievielte dieser 3-ziffrigen Zahlen ist 659?

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Antwort. Es gehen vorher die Formen, welche mit 1, 2, 3, 4 und 5 beginnen, also $5 . (8 . 7) = 280$; von den mit 6 beginnenden gehen der gegebenen diejenigen voran, welche mit 61, 62, 63, 64 beginnen, also $4 . 7 = 28$. Es ist daher 651 die 309. und also 659 die 316. Variation.

§. 11. Die Zahl sämmtlicher Variationen von n Elementen zur kten Klasse mit Wiederholung, bezeichnet durch ${}^{w}V_{k}(n)$, ergiebt sich leicht durch die Erwägung, daß man aus den Variationen zu irgend einer Klasse die der nächsthöheren Klasse erhält, wenn man zu jeder Form jedes Element der Reihe nach hinzufügt, daß also ${}^{w}V_{k}(n) = n . {}^{w}V_{k-1}(n)$ ist. Wenn man nun die einzelnen Elemente selbst als Variationen der 1. Klasse ansieht, so ergiebt sich

$$ {}^{w}V_{k}(n) = n^{k} . $$

Beispiele. 1) Wieviele Würfe sind mit 2, 3, 4 Würfeln möglich?

Antwort. Mit 2 Würfeln sind ${}^{w}V_{2}(6) = 36$, mit 3 Würfeln ${}^{w}V_{3}(6) = 216$ und mit 4 Würfeln ${}^{w}V_{4}(6) = 1296$ Würfe möglich.

2) Wieviele 3-ziffrige Zahlen lassen sich aus den 9 Ziffern bilden?

Antwort. ${}^{w}V_{3}(9) = 9^{3} = 729$.

3) Wie groß ist die Anzahl, wenn auch die Null in den Zahlen vorkommen darf?

Antwort. Von der möglichen Zahl der Variationen von 10 Elementen zur 3. Klasse mit Wiederholung, nämlich ${}^{w}V_{3}(10) = 10^{3} = 1000$ ist die Zahl derjenigen abzuziehen, die mit 0 beginnen, da solche Variationsformen keine Zahl bedeuten. Diese Zahl ist aber ${}^{w}V_{2}(10) = 10^{2} = 100$; daher die fragliche Zahl 900.

§. 12. Die Variationen von n Elementen zur kten Klasse mit Wiederholung lassen sich in ähnlicher Weise wie die ohne Wiederholung independent oder auch recurrirend (vergl. §. 9) bilden. Zur independenten Bildung gehe man von der Complexion aus, welche das erste Element k mal enthält, ersetze das äußerste Element rechts, welches erhöht werden kann, durch das nächsthöhere und lasse das erste Element so oftmal folgen, daß die Complexion die durch den Klassenindex bestimmte Anzahl Elemente enthält. In der recurrirenden Methode gehe man von den Complexionen der 1. Klasse aus, welches die einzelnen Elemente selbst sind, bilde daraus, indem man mit diesen jedes Element verbindet, die Variationen zur 2. Klasse, aus diesen wiederum durch Hinzufügen eines jeden Elementes die Variationen der 3. Klasse u. s. w. Durch beide Methoden erhält man die Variationen in derselben Reihenfolge.

Die Variationen von 1234 zur 3. Klasse mit Wiederholung wird man nach Analogie von §. 9 leicht aufstellen können.

§. 13. Die Aufgaben, von einer gegebenen Variationsform von n Elementen zur kten Klasse mit Wiederholung die Stellenzahl, und bei gegebener Stellenzahl die Variationsform anzugeben, ohne alle zu bilden, finden nach den beiden vorhergehenden Paragraphen leicht ihre Lösung.

Beispiele. 1) Die wievielste in der Reihe aller möglichen durch die 9 Ziffern darstellbaren 3-ziffrigen Zahlen ist 577?

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Antwort. Es gehen vorher zunächst alle mit 1, 2, 3, 4 beginnenden Complexionen, deren Zahl $4 \,.\, {}^{w}\underset{2}{V}(9) = 324$ ist. Von den mit 5 beginnenden Formen gehen dann noch vorher diejenigen, welche an zweiter Stelle 1, 2, 3, 4, 5 und 6 haben, also $6 \,.\, {}^{w}\underset{1}{V}(9) = 54$. Es ist daher 571 die 379. Variation, also 577 die 385.

2) Wie heißt die 600. in der Reihe dieser Zahlen?

Antwort. Da ${}^{w}\underset{2}{V}(9) = 81$ und $7 \,.\, 81 < 600 < 8 \,.\, 81$ ist, so sind die ersten 567 $(= 7 \,.\, 81)$ Variationen diejenigen, welche die Ziffern 1 bis 7 als erstes Element enthalten. Die 568. Variation heißt daher 811. Von den mit 8 beginnenden Formen haben nun je 9 an zweiter Stelle 1, 2 und 3, so daß vor der Form 841 im Ganzen $568 + 27 = 595$ vorausgehen. 841 ist also selbst die 596. Form, also 845 die 600.

§. 14. Auch bei den Combinationen (im engern Sinne) unterscheidet man solche ohne Wiederholung und mit Wiederholung. Die Zahl derselben für eine gegebene Elementenzahl n und einen gegebenen Klasseninder k wird durch die Symbole $\underset{k}{C}(n)$ und ${}^{w}\underset{k}{C}(n)$ bezeichnet. — Nach dem in §. 2 hervorgehobenen Unterschiede zwischen Variation und Combination erhält man die Zahl $\underset{k}{C}(n)$ aus der Zahl $\underset{k}{V}(n)$, wenn man jedesmal statt der $k!$ Variationen, welche unter einander dieselben Elemente enthalten, nur eine Complexion zählt. Es ergiebt sich daher

$$\underset{k}{C}(n) = \frac{\underset{k}{V}(n)}{k!} = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(n-k+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,\ldots\,.\,k}.$$

Für diesen Quotienten, dessen Wichtigkeit wir im Verlaufe dieser Abhandlung erkennen werden, ist nach dem Beispiele von Euler die Bezeichnung $\binom{n}{k}$ üblich geworden, welche man „n über k" liest.

Beispiele. 1) Wenn bei einem Festessen 25 Theil nehmende Personen alle mit einander anstoßen, wievielmal werden dann die Gläser klingen?

Antwort. $\underset{2}{C}(25) = \binom{25}{2} = \frac{25\,.\,24}{1\,.\,2} = 300$ mal.

2) Wieviel gerade Verbindungslinien sind zwischen n Punkten, von denen nicht 3 in einer Geraden liegen, möglich?

Antwort. $\underset{2}{C}(n) = \binom{n}{2} = \frac{n\,.\,(n-1)}{1\,.\,2}$.

3) Ein Lottospiel von 90 Nummern enthält wie viel Amben, Ternen, Quaternen und Quinternen?

Antwort. Es enthält $\binom{90}{2} = \frac{90\,.\,89}{1\,.\,2} = 4005$ Amben; $\binom{90}{3} = \frac{90\,.\,89\,.\,88}{1\,.\,2\,.\,3} =$ 117480 Ternen; $\binom{90}{4} = \frac{90\,.\,89\,.\,88\,.\,87}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} = 2555190$ Quaternen und

$\binom{90}{5} = \frac{90\,.\,89\,.\,88\,.\,87\,.\,86}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} = 43949268$ Quinternen.

§. 15. Aus dem in §. 9 aufgestellten Bildungsgesetze, sei die Bildung eine independente oder recurrirende, erhält man das Bildungsgesetz der Combinationen von n Elementen zur kten Klasse

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ohne Wiederholung, wenn man gerade so verfährt, wie dort, aber nur diejenigen Elemente hinzufügt, welche in der Normal-Complexion höher sind, als die vorhergehenden, oder indem man Inversionen vermeidet. Von den Elementen 12345 erhält man die Combinationen zur 3. Klasse ohne Wiederholung in independenter oder recurrirender Methode in folgender Reihenfolge:

123	234	345
124	235	
125	245	
134		
135		
145		

§. 16. Bildet man sämmtliche Combinationen von n Elementen zur kten Klasse ohne Wiederholung, so bilden die in jeder Complexion nicht enthaltenen $(n-k)$ Elementen in ihrer Gesammtheit die Combinationen von denselben n Elementen zur $(n-k)$ten Klasse ohne Wiederholung, so daß hieraus das Gesetz

$$\underset{k}{C}(n) = \underset{n-k}{C}(n) \quad \text{oder} \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

ohne Weiteres folgt; d. h. die Combinationszahlen von n Elementen zu zwei verschiedenen Klassen sind gleich, wenn die Summe der Klassenindices gleich der Zahl der Elemente ist.*)

Nach §. 14 ist $\underset{k}{C}(n) = \frac{\underset{k}{V}(n)}{k!}$ und nach §. 8 ist $\underset{k}{V}(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$, also ist $\underset{k}{C}(n) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ und $\underset{n-k}{C}(n) = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$, wodurch obiges Gesetz in einfachster Weise erwiesen ist.

§. 17. Die beiden Aufgaben, von einer gegebenen Combinationsform von n Elementen zur kten Klasse ohne Wiederholung die Stellenzahl, oder bei gegebener Stellenzahl die Form selbst anzugeben, ohne alle zu bilden, werden nach dem Vorhergehenden leicht gelöst.

Beispiele. 1) Die wievielte Combination zur 4. Klasse ist mors von den 25 Buchstaben des Alphabets?

Antwort. Mit a, b, c, ... l beginnend gehen vorher $\binom{24}{3}$, $\binom{23}{3}$, $\binom{22}{3}$ . . . . . $\binom{14}{3}$ Formen, zusammen 11649. Dann folgen mit mn beginnend $\binom{12}{2}$, $\binom{11}{2}$, ... $\binom{2}{2}$ Formen, im Ganzen 286; dann noch mit mop beginnend 10, so daß mors die 11946. ist.

2) Wie heißt die 7172. Combination der 25 Buchstaben des Alphabets zur 4. Klasse ohne Wiederholung?

Antwort. Mit a, b, c, d beginnen $\binom{24}{3} + \binom{23}{3} + \binom{22}{3} + \binom{21}{3} = 6665$ Formen. Käme noch $\binom{20}{3}$ hinzu, so würde die Anzahl größer als 7172 sein. Die fragliche beginnt also mit e.

*) Merkwürdiger Weise findet sich dies Gesetz, welches sich gewissermaßen aus der Anschauung von selbst ergiebt, meist nur mit Hülfe eines Formelapparates entwickelt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nun beginnen mit ef, eg, eh zusammen $\binom{19}{2} + \binom{18}{2} + \binom{17}{2} = 460$, und durch Hinzukommen von $\binom{16}{2}$ würde wiederum die gegebene Stellenzahl überschritten. Es beginnt daher die fragliche Form mit ei. Von diesen beginnen aber wiederum mit eik, eil und eim im Ganzen $15 + 14 + 13 = 42$. Es gehen demnach bis zu den mit ein beginnenden Formen $6665 + 460 + 42 = 7167$ Combinationen, die 7172. heißt also eins.

§. 18. Die Zahl der Combinationen mit Wiederholung von n Elementen zur kten Klasse läßt sich nicht so unmittelbar aus der entsprechenden Variationszahl ableiten, wie bei den Formen ohne Wiederholung geschehen ist, da nicht alle Variationen, welche dieselben Elemente enthalten, diese in gleicher Anzahl enthalten. Denkt man sich aber die Combinationen von n Elementen zur kten Klasse mit Wiederholung gebildet und dann in jeder Complexion das 2., 3., 4., ... kte Element durch dasjenige ersetzt, welches in der Normalcomplexion an 1., 2., 3., ... (k — 1)ter Stelle hinter dem ersetzten steht, (wobei man sich der Normalcomplexion beliebig viele Elemente hinzugefügt denkt), so erhält man aus den Combinationsformen von n Elementen zur kten Klasse mit Wiederholung die sämmtlichen Combinationen zu derselben Klasse ohne Wiederholung von (n + k — 1) Elementen. Es ist daher ${}^{w}C_{k}(n) = C_{k}(n + k - 1) =$

$$\frac{(n + k - 1)(n + k - 2) \ldots . n}{k!} = \frac{n(n + 1)(n + 2) \ldots . (n + k - 1)}{k!} =$$

$$\binom{n + k - 1}{k} = \binom{n + k - 1}{n - 1}.$$

Beispiele. 1) Wie viel 4-ziffrige Zahlen lassen sich mit den 9 Ziffern schreiben, in denen keine niedere Ziffer auf eine höhere folgt?

Antwort. ${}^{w}C_{4}(9) = \frac{9 \,.\, 10 \,.\, 11 \,.\, 12}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} = 495.$

2) Auf wie vielfache Weise Weise können von 3 Punkten, 3 Geraden und 3 Kreise irgend 3 Stücke gegeben sein?

Antwort. Auf ${}^{w}C_{3}(3) = \frac{3 \,.\, 4 \,.\, 5}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} = 10$fache Weise. (Vergl. die Gruppe planimetrischer Aufgaben, welche das Apollonische Tactionsproblem bilden.)

§. 19. In Betreff des Bildungsgesetzes der Combinationeu mit Wiederholung dürfen wir auf jenes der Variationen verweisen, wenn wir hinzufügen, daß bei der independenten Ableitung nach geschehener Erhöhung irgend eines Elementes kein anderes Element folgen darf, und ebenso bei der recurrirenden Methode kein anderes als das Schlußelement der Complexion einer niederen Klasse hinzugesetzt werden darf.

§. 20. Leicht finden auch hier die beiden Aufgaben ihre Erledigung, nämlich eine gegebene Combinationsform nach ihrer Stellenzahl, und nach gegebener Stellenzahl die Combinationsform zu bestimmen, ohne alle Formen zu bilden.

Beispiele. 1) Die wie vielte 4-ziffrige Zahl ist 5599, wenn solche aus den 9 Ziffern gebildet werden und keine niedere Ziffer auf eine höhere folgen darf?

Antwort. Der gegebenen Form 5599 gehen die Formen voran, welche mit 1, 2, 3 und 4 beginnen; die Zahl derselben ist ${}^{w}C_{3}(9) + {}^{w}C_{3}(8) + {}^{w}C_{3}(7) + {}^{w}C_{3}(6) = 425$. Von den folgenden

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

beginnen mit 555, 556, 557 und 558 der Reihe nach 5, 4, 3, 2, im Ganzen 14. Es ist also 5599 die 440. 4-ziffrige Zahl.

2) Wie heißt die 3866. Combination zur 4. Klasse mit Wiederholung von den 25 Buchstaben des Alphabets?

Antwort. Der gesuchten Form gehen 3865 Formen voraus, davon beginnen mit a im Ganzen ${}^{w}C_{3}(25) = 2925$; mit bb, bc, bd beginnen der Reihe nach ${}^{w}C_{2}(24)$, ${}^{w}C_{2}(23)$, ${}^{w}C_{2}(22)$, im Ganzen 829; von den folgenden beginnen 21 mit bee, 20 mit bef, 19 mit beg, 18 mit beh, 17 mit bei, 16 mit bek. Die Summe aller dieser ist 3865, also heißt die fragliche bell.

B. Binomialcoeffizienten; figurirte Zahlen.

§. 20. Die für die Analysis weitaus wichtigste der vorher behandelten combinatorischen Operationen ist die Combination ohne Wiederholung. — Man kann dieselbe anwenden, um das Product $(x \overset{1}{+} a)(x \overset{2}{+} b)(x \overset{3}{+} c) \ldots (x \overset{n}{+} p)$, welches aus n Factoren besteht, direct bestimmen, ohne die Multiplication nach den gewöhnlichen Regeln auszuführen. Das reduzirte Product hat bekanntlich die Form

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Px + Q,$$

in welcher die Coeffizienten A, B, . . . P, Q mit Hülfe der Combination aus den Größen a, b, c . . . p auf folgende Weise bestimmt werden. Es ist A die Summe $(a + b + c + \ldots p)$; denn das Product von je $(n-1)$ dieser Factoren, dessen erstes Glied x^{n-1} ist, wird mit dem zweiten Gliede des je nten Binoms multiplizirt. Das x^{n-1}, welches durch die Multiplication des 2., 3. . . . bis nten Factors entsteht, wird mit a multiplizirt, das erste Glied x^{n-1} des Productes aller Factoren außer dem 2. mit b u. s. w. Der Coeffizient B ist die Summe $(ab + ac + \ldots ap + bc + bd + \ldots bp + \ldots)$ da das erste Glied des Productes von je $(n-2)$ obiger Factoren mit dem Producte der zweiten Glieder der jedes Mal übrigen 2 anderen Factoren multiplizirt wird. In gleicher Weise erkennt man, daß der Coeffizient von x^{n-3}, nämlich C, die Summe $(abc + abd + \ldots bcd + \ldots bcp + cde + \ldots cdp + \ldots)$ ist, da jedes x^{n-3}, welches durch Multiplication von je $(n-3)$ obiger Factoren entsteht, mit dem Producte der zweiten Glieder der jedes Mal übrigen 3 Binome multiplizirt wird; u. s. w. Versteht man daher unter $\underset{k}{C}(abc \ldots p)$ nicht die Anzahl der Combinationen, sondern diese selbst, und in denselben die Elemente als Factoren, ferner unter dem Symbol $S\,\underset{k}{C}(abc \ldots p)$ die Summe aller dieser Producte, so ist nach dem Vorhergehenden klar, daß das Product $(x + a)(x + b)(x + c) \ldots (x + p)$, welches n Factoren haben möge durch

$$x^n + S\,\underset{1}{C}(abc \ldots p)\,x^{n-1} + S\,\underset{2}{C}(abc \ldots p)\,x^{n-2} + \ldots\ldots$$
$$S\,\underset{n-2}{C}(abc \ldots p)\,x^2 + S\,\underset{n-1}{C}(abc \ldots p)\,x + S\,\underset{n}{C}(abc \ldots p)$$

ausgedrückt werden kann.

Es bedarf wohl kaum der Erinnerung, daß, wenn unter den Größen a, b, c . . . . p negative vorkommen, die betreffenden Producte positiv oder negativ zu nehmen sind, je nachdem die Anzahl der in ihnen enthaltenen Factoren gerade oder ungerade ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Beispiel. $(x + 1)(x - 2)(x - 3)(x + 4)(x - 5) = x^5 + 5x^4 - 15x^3 - 65x^2 + 74x + 120$.

§. 22. Werden in den zu multiplizirenden Binomen die Größen a, b, c, . . . p alle = a, so geht das Product in $(x + a)^n$ über. Die Entwicklung dieser Potenz nach der vorhin angegebenen Methode nennt man die Binomalreihe oder auch den binomischen Lehrsatz.

Statt der Summen $(a + b + c + \ldots p)$, $(ab + ac + \ldots ap + bc + \ldots bp + \ldots)$, $(abc + abd + \ldots bcd + \ldots bcp + \ldots)$ u. s. w. erhält man offenbar die Summen $(a + a + a + \ldots a)$, $(a^2 + a^2 + a^2 + \ldots a^2)$, $(a^3 + a^3 + a^3 + \ldots a^3)$ u. s. w. und zwar a so oft, als sich n Elemente zur 1. Klasse, a^2 so oft, als sich n Elemente zur 2. Klasse u. s. w. combiniren lassen. Man erhält also:

$$(x + a)^n = x^n + \underset{1}{C}(n)\, x^{n-1} \cdot a + \underset{2}{C}(n)\, x^{n-2} \cdot a^2 + \ldots \underset{n}{C}(n) \cdot a^n,$$

oder gemäß der in §. 14 angegebenen Bezeichnung

$$(x + a)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} \cdot a + \binom{n}{2} x^{n-2} \cdot a^2 + \ldots \binom{n}{n-2} x^2 \cdot a^{n-2} + \binom{n}{n-1} x \cdot a^{n-1} + \binom{n}{n} x^n.$$

Ist a negativ, so werden die Glieder der Reihe abwechselnd negativ, indem diejenigen Potenzen von a, deren Exponenten ungerade sind, negativ werden. Es ist daher

$$(x \pm a)^n = x^n \pm \binom{n}{1} x^{n-1} \cdot a + \binom{n}{2} x^{n-2} \cdot a^2 \pm \ldots + \binom{n}{n} \cdot a^n \cdot (-1)^n.$$

Wenn man gemäß dem Gesetze $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ noch $\binom{n}{o} = \binom{n}{n} = 1$ setzt, so läßt sich die ganze Reihe durch

$$(x \pm a)^n = \mathop{S}_{k=n}^{k=o} \binom{n}{k} x^{n-k} \cdot a^k \cdot (\pm 1)^k$$

darstellen, durch welches Symbol die Summe aller Glieder von der Form $\binom{n}{k} x^{n-k} \cdot a^k$ ausgedrückt wird, wenn in diesen der Reihe nach $k = 0, 1, 2 \ldots n$ gesetzt wird. Der Factor $(-1)^k$ entscheidet in jedem Falle über das Vorzeichen des betreffenden Gliedes für den Fall, daß a negativ ist.

§. 23. Wiewohl der binomische Lehrsatz für die höhere Analysis erst dann seine ganze Bedeutung erhält, wenn er in seiner Allgemeingültigkeit für jegliches n, sei es positiv oder negativ, ganz oder gebrochen, algebraisch oder transcendent, reell oder imaginär, erwiesen ist, so gewinnt doch schon die Betrachtung der Coeffizienten der Binomialreihe für ein ganzes und positives n ein bedeutendes Interesse. Es sind theils Eigenschaften derselben an sich, theils ihre Beziehungen zu gewissen Zahlreihen, den sogenannten figurirten Zahlen und anderen, die hier in Kürze dargelegt werden sollen.

§. 24. In der Bezeichnung $\binom{n}{k}$ heißt n die Basis und k der Index des Binomialcoeffizienten. Da $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}$ ist, so folgt, daß in der Entwicklung der Binomialreihe für einen ganzen und positiven Exponenten auf das Glied, dessen B. C. $\binom{n}{n}$ ist, kein

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ferneres Glied mehr folgen kann, da die nach dem angegebenen Gesetze ausgedrückten Coeffizienten den Factor Null enthalten. Es folgt ferner aus $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, daß in der geordneten Binomalreihe die B. C. von vorn und hinten gelesen dieselben sind. Fernere Eigenschaften der B. C. sind folgende.

1) Die Summe aller B. C. für die Basis n ist 2^n; die algebraische Summe der abwechselnd positiv und negativ genommenen B. C. ist Null.

Der Beweis ergiebt sich sofort, wenn man in der Reihenentwicklung für $(x \pm a)^n$ sowohl x als $a = 1$ setzt. Man erhält alsdann links 2^n oder 0, und rechts die Summe oder die algebraische Summe der B. C. Es ist also

$$\mathop{S}_{k=n}^{k=o} \binom{n}{k} = 2^n, \text{ und } \mathop{S}_{k=n}^{k=o} \binom{n}{k} \cdot (-1)^k = 0.$$

Zusatz. Da die B. C. mit Ausschluß von $\binom{n}{0}$, welches $= 1$ ist, die Combinationszahlen von n Elementen zu allen Klassen angeben, so folgt zunächst, daß die Summe aller Combinationen von n Elementen zu allen Klassen $2^n - 1$ ist, ferner, daß die Summe aller Combinationen von n Elementen zu allen Klassen mit geradem Index $= 2^{n-1} - 1$, mit ungeradem $= 2^{n-1}$ ist.

2) Die Summe zweier B. C. von gleicher Basis, deren Indices um 1 verschieden sind, ist der B. C. der um 1 vermehrten Basis mit dem höheren Index.

Beweis. Da $\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k} \cdot \binom{n}{k-1}$ ist, so folgt, daß

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n}{k+1}\left(\frac{n-k+1}{k} + 1\right) = \binom{n+1}{k}.$$

Zusatz. Nach diesem Gesetze ist die bekannte Tabelle der B. C. construirt, welche man das Pascal'sche Dreieck oder triangulus arithmeticus nennt.

3) Die Summe aller B. C. von demselben Index, bei welchem die Basis des ersten gleich dem Index ist und bei jedem folgenden um 1 wächst, ist gleich einem B. C., dessen Basis und Index um 1 größer sind, als im letzten Summandus.

Beweis. Setzt man für $\binom{k}{k}$ und $\binom{k+1}{k}$ die ihnen gleichen Quotienten, so ergiebt sich $\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} = \frac{k \cdot (k-1)(k-2) \ldots 1}{k!}(1 + k + 1)$, oder, wenn man im Dividendus und Divisor den Factor $(k + 1)$ hinzufügt: $\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} = \binom{k+2}{k+1}$.

Addirt man nun hierzu $\binom{k+2}{k}$, so erhält man nach 2)

$$\binom{k+2}{k+1} + \binom{k+2}{k} = \binom{k+3}{k+1} \text{ u. s. w. Es ist also}$$

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \ldots \binom{k+p}{k} = \binom{k+p+1}{k+1},$$

was man wiederum in gebräuchlicher Weise also ausdrückt:

$\mathop{S}_{p=p}^{p=o} \binom{k+p}{k} = \binom{k+p+1}{k+1}$, worin p nach und nach die Werthe 0, 1, 2, ... p annimmt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zusatz. Da zwei B. C. derselben Basis, deren Indices sich zur Basis ergänzen, einander gleich sind, so kann man den vorhergehenden Satz auch so ausdrücken:

Die Summe aller B. C., deren erster eine beliebige Basis und den Index 0 hat, und deren Basen und Indices bei jedem folgenden um 1 wachsen, ist ein B. C., dessen Index dem letzten Index gleich ist und dessen Basis um 1 größer ist als die letzte. In Formeln eehalten wir:

$$\binom{k}{o} + \binom{k+1}{1} + \binom{k+2}{2} + \ldots \binom{k+p}{p} = \binom{k+p+1}{p}.$$

§. 25. Wenn man aus der Zahlreihe der natürlichen Zahlen

1, 2, 3, 4 . . . . 10, 11 . . . .

durch allmälige Summation die neue Reihe

1, 3, 6, 10, ... 55, 66 . . .

bildet, so stellt diese die Reihe der sogenannten dreieckigen oder Dreiecks-Zahlen (Trigonalzahlen) dar. Durch abermalige Summirung der Glieder dieser Reihe entsteht die neue:

1, 4, 10. 20, 35 . . . .,

deren Glieder dreieckige (trigonale) Pyramidalzahlen genannt werden. Die erste Reihe heißt die Stammreihe dieser Zahlen. Der Name „Dreieckszahlen" und „dreieckige Pyramidalzahlen" rührt daher, daß man eine Anzahl Punkte, welche durch die Glieder der Reihe der Dreieckszahlen ausgedrückt wird, zu einem gleichseitigen Dreieck, eine Anzahl Punkte, ausgedrückt durch die Glieder der Reihe der dreieckigen Pyramidalzahlen, zu einer dreiseitigen Pyramide zusammenstellen kann.

Leitet man in ähnlicher Weise aus jeder der Stammreihen

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 . . . .
1, 4, 7, 10, 13, 16, 19 . . . .
1, 5, 9, 13, 17, 21, 25 . . . .
u. s. w.,

deren Differenzen der aufeinander folgenden Glieder der Reihe nach 2, 3, 4 . . u. s. w. sind, zwei neue Reihen ab, so erhält man aus der ersten dieser neuen Stammreihen die viereckigen Zahlen und viereckigen Pyramidalzahlen, aus der zweiten die fünfeckigen Zahlen und die fünfeckigen Pyramidalzahlen u. s. w. Diese Benennungen beruhen auf einer ähnlichen Constructionsmöglichkeit, wie bei den dreieckigen Zahlen und dreieckigen Pyramidalzahlen und insgesammt heißen die aus den Stammreihen abgeleiteten Zahlenreihen figurirte Zahlen*), und zwar die erste die Reihe der Polygonalzahlen, die zweite die der Pyramidalzahlen.

Die allgemeine Stammreihe, durch deren Summirung die p-eckigen Polygonalzahlen und weiter die p-eckigen Pyramidalzahlen gebildet werden, ist, wie leicht erkennbar:

$$\overset{1}{1},\ 1 + \overset{2}{(p-2)},\ 1 + \overset{3}{2}(p-2),\ 1 + \overset{4}{3}(p-2),\ \ldots 1 + (\overset{n}{n-1})\,p-2).$$

*) Bekanntlich heißen im ursprünglichen Sinne figurirte Zahlen die natürliche Zahlenreihe und die durch fortgesetzte Summirung daraus abgeleiteten Reihen. Die Stammreihe enthält die figurirten Zahlen 1. Ordnung, die abgeleiteten Reihen enthalten nach einander die figurirten Zahlen der 2., 3., 4. . . . . pten Ordnung für welche als allgemeiner Ausdruck nach dem folgenden Paragraphen leicht $\binom{n+p-1}{p}$ abgeleitet werden kann. Da aber die figurirten Zahlen höherer als 3. Ordnung eine graphische Darstellung in ähnlicher Weise, wie die oben angegebenen Zahlenreihen, nicht gestatten, so haben wir im Interesse der Schule den Begriff „figurirte Zahlen" so, wie es geschehen, präcisirt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 26. Mit Hülfe der oben entwickelten Eigenschaften der B. C. ist man im Stande in jeder der aus einer Stammreihe abgeleiteten Reihe figurirter Zahlen irgend ein durch seine Stellenzahl bezeichnetes Glied direct zu bestimmen.

1) Das nte Glied der Stammreihe der Dreieckszahlen ist n, daher die nte Dreieckszahl $\mathfrak{S}\binom{n}{1} = \binom{n+1}{2} = \frac{n\,.\,(n+1}{1\,.\,2}$, welches Resultat auch die Summenformel der arithmetischen Progression liefert, und ebenso ergiebt sich, daß die nte dreieckige Pyramidalzahl

$$= \mathfrak{S}\binom{n+1}{2} = \binom{n+2}{3} = \frac{n\,.\,(n+1)\,(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3} \text{ ist.}$$

2) Das nte Glied der Stammreihe der Viereckszahlen ist $2n - 1$, daher die nte Viereckszahl $S\,(2n-1) = 2\,\mathfrak{S}\binom{n}{1} - n = 2\,.\binom{n+1}{2} - n = n^2$, wie auch die Summenformel der arithmethischen Progression ergiebt.

Um die nte viereckige Pyramidalzahl zu bestimmen, welche $= S\,(n^2)$ ist, setze man, wie eben, $n^2 = 2\,.\binom{n+1}{2} - n$ und man erhält $S\,(n^2) = 2\,.\,\mathfrak{S}\binom{n+1}{2} - \mathfrak{S}\binom{n}{1} =$
$2\,.\binom{n+2}{3} - \binom{n+1}{2} = 2\,.\,\frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3} - \frac{n\,.\,(n+1)}{1\,.\,2} =$
$\frac{1}{6}\,n\,.\,(n+1)\,(2n+1)$.

3) Aus der Stammreihe der p=eckigen Zahlen findet man die nte p=eckige Zahl
$= S\,[1 + (p-2)\,(n-1)] = n + (p-2)\binom{n}{2}$, (da 1 in der Summe n mal vorkommt)
$= \binom{n}{1} + (p-2)\binom{n}{2}$. Da ferner $\mathfrak{S}\left[\binom{n}{1} + (p-2)\binom{n}{2}\right] = \binom{n+1}{2} + p - 2\binom{n+1}{3}$ ist, so ist dies der allgemeine Ausdruck der nten p=eckigen Pyramidalzahl.

Speziell erhält man hieraus wiederum für die dreieckigen, viereckigen u. s. w. Polygonalzahlen die Ausdrücke

$$\binom{n}{1}\cdot\frac{n+1}{2},\ \binom{n}{1}\cdot\frac{2n}{2},\ \binom{n}{1}\cdot\frac{3n-1}{2},\ \binom{n}{1}\cdot\frac{4n-2}{2} \text{ u. s. w.,}$$

in gleicher Weise für die dreieckigen, viereckigen u. s. w. Pyramidalzahlen die Ausdrücke

$$\binom{n+1}{2}\cdot\frac{n+2}{3},\ \binom{n+1}{2}\cdot\frac{2n+1}{3},\ \binom{n+1}{2}\cdot\frac{3n}{3},\ \binom{n+1}{2}\cdot\frac{4n-1}{3} \text{ u. s. w.}$$

§. 27. Eine Reihe von Potenzen der natürlichen Zahlenreihe mit gleichen Exponenten kann nach dem Vorhergenden summirt werden. Man leitet hierbei am Besten die Summe der Potenzen mit einem höheren Exponenten aus der Summe der Potenzen mit dem nächst niedrigeren Exponenten ab.

1) $S\,(n^3)$ zu erhalten ($S\,(n^2)$ ist bereits als viereckige Pyramidalzahl entwickelt) setze man

$$n^3 = n\,(n-1)\,(n-2) + 3n^2 - 2n, \text{ dann erhält man}$$

$$S\,(n^3) = 6\,\mathfrak{S}\binom{n}{3} + 3\,S\,(n^2) - 2\,\mathfrak{S}\binom{n}{1}$$

$$= 6\,.\binom{n+1}{4} + \frac{1}{2}\,n\,.\,(n+1)\,(2n+1) - 2\binom{n+1}{2}, \text{ woraus man nach}$$

einiger Reduction findet

$$S\,(n^3) = \binom{n+1}{2}^2 = \left[\frac{n\,(n+1)}{1\,.\,2}\right]^2.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2) Da $n^4 = n(n-1)(n-2)(n-3) + 6n^3 - 11n^2 + 6n$ ist, so ist

$$S(n^4) = 24\,S\binom{n}{4} + 6\,S(n^3) - 11\,S(n^2) + 6\,S\binom{n}{1}$$

$$= 24 \cdot \binom{n+1}{5} + 6\binom{n+1}{2}^2 - \frac{11}{6}\,n(n+1)(2n+1) + 6 \cdot \binom{n+1}{2}.$$

Für die höheren Potenzen werden die Ausdrücke allerdings immer complicirter, sind aber doch stets eine bedeutende Abkürzung der sonst nothwendigen Addition.

§. 28. Als Erläuterung der beiden vorhergehenden Paragraphen mögen einige Aufgaben dienen.

1) Eine Anzahl Kugeln ist in Form einer dreiseitigen Pyramide so aufgeschichtet, daß die einzelnen Schichten Seiten von 1, 2, 3 u. s. w. Kugeln haben. Wieviel Kugeln liegen a) in der 15. Schicht? b) in der ganzen Pyramide?

Antwort. a) Die 15. Dreieckszahl ist $\binom{16}{2} = 120$.

b) Die 15. dreieckige Pyramidalzahl ist $\binom{17}{3} = 680$.

2) Ebenso ist eine Anzahl Kugeln in Form einer abgestumpften vierseitigen Pyramide aufgeschichtet, deren Schichten Quadrate sind. Wenn nun die untere Schicht 11, die obere 5 Kugel an der Seite hat, wieviel Kugel enthält dann der Haufen?

Antwort. Die Zahl der Kugeln ist die Differenz der 11. und der 4. viereckigen Pyramidalzahl. Da nnn die nte viereckige Pyramidalzahl durch $\binom{n+1}{2} \cdot \frac{2n+1}{3}$ ausgedrückt wird, so ist die fragliche Zahl $\binom{12}{2} \cdot \frac{23}{3} - \binom{5}{2} \cdot 3 = 476$.

3) Die unterste Schicht eines Kugelhaufens habe die Form eines Rechtecks und zwar mögen sich an der einen Seite m, an der andern n (< m) Kugeln befinden; in jeder folgenden Schicht möge sich an jeder Seite eine Kugel weniger befinden. Wieviel Kugeln sind a) in einem vollständigen Haufen von n Schichten enthalten? Wieviel Kugeln befinden sich b) in einer länglichen Pyramide von n Schichten, welche am Grunde in der Länge m, in der Breite n Kugeln hat und welche sich mit den beiden Enden an zwei andere vierseitige Pyramiden anlehnt? Wieviel Kugeln befinden sich c) in einem Kugelhaufen, der ein hohles Viereck oder sogenanntes Carré bildet, wenn der Rücken im Ganzen m Kugeln enthält und die Anzahl der Schichten n beträgt? Wieviel Kugeln endlich befinden sich d) in einem solchen hohlen Viereck, wenn zur Bildung eines Einganges vom Rücken p Kugeln abgenommen werden? (S. Heis, Aufgabensammlung.)

Antwort. a) Die n Schichten enthalten, von der obersten angefangen, der Reihe nach

$$(m-n+1),\ 2(m-n+2),\ 3(m-n+3),\ \ldots\ldots n(m-n+n)$$

Kugeln. Es ist daher die Summe aller Kugeln

$$S[n(m-n+n)] = (m-n)\,S\binom{n}{1} + S(n^2),$$ woraus man findet

$$(m-n)\binom{n+1}{2} + \frac{1}{6}\,n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{6}\,n(n+1)(3m-n+1).$$

b) Die n Schichten enthalten, von der obersten angefangen, der Reihe nach

$$(m+n-1),\ 2(m+n-2),\ 3(m+n-3)\ \ldots\ldots n(m+n-n)$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Kugeln. Ihre Summe ist demnach

$$S\,[n\,(m + n - n)] = (m + n)\,S\binom{n}{1} - S\,(n^2), \text{ woraus man erhält}$$

$$(m + n)\binom{n+1}{2} - \frac{1}{6}\,n\,(n + 1)\,(2n + 1) = \frac{1}{6}\,n\,(n + 1)\,(3m + n - 1).$$

c) Die Reihen in den einzelnen Schichten nehmen nach innen um 1 ab, nach außen um 1 zu, daher enthalten die Schichten der Reihe nach

$m,\ 2m,\ 3m,\ \ldots\ nm$ Kugeln, so daß sich als Summe

$$m\,.\,S\binom{n}{1} = m\,.\binom{n+1}{2} = \frac{mn\,.\,(n + 1)}{2} \text{ ergiebt.}$$

d) Nach b) ist die Anzahl aller weggenommenen Kugeln $\frac{1}{6}\,n\,(n + 1)\,(3p - 2n + 2)$ daher die Gesammtzahl der übrigen

$$\frac{mn\,.\,(n + 1)}{2} - \frac{1}{6}\,n\,(n + 1)\,(3p - 2n + 2) = \frac{1}{6}\,n\,(n + 1)\,(3\,(m - p) + 2n - 2).$$

C. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

§. 29. Unter der mathematischen Wahrscheinlichkeit für das Eintreten irgend eines Ereignisses versteht man einen Quotienten, dessen Divisor die Zahl aller gleich möglichen Fälle, und dessen Dividend die Zahl der für das Eintreten des fraglichen Ereignisses günstigen Fälle ist, oder: Das Verhältniß der Zahl der für das Eintreten irgend eines Ereignisses günstigen Fälle zur Zahl aller gleich möglichen Fälle, unter welche das fragliche fällt. Da im Allgemeinen die Zahl der günstigen Fälle kleiner ist als die Zahl aller möglichen, so ist der die Wahrscheinlichkeit w eines Ereignisses darstellende Quotient $\frac{p}{q}$ im Allgemeinen ein echter Bruch. In dem speziellen Falle, daß $p = q$ ist, wird die Wahrscheinlichkeit $w = 1$ und das Ereigniß heißt gewiß; ist $p = 0$, also auch $w = 0$, so ist das Ereigniß unmöglich. Man nennt ferner ein Ereigniß

unwahrscheinlich, wenn seine Wahrscheinlichkeit $w < \frac{1}{2}$, wahrscheinlich, wenn $w > \frac{1}{2}$, und ungewiß, wenn $w = \frac{1}{2}$ ist.

Ist $w = \frac{p}{q}$, so bezeichnet $1 - \frac{p}{q}$, meist durch u bezeichnet, die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, d. h. die Wahrscheinlichkeit für das Nichteintreten desselben Ereignisses, für dessen Eintreten $w = \frac{p}{p}$ ist. In manchen Fällen bestimmt man die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses dadurch, daß man die unmittelbarer zu bestimmende entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit von 1 abzieht.

Beispiele. 1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit 3 Würfeln in einem Wurfe 11 Augen zu werfen?

Antwort. Die Zahl der möglichen Würfe ist ${}^{w}V_{3}(6) = 6^3 = 216$. Die Zahl 11 kann durch 1, 4 und 6 auf 6 Weisen, durch 1, 5 und 5 auf 3 Weisen, durch 2, 3 und 6 auf 6 Weisen,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

durch 2, 4 und 5 ebenfalls auf 6 Weisen, endlich durch 3, 3 und 5 auf 3 Weisen, also überhaupt auf 24 Weisen geworfen werden. Es ist daher $w = \frac{24}{216} = \frac{1}{9}$.

2) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einem vollständigen Kartenspiel von 32 Karten 3 Bilder zu treffen?

Antwort. Es giebt $\binom{32}{3}$ mögliche, $\binom{12}{3}$ günstige Fälle, daher ist

$$w = \binom{12}{3} : \binom{32}{3} = \frac{11}{248} = 0{,}044.$$

3) In einer Urne befinden sich 5 weiße, 6 rothe und 7 schwarze Kugeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim Herausnehmen von 6 Kugeln 1 weiße, 2 rothe und 3 schwarze zu treffen?

Antwort. Die Zahl der möglichen Fälle ist $\binom{18}{6}$; 1 weiße Kugel kann 5 mal, 2 rothe $\binom{6}{2}$ mal, und 3 schwarze $\binom{7}{3}$ mal gezogen werden. Nun kann jede weiße mit jedem Paare rother und mit je drei schwarzen gezogen werden; die Zahl der günstigen Fällen ist daher

$$5 \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{7}{3}, \text{ also } w = .\, 5 \binom{6}{2} \binom{7}{3} = \frac{125}{894} = 0{,}14.$$

4) Welche Wahrscheinlichkeit hat man, aus einer Urne, welche n Kugeln enthält, in einem Griff a) eine gerade, b) eine ungerade Zahl zu treffen? (Vergl. Baltzer, Elemente.)

Antwort. Die Zahl aller Combinationen von n Elementen zu allen Klassen ist $2^n - 1$, die Zahl aller mit geradem Klasseninder $= 2^{n-1} - 1$, die Zahl aller mit ungeradem Klasseninder 2^{n-1}. (Vergl. §. 24.) Daher die Wahrscheinlichkeiten

$$\text{a) } w = \frac{2^{n-1} - 1}{2^n - 1}, \quad \text{b) } w = \frac{2^{n-1}}{2^n - 1}.$$

§. 20. Sind $w_1, w_2, w_3, \ldots$ die partiellen Wahrscheinlichkeiten für eine Reihe unabhängiger Ereignisse A, B, C, ..., $u_1, u_2, u_3 \ldots$ die entgegengesetzten Wahrscheinlichkeiten, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß eins dieser Ereignisse (gleichgültig, welches) eintrete: $w = w_1 + w_2 + w_3 + \ldots$ d. h. die Summe der partiellen Wahrscheinlichkeiten. Ebenso ist $u = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$

Die Wahrscheinlichkeit aber, daß jene Ereignisse zusammen oder in irgend einer Reihenfolge nach einander eintreten, ist dem Producte der partiellen Wahrscheinlichkeiten gleich, also $w = w_1 \cdot w_2 \cdot w_3 \ldots$, $u = u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \ldots$. Ebenso ist die Wahrscheinlichkeit für das n-malige Eintreten des Ereignisses A hinter einander $w = w_1{}^k$, die Wahrscheinlichkeit für das n-malige Nichteintreten $u = u_1{}^n$. — Die Beweise ergeben sich leicht aus der Definition der mathematischen Wahrscheinlichkeit überhaupt.

Beispiele. 1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim Herausziehen von 3 Karten aus einem vollständigen Spiel von 32 Karten entweder 2 rothe, oder 1 schwarze und 2 rothe zu treffen?

Antwort. Die partielle Wahrscheinlichkeit w_1, 3 rothe Kugeln zu ziehen, ist $\binom{16}{3} : \binom{32}{3} = \frac{7}{62}$; die partielle Wahrscheinlichkeit w_2, 1 schwarze und 2 rothe zu ziehen ist $16 \cdot \binom{16}{2} : \binom{32}{3} = \frac{24}{62}$, daher ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $w = w_1 + w_2 = \frac{31}{62} = \frac{1}{2}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln beim ersten Wurf 9 zu werfen, oder, wenn das nicht geschieht, doch beim zweiten Wurf diese Augenzahl zu treffen?

Antwort. Die Zahl der möglichen Würfe ist $6^2 = 36$. Die Zahl 9 kann durch 3 und 6 auf 2, und durch 4 und 5 ebenfalls auf 2 Weisen geworfen werden, daher die Wahrscheinlichkeit, beim ersten Wurf 9 zu werfen $w_1 = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$. Folglich ist die Wahrscheinlichkeit, beim ersten Wurf nicht 9 zu werfen, $u_1 = \frac{8}{9}$; die Wahrscheinlichkeit aber, im ersten Wurf nicht 9 zu werfen, wohl aber im zweiten, ist also $w_1 \,.\, u_1 = \frac{8}{81}$, und endlich die Wahrscheinlichkeit, entweder im ersten, oder doch im zweiten Wurfe 9 zu treffen $w_1 + w_1 \,.\, u_1 = \frac{1}{9} + \frac{8}{81} = \frac{17}{81}$.

3) In einer Urne sind 10 weiße und 10 schwarze Kugeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit beim Herausziehen einer beliebigen Anzahl eine gleiche Anzahl weißer und schwarzer zu treffen? (Bardey, Aufgabensammlung.)

Antwort. Der Nenner des Quotienten, welche die fragliche Wahrscheinlichzeit ausdrückt, ist die Zahl aller Combinationen von 20 Elementen zu allen Klassen, also $2^{20} - 1 = 1048575$. Der Zähler ist die Summe $\binom{10}{1}^2 + \binom{10}{2}^2 + \binom{10}{3}^2 + \ldots \binom{10}{10}^2 = 184755$. Es ist daher $w = \frac{184755}{1048575} = \frac{12317}{69905} = 0{,}176$.

4) Aus einer Lotterie von 90 Loosen, von denen 5 Treffer gezogen werden, hat A 4, B 5 Loose. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, a) daß beide gewinnen, b) A allein, c) B allein, d) entweder A oder B, e) weder A noch B, f) mindestens einer? (Bardey, Aufgabensammlung.)

Antwort. Die Zahl der möglichen Ziehungen ist $\binom{90}{5}$. Heißen nun die partiellen Wahrscheinlichkeit zu gewinnen für A und B der Reihe nach w_1 und w_2, die entgegengesetzten u_1 und u_2, so ergiebt sich, daß für A, welcher 4 Loose hat, die Combinationszahl der 86 übrigen Nummern zur 5. Klasse, für B, welcher 5 Loose hat, die Combinationszahl der 85 übrigen Nummern zur 5. Klasse die Zahl der für den Nicht-Gewinn günstigen Fälle bezeichnet. Daraus ergiebt sich

$$u_1 = \binom{86}{5} : \binom{90}{5} = 0{,}792, \text{ und also } w_1 = 0{,}208;$$

$$u_2 = \binom{85}{5} : \binom{90}{5} = 0{,}747, \text{ und also } w_2 = 0{,}253.$$

Hieraus erhalten wir als Antworten

a) $w_1 \; w_2 = 0{,}053$; b) $w_1 \,.\, u_2 = 0{,}155$; c) $w_2 \,.\, w_1 = 0{,}201$;
d) $w_1 \,.\, u_2 + w_2 \,.\, u_1 = 0{,}356$; e) $u_1 \,.\, u_2 = 0{,}591$;
f) $w_1 \,.\, w_2 + w_1 \,.\, u_2 + w_2 \,.\, u_1 = 0{,}409$.

§. 31. Wenn von mehreren Ereignissen eins eintreten muß, so heißen dieselben conträr, die Summe der partiellen Wahrscheinlichkeiten conträrer Ereignisse ist also gleich 1. Speziell sind hiernach zwei Ereignisse conträr, bei denen die Wahrscheinlichkeit des einen die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit des andern ist. Da nach den Umständen der vorigen Aufgabe entweder A und B, oder A allein, oder B allein, oder endlich keiner von beiden gewinnt, so sind die in den Fragen a), b), c) und e)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ausgedrückten Ereignisse conträr, ebenso die unter e) und f) ausgedrückten Ereignisse, da entweder keiner, oder mindestens einer gewinnt. Dem entsprechend ist sowohl die Summe der unter a), b), c) und e) als auch der unter e) und f) augegebenen Wahrscheinlichkeiten = 1.

§. 32. Schließlich möge noch bemerkt werden, daß man unter relativer Wahrscheinlichkeit eines von mehreren Ereignissen das Verhältniß der partiellen Wahrscheinlichkeit dieses einen Ereignisses zur Summe der partiellen Wahrscheinlichkeiten aller dieser Ereignisse versteht.

Beispiel. Wie groß ist die Wahricheinlichkeit, daß das in der vorige Aufgabe unter f) ausgedrückte Ereigniß eher eintrete als die andern?

Antwort. $\frac{0,409}{1,765} = 0,232.$

Zusatz. Es ergiebt sich hiernach von selbst, daß die relative Wahrscheinlichkeit eines von mehreren conträren Ereignissen von der partiellen Wahrscheinlichkeit desselben nicht verschieden ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf