Die goniometrischen Functionen in ihrer allgemeinen analytischen Bedeutung.

(Ein Beitrag zur Trigonometrie.)

§. 1.

Die goniometrischen oder trigonometrischen Funktionen bilden mit den sogenannten hyperbolischen Funktionen ein besonderes Funktionengeschlecht, welches unter dem Namen Potenzialfunktionen seine Stelle in der Mathematik eingenommen hat. Als Glied dieser höheren Funktionsordnung werden die trigonometrischen Funktionen auch die cyklischen genannt. Die Benennung beider Arten von Potenzialfunktionen entspricht nicht ihrer analytischen Bedeutung überhaupt, sondern sie ist vielmehr hergenommen von der in der analytischen Geometrie angewandten Darstellung derselben am Kreise und an der gleichseitigen Hyperbel.[1]) —

In den Lehrbüchern der Trigonometrie trifft man vielfach eine Anwendung der goniometrischen (cyclischen) Funktionen auf Algebra an. In dieser Anwendung wird offenbar das enge Gebiet der unmittelbaren Anwendung dieser Funktionen auf die Auflösung von Dreiecken oder Polygonen verlassen, und man betritt das erweiterte Gebiet, auf welchem diese Funktionen ihre allgemeine analytische Bedeutung erhalten. Auch der Verfasser dieser Zeilen hat in seinem im Verlage von B. G. Teubner in Leipzig im vorigen Jahre erschienenen Lehrbuche der ebenen und sphärischen Trigonometrie in einem besonderen

1) Man vergleiche hierüber die Schriften von Lambert und die von Chr. Gudermann. Letzterer (früher Oberlehrer am Clever Gymnasium, später Professor der Mathematik zu Münster) hat in einem Werke „Potenzial-Funktionen" eine umfassende Theorie hierüber aufgestellt. Auch findet sich dasselbe Werk in mehreren Abhandlungen im 6., 7., 8. und 9. Bande des Crelle'schen Journals.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Capitel die Anwendung der goniometrischen Funktionen auf Arithmetik und Algebra behandelt. Unerläßlich ist hierbei die sogenannte Moivre'sche Formel, wenn man auch diejenigen Gleichungen mit Hülfe der goniometrischen Funktionen auflösen will, deren Wurzeln entweder sämmtlich, oder doch zum Theil imaginair sind.

Wenngleich es für den Schulbedarf nicht erforderlich ist, mit Zugrundelegung der allgemeineren Bedeutung der goniometrischen Formeln die für die ausgedehnte analytische Anwendung nothwendige Moivre'sche Formel $(\cos\alpha \pm i.\sin\alpha)^n = \cos n.\alpha \pm i.\sin n\alpha$ in ihrer allgemeinen Gültigkeit ohne Rücksicht auf die Natur des Exponenten n zu beweisen, so wolle man es als einen wohlberechtigten Zusatz zu dem angezogenen Capitel des genannten Lehrbuchs der Trigonometrie halten, wenn wir hier den Versuch machen, eine allgemein analytisch schlechthin gültige Bedeutung der goniometrischen Funktionen zu statuiren und auf Grund dieser allgemeinen analytischen Bedeutung die Wege für ihre Anwendung zu ebnen.

§. 2.

Die Funktion e^x läßt sich auf verschiedene Weise in eine unendliche Reihe entwickeln. Legt man die Maclaurin'sche Reihe

$$f(x) = f(o) + x\,f'(o) + \frac{x^2}{2!}\,f''(o) + \frac{x^3}{3!}\,f'''(o) + \ldots \text{ in infinitum}$$

für die Entwickelung zu Grunde, so hat man, da

$f(o) = 1$, $f'(x) = 1$, überhaupt alle Ableitungen $= 1$ sind, sehr leicht die Reihe

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots \text{ in infinitum,}$$

welche Reihe für jeden Werth von x, also schlechthin convergent ist.

Setzt man in dieser Reihe $x\sqrt{-1}$ oder $x.i$ an die Stelle von x, so erhält man eine neue Reihe, welche man mit Rücksicht auf die Periodizität der ganzen Potenzen der imaginären Einheit zweckmäßig in zwei Reihen trennt. Man erhält:

$$e^{xi} = \left(1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\ldots\right)^{2)}$$
$$+ i\left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\ldots\right) \quad (1)$$

Setzt man in dieser Reihe $-x$ an Stelle von x, so behalten die geraden Potenzen ihr Vorzeichen, die ungeraden Potenzen verändern ihr Vorzeichen in das entgegengesetzte, und wir erhalten

---

2) Das Produkt der auf einander folgenden natürlichen Zahlen 1. 2. 3. 4 und 1. 2. 3. 4 . . . . n wird üblich durch 4! und n! bezeichnet und „4 = Fakultät", und „n = Fakultät" gelesen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$e^{-xi} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\ldots\right)$$
$$- i\left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\ldots\right) \quad (2).$$

Aus derselben Maclaurin'schen Reihe erhält man für $f(x) = \cos x$, da $f(o) = 1$, $f'(o) = 0$, $f''(o) = -1$, $f'''(o) = 0$ u. s. w. abwechselnd 1, 0, —1, 0, 1 etc. ist

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\ldots \text{ in inf.}$$

Ist $f(x) = \sin x$, so giebt die Maclaurin'sche Reihe, weil auch hier eine Periodizität in den Werthen der Ableitungen, nämlich 0, 1, 0, — 1, 0 etc. eintritt, die Entwicklung

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\ldots \text{ in inf.}$$

§. 3.

Vergleicht man die für cos x und sin x gefundenen für alle Werthe von x convergenten Reihen mit den in (1) und (2) gegebenen Reihen für e^{xi} und e^{-xi}, so erkennt man leicht die Richtigkeit der Gleichungen

$$e^{xi} = \cos x + i \sin x, \text{ und}$$
$$e^{-xi} = \cos x - i \sin x; \quad (3).$$

Gleichungen, in denen eine innige Relation zwischen der Potenzialgröße e^{x} und den goniometrischen Funktionen durch Vermittlung der imaginären Einheit ausgedrückt ist.

Aus dieser einfachen Relation folgt schon sofort die allgemeine Gültigkeit der Moivre'schen Formel. Wenn man nämlich in jede der Formeln (3) ny an die Stelle von x setzt, so erhält man

$$e^{ny.i} = \cos n.y + i. \sin n.y, \text{ und}$$
$$e^{-nyi} = \cos n.y - i. \sin n.y.$$

Es ist aber $e^{ny.i} = \left(e^{yi}\right)^n$ und $e^{nyi} = \left(e^{-yi}\right)^n$,

daher $(\cos y + i \sin y)^n = \left(e^{yi}\right)^n = \cos ny + i. \sin n.y$

und $(\cos y - i \sin y)^n = \left(e^{-yi}\right)^n = \cos ny - i. \sin ny$,

also allgemein:

$$(\cos \alpha \pm i. \sin \alpha)^n = \cos n\,\alpha \pm i. \sin n\,\alpha,$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

in welcher Formel n positiv und negativ, ganz und gebrochen, rational und irrational, algebraisch und transcendent und selbst eine complexe Größe sein kann.

§. 4.

Man kann auch durch einfache Behandlung der in §. 3 gegebenen Formeln (3) die dort ausgedrückte Relation umformen, sowie Fundamentalformeln der Goniometrie analytisch erhalten, ohne auf die Anwendung geometrischer Sätze (namentlich des Pythagoraeischen) hingewiesen zu sein. Es ergiebt sich nämlich durch Addition und Subtraction jener Formeln

$$\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2} \quad \text{und}$$

$$\sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}; \qquad (5).$$

und durch Multiplikation erhält man

$$1 = \cos x^2 + \sin x^2, \qquad (6).$$

welche Formel bekanntlich die Fundamentalformel der Goniometrie ist.

Wenn man für zwei Argumente x und y die in den Formeln (5) aufgestellten Relationen ausdrückt, so hat man

$$\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}, \quad \cos y = \frac{e^{yi} + e^{-yi}}{2}, \quad \text{und}$$

$$\sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}, \quad \sin y = \frac{e^{yi} - e^{-yi}}{2i}.$$

Hieraus erhält man nach gehöriger Reduction

$$1)\ \cos x . \cos y - \sin x \sin y = \frac{e^{(x+y)i} + e^{-(x+y)i}}{2} = \cos (x + y)$$

$$2)\ \cos x . \cos y + \sin x \sin y = \frac{e^{(x-y)i} + e^{-(x-y)i}}{2} = \cos (x - y)$$

$$3)\ \sin x \cos y + \cos x \sin y = \frac{e^{(x+y)i} - e^{-(x+y)i}}{2i} = \sin (x + y)$$

$$4)\ \sin x \cos y - \cos x \sin y = \frac{e^{(x-y)i} - e^{-(x-y)i}}{2i} = \sin (x - y).$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Geht man von den Relationen

$$e^{xi} = \cos x + i.\sin x,\ e^{-xi} = \cos x - i.\sin x \text{ und}$$

$$e^{yi} = \cos y + i.\sin y,\ e^{-yi} = \cos y - i.\sin y \text{ aus,}$$

wie sie in §. 3, Formel (3) aufgestellt sind, so erhält man durch Addition der Produkte aus der ersten und dritten, sowie der zweiten und vierten dieser Formeln die erste, durch Subtraction die dritte der vorher entwickelten Formeln. Durch ähnliche Combinationen gelangt man auch zu der zweiten und vierten der vorhergehenden Formeln.

§. 5.

Da in dem Potenzialausdrucke für cos x keine Aenderung eintritt, wenn man $-x$ statt x setzt, und der Ausdruck für sin x durch eine gleiche Vertauschung nur sein Vorzeichen ändert, so ergiebt sich weiter

$$\cos(-x) = \cos x;\ \sin(-x) = -\sin x. \qquad (7).$$

Durch Multiplikation der Potenzialausdrücke für sin x und cos x erhält man ferner

$$\cos x.\sin x = \tfrac{1}{2}\sin 2x, \qquad (8).$$

ebenfalls eine bekannte Grundformel.

In ähnlicher Weise findet man auch die Relationen zwischen Funktionen des doppelten und einfachen, oder des ganzen und halben Winkels.

Es ist $1 + \cos 2x = \dfrac{e^{2xi} + e^{-2xi}}{2} + 1 = \dfrac{e^{2xi} + e^{-2xi}}{2} =$

$$\frac{\left(e^{xi} + e^{-xi}\right)^2}{2} = 2\cos x^2, \text{ woraus}$$

$$\cos x = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)}. \qquad (9).$$

Ebenso ist

$$1 - \cos 2x = 1 - \frac{e^{2xi} + e^{-2xi}}{2} = \frac{2 - e^{2xi} - e^{-2xi}}{2}.$$

Nun ist

$$\sin x^2 = \left(\frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}\right)^2 = \frac{e^{2xi} - 2 + e^{-2xi}}{-4} = \frac{2 - e^{2xi} - e^{-xi}}{4},$$

daher $1 - \cos 2x = 2\sin x^2$, woraus man findet

$$\text{cin } x = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)} \qquad (10).$$

In gleicher Weise erhält man bei Voraussetzung der goniometrischen Gleichung $\text{tang } x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, wenn man für sin x und cos x die entsprechenden Potenzialausdrücke einsetzt:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\operatorname{tg} x = \frac{\left(e^{xi} - e^{-xi}\right) . 2}{\left(e^{xi} + e^{-xi}\right) . 2i}.$$

Multiplicirt man diesen Quotienten oben und unten mit $e^{xi} - e^{-xi}$, so erhält man

$$\operatorname{tg} x = \frac{e^{2xi} - 2 + e^{-2xi}}{i\left(e^{2xi} - e^{-2xi}\right)} = \frac{2\,(\cos 2x - 1)}{i.\,2i.\,\sin 2x} = \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}, \qquad (11).$$

woraus sich die bekannte Formel

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} x = \frac{1 - \cos x}{\sin x} \text{ sofort ergiebt.}$$

Hätte man den Quotienten oben und unten mit $e^{xi} + e^{-xi}$ statt mit $e^{xi} - e^{-xi}$ multiplicirt, so hätte man die andere bekannte Formel erhalten, nämlich:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}. \qquad (12).$$

Bei dieser Entwicklungsweise vorstehender Formeln ist man des Beweises für die Allgemeingültigkeit derselben von selbst überhoben.

§. 6.

Legt man ferner die schon im vorhergehenden Paragraphen angewandte goniometrische Relation zu Grunde $\operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, so gelangt man zu einer einfachen Reihenumkehrung, d. h. zu einer Reihe, in welcher das Argument x durch seine Funktion (tang x) ausgedrückt ist. Es ist nämlich, wenn man in den Formeln (3) zu den Logarithmen übergeht:

$$xi = \text{log. nat. } (\cos x + i.\,\sin x)$$
$$-xi = \text{log. nat. } (\cos x - i.\,\sin x),$$

woraus durch Subtraction folgt:

$$x = \frac{1}{2i} \text{ log. nat. } \frac{\cos x + i.\,\sin x}{\cos x - i\,\sin x}$$
$$= \frac{1}{2i} \text{ log. nat. } \frac{1 + i.\,\operatorname{tang} x}{1 - i.\,\operatorname{tang} x}$$

Es ist aber nach der logarithmischen Reihe

$$\text{log. nat. } \frac{1 + x}{1 - x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots\right)$$

in diesem Falle

$$x = \frac{1}{2i} . 2i \left(\operatorname{tang} x - \frac{\operatorname{tang} x^3}{3} + \frac{\operatorname{tang} x^5}{5} - \ldots\right)$$

worin sich die imaginären Größen aufheben.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Setzt man $x = \frac{\pi}{4}$, so erhält man, da $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \operatorname{tg} 45^0 = 1$ ist,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots\ldots, \qquad (13).$$

die bekannte Leibnitz'sche Reihe.

§. 7.

Schließlich mögen hier noch die beiden Differentialformeln für cos x und sin x Platz finden, welche sich ebenfalls aus den oben angegebenen Relationen leicht ableiten lassen, wenn man berücksichtigt, daß die Potenzialfunktion e^x ihren sämmtlichen Ableitungen gleich ist. Man erhält

$$\frac{d \cos x}{d x} = \frac{e^{xi} \cdot i + e^{-xi} \cdot (-i)}{2} = \frac{\left(e^{xi} - e^{-xi}\right) i}{2} = - \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}$$

$$= - \sin x; \qquad (14)$$

$$\frac{d \sin x}{d x} = \frac{e^{xi} \cdot i - e^{-xi} \cdot (-i)}{2i} = \frac{\left(e^{xi} + e^{-xi}\right) i}{2i} = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}$$

$$= \cos x. \qquad (15).$$

§. 8.

Der Uebergang von den goniometrischen, cyclischen zu den verwandten hyperbolischen Funktionen, deren Kenntniß und Bezeichnung wenigstens theilweise für das weitere Verständniß dieser Zeilen erforderlich ist, ist ein einfacher.[3]) Wenn man in dem Ausdrucke

$\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}$ das Argument x in xi verwandelt, so erhält man

$$\cos xi = \frac{e^{x} + e^{x}}{2}.$$

Wenn man nun jenen Ausdruck mit imaginären Exponenten eine Funktion von x nannte, deren reelle Existenz nachweisbar ist, so wird der durch diese Verwandlung des Arguments erhaltene Ausdruck mit reellen Exponenten gewiß eine nachweisbare reelle Funktion von x sein. Man hat ihn analog einen Cosinus anderer Art genannt, und zwar den hyperbolischen Cosinus von x und bezeichnet diese Funktion entweder durch cos. hyp. x oder nach Gudermanns Beispiel mit Cof x. Es ist also

$$\mathfrak{Cof}\, x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \cos xi. \qquad (16).$$

3) Man kann ebenso leicht von den hyperbolischen zu den cyclischen Funktionen übergehen. Wir haben es vorgezogen, mit den bekannteren zu beginnen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aendert man ebenso in dem Potenzialausdrucke für sin x das Argument x in xi, so erhält man nach einiger Reduction

$$\sin xi = \frac{\left(e^{x} - e^{-x}\right) . i}{2}$$

Den reellen Theil dieses Ausdruckes hat man sin. hyp. x oder Sin x genannt, so daß wir auch haben

$$\text{Sin } x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = - i . \sin xi. \qquad (17).$$

Aus Formel (16) und (17) ergiebt sich durch Addition und Subtraction

$$e^{x} = \text{Cos } x + \text{Sin } x, \ (18). \text{ und } e^{-x} = \text{Cos } x - \text{Sin } x \ (19).,$$

und hieraus als prinzipielle Relation zwischen Cos. und Sin. desselben Argumentes:

$$1 = \text{Cos } x^2 - \text{Sin } x^2. \qquad (20).$$

Aus dieser Formel ist sofort erkennbar, daß Cos x stets größer als 1 und größer als Sin x sein muß, während beide Funktionen jeder auch noch so großen Zahl gleich werden können. Da man ferner aus Analogie $\frac{\text{Sin } x}{\text{Cos } x} = \text{Tang } x$, $\frac{\text{Cos } x}{\text{Sin } x} = \text{Cotg } x$ gesetz hat, so ergiebt sich weiter, daß die hyperbolische Tangente stets kleiner, die hyperbolische Cotangente stets größer als 1 sein muß.

Die entsprechende Formel für die cyclischen Funktionen

$$\cos x^2 + \sin x^2 = 1$$

läßt es dagegen völlig unentschieden, ob cos x größer oder kleiner als sin x ist. Ersichtlich ist aus ihr, daß sowohl cos x als sin x als Grenzen die o und die (positive oder negative) Einheit haben. Für die cyclische Tangente und Cotagente ergeben sich daher die Grenzen o und ∞.

§. 9.

Sowie sich für die cyclischen Funktionen gewisser Argumente einfache rationale Werthe ergeben, ergeben so auch für die hyperbolischen Funktionen. Setzt man nämlich $e^{x} = \omega$, $e^{-x} = \frac{1}{\omega}$ und also x = log. nat. ω, so erhält man

$$\text{Cos } x = \text{Cos (log. nat. } \omega) = \frac{\omega^2 + 1}{2\omega},$$

$$\text{Sin } x = \text{Sin (log. nat. } \omega) = \frac{\omega^2 - 1}{2\omega},$$

$$\text{Tang } x = \text{Tang (log. nat. } \omega) = \frac{\omega^2 + 1}{\omega^2 - 1},$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\text{Cotang } x = \text{Cot (log. nat. } \omega) = \frac{\omega^2 + 1}{\omega^2 - 1},$$

Formeln aus denen eine unendliche Anzahl von einfachen rationalen Werthen der hyperbolischen Funktionen bestimmt werden können. Beispielsweise ist für $\omega = 3$

$$\text{Cos (log. nat. 3)} = \frac{5}{3}; \quad \text{Sin (log. nat. 2)} = \frac{4}{3};$$

$$\text{Tang (log. nat. 3)} = \frac{4}{5}; \quad \text{Cot (log. nat. 2)} = \frac{5}{4}.$$

Das Argument selbst ist freilich irrational, nämlich

$$\text{log. nat. } 3 = 1{,}0986122887.$$

§. 10.

Das Argument der cyclischen Funktionen führt bekanntlich den Namen Arkus, weil dasselbe als Kreisbogen, gewöhnlich in aliquoten Theilen seines Umfangs für den Radius $r = 1$, also in aliquoten Theilen der Ludolph'schen Zahl π ausgedrückt, nachweisen kann. Daher erhält man, wenn man sich die Beziehung der cyclischen Funktionen zu ihrem Argumente umgekehrt vorstellt

aus $\cos x = y$ die umgekehrte Formel $y = \text{arc. cos } x$,

ebenso aus $\sin x = y$ die umgekehrte $y = \text{arc. sin } x$ u. s. w.

Analog hat man auch das Argument der hyperbolischen Funktionen Arkus genannt und

aus $\text{Cos } x = y$, $\text{Sin } x = y$ u. s. w. die umgekehrten Formeln bezeichnet mit

$y = \text{Ark. Cos } x$, $y = \text{Ark. Sin } x$ u. s. w.

Zwar läßt sich dieses Argument nicht als Bogen im eigentlichen Sinne nachweisen, es ist vielmehr, wie wir sehen werden, ein Sector einer gleichseitigen Hyperbel, also eine Fläche; indeß thut dieser Umstand der analytischen Bedeutung keinen Eintrag.

§. 11.

Zum Nachweise des Arkus einer Potenzialfunktion als Sektor einer gleichseitigen Hyperbel ist es unerläßlich, eine einfache Vermittlung zwischen den hyperbolischen und cyclischen Funktionen zu statuiren. Eine solche Vermittlung ergiebt sich leicht bei Betrachtung der Grenzen dieser Funktionen, und es empfiehlt sich, gerade den Umstand zu beachten, daß sowohl die hyperbolische Tangente als auch der cyclische Sinus stets kleiner als die Einheit sind. Es muß demnach jederzeit einen Arkus y zwischen den Grenzen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ geben, dessen Sinus der hyperbolischen Tangente irgend eines (reellen) Arkus x gleicht; oder es ist jederzeit die Gleichung möglich

$$\text{Tang } x = \sin y. \qquad (21).$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aus der Hauptformel (20) ergiebt sich leicht durch Division

$1 - \text{Tang}\, x^2 = \frac{1}{\text{Cos}\, x^2}$, woraus man also durch Substitution von (21) erhält:

$$1 - \sin y^2 = \cos y^2 = \frac{1}{\text{Cos}\, x^2}, \text{ oder } \cos y = \frac{1}{\text{Cos}\, x} \text{ und } \text{Cos}\, x = \frac{1}{\cos y}.$$

Da nun noch ferner $\text{Cos}\, x \,.\, \text{Tang}\, x = \text{Sin}\, x$, oder $\text{Sin}\, x = \frac{1}{\cos y} \,.\, \sin y = \text{tang}\, y$ ist, so haben wir für den Uebergang aus der einen Art von Funktionen in die andere die conformen Formeln

$$\left.\begin{array}{l} \sin y = \text{Tang}\, x, \\ \cos y = \frac{1}{\text{Cos}\, x}, \\ \text{tang}\, y = \text{Sin}\, x, \end{array}\right\} \text{ und } \begin{array}{l} \text{Sin}\, x = \text{tang}\, y, \\ \text{Cos}\, x = \frac{1}{\cos x}, \\ \text{Tang}\, x = \sin y. \end{array} \qquad (22).$$

§. 12.

Mit Hülfe der hier zusammengestellten Relationen sind wir in den Stand gesetzt, die Natur des Arkus der hyperbolischen Funktionen zu bestimmen. Bilden zwei Radien OA und OB eines Kreises mit dem Radius $r = 1$ einen Winkel m, und ist OB die Richtung der positiven Abscissen-axe[4]), so ist das auf OB gezogene Loth $AC = y$ die Ordinate, und $OC = x$ die Abscisse für den Punkt A, und daher, weil der Bogen $AB = m$, und der Radius $OB = r = 1$ ist, $\sin m = y$, $\cos m = x$.

Trifft eine in B auf die X-axe gezogene Senkrechte die verlängerte OA in D und setzt man $DB = y'$, so ist ferner $\text{tg}\, m = y'$. Macht man nun endlich auf der X-axe $CE = CD$ und nennt dieses Stück x', so ist $\sec m = \frac{1}{\cos m} = x'$ und der Punkt F, dessen Coordination x' und y' sind, ist ein Punkt einer gleichseitigen Hyperbel, dessen Mittelpunkt und X-axe mit dem Mittelpunkte und der X-axe des Kreises zusammenfallen.

Nach den im vorigen Paragraphen aufgestellten Relationen ist nun y', welches $= \text{tg.}\, m$ ist, auch dem hyperbolischen Sinus eines Arkus μ gleich, also

$$y' = \text{Sin}\, \mu, \text{ und ebenso } x' = \frac{1}{\cos m} = \text{Cos}\, \mu.$$

Da nun x' und y' die Coordination einer gleichseitigen Hyperbel sind und den Werth hyperbolischer Potenzialfunktionen ausdrücken, so ist schon hiernach die Beziehung dieser Funktionen zu dem Kegelschnitte Hyperbel ersichtlich und ihre Benennung gerechtfertigt.

---

4) Die bei der ferneren Deduction nöthigen Figuren wird sich der Leser nach der Darstellung hoffentlich leicht construiren können. Wir mußten auf den Druck derselben verzichten.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Desgleichen ist

$$\text{Tang}\ \mu = \sin m = AC, \text{ und } \frac{1}{\text{Cos}\ \mu} = \cos m = OC.$$

Weil nun $\text{Cos}\ \mu = x'$, $\text{Sin}\ \mu = y'$ und $\text{Cos}\ \mu \pm \text{Sin}\ \mu = e^{\pm \mu}$ ist, so ist $x' + y' = e^{\mu}$, $x' - y' = e^{-\mu}$, woraus man leicht erhält

$$\mu = \tfrac{1}{2} \log. \text{nat.} \frac{x' + y'}{x' - y'}. \qquad (23).$$

Ist nun MN ein auf seine Asymptoten OA und OB als X- und Y-axe bezogener Zweig einer gleichseitigen Hyperbel, und habe ein Punkt C desselben die Abscisse $x_{,} = OD$, die Ordinate $y_{,} = CD$, so ist, wenn der Radius des um O beschriebenen die Hyperbel berührenden, Kreises $r = 1$ gesetzt wird

$$x_{,} \cdot y_{,} = \tfrac{1}{2}. \qquad (24).$$

Nach den Lehren der Differential- und Integralrechnung ist nun das allgemeine Flächendifferential, wenn P ein solches bezeichnet, $dP = y \cdot dx$, also $P = \int y \cdot dx$, woraus vermittelst Formel (24) folgt

$$P = \tfrac{1}{2} \int \frac{dx_{,}}{x_{,}} = \tfrac{1}{2} \log. \text{nat.}\ x_{,} + \text{Const.}$$

Für zwei fernere Coordianten $OE = x_{,,}$ und $EF = y_{,,}$ hat man ebenso $P' = \tfrac{1}{2} \log. \text{nat.}\ x_{,,} + \text{Const.}$, woraus wir das bestimmte Integral erhalten

$$P' - P = EFCD = \frac{1}{2} \int_{x_{,}}^{x_{,,}} \frac{dx_{,}}{x_{,}} = \frac{1}{2} \log. \text{nat.} \frac{x_{,,}}{x_{,}}. \qquad (25).$$

§. 13.

Wird nun der Winkel BOA halbirt und trifft die Halbirungslinie die Hyperbel in G, so daß $OG = r = 1$ wird, und heißen die Coordinaten des Punktes G selbst $x_{,,,} = OH$ und $y_{,,,} = HG$, so ist nach obigem Integral-Formel (25)

$$DHGC = \frac{1}{2} \log. \text{nat.} \frac{OH}{OD}. \qquad (26).$$

Diese Fläche DHGC ist aber gleich dem hyperbolischen Sektor COG. Denn $COD = \frac{1}{2} x_{,} \cdot y_{,} = \frac{1}{4}$; desgleichen $GOH = \frac{1}{2} x_{,,,} \cdot y_{,,,} = \frac{1}{4}$; also $COD = GOH$. Subtrahirt man von beiden Flächen ein gemeinschaftliches Stück, addirt aber wiederum ein nicht gemeinschaftliches zu beiden, so ergiebt sich leicht, daß, wie behauptet wurde

die Fläche DHGC = Sector COG ist. (27).

Um nun zu den Abscissen und Ordinaten x und y zurückzukehren, ziehe man das Loth CK auf OG, dann ist $OK = x$, $KC = y$. Nun ist: $OH : OD = OG : OL$,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

(wenn L der Durchschnitt von CD und OG ist) oder da CK = KL ist, OH : OD = OG : OK — CK = OG : x — y = 1 : x — y = x + y, da $x^2 - y^2 = 1$ die Mittelpunktsgleichung der gleichseitigen Hyperbel ist.

Es ist demnach $\frac{OH}{OD} = \frac{1}{x - y} = x + y$, oder

$$\text{log. nat. } \frac{OH}{OD} = \text{log. nat. } (x + y) = - \text{log. nat. } (x - y).$$

Nach Formel (26) und (27) ist aber

$$\text{Sector COG} = \frac{1}{2} \text{ log. nat. } \frac{OH}{OD}, \text{ folglich}$$

$$\text{Sector COG} = \frac{1}{2} \text{ log. nat. } (x + y) = - \frac{1}{2} \text{ log. nat. } (x - y), \text{ oder}$$

$$2. \text{ Sector COG} = \frac{1}{2} \text{ log. nat. } \frac{x + y}{x - y}.$$

Nach Formel (23) ergiebt sich also

$$\mu = 2 \text{ Sector COG},$$

d. h. der Arkus μ ist bei den hyperbolischen Funktionen der doppelte Sector einer gleichseitigen Hyperbel, welcher von der halben großen Axe, der Curve und dem Radius Vector eingeschlossen ist, welcher zu dem x und y gehören, welche als Cosinus und Sinus auftreten.

§. 14.

Als Zusatz möge es gestattet sein, das Flächenintegral, d. i. den Sector direct aus der Mittelpunktsgleichung der gleichseitigen Hyperbel herzuleiten, ohne auf die Asymptoten-Gleichung zu recurriren.

Ist O Mittelpunkt, OB halbe große Axe, B Scheitel eines Zweiges, M ein Punkt der gleichseitigen Hyperbel, dessen Coordination x = CN und y = MN heißen, so ist der Sector MCB = $\frac{1}{2}$ xy — MBN, oder, wenn wir den Sector mit s bezeichnen, $s = \frac{1}{2} xy - \int y \, dx$, woraus sich mit Anwendung der Mittelpunktsgleichung leicht ergiebt

$$s = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - 1} - \int \sqrt{x^2 - 1} \, . \, dx.$$

Durch Differentiation folgt hieraus

$$2 \, ds = \left(\sqrt{x^2 - 1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} - 2 \sqrt{x^2 - 1} \right) dx$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

oder $2\,ds\,\frac{x^2 - 1 + x^2 - 2\,x^2 + 2}{\sqrt{x^2 - 1}}\,.\,dx = \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$

Es ist also $2\,s = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \int \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}}\,.\,\frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$,

oder $2\,s \int \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x + \sqrt{x^2 - 1}}\,.\,dx = \text{log. nat.}\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) + \text{Const.}$

Geht man zum bestimmten Integral über, so ergiebt sich die Constante = Null und man erhält wie oben

$$2\,s = \text{log. nat.}\,(x + y) = -\,\text{log.}\,(x - y), \text{ also endlich}$$

$$2\,s = \frac{1}{2}\,\text{log. nat.}\,\frac{x + y}{x - y}.$$

Zus. Man kann endlich auch zum Resultate gelangen, ohne behufs Vereinfachung seine Zuflucht zur Position $r = 1$ zu nehmen. Wir übergehen hier diesen Weg der Entwicklung, da wir die entsprechende Differentialformeln über die Arkus der Funktionen nicht aufgestellt haben.

Das Manuscript des zweiten Theils dieser Abhandlung, in welchem besonders die Wichtigkeit der cyclischen und hyperbolischen Funktionen für die Darstellung einer Menge von geschlossenen Integralen gezeigt wird, muß für eine spätere Zeit zurückgelegt werden.

Der Verfasser.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf