Rechenunterricht und Rechenbuch,

eine historisch-kritische Studie mit besonderer Beziehung auf das Gymnasium.

A. Geschichtliche Skizze.

Der Rechenunterricht und die Rechenbücher der früheren Jahrhunderte gingen wohl hauptsächlich aus der Absicht hervor, die Menschen geschickt zu machen zum Rechnen mit Münzen, Maſsen und Gewichten. Man kann zu dieser Vermutung durch einen Schluss nach Analogie kommen; denn so manche Wissenschaft hat ihr Entstehen äuſseren Bedürfnissen zu danken. Die Geschichtswerke der Mathematik und die Bücher der alten Rechenmeister lassen aber kaum einen Zweifel an der Richtigkeit unserer Ansicht bestehen.

„Ich habe befunden, sagt Adam Riese, in Unterweisung der Jugend, daſs alle weg, die so auf den Linien anheben, des Rechnens fertiger und läuftiger werden, denn so sie mit den Ziffern, die Feder genannt anfahen. In den Linien werden sie fertig des Zählen und alle Exempla der Kaufhändel und Hausrechnung schöpfen sie einen bessern Grund u. s. w." Wie man sieht, ist Rieses Methode auf Erleichterung des Lernens gerichtet, der Zweck des Rechnenlernens aber ist die praktische Verwendung im Leben.

Selbst in den schwierigeren Aufgaben Rieses ist die höhere Entwicklung des Urteilens nicht Selbstzweck, wie z. B. in dem Abschnitt: „Erbteilung und Vormundschaft" Nr. 499: „Ein Vater vorlest seim Weib | fünff Kinder | an bar schafft und Güttern | 9870 fl | die Mutter nimet den 3ten teil | Die Vormünder legen den Kindern auff Zins 4800 fl | Namen jherlich 5 fl | vom hundert | geben der Mutter von einem Kindt in die kost | zu schuhen und kleidern | das jhar 23 fl nach ausganck dreier jhar | wandern 2 kinder | geth auff eines das jhar 40 fl | wieuil gebürt der Mutter erster teilung) vnnd auch jedem Kind nach ausganck fünffer jhar?" Die „Wälsche Praktik", die „Basedowsche Reihe", die „Kettenregel" und all die zahlreichen praktischen Rezepte, die noch bis in unser Jahrhundert herein die Rechenbücher füllten und zum Teil weit über das Bedürfnis des Verkehrs hinausgehen, bekunden ein Streben nach Vervollkommnung des Rechen-Mechanismus. Letzterer darf nun zwar nie in seiner allgemein mathematischen Bedeutung unterschätzt werden; gleichwohl machen jene Werke gegenwärtig einen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

traurigen Eindruck auf das Gemüt des Lehrers und Erziehers; denn er erkennt daraus deutlich, wie das ganze Unterrichten nur ein Abrichten auf unverstandenes Können war. Es sieht fast aus, als hätten jene Verfasser geflissentlich die Einführung in das Verständnis vermieden. Man wird unwillkürlich noch an die Zeiten eines Descartes und Galilei erinnert, in denen man Entdeckungen und Lösungen von Aufgaben in Anagrammen und anderen geheimnisvollen Formen veröffentlichte. Comenius, Franke, die Philanthropisten, Rochow, Felbiger, Kindermann u. a. hatten bereits wertvolle Beiträge zu einer Wissenschaft der Erziehung und des Unterrichts geliefert; Pestalozzi stellte im Jahre 1780 in seiner Abhandlung „Abendstunde eines Einsiedlers" als höchstes Ziel aller Erziehung die Forderungen hin: Entwicklung aller menschlichen Anlagen und Kräfte zur Begründung einer selbständigen, ehrenwerten und glücklichen Existenz, allgemeine Menschenbildung als notwendige Grundlage jeder Standes- und Berufsbildung, Ausgang aller Unterweisung und Uebung vom Naheliegenden, anschauliche Entwicklung wirklicher Einsicht im Gegensatze zum blofsen Wortwesen, Begründung eines tugendhaften Charakters und religiösen Sinnes. Sein ABC der Anschauung oder Anschauungslehre der Mafs- und Zahlverhältnisse, sowie seiner Schüler, Schmids und Tillichs Leistungen auf dem Gebiete des Rechenunterrichts wirkten epochemachend: Man liefs die Zahlvorstellungen und einfachsten Zahloperationen auf dem naturgemäfsen Wege der Anschauung erwerben und üben. Allein die Reformation des Rechenunterrichts durch Pestalozzi und seine Schüler beschränkte sich auf die unterste Stufe dieses Lehrfaches. Pestalozzi selbst konnte kaum mehr als Dividieren mehrstelliger Zahlen durch einander.

Der unsterbliche Herbart, der grofse Naturforscher der Menschenseele, der von der Philosophie forderte, dass sie sich vor allem praktisch bethätige und deshalb ihre wichtigste Aufgabe, die Ausbildung der Erziehungswissenschaft, sich zur Lebensaufgabe stelle, — Herbart war es, der die von Pestalozzi instinktiv gefundenen grofsen Ideen mit klarem Blick erkannte, wissenschaftlich begründete und fortentwickelte. Im Jahre 1802 schreibt Herbart an drei Frauen: „Das Heil des Volks ist Pestalozzis Ziel." „Aufser dem ABC der Anschauung und aufser einer Reihe von Vorschlägen zu Sprachübungen —, finden Sie in seinem Buche noch ein drittes sehr allgemeines Mittel **alles Lernens** ausgezeichnet, das mit jenen beiden zusammen das Fundament alles übrigen Unterrichts ausmachen soll. Es ist die Übung im Gebrauch der — Rechenkunst. Dafs das Bedürfnis des Zählens sehr allgemein ist, dafs ohne Zahlenbegriffe jede beträchtliche Menge von Dingen uns den Geist betäuben würde, keine irgend verwickelte Einteilung eines Ganzen von uns aufgefafst werden könnte, und dergl., leuchtet Ihnen von selbst ein. Dennoch übersehen Sie und mit Ihnen der gröfste Teil selbst der gebildeten Männer nur wenig von dem weiten Reiche der Zahlen, von den mannigfaltigen äufserst künstlichen Zusammensetzungen derselben, zu denen das Studium der Natur, schon der täglichen gemeinen Natur, die uns Allen vor Augen liegt, — die Forscher getrieben hat. Dies ist die Ursache, weswegen ich Ihnen so wenig von diesem, gleichwohl ganz wesentlichen, Elementarmittel des Unterrichts gesagt habe. Auch Pestalozzi ist darüber sehr kurz; die in manchen deutschen Bürgerschulen längst gewöhnlichen Übungen im Kopfrechnen führen seine Idee wohl ohne Zweifel vollkommener aus, als er sie angegeben hat; aber sie dürften hier schwerlich so in das richtige Verhältnis zum Ganzen des Unterrichts gesetzt sein, wie in Pestalozzis Schule."

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es sei mir gestattet, die wichtigsten hierhergehörigen Aussprüche Herbarts anzureihen. In seiner Rede bei Eröffnung der Vorlesungen über Pädagogik (1803) heifst es: „In der Schule der Wissenschaft wird daher für die Praxis immer zugleich zu viel und zu wenig gelernt; und eben daher pflegen alle Praktiker in ihren Künsten sich sehr ungern auf eigentliche, gründlich untersuchende Theorie einzulassen; sie lieben es weit mehr ihre Erfahrungen und Beobachtungen gegen jene gelten zu machen. Dagegen ist aber auch schon bis zur Ermüdung oft und weitläufig bewiesen, auseinandergesetzt und wiederholt, dafs blofse Praxis eigentlich nur Schlendrian, und eine höchst beschränkte, nichts entscheidende Erfahrung gebe; dafs erst die Theorie lehren müsse, wie man durch Versuch und Beobachtung bei der Natur sich zu erkundigen habe, wenn man ihr bestimmte Antworten entlocken wolle. Dies gilt denn auch im vollsten Mafse von der pädagogischen Praxis."

„Andre Zeiten erfahren etwas Anderes, weil sie etwas Anderes thun; und es bleibt eine ewige Wahrheit, dafs jede Erfahrungssphäre ohne ein Prinzip *a priori* nicht nur von absoluter Vollständigkeit nie reden dürfe, sondern auch nie nur ungefähr den Grad ihrer Annäherung an diese Vollständigkeit angeben könne. Daher, wer ohne Philosophie an die Erziehung geht, sich so leicht einbildet, weitgreifende Reformen gemacht zu haben, indem er ein wenig an der Manier verbesserte. Nirgends ist philosophische Umsicht durch allgemeine Ideen so nötig, als hier, wo das tägliche Treiben und die sich so vielfach einprägende individuelle Erfahrung so mächtig den Gesichtskreis in die Enge zieht."

„In dieser Rücksicht wird freilich auch davon sehr viel abhängen, wie mächtig Sie sich derjenigen Wissenschaften und Übungen finden, in welchen wir die wichtigsten Hülfsmittel der Erziehung finden werden.

„Dahin zähle ich vorzüglich griechische Litteratur und Mathematik." Aus Herbarts ABC der Anschauung (1804): „Pädagogik aber und Mathematik sind in der Praxis oft so weit getrennte Dinge, dafs es desto mehr erlaubt sein mag, noch bei einigen Vorerinnerungen zu verweilen, ehe sich die vorliegende Schrift an ihrem aufgegebnen Geschäfte selbst versucht. Gerade dasjenige Feld der Begriffe, von woher die Erziehung für die gegenwärtige Aufgabe Hülfe erwartet, ist unter allen Regionen des menschlichen Wissens am vortrefflichsten angebaut. Ohne Zweifel, weil dieser Boden für die Kultur am meisten empfänglich war; weil keine andre Art von Kenntnissen, als die, welche Form durch Zahl bestimmen, sich so willig zur Evidenz erheben lassen; weil gerade diese Begriffe unter **allen** die **begreiflichsten** sind. Demnach ist sowohl diese Wissenschaft vor andern am meisten fertig und bereit, Hülfe zu geben, — als auch diese Hülfe vorzüglich willkommen, weil sie der Natur des menschlichen Denkens am nächsten verwandt ist. In der That, in jedem Kopfe, der, ohne die Arithmetik und Geometrie zu besitzen, sich mit andern Kenntnissen und Ideen vertraut gemacht hat, die ihrer Natur nach spätere Erzeugnisse des menschlichen Denkens sind, findet sich eine Disproportion der Ausbildung, deren Gröfse man am leichtesten dadurch schätzen wird, dass man in der Geschichte nachsieht, wie viele Vorbereitungsstufen bis zur andern Art von Ideen durchlaufen werden mufsten. Sind schon diese Bemerkungen von einigem Gewicht: so giebt es doch noch weit dringendere Gründe, welche der Pädagogik den Gebrauch der Mathematik empfehlen. Man prüfe die folgenden, hier frei-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

lich nur kurz anzudeutenden, Betrachtungen und urteile, ob es eine Übertreibung wäre, wenn man die Mathematik unentbehrlich nennte, — unentbehrlich für Anfang, Mittel und Ende eines solchen Unterrichts, wie ihn die Pflichten der Erziehung erfordern."

„Gestalt hingegen und Zahl liegen so recht in der Mitte unsres ursprünglichen Gesichtskreises. Die Grundanfänge des Messens und Rechnens sind die natürlichsten, die ersten, fast nicht auszulassenden Vorübungen, welche auch der schwächste Verstand sich selber schafft; und diesen Grundanfängen schliefst sich die fernere, mathematische Bearbeitung aufs engste an und geht von da nur ganz allmälig in ununterbrochener Folge weiter. Die Gröfsenbegriffe sind es vor allen andern, worüber sich der Lehrer dem Zögling in Worten recht vollkommen ausdrücken und von ihm dasselbe wieder verlangen kann und darf. Hier ist nichts, was sich der Sprache entzöge, nichts, was sich vor umständlichem Hin- und Herreden zu scheuen hätte. Keine Regungen feiner Gefühle sind hier zu schonen, keine Langeweile ist zu fürchten, — so lange man nicht etwa den Gegenstand unter seiner Würde behandelt. — Hier also, an der einen und gleichen Stelle, wo auch das Bildungsmittel für die Anschauung liegen mufs, — hier hat man zu suchen, was sonst nirgends zu finden ist: den Faden für einen frühen Kinderunterricht, der so beschaffen sei, dafs er sowohl **sich** als **aller andern** Unterweisung eine Autorität schaffe, auf deren Geheifs die Zerstreuung entweiche, die Aufmerksamkeit komme und beharre."

„Was nun den mittleren Teil der Erziehung betrifft, so liefse sich hier alles wiederholen, was von jeher über den Nutzen der Mathematik für die Bildung des Geistes gesagt worden ist. Eine Gymnastik der Denkkraft, die schon in den früheren Kinderjahren notwendig ist, wird man sie in der Folge entbehren können?"

„Dazu kommt der Einflufs der Mathematik auf die übrigen Wissenschaften. Was wird ohne sie aus der Physik, aus der Kenntnis der Künste und der Maschinen?"

„Dafs man vielmehr in der Mitte des Unterrichts der Geometrie und der niederen Algebra eine solche Stelle anweisen wird, wo sie an gehörige Vorbereitungen sich anschliefsen, und von wo sie einen reellen Einflufs durch alle nachfolgenden Geschäfte der Jugendbildung verbreiten können."

„In Rücksicht auf das Ende der Erziehung erhebt sich unter mehreren Betrachtungen, welche auch hier noch die Hülfe der Mathematik laut anrufen, hauptsächlich eine, deren Wesentliches sich kurz so anzeigen läfst: die eigentliche Vollenderin der Erziehung ist die Philosophie; aber die Gefahren der Philosophie abzuwenden, ist das Amt der Mathematik."

Nach Herbart sollen nun die Übungen im Messen und Zählen u. s. w. in Gestalt des ABC der Anschauung vom 8. bis zum 10. Jahre bei täglich 1 Lehrstunde stattfinden. Im Zeitraum vom 12. bis zum 14. Jahre sollen $1^1/_2$ Jahre hindurch ebenfalls mit täglich einer Stunde Arithmetik, Geometrie, Trigonometrie und niedere Algebra gelehrt werden. Vom 18. Jahre an soll endlich die reine Mathematik $1^1/_2$ Jahre hindurch bei täglich 1 Stunde durch höhere Analysis ihren Abschluss erreichen. Die angewandte Mathematik fällt für den Pädagogen in das Gebiet des betreffenden Stoffs.

„Seltner aber, als täglich einmal, dürfen die Lehrstunden nicht sein, wenn

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

man irgend darauf rechnen will, dafs in dem Lehrling die nötige Sammlung des Geistes sich erhalte."

„Um die Vorübung im Denken abzugeben, mufs das mathematische Räsonnement keine eigene Art des Denkens sein, sondern es mufs den nämlichen Gang nehmen, den allgemein der gesunde Verstand seiner Natur nach geht, so fern er von zufälligen Störungen im Überlegen nicht gehindert wird."

„Es ist aber die Art des gesunden Verstandes, dafs er sich auf dem Standpunkte, von wo aus er fortschreiten will, zuerst rund umher umsieht, um das ganze Feld zu überblicken und sich darin zu orientieren; — dann pflegt er auf dem kürzesten Wege, stets mit vollem Bewufstsein der Gegend, worin er sich befindet, zu seinem Ziele hinzugehn; — endlich, wenn er es erreicht hat, von hier nochmals rings umzuschauen, um die neue Nachbarschaft, die ihn nun umgiebt, kennen zu lernen. Dem Sprachgebrauch gemäfs kann man die Umsicht der Einbildungskraft, das Fortschreiten ganz eigentlich dem Verstande zuschreiben.

„Man sieht sogleich, wie sehr diese Unterscheidung auf die Mathematik anwendbar ist. Die grofse Wissenschaft beschäftigt wenigstens eben so sehr die Einbildungskraft, als das Schlussvermögen."

Herbarts „Allgemeine Pädagogik" (1806): „Die ganze Mathematik, mit dem was ihr vorangeht und folgt, das ganze Aufsteigen durch die Stufen der in Bildung begriffnen Menschheit, von den Alten zu den Neuern, gehört zum synthetischen Unterricht." Anmerkung: „An die sogenannte analytische Methode der Mathematik darf man hier gar nicht denken. Hier ist keine Rede von der Manier, wie die Mathematiker die ihnen vorgelegten Aufgaben lösen mögen, — das Hinstellen und Zusammenstellen der Aufgaben, wie es der Lehrer oder das Lehrbuch gut findet, ist allemal Synthesis."

„Der synthetische Unterricht hat zweierlei zu besorgen; er mufs die Elemente geben, und ihre Verbindung veranstalten; nicht aber durchaus vollziehen."

„Die allgemeinste Art der Synthesis ist die combinatorische. Sie kommt allenthalben vor, sie trägt bei zur Gewandtheit des Geistes in allem, und mufs daher am frühesten und am meisten, bis zur vollkommensten Geläufigkeit geübt werden."

Aus H.'s Umrifs pädagogischer Vorlesungen (1841): „Dafs die Anlage zur Mathematik seltner sei, als zu andern Studien, ist blofser Schein, der von verspäteten und vernachlässigten Anfängen herrührt. Aber dafs Mathematiker selten aufgelegt sind, sich mit Kindern gehörig zu beschäftigen, ist natürlich. Über dem Rechnen hat man die combinatorischen und geometrischen Anfänge vernachlässigt, und zu demonstrieren gesucht, wo keine mathematische Phantasie geweckt war."

„Das erste Wesentliche ist, Gröfsen und deren Veränderung zu beachten, wo sie vorkommen. Also Zählen, Messen, Wägen, wo es geschehen kann."

„Der frühere mathematische Unterricht wird unnötig erschwert durch Folgendes: Schon bei der leichtesten Bruchrechnung stellt sich die Sprache in den Weg. Man liest z. B. $\frac{2}{3}$ zwei Dritteile; daher $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$ zwei Drittel mal vier Fünftel; anstatt: Multiplikation mit 2 und mit 4, und Division mit 3 und 5. Man bedenkt nicht, dafs der dritte Teil eines Ganzen den Begriff dieses Ganzen in sich schliefst, der kein Multiplikator, sondern nur ein Multiplikandus sein kann. Darin verwickeln sich die Schüler." „Noch mehr wäre zu sagen gegen die

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

falsche Ansicht der Zahlen, als ob sie Summen von Einheiten wären. Das sind sie eben so wenig, als Summen Produkte sind. Zwei heifst nicht zwei Dinge sondern Verdoppelung, gleichviel ob das Verdoppelte Eins oder Vieles ist. Der Begriff von einem Dutzend Stühle fafst nicht 12 Vorstellungen einzelner Stühle in sich, sondern er enthält nur zwei Vorstellungen: den Allgemeinbegriff Stuhl und die ungeteilte Verzwölffachung. Der Begriff von Hundert Mann enthält ebenfalls nur zwei Begriffe: den Allgemeinbegriff Mann und die ungeteilte Zahl 100. Ebenso 6 Fufs, 7 Pfund; in solchen Redensarten kommt die Sprache durch den Singularis zu Hülfe. Die Zahlbegriffe sind nicht zur Reife gekommen, so lange man sie mit Anzahlen verwechselt und am successiven Zählen klebt."

„Man vermengt in den Rechenexempeln die Schwierigkeit, welche in der Auffassung des Gegenstandes liegt, mit der Rechnung selbst. Kapital und Ziel und Zeit, — Geschwindigkeit, Weg und Zeit u. dergl. m. sind Gegenstände, welche den Schülern schon geläufig sein, also längst zuvor erklärt sein müssen, bevor man sie zur Übung im Rechnen darbieten kann. Dem Schüler, welchem die arithmetischen Begriffe noch Mühe machen, sollte man Beispiele geben, die ihm so geläufig sind, dafs er daraus den arithmetischen Gedanken von neuem erzeugen kann und nicht nötig hat, ihn darauf anzuwenden."

„Der pädagogische Wert des gesamten mathematischen Unterrichts hängt hauptsächlich davon ab, wie tief er in das Ganze des Kreises der Gedanken und Kenntnisse eingreife. Dies führt zunächst darauf, dass man die Selbstthätigkeit der Schüler in Anspruch nehmen, und nicht blofs vortragen soll. Mathematische Beschäftigungen sind nötig. Es mufs fühlbar werden, wie viel man durch Mathematik vermag. Zu Zeiten sind schriftliche mathematische Aufsätze zu veranlassen; nur müssen die Aufgaben leicht genug sein, und nicht mit Zwang mehr gefordert werden, als der Schüler bequem leisten kann. Manche reizt schon die reine Mathematik, besonders wenn Geometrie und Rechnung gehörig verbunden werden. Aber sicherer wirkt angewandte Mathematik, wenn der Gegenstand der Anwendung schon das Interesse für sich gewonnen hat. Dafür muss auf anderem Wege gesorgt sein. Die mathematischen Übungen dürfen jedoch den Schüler nicht zu lange in einem engen Kreise aufhalten; sondern der Vortrag mufs daneben fortschreiten." „Ohne Vergleich wichtiger, als blofse Übungsbeispiele, sind Naturkenntnisse, welche desto besser der Mathematik entgegenkommen, wenn sie mit technischen Kenntnissen in Verbindung stehen."

Ich habe Herbarts pädagogische Ansichten über Mathematik seinen Werken in chronologischer Reihenfolge wörtlich entnommen, um manchen meiner Fachkollegen, der bisher pädagogischen Studien fern geblieben ist, heranzulocken und zwar gleich an die beste Quelle, hauptsächlich aber, um dem Leser in meinen späteren Auseinandersetzungen zu zeigen, wie viel Wahres und Wichtiges Herbart zu Anfang dieses Jahrhunderts gesagt, was bis heute noch nicht verwertet worden ist.

Ebenfalls durch Pestalozzis Gedanken und Thaten begeistert, wandte sich im Jahre 1820 ein andrer Geistesheld der edelsten Aufgabe der Menschheit zu: nach gründlichem Studium der Mathematik und Philosophie, besonders der Schriften Kants, schrieb auch Diesterweg auf sein Banner: „Das Heil des Volkes ist mein Ziel!" Und mehr als 40 Jahre arbeitete mit stetem Feuereifer der furchtlose Priester der Wahrheit in Theorie und Praxis der Erziehung. Die meisten seiner Schriften für Lehrer und Schüler waren epochemachend und verdienen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

heute noch studiert zu werden, so z. B. sein „Unterricht in der Formen-, Gröfsen- und räumlichen Verbindungslehre“, ebenso sein „Leitfaden für den Unterricht“ in der allgemeinen und praktischen Arithmetik“, desgleichen seine „elementare Geometrie“ Diesterwegs „populäre Astronomie“ ist ein klassisches Buch, welches heute noch seinen Rang behauptet. Uns interessiert aber vor allem D.'s „Methodisches Handbuch für den Gesamt-Unterricht im Rechnen“, welches er unter Mitwirkung von P. Heuser herausgab. Es mag auch hier der Autor selbst reden. In den Vorreden des Handbuchs sagt Diesterweg (1844): „Noch sind wir bekanntlich nicht so weit gekommen, dafs wir für die Pädagogik, Didaktik und Methodik allgemein anerkannte Prinzipien überall aufzustellen vermöchten“ — „Aber im beschränkteren Kreise, für alle rationellen Gegenstände, zu welchen unbestritten der Unterricht in der Zahlenlehre gehört, glauben wir ein oberstes Prinzip aufstellen zu können. Wir entdecken es, wenn wir den Zustand des Kindes, aus dem ein Mann werden soll, mit der Beschaffenheit des vollendeten Mannes vergleichen. — Nun finden wir in dem Kinde die Empfänglichkeit (Rezeptivität), in dem ausgebildeten Manne die Selbstthätigkeit (Spontaneïtät) vorherrschen. Folglich soll jene zu dieser umgebildet werden, und unser Prinzip für die Methodik, wenigstens der rationellen Unterrichtsgegenstände, heisst: Unterrichte so, dafs überall die Selbstthätigkeit des Schülers möglichst ausgebildet werde. Gleich dem Kantischen obersten Grundsatze der Moral ist dasselbe ein formales Prinzip“

Nun kämpft D. gegen den „alten Riesen“, Mechanismus genannt, und fährt fort:

„Darum dringen wir überall auf vollkommene Einsicht und Erkenntnis“ „Auf diesem Wege geht man überall von dem Einzelnen, Anschaulichen, Konkreten, dem Beispiel (Exempel) aus, um von ihm aus zu dem Allgemeinen und Abstrakten, zu der Regel aufzusteigen“

1. „Es giebt im Wesentlichen nur ein Rechnen“ (nicht Kopf- und Tafelrechnen). „Es beruht auf einer verständigen Beurteilung der in einer Aufgabe enthaltenen Sach- und Zahlverhältnisse, woraus sich die Art der Abhängigkeit der gesuchten Zahlen von den gegebenen ergiebt, und woraus erkannt wird, durch welche Operationen an und mit den gegebenen Zahlen die gesuchten gefunden werden“ „Die anschauliche Durchsichtigkeit und Lösung der Aufgabe mufs stets der Ausrechnung vorhergehen, weil sich jenes zu diesem wie Grund und Folge, Ursache und Wirkung verhält“

2. „Das richtige Rechnen mufs man daher abhängig machen vom richtigen Erkennen und vollkommner mündlicher Darstellung, nicht von Übereinstimmung des gefundenen Resultates mit dem im Buche angegebenen Facit, nicht von dem Bestehen einer sogenannten Probe“

3. „Fertigkeit in der Behandlung der Zahlen ist notwendig ein Augpunkt bei dem Unterricht in der Zahlenlehre, aber man beschränke die Forderung derselben auf das gehörige Mafs! — Treibt man in ursprünglich-pestalozzischer Weise in der Schule fast nichts als Zahlen-, Formen- und Sprachlehre, d. h. vernachlässigt man in unverantwortlicher Weise andere, höchst wichtige Gegenstände des allgemeinen Schulunterrichts, so kann man ohne besondere Intelligenz und ohne ausgezeichnetes *donum didacticum* (wie die Alten sich ausdrücken) den Schülern eine oft bewunderte, aber eitle Fertigkeit aneignen. Doch wozu? —“

4. „Da es nur ein Rechnen, nämlich ein Rechnen mit Verstand giebt, so ist alles Rechnen Kopfrechnen oder Kopf-, nicht Handarbeit. — Man rechnet überall mit Zahlen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

d. h. Vorstellungen von Zahlen oder Mengen von Einheiten. Diese Zahlenvorstellungen sind von äufsern Zeichen ganz unabhängig, wenn man sie auch zu Anfang durch Äufseres veranschaulicht und sich späterhin z. B. bei verwickelteren Rechnungen der allgemeinen üblichen Zahlzeichen d. h. der Ziffern bedient. Das allgemeine Rechnen geschieht daher stets ohne die Vorstellung irgend eines Zeichens."

„Es besteht in der Kenntnis der gegenseitigen Abhängigkeit der Zahlenvorstellungen und in der Vollziehung dieser Abhängigkeit oder in der Entwicklung der einen Zahl aus der andern."

5. „Der Unterschied zwischen dem sogenannten Kopf- und Tafelrechnen besteht also a) darin, dass man bei ersterem an gar keine Zeichen, also auch an keine Ziffern denkt, bei letzterem die Zahlvorstellungen und Operationen sichtbar darstellt; b) darin, dass man im ersten Falle leichte Aufgaben mit kleineren Zahlen giebt und bei gröfseren schriftliche Hülfe gestattet; c) darin, dass man sich beim Nichtgebrauch der Ziffern d. h. beim Kopfrechnen viel freier bewegt als beim Zifferrechnen. Um des allgemeinen Verständnisses willen ist man beim Zifferrechnen übereingekommen über bestimmte Darstellungsweisen, von welchen man sich auch schon deswegen nicht zu entfernen hat, weil sie in der Regel in scharfsinniger Weise einen möglichst kurzen und leicht zu übersehenden Weg einschlagen. In dieser Beziehung herrscht hier die Gebundenheit. Beim Kopfrechnen hingegen herrscht viel mehr Freiheit, welche eigne Bewegung, Auswahl und Belieben zuläfst. Darum lieben geistig bewegliche Kinder so sehr das Kopfrechnen."

6. „Nun stellen wir einige allgemeine Regeln, die sich beim Kopfrechnen bewähren, zusammen. Wir fangen mit negativen an:

a) Gehe beim Kopfrechnen ganz von den Vorstellungen beim Zifferrechnen ab, stelle dir die Zahlen nicht als Ziffern oder durch Ziffern dargestellt vor!

b) Man übe den Schülern solche Operationen und Resultate, die sehr häufig vorkommen, ganz fest ein! Der Lehrer ist es ihnen schuldig, dafs er ihnen das Lernen erleichtere. Nicht zum Spielen sind sie in der Schule, und es giebt keine bildende, sondern nur eine verflachende Spielmethode, aber alles hat sein Mafs. Unsere Schüler müssen viel lernen und sie sollen Schweres lernen; darum erleichtere man ihnen das, was jedem schwer fällt. Man übe das mühsam Erlernte durch viele Wiederholungen. Die höheren Übungen erfordern die Fertigkeit in allen niederen. Der niedere Gedankenlauf mufs sich der Erleichterungsmittel bemächtigt haben, damit der höhere in seinen Schlüssen nicht gestört werde. — Diese Bemerkung würdige man wie im Zahlenunterricht, so im allgemeinen.

c) Man suche eine Mehrheit von Operationen auf möglichst wenige, eine Reihe von Zahlen auf eine kleinere Anzahl, grofse auf kleine zurückzuführen.

d) Man schliefse die Reihenfolge der Operationen genau an den sprachlichen Ausdruck an und komme dem Gedächtnis durch mündliche Wiederholung der bereits gewonnenen Resultate zu Hülfe.

e) Man mache die Schüler auf einzelne Kunstgriffe, sogenannte Vorteile, die sich im Fortschritt des Rechnens von selbst ergeben, aufmerksam! —

„Es werde Licht!" Diesem grossen Gedanken soll jeder rationelle, also auch der Rechenunterricht dienen. Denn der Mensch soll ein Diener sein des Ewigen —"

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

„Der Unterricht in der Zahlenlehre, nämlich der vernünftige, d. h. das Denk- und nicht das Regelrechnen, hat dazu seinen Beitrag zu liefern. Er lehrt den Schüler anschauen, denken, vernünftig sein — sprechen, operieren, handeln, — bildet ihn zur verständigen, raschen Thätigkeit im Leben."

„Aller wahre Unterricht wirkt Menschenbildung. Mehr kann man nicht leisten; so viel soll man aber auch leisten. Auch der Rechenunterricht bildet für das Wahre, Gute, Tüchtige; er erzeugt die Liebe zum Wahren; er hat folglich eine sittliche Wirkung. Durch alles das Eine: Menschenbildung!"

Diesterwegs Mitarbeiter, Paul Heuser, fügt hinzu: „Wer sich zu einem tüchtigen praktischen Rechner ausbilden will, mufs sich mit der Theorie bekannt machen.. Alle verständige Praxis ist ja weiter nichts, als die Anwendung einer allgemeinen Wahrheit auf einzelne Fälle in der Erfahrung."

Der Rechenunterricht mufs so sein, dafs er durch Methode und Material den Schüler in erster Linie zum Menschen, in zweiter aber auch zum tüchtigen Staatsbürger heranbilde.

„Nicht blofs was, sondern weit mehr noch wie gelehrt wird, fördert die Bildung des Verstandes und des Gemüts. Wenn der Unterricht in Volksschulen (incl. Real- und höheren Bürgerschulen) nicht vom Einzelnen, Anschaulichen ausgeht und sich methodisch zu Begriffen erhebt, so ist er nur tönendes Erz und eine klingende Schelle. Vom Einzelnen zum Allgemeinen, von Anschauung zu Begriff: daran hängt das ganze pädagogische Gesetz und die Propheten."

Es ist eine hohe Freude, in den Diesterweg-Heuserschen Rechenbüchern die wohldurchdachte Gliederung des Stoffs und die naturgemäfsen, stetigen Entwicklungen vom Konkreten zum Abstrakten, vom Einfachen zum Zusammengesetzten zu sehen. Vor 20 Jahren hörte ich, wie ein begeisterter Herbartianer mit Geringschätzung von Diesterweg sprach; ich hielt mich zur Berichtigung berechtigt. Herbart war ein Genie ersten Ranges, das mit vorher nie dagewesener Klarheit die seelischen Vorgänge erforschte und die Psychologie zur Basis seiner Pädagogik machte; er war Lehrer an Hochschulen, und obwohl er allgemeine Pädagogik lehrte und schrieb, so dachte er bei seiner Lehre vom Unterricht doch nur an die Vorschule der Hochschule, an das Gymnasium. Diesterweg war ein grosses Talent, der als Seminardirektor Volks- und Bürgerschullehrer belehrte, begeisterte, sie von der hohen Bedeutung ihres Berufs überzeugte, vom trägen Mechanismus zu idealem Streben und freiem Schaffen vereinte und emporhob. Erst nachdem Diesterweg den Boden bereitet, ist in den letzten Jahrzehnten in denselben Kreisen das Bedürfnis nach tieferer wissenschaftlicher Einsicht entstanden und das Verständnis Herbartscher Schriften angebahnt. Aber erst seit jüngster Zeit wenden sich die Lehrer höherer Schulen dem Studium wissenschaftlicher Pädagogik zu. Dafs überhaupt Herbart in seiner aufserordentlichen Bedeutung erkannt und gewürdigt wurde, ist das hohe Verdienst seiner Schüler, namentlich der rastlosen Wirksamkeit in Praxis, Wort und Schrift von Stoy, Ziller, Kern, Dubal, Zimmermann, Lindner, Strümpell u. a.

Gleichzeitig mit Diesterweg wirkten Krancke, Scholz und manche Andere förderlich auf dem Gebiete des Rechenunterrichts. Es ist mir unmöglich, alle zu kennen oder gar hier zu besprechen. Zu erwähnen ist nur, dafs jene beiden aufser sorgfältig gefertigten Aufgabensammlungen den Lehrern ausführliche Unterrichtsanweisung geben. Es herrscht aber

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

bei ihnen, besonders bei Friedrich Krancke, weit mehr als bei Diesterweg die Richtung auf das Praktische vor, was nach meiner Ansicht auch in den Volks- und Realschulen damals und heute noch auf Kosten des rein erziehlichen Zwecks geschieht. Dazu kommt, dafs der praktische Gewinn zum Teil ein eingebildeter ist; man beobachte nur die Erwachsenen, die in der Schule oft zu den besten Rechnern gehörten, was von der Zins-, Rabatt-, Termin- Rechnung bei ihnen klar und anwendbar geblieben ist. In Kranckes „Hülfsbuch beim Unterricht im Kopfrechnen" traut man seinen Augen nicht, wenn man nur das überreiche Inhaltsverzeichnis durchsieht, und diese peinliche und kleinliche Gliederung des Stoffs meist aus praktischen Gründen! —

Es haben auch namhafte Mathematiker in ihren Gesamtdarstellungen der Mathematik das elementare Rechnen mit bearbeitet, wie z. B. Vega in seinen „Vorlesungen", Ohm in seinem „konsequenten System", Schulz von Strafsnitzki in seiner „praktischen Mathematik" u. s. w. Wir finden in diesen Werken eine knappe, klare, systematische Behandlung des Rechnens mit dekadischen Zahlen ohne irgend welche Beziehung auf Methode des Unterrichts. Hingegen möchte ich hier die jungen Kollegen auf Thibauts „Grundriss der reinen Mathematik" aufmerksam machen, welcher zwar alt, aber nicht veraltet ist, und das Rechnen behandelt, aber psychologisch und logisch rein die Begriffe der Zahlen und Operationen untersucht. Diesem Werke reiht sich Wittsteins Lehrbuch der Arithmetik (1846), Cantors „Grundzüge einer Elementararithmetik", Schröders „Lehrbuch der Algebra" und Hankels „Theorie der complexen Zahlen" an. —

Die pädagogischen Vervollkommnungsversuche umfafsten schliefslich auch das Rechnen an höheren Schulen. Im Jahre 1844 erschien Fölsings „Rechenbuch für Gymnasien, Real- und Bürgerschulen", welches „hauptsächlich eine Übung im mathematischen Denken und eine Vorbereitung auf späteren, mathematischen Unterricht bezweckte." Dieses Buch ist heute noch im Gebrauch und hat in der 15. Auflage noch dieselben Vorzüge, aber auch fast noch dieselben Mängel wie ehedem.

Der hochverdiente Mathematiker E. Heis gab 1847, auf 23jährige pädagogische Erfahrung gestützt, ein „Rechenbuch für Gymnasien, Real- und Gewerbeschulen" heraus. Er legt grosses Gewicht darauf, dafs der Schüler zu Anfang sich das Mechanische des Rechnens, die 4 Species mit ganzen Zahlen recht zu eigen mache, damit das Lösen von Aufgaben nicht dadurch Hemmungen und Störungen erleide. Zur Anwendung von Rechenvorteilen, die sich bekanntlich nur auf die Eigenschaften einzelner Zahlen gründen, wie z. B. die Kennzeichen der Teilbarkeit, die 100 und ihre Teile u. s. w., fügt er allenthalben Beispiele hinzu. Heis entnimmt schon viel Stoff zu eingekleideten Aufgaben der Geschichte, Geographie, Astronomie, Technik u. s. w., wenn es auch öfter zweifelhaft ist, ob die verwendeten Vorstellungen und Begriffe schon im Bewufstsein des Schülers liegen. Methode in der Wahl und Folge dieser Beispiele ist nicht zu erkennen.

Während in der Folgezeit der Büchermarkt eine Überproduktion von Rechenbüchern für Volksschulen aufwies, von denen nur einzelne hervorragen, wie das vorzügliche, auf Scholz' „Rechenlehrer" gegründete, heute noch viel gebrauchte „Lehrbuch des Rechenunterrichts in Volksschulen" von Hentschel, wartete man vergeblich auf ein gutes Rechenbuch für höhere Schulen, bis endlich Schellens „Aufgaben für das theoretische und praktische Rechnen für höhere

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Schulen" und hierzu seine „methodisch geordneten Materialien u. s. w., ein Handbuch nach geistbildenden Grundsätzen und mit besonderer Berücksichtigung des Kopfrechnens für Lehrer u. s. w." erschienen. Schellens leitende Gesichtspunkte sind: Der Rechenunterricht hat in den unteren Klassen dieselbe Bedeutung, wie die Mathematik in den oberen; er ist die vorzüglichste Gymnastik des jugendlichen Geistes, namentlich das Kopfrechnen durch Anstrengung der Denkkraft, durch Entwicklung des Kombinationsvermögens und durch Schärfung des Urteils. Das Rechnen übt einen günstigen Einflufs auf formale Bildung überhaupt, auf geistige Erregung und auf allseitige, harmonische Entwicklung der geistigen Kräfte in ähnlicher Weise, wie die Mathematik. Dieser Unterricht hat in Gymnasium und Realschule neben einer erschöpfenden Behandlung des theoretischen Teiles der Zahlenlehre, der Operationen mit ganzen Zahlen, mit gewöhnlichen Brüchen und Decimal-Brüchen, sich über diejenigen Aufgaben des angewandten Rechnens zu verbreiten, welche der einfachen und zusammengesetzten Regeldetri, den verschiedenen Procentrechnungen, der Verteilungs-, Mischungs- und Kettenrechnung angehören; die Realschule allein hat ausser diesen Rechnungsarten noch die in der Handelswelt vorkommenden höheren Geschäftsrechnungen zu behandeln. Die Grundrechnungen sind repetitorisch durchzunehmen, dafür mufs mehr Wert auf Begriffbestimmung, Wesen der Operationen, gegenseitige Abhängigkeit derselben, auf konsequente Ableitung der Gesetze der Zahlveränderungen, überhaupt mehr auf wissenschaftliche Darstellung gelegt und mit gröfseren Zahlen gerechnet werden. Das Kopfrechnen ist fleifsig zu üben, aber nicht als etwas Besonderes zu behandeln; die Regeln desselben müssen aus den Beispielen abstrahiert werden. Auf jeder Stufe mufs vom Schüler das Neue zuerst rein für sich aufgefafst und begriffen, dann aber das neu Erkannte mit dem bereits früher Erlernten mannigfach und in möglichst verschiedenen Formen verbunden werden.

Für jede Rechnungsart müssen viele, verschiedene Aufgaben verwendet werden, damit aus der richtigen Auffassung der einzelnen Fälle das allgemeine Gesetz erkannt werden könne. Die Ableitung und das Aufstellen jeder Regel mufs so lange aufgeschoben bleiben, bis das Wesentlichste jeder Rechnung vom Schüler vollständig aufgefasst ist; denn der Schüler soll „rechnend denken lernen und Fertigkeit im Rechnen fürs Leben erlangen." Die gemeinen Brüche müssen in Sexta möglichst elementar und anschaulich behandelt, in Quinta bei Wiederholung der Bruchrechnung aber konsequent aus den an die Spitze gestellten Begriffen abgeleitet werden. Die Decimal-Brüche schliefsen sich in Quinta an die gemeinen an und deren Operationen sind aus den Gesetzen jener abzuleiten. In den oberen Klassen ist das Rechnen mit gekürzten Dezimal-Brüchen zu lehren (wie schon Meier-Hirsch in seiner algebr. Aufgabensammlung thut). Ferner verlangt Schellen, dafs auch das schriftliche Rechnen nur mit klarer, sicherer Einsicht und nicht mechanisch stattfinde, dafs die Schlufsrechnung (Zweisatz) als leicht erlernbare, alles beherrschende Methode angewendet werde und nicht die Projektion (letztere in der Mathematik).

Die Ausarbeitung eines Rechenbuchs nach geistbildenden Grundsätzen erfordert besondere Rücksichtnahme auf Anordnung, Fassung und Gestalt der Aufgaben. — Schellens Rechenbuch enthält hochwichtige Fortschritte, enthält aber viele Mängel bezüglich des Stoffes und der Form von Aufgaben. Eine Polemik ist auch hier nicht nötig, da der 2. Teil meiner Abhandlung diesen Punkt erledigt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zwei erfahrene Mathematiklehrer, Prof. Harms und Dr. Kuckuck, veröffentlichten 1870 ein Rechenbuch für höhere Schulen, welches vielen Beifall verdient. Durchweg gutgewählte Zahlen, vom Leichteren zum Schwereren aufsteigende Aufgaben, dem Leben wirklich entnommene Stoffe und Verhältnisse zeichnen diese Aufgabensammlung aus.

Prof. Harms hat aufserdem sich durch seine Rechenaufgaben für Vorschulen, wie durch seine Vorschule zur Arithmetik und Geometrie grofse Verdienste erworben. Von einem höheren, pädagogischen Standpunkte aus, als von dem mathematischen und praktischen, ist das Rechenbuch von H. und K. nicht bearbeitet worden.

Dr. Féaux verfafste ein „Rechenbuch mit geometrischer Anschauungslehre zunächst für die drei untern Gymnasialklassen." Wegen der angefügten Bestimmung mufs es hier besprochen werden. Der Verfasser giebt in diesem wie in seinen übrigen Schulbüchern zu erkennen, dafs er mit vollem Bewufstsein und jedenfalls aus genügender Erfahrung die Forderungen auf den verschiedenen Stufen und in den verschiedenen, mathematischen Disziplinen so niedrig stellt, dafs sie von der Mehrzahl der Schüler sicher erfüllt werden. Die Pensa der drei Klassen sind genau abgegrenzt. Die Aufgaben sind einfach. Die Regeln sind beigegeben und aus Beispielen abgeleitet. Im Pensum der Quarta ist viel Wert auf Raumrechnung und Kenntnis der Zahlensysteme gelegt. Man könnte die Richtung des Buches die historisch-praktische nennen. Empfehlenswert sind die Umkehrungen der Regeldetri-Aufgaben. Verfehlt ist die geometrische Anschauungslehre. Schädlich sind die beigedruckten Lösungen und überflüssig im Schülerbuch Bemerkungen für den Lehrer.

Im Jahre 1871 bereicherte Direktor Dr. Pick in Wien, früher Astronom, die pädagogische Litteratur mit einem wertvollen Büchlein, welches 1877 in verbesserter Gestalt erschien: „Arithmetik für die unteren Klassen der Mittelschule." Er sagt im Vorwort: „Es war nicht die Absicht des Verfassers dem Werke den Schein der Originalität zu geben; ja er hat sich wohl gehütet, diejenigen Partien in eine andere als die übliche Darstellung zu kleiden, welche ihm sowohl sachlich als didaktisch hinreichend durchgearbeitet schienen. Trotz des bedeutenden Fortschrittes aber, welcher auf diesem Gebiete in Deutschland durch Diesterweg, bei uns durch Strahl inauguriert wurde, dürfte der sachkundige Lehrer zugeben, es sei noch manches nicht so, wie es die hohe Wichtigkeit des Gegenstandes erfordert; und der Verfasser meint, die Mittel zu einem bildenden Unterricht im Rechnen durch dieses Buch nicht unwesentlich bereichert zu haben."

„Fafst man andere Materien, welche den Bildungsstoff für diese Altersstufe abgeben, ins Auge, so wird man zugeben, dafs die Art, wie sie sämtlich auf dieser Stufe behandelt werden müssen, ein für Gründlichkeit im Wissen und Festigung des Charakters sehr wesentliches Moment viel zu wenig zur Geltung bringt. Wir meinen das Verfolgen einer Wahrheit bis in ihre äussersten Konsequenzen; wir möchten sagen, das energische Durchdenken einer zusammenhängenden Gedankenreihe bis an's fernste Ende derselben. — Es fragt sich nun, welcher Unterrichtszweig diesem hohen Zwecke am meisten dienen kann." „Die Naturwissenschaften und Sprachen als Bildungsmittel zu unterschätzen, dürften wir die letzten sein; selbst den hohen Einflufs, den sie, richtig behandelt, auf streng logisches Denken üben, sind wir weit entfernt, gering anzuschlagen; — aber zu einer solchen Geistes-Turnübung, wie wir sie hier

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

meinen, sind sie aus Gründen, die in der Natur beider Gruppen von Gegenständen liegen, nicht geeignet; sie können ja dem Schüler auf dieser Stufe in keinem ihrer Teile einen priori abgeschlossenen Gedankenkomplex darbieten."

„Was nun auf höheren Stufen die Mathematik, das kann und soll, nach unsrer Ansicht, auf dieser Stufe der Rechenunterricht leisten; durch denselben sollen die Schüler gewöhnt werden, einen Gedanken erschöpfend zu behandeln und aus ihm die letzten Folgerungen zu ziehen. Soll aber dieses der Fall sein, dann mufs jedes halbbewufste, jedes unklare Wissen, jeder Widerspruch, jeder Scheinbeweis vermieden werden."

Picks Werk ist ein Lehr- und Übungsbuch, dessen Erklärungen und Entwicklungen sich durch Klarheit und Einfachheit empfehlen; die Übungsbeispiele sind den verschiedensten Wissensgebieten entnommen, können aber in vielen Fällen das Interesse der Schüler nicht erregen, weil der sachliche Inhalt gänzlich aufserhalb ihres Erfahrungsgebietes liegt. Viele Kapitel zerfallen in drei Abteilungen; die erste wiederholt die Kenntnisse der Schüler von der Volksschule her und bietet den Stoff der Anschauung für die zu entwickelnden Gesetze und zur Einführung in dieselben; die zweite giebt streng wissenschaftliche Darstellungen, nach meiner Überzeugung mehrfach zu viel für diese Altersstufen; Abteilung drei bringt Übungen, zum Teil mit vorzüglich anregenden Fragen. Pick verlangt „volle Einsicht" in das Wesen der Materie" und hält es für wichtig, „dafs der Schüler sich des Inhalts eines jeden Kapitels und der logischen Aufeinanderfolge der Sätze bewufst werde." „Jene Scheinwissenschaftlichkeit, die in der Form, nicht aber im Wesen liegt, habe ich gesucht, dem Buche fern zu halten; dagegen waren mir die psychologischen Momente von gleicher Wichtigkeit, wie die logischen." „Ich habe versucht den Schüler schon hier in jenen Gedankenprozefs einzuführen, der zu einer Erweiterung der ursprünglichen arithmetischen Begriffe geleitet hat, und dem die heutige Mathematik ihre Gröfse dankt."

Das „Lehrbuch für den Rechenunterricht, Propädeutik der allgemeinen Arithmetik zum Gebrauche an höheren Lehranstalten" von Prof. J. Henrici, welches 1875 erschien, läfst schon auf dem Titel erkennen und sagt es nochmals in der Vorrede, dafs der Verfasser neben der Aufgabensammlung ein Lehrbuch („die Grammatik des Rechnens") in der Hand des Schülers wissen will, dafs ein Hauptzweck des Rechenunterrichts auf höheren Schulen die Vorbereitung auf den mathematischen Unterricht der oberen Klassen sein soll und Schulen ohne letzteren im Rechnen den Ersatz finden mögen. Deshalb „werden die Begriffe und Sätze, welche die Grundlage für das gemeine wie für das allgemeine Rechnen bilden, nicht (wie es in der Elementarschule gebräuchlich) als an Beispielen verifizierte Erfahrungssätze hingestellt, sondern anschaulich abgeleitet und als allgemein giltig bewiesen." Henricis Werk ist ein grofser Schritt vorwärts in der Methode des Rechenunterrichts. Das Buch vermeidet, die mehrstelligen Zahlen als mehrfach benannte Zahlen aufzufassen, behandelt aber den Bruch als eine benannte Zahl. Der sprachliche Ausdruck ist bei manchen Memorier-Stoffen nicht einfach genug, auch darf darin gewifs kein Hinweis auf Vorhergehendes stehen mit Worten „wie oben angegeben."

Wieder einen Schritt weiter in der Methode führt uns das „Übungsbuch für den Rechenunterricht an Mittelschulen" von P. Treutlein, Professor am Gymnasium zu Karlsruhe. Es vereinigt alle Vorzüge der früher erwähnten Bücher und fügt noch viele hinzu. Anschaulichkeit,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

stetiger Fortschritt, Einfachheit in Sprache und Darstellung, vor allem Mafshalten in der Menge des Dargebotenen sind die Haupteigenschaften dieser Arbeit.

Erwähnt seien noch die „Beiträge zur Methode des mathematischen Unterrichts“ vom Gymnasiallehrer H. Müller in Cöslin und die „Aufgaben für den Rechenunterricht in höheren Schulen und deren Vorbereitungsklassen“ (5 Hefte; 6. Auflage) vom Realschuldirektor Buchenau in Bremen. H. Müller giebt viele beachtenswerte, methodische Winke im Einzelnen und wohldurchdachte Anordnung des Stoffs, verteidigt aber die Projektionsrechnung in Quarta, hat im Übungsbuch eine sehr geringe Anzahl von Aufgaben, fordert vom Lehrer, die Klassen-Aufgaben stets selbst zu erfinden, und setzt im Übungsheft die unbegründeten Rechenregeln fürs Memorieren hin.

Buchenau bietet in fünf schön ausgestatteten Heften eine reiche Sammlung von Aufgaben. Hier sieht der Schüler den Fortschritt im Lernen auch deutlich am Fortschreiten im Buch und empfindet Freude darüber. Die Schlufsrechnung ist vorzüglich behandelt und das 5. Heft schliefst mit der Proportion als Bruchgleichung, woran sich Aufgaben aus der Geographie, Geometrie und Physik reihen. Leider stehen auch hier die trocknen Regeln am Anfang jedes Kapitels.

Trotz der Fortschritte, wie sie aus dem Vorhergehenden ersichtlich sind, bemerkt jeder in seiner eignen Wissenschaft und Kunst wohlunterrichtete Erzieher leicht, dafs der Rechenunterricht und die Rechenbücher noch sehr zurückstehen hinter den Forderungen, die vor 80 Jahren der grofse Herbart stellte.

C. V. Stoy konnte mit vollem Recht noch vor wenigen Jahren sagen: „Die Methode des Rechenunterrichts ist, trotz einer Überfülle von Abhandlungen, Lehrbüchern und Aufgabensammlungen, noch weit entfernt von einem durch die Klarheit der pädagogischen Grundlagen gesicherten Fortschreiten (Encyklopädie § 116 2. Aufl.).“ Wenn ich nun in den folgenden Zeilen die Sache zu fördern suche, so meine ich selbstverständlich nicht, dafs „ich es schon ergriffen habe oder schon vollkommen sei.“ Ich hatte vor 21 Jahren das Glück durch Prof. Stoy in die Herbartsche Psychologie und Pädagogik theoretisch und praktisch eingeführt zu werden. Der Mahnung dieses begeisterten und begeisternden Lehrers getreu, hab' ich fast nie eine Stunde auch des scheinbar leichtesten Unterrichts unvorbereitet begonnen. Die Folge war ein stetiges, freudiges Fortschreiten in der Kunst des Unterrichtens und Erziehens. Man deute mir diese Worte nicht falsch: sie dienen nur zum Nachweis der Berechtigung und Verpflichtung, durch schriftliche Meinungsäufserung der Pädagogik zu nützen.

B. Kritik und Reform.

Die Mathematik enthält die ersten Kenntnisse der Menschheit, welche den Namen einer Wissenschaft verdienen, wie schon ihr Name sagt. Die Denkthätigkeit des Vergleichens und Unterscheidens führte die Gattung „homo sapiens“ und das Individuum zum Zählen und Messen, und dieses lieferte die ersten bestimmten Erfahrungen. Alle Kenntnis wird zur Erkenntnis durch Zählen und Messen. Das Studium der Aufsen- und Innenwelt, des Raumes, der Zeit,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

der Materie, der Kräfte im Makro- und Mikrokosmos, der Lebenserscheinungen in jeglichem Organismus und des Menschengeistes selbst ist ohne Mathematik ein Tasten im Dunkeln; nur wo die Leuchte der Mathematik ihre Strahlen hinzuwerfen vermag, ist es möglich, sich dem Weltgeist zu nahen und der Gottheit ewige Weltgesetze, sein Schaffen am sausenden Webstuhl der Zeit zu erkennen. Nach Humboldt ist jede Naturwissenschaft nur so weit wirkliche Wissenschaft, als Mathematik darinnen ist. Die Leistungen H. Grafsmanns auf dem Gebiete der Sprachwissenschaft gelangen ihm nur durch Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Die Mathematik ist selbst noch im Werden begriffen und wird mit ihrem Wachsen ihre Macht noch weiter entfalten. Die Elementarmathematik ist am leichtesten zu begreifen. In einem hohen Grade der Vollendung ist uns letztere schon von den Griechen überliefert worden. Die Mathematik ist die sicherste aller Wissenschaften, weil sie die einfachste ist; sie braucht zu ihrem ehrwürdigen Bau ein Minimum von Material: einige Grundbegriffe und einige Grundurteile genügen, das konsequente System der reinen und angewandten Mathematik zu bilden. — Dafs die Mathematik ein notwendiger Teil des Erziehungs- und Unterrichtsstoffs sein mufs, ist längst anerkannt und beachtet; welche Bedeutung sie aber als Teil des Ganzen haben soll, ist nicht einstimmig entschieden. Hat man doch jüngst noch gesagt, die Mathematik habe in folge ihres ewigen Einerlei weniger Operationen und Lösungsmethoden einen geringen pädagogischen Wert. Ob eine solche Ansicht auf dem Boden wissenschaftlicher Pädagogik gereift sein kann? Giebt es aufser Syllogismus und Induktion noch andere Schlufsformen? Bevor ich meine eigne Ansicht darlege, mag erst Prof. E. Schindler gehört werden: „Was schliefslich die Bedeutung des mathematischen Unterrichts für die Schule betrifft, so sind wir der Ansicht, dafs kein Unterrichts-Gegenstand Selbstzweck ist; dafs vielmehr jeder Unterrichts-Gegenstand nur ein Unterrichts-Mittel bildet, um eine Seite des jugendlichen Geistes auf eine nur durch diesen Unterrichts-Gegenstand erreichbare Art möglichst vollständig zu entwickeln. Darnach stellt eine Schule auch nur in dem Sinne einen Organismus dar, dafs dieselbe imstande ist, durch ihre Unterrichts-Gegenstände den jugendlichen Geist allseitig organisch und harmonisch zu bilden, d. h. fähig zu machen, die Gedanken Gottes, welche sich in dem Weltorganismus offenbaren, als organische zu begreifen, zu fühlen und darnach zu handeln. Jedem Unterrichts-Gegenstand darf daher nur ein relativer Wert beigemessen werden."

„Die Mathematik behandelt eine Grundeigenschaft der Dinge und ist daher eine Grund-Wissenschaft. Recht gelehrt, mufs dieselbe mithin, als die elementarste aller Wissenschaften, von dem Schüler auch als die leichteste empfunden werden. Recht gelehrt, müssen dem Geiste aus dem mathematischen Unterrichte die Synthese und die Analyse mit ihren Grund-Begriffen, den Erklärungen und Definitionen, als die Grund-Methoden bewufst werden, durch welche er die Mannigfaltigkeit der Wirklichkeit beherrschen lernt. Das Wesen des Weltgesetzes der Entwicklung, die dem Geiste durch den Verstand verliehene erzieherische Kraft und Stärke, die Bedeutung des Gedächtnisses, der geistige Prozefs bei der Wortbildung: alle diese wichtigen psychischen Momente wurzeln auf dem Boden dieses Unterrichts-Gegenstandes und können hier, wenn auch nur in ihren ersten Keimen, zum Bewusstsein gebracht werden. Keine andere Wissenschaft führt so wie sie bis auf die letzten Elemente der Dinge hin. Dar-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

um besteht auch in der dargelegten geistigen Entwicklung die specifisch-mathematische Bildung; deshalb ist diese mathematische Bildung auch zugleich der Maſsstab für den relativen Wert des mathematischen Unterrichts. Ebenso liegt es in der elementaren Natur dieses Unterrichtsgegenstandes, von dessen Boden tausend Pfade zu den Regionen der Wissenschaften höherer Ordnung führen, daſs kein Lehrer so gut wie der Mathematiker die Gelegenheit hat, den Schülern die Bedeutung des Schulorganismus für ihre eigene Ausbildung zum lebendigen Bewuſstsein zu bringen. Darum aber ist es auch seine Pflicht, dies bei jeder passenden Gelegenheit zu thun."

„Der relative Wert der Mathematik als Unterrichts-Gegenstand wird indessen noch durch eine andere Eigenschaft derselben um ein Bedeutendes erhöht."

„Es liegt nämlich in der Natur des Menschengeistes, daſs er zur Erkenntnis der Dinge allein dadurch gelangen kann, daſs er von der Form zu ihrem Inhalte vordringt. Daher muſs die formale Bildung der Grundstein jeder echten Bildung und mithin jeder Schule sein. Da nun die Mathematik die Form der Dinge, d. h. der Natur, die Grammatik aber die Form der Sprache, d. h. die Offenbarung des Menschen-Geistes behandelt, so müssen Mathematik und Grammatik als die beiden Eckfeiler einer jeden Schule bezeichnet werden. Sie bilden mithin die beiden Pforten, aus denen der Menschengeist zu jeder höheren Erkenntnis mit Sicherheit vorzudringen vermag. Da jedoch die Mathematik, verglichen mit der Grammatik, die elementare Stufe bildet und auſserdem als Unterrichtsgegenstand den Vorzug genieſst, von allen Wissenschaften die einzige rein formale zu sein, so steht zu hoffen, daſs dereinst wieder, wie zu den Zeiten Platos, an den Eingangs-Pforten unsrer Schulen, gleichsam als Wahrzeichen, der Spruch stehen wird:

Ἀγεωμέτρητος μηδεὶς εἰσίτω."

In der Sprache Herbarts und seiner Schule drücken wir uns so aus: Der mathematische Unterricht ist ein notwendiger Teil des erziehenden Unterrichts; recht gegeben, ist sein Resultat das empirische, spekulative und ästhetische Interesse. Versäumt dieser Unterricht nicht, die Geschichte dieser Wissenschaft und die Charakteristik ihrer groſsen Vertreter maſsvoll zu verwerten, so wird auch das sympathetische und soziale Interesse entzündet; und gewiſs muſs die Wissenschaft, die den ruhenden Pol in der Erscheinungen Flucht suchen lehrt, schlieſslich das Interesse zum Ziel haben, welcher jeder Unterrichtsstoff erwecken soll: das religiöse.

Der mathematische Unterricht muſs in allen Teilen möglichst anschaulich sein. Die Hauptmethode ist die entwickelnde; entbehrlich ist weder die erläuternde noch die darstellende.

Die Geometrie hat als Vorbereitung die Formenlehre, die Arithmetik das Rechnen.

Geometrische Formenlehre und Rechnen müssen auf den Unterstufen ebenso einander dienen, wie Geometrie und Arithmetik auf den oberen. Formenlehre und Rechnen haben auf der unteren Stufe dasselbe Verhältnis zu den übrigen Disziplinen wie Geometrie und Arithmetik in den oberen Klassen zu den übrigen Unterrichtsgegenständen.

Das Rechnen lehrt die verschiedenen Arten des Zählens und Messens, die sogenannten vier Species, es untersucht die Beziehungen zwischen den Begriffen „Vielheit" und „Einheit", „Ganzes" und „Teil", es betrachtet in der Verhältnisrechnung (Schluſsrechnung) die Wachstumsveränderungen von einander abhängiger Gröſsen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die griechischen Schulknaben lernten erst Geometrie und dann Rechnen. Das heutige Rechnen mufs ebenso auf Anschauung gegründet sein. Im Abstrahieren zeigt sich die eigenste Selbstthätigkeit des Menschen. Das Kind mufs so lange beim Anschaulichen verweilen, bis es von selbst zu abstrahieren beginnt. Was das Kind selbst kann und will, worin sein geistiges Leben im Wesentlichen besteht, soll man ihm weder fertig darreichen, noch mit zu viel Hülfe gewinnen lassen; es fehlt sonst die Freudigkeit des eignen Schaffens, und vor der Schwelle des Bewufstseins liegt tote Ware. Es führt nur ein Mittel zu dauerndem geistigen Besitz: die Arbeit. Was man erstrebt und erarbeitet hat, ist im Innersten erlebt und unverlierbar geistig verwebt. Der anschauliche Rechenunterricht mufs also das Zählen, Messen, die vier Spezies, die Abhängigkeit gleichmäfsig wachsender Gröfsen an wirklichen Objekten vornehmen lassen z. B. an Linien, Flächen, Körpern aller Art. Der Knabe mufs selbst Flächen addieren, teilen u. s. w. und dann dieses physische und psychische Geschehen in der Symbolik der Zahl- und Operationszeichen ausdrücken. Die Hauptthätigkeit des Lehrers ist, den Abstraktionsprozefs des Schülers zu leiten und stets die Giltigkeitsgrenzen der Verallgemeinerungen wie mächtige Marksteine zu bezeichnen. Es kann wohl kaum ein andrer Unterricht in gleichem Grade, wie der mathematische, gegen die Geisteskrankheit des Menschengeschlechts d. i. die unberechtigte Urteilserweiterung, die sich im Über- und Unterschätzen, in Behauptungen mit dem Ausdruck apodiktischer Gewifsheit, allgemeinster Geltung, kurz im unlogischen Denken kundgiebt. Diese Krankheit findet sich bei Laien und Priestern der Wissenschaft, selbst bei den Evangelisten der Pädagogik, und sie erhält immer neue Nahrung durch Phantasie und Leidenschaften. Mit diesem Kampfe kann die Erziehung nicht früh genug beginnen, und das Rechnen ist der geeignete Kampfplatz.

Der Rechenunterricht soll aber noch mehr leisten: er kann, wie kein anderer auf dieser Stufe, die Aktivität des Begreifens zur höheren des Produzierens, zum schöpferischen Denken steigern. Mathematik ist ein blofses Erinnern, sagt Plato. Der Schüler mufs alle Gesetze und Regeln selbst entdecken, die gefundenen weiterbilden. Die Freude des Erfindens ist wohl eine der höchsten und edelsten. Ich erinnere mich gern und oft der Schüler, welche „kürzere" Lösungswege eingeschlagen, auf neue Weisen Zahlenreihen summiert haben u. s. w. Ein Quartaner entdeckte das (begrifflich) einfachste Verfahren, einen unreinperiodischen Decimalbruch in einen gemeinen zu verwandeln: z. B. $0{,}45\overline{3}333\ldots = 0{,}45 + 0{,}00\overline{3}33\ldots$

Als Konsequenz aus dem Vorangehenden folgt: der Rechenunterricht mufs den natürlichsten Abstraktionsgang nehmen lassen. Selbstverständlich ist, dafs ein Begriff keinem Menschen gegeben werden kann. So wenig ich einen Menschen ernähre, wenn ich für ihn esse und trinke, so wenig kann ich ihn geistig entwickeln, wenn ich für ihn abstrahiere; und ein Begriff kann doch immer nur auf dem Wege der Abstraktion gewonnen werden. So wahr und selbstverständlich aber auch dieser Satz ist, so viel wird dagegen gesündigt. Wenn man beim Studium wissenschaftlicher Werke auf dunkle Stellen stöfst, so prüfe man, ob nicht der Verfasser das Wort für einen neuen, ihm bekannten Begriff gegeben hat, ohne die Objekte, an denen abstrahiert werden soll, genügend bezeichnet zu haben. Kein Begriff darf auf diesen Stufen eine Erweiterung erfahren, er ist mit einer ganz bestimmten Definition gewonnen und mufs in dieser vollständig ausgewertet und befestigt werden. Es ist demnach unpädagogisch, die Subtraktion durch Addition zum Subtrahenden bewirken zu lassen. Es ist unpädagogisch,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

den Bruch als unbenannte Zahl und als Quotienten zu definiern und zu verwerten. Auf der Stufe des Rechenunterrichts liegt noch nicht die Addition im Begriff der Subtraktion und umgekehrt; auch soll das Wort so lange und so weit wie möglich den Begriff decken. Wenn auch in Frankreich, Oesterreich, England und Belgien die Subtraktion als Addition gelehrt wird, so bleibt es didaktisch falsch, damit zu beginnen. Es ist unrichtig, von Anfang an die Division als inverse Rechnung zu definieren, im Begriff „Division" liegt es ursprünglich nicht.

Aus den von mir studierten, französischen, englischen und amerikanischen Rechen- und Mathematikbüchern für Schulen war bezüglich der Methode kaum Gewinn zu ziehen; sie bezwecken fast nur die Aneignung praktisch verwendbarer Kenntnisse. Selbst Männer wie Briot sagen: (Eléments d'arithméthique, Pag. 100, No. 105) „Voici la définition générale de la division: Étant donnés deux nombres nommés, l'un dividende, l'autre diviseur, trouver un nombre qui, multiplié par le diviseur, reproduise le dividende."

Ebenso Charles Davies in seinen Elements: „Division is the operation for finding from two given quantities a third quantity, which multiplied by the second, shall produce the first."

Eine rühmliche Ausnahme macht ein engliches Werk aus dem Jahre 1836 von Augustus de Morgan, welches allerdings zur Selbstbelehrung bestimmt ist: „Study and difficulties of mathematics." In diesem Buche ist auf den ersten 18 Seiten das Decimalsystem, die vier Species mit Ganzen und Brüchen auſserordentlich anschaulich behandelt.

Der Rechenunterricht soll sich in konzentrischen Kreisen erweitern bis zum Übergang zur Arithmetik. Jede Zahlengattung und Rechnungsart, jedes Zahlenverhältnis und jeder Schluſs hat einfachste Werte und Formen, „Elemente", und diese müssen behandelt werden, wo sie sich zuerst naturgemäſs darbieten. „The examples which a beginner should choose for practice should be simple, and should not contain very large numbers. The powers of the mind cannot be directed to two things at once: if the complexity of the numbers used requires all the student's attention, he cannot observe the principle of the rule which he is following. Now, at the commencement of his career, a principle is not received and understood by the student as quickly as it is explained by the instructor." (de Morgan).

Die Vorbereitung, Darbietung, Assoziation, Vertiefung und Besinnung, Einordnung, Anordnung und Anwendung liegt im Begriff der „stetigen Entwicklung" und ist in höherem Grade zu befolgen während des ganzen Lehrkursus, als in der einzelnen Schulstunde. Um im Bilde zu reden: Vorhandne Keime müssen entfaltet und neue Samen gelegt werden, wie die Jahreszeit es gebietet.

Der Rechenunterricht muſs den Schüler zu einem möglichst klaren Bewuſstsein seiner Denkthätigkeit führen. Hierzu ist erforderlich, daſs man bei den wichtigsten Grundlagen auch am längsten verweile. Non multa, sed multum! Und mit Newton: „In scientiis addiscendis magis exempla prosunt quam praecepta." Man kann an vielen Beispielen üben, ohne die Lernenden zu ermüden, man verteile nur die Fragen so, daſs der besser wie der minder Begabte das Seine erhält. Eine der mächtigsten und groſsartigsten Erfahrungen in der Kindesseele ist das dekadische Zahlensystem. Hier gebietet die Wichtigkeit des Objekts das Verweilen. Das Kind erwirbt sich mit diesem System ein Ideal von Ordnung und Gesetz, wie vorher nie, ein Ideal, was für sein ganzes, künftiges Denken und Handeln bewuſst und unbewuſst eine Norm bildet. Mir scheint, als ob man bisher das Wesentliche im Rechenunterricht verschwiegen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

hätte. Wenn ich auch bis Quarta die Definitionen so bilden lasse, dafs sich Nominal- und Real-Definitionen möglichst decken und die der vier Spezies von der Thätigkeit des Zählens ableite; so bin ich doch schon dem gleichzeitigen Sprachunterricht gegenüber verpflichtet, die Sprache des Rechnens zu beleuchten. Ich habe die Pflicht zu erinnern, dafs „$7+5=12$“ ein Satz, sein Inhalt ein in einfachen Zeichen dargestelltes Urteil ist. Aber, wird mancher Leser sagen, darf man auf den unteren Stufen von Urteilen reden? Ich antworte und zwar aus Erfahrung: Gewifs kann, darf und soll man dieses thun. Ja noch mehr. Meine Quartaner haben mir in der Formenlehre erzählen müssen alles, was sie vom Raume wufsten; sie haben mir alle möglichen Antworten gegeben auf meine Frage: „Was ist Raum?“ Da hiefs es z. B. „Raum ist das, wohin man etwas setzen kann:“ „Raum ist die weite Luft:“ „Raum ist alles zusammen, was Platz einnimmt:“ „Raum ist das Leere“, u. s. w. Wir kamen schliefslich zu der Einsicht, dafs nichts durch sich selbst erklärt werden kann, und nach Erkenntnis verschiedener Widersprüche auf den Grundbegriff Raum als Resultat des Abstrahierens. Auf gleiche Weise wurden die andern Grundbegriffe und die Grundurteile im Unterricht der Formenlehre und des Rechnens entdeckt. Freilich werde ich nicht sagen „$5+7=12$“ ist ein synthetisches Urteil u. dgl. In den meisten mathematischen Lehrbüchern befand sich auf den ersten Seiten eine Zusammenstellung der Grundsätze; sind dieselben unfafsbar für Knaben von 10 bis 12 Jahren? Gewifs nicht; man darf diese Grundurteile nur nicht im mathematischen Formelgewand unerwartet auftischen. Auf meine Frage, was einem Fuder Heu am ähnlichsten wäre, kam vielstimmig die Antwort: Noch ein Fuder Heu. Die Schüler fanden sehr leicht, dafs ein Gegenstand, mit sich selbst verglichen, keinen Unterschied zeigt, dafs jede Gröfse sich selbst gleich ist, dafs die Resultate wieder gleich werden, wenn gleiche Gröfsen gleiche Veränderungen erleiden, dafs jede Ursache eine Wirkung hat und gleiche Ursachen gleiche Wirkungen haben. Ebenso leicht oder leichter ist die allgemeine Schlufsform zu verstehen. Auf die Frage: Wenn ich einen Pfennig im Geldbeutel habe und den Geldbeutel in der Tasche trage, wo steckt dann der Pfennig auch? bleibt wohl kaum ein Schüler die Antwort schuldig; und mit dieser Frage ist doch die ganze Weisheit des aristotelischen Syllogismus begriffen. Unterricht und Rechenbuch haben sich vielfach bemüht, Klarheit und Sicherheit im Rechnen zu erzielen; allein es kann kein bewufstes Denken und Handeln erzeugen, wenn man auch noch so allmählich von kleinen Zahlen zu gröfseren übergeht und rastlos übt. In jeder Schulstunde ist die Gelegenheit da, den Schüler die einfachsten Werkzeuge und Bausteine seines geistigen Schaffens finden und erkennen zu lassen; sie sind eine der wertvollsten Errungenschaften dieser Stufe und die wahre Vorbereitung auf höhere.

Der periodische Decimalbruch, die Proportion, die zusammengesetzte Regeldetri, die Einführung der Buchstaben für Zahlen u. dergl. sind schwerer zu fassen, als jene Grundeinsichten. Man verläfst sich beim Unterrichten immer noch viel zu viel auf den sogenannten „gesunden Menschenverstand“; der steht nun einmal selbst bei den Pädagogen noch in dem Rufe des schnellen Begreifens und richtigen Urteilens. Aber der „gesunde Menschenverstand“ schluckt Unsinn wie Wasser, sagt Lange in seiner Geschichte des Materialismus und sicher mit Recht. Ich gebe den Schülern Gelegenheit leichtsinnige Induktionsschlüsse zu ziehen und schliefse daran die Untersuchung und Berichtigung, z. B. bei der Frage: Wie ändert sich der Wert des Bruches, wenn Zähler und Nenner um Gleiches zu- oder abnehmen? Wie flüchtig

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

das junge Völkchen urteilt, mag folgende Neckerei beweisen. Ich fragte in Quarta beim Eintritt in die Klasse: Wer weifs was Neues? Antwort: Die Berge sind weifs! Was ist heute für ein Datum? Antwort: Der 25. Oktober. Wann fiel im vorigen Jahr der erste Schnee? Antwort einiger: Am 26. Oktober. Was folgt daraus fürs nächste Jahr? Antwort einiger: Dann fällt er den 24. Oktober. Man braucht aber nicht der Jugend zu lauschen; das Alter bietet auf jeder Stufe und in jedem Stande ähnliche Leistungen. Besser kann es nur werden, wenn die Erziehung das selbstbewufste Denken zum Ziele setzt und früh darnach strebt. Die Mathematik ist eine auf einige Grundbegriffe angewandte Logik; der Rechenunterricht mufs eine Schule der Logik und der gröfsten Einfachheit der Sprache sein.

Kuno Fischer sagt in seinem „System der Logik und Metaphysik" 2. Aufl. S. 266: „Rechnen ist Zählen. Zählen ist Verknüpfen von Eins und Eins. Diese Verknüpfung geschieht durch einen Akt des reinen Denkens. Denn Eins ist als reine Gröfseneinheit keine Anschauung, sondern Gedanke. Also ist Rechnen und Zählen Denken. Aber es wird im Rechnen nichts anderes gedacht und begriffen, als Eins und Eins. Das ist die einfache Formel, die allen arithmetischen Komplexionen zu Grunde liegt. Eins und Eins sind zwei Bestimmungen, die sich zu einander völlig äufserlich und gleichgiltig verhalten. Sie können nicht gleichgiltiger sein. Von einer innern Beziehung ist nicht die Rede. Sie können deshalb nur äufserlich verknüpft werden. Das Begreifen ist in diesem Fall ein blofses Aggregieren. Rechnen ist Denken, aber ein blofs aggregatives, mechanisches Denken. Das Denken ist bei weitem nicht blofs Rechnen. So richtig es ist, das Rechnen aus dem Denken zu erklären, so falsch wäre es, das Denken durch Rechnen erklären zu wollen (Hobbes); so falsch wäre es, z. B. Religionsbegriffe mit dem Begriffe der Zahl zu vergleichen, sei es in der Absicht, sie zu beweisen oder sie zu widerlegen. Gewifs wird im Rechnen auch Denken geübt. Dieses mechanische Denken kann, wie jede mechanische Operation, bis zur virtuosen Vollkommenheit ausgebildet werden (die sog. Rechnengenies). Doch ist in Rücksicht auf die Geistesentwicklung und die Bildung des Urteils der Wert des Rechnens gering. Man mufs sich hüten, den Wert namentlich des sog. Kopfrechnens pädagogisch zu überschätzen. Mechanische Köpfe sind häufig die besten Rechner."

Ich führe hier von einen berühmten Lehrer der Philosophie und ihrer Geschichte die Ansicht über das Wesen des Rechnens und seinen pädagogischen Wert an, um derselben die Grenzen ihrer Giltigkeit anzuweisen, zumal diese Ansicht seit Hegel sehr verbreitet ist. „Das Rechnen ist aggregatives Denken", ich füge hinzu: aber nur im Anfang. Schon wenn ich eine Zahl durch irgend eine Bewegungsart in der Zahlenreihe aus einer andern Zahl entstehen lasse, erscheinen beide Zahlen im Verhältnis von Ursache und Wirkung. Die Benennungen Multiplikator, Multiplikand, Divisor u. s. w. sind jedenfalls mehr als willkürliche Personifikationen. Die erzeugende Thätigkeit ist das aggregative Denken, das kausale Denken ist Konsequenz. Es sei ferner an die Irrationalzahl erinnert, die durch kein aggregatives Denken gewonnen werden kann. Wenn es nun auch noch viele nicht-aggregative Denkarten geben mag, so möchte ich doch wissen, ob man die Resultate dieser anderen Denkthätigkeiten anders als durch aggregatives Denken zu Erkenntnissen erheben kann. — Es ist wahr, dafs ein Schnellrechner ein ganz flacher Kopf sein kann; ist aber Rechenunterricht Dressur im Schnellrechnen? Wenn der Schüler seine Erfahrungswelt noch einmal durch Zählen und Messen ordnen und begreifen soll, wenn er den Text einer Aufgabe in direkter Wortfolge ordnet, vereinfacht und

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

mit eignen Worten wiedergiebt, wenn er die Abhängigkeit der gegebenen und gesuchten Gröfsen aufsucht u. s. w., u. s. w. — und diese Arbeiten gehören doch alle in den Rechenunterricht — ist dies alles in Rücksicht auf Geistesentwicklung und Urteilsschärfung von geringem Wert? Der Rechenunterricht vor 50 und mehr Jahren hat allerdings wohl im grofsen und ganzen Geringschätzung verdient; obgleich zu jener Zeit schon lange von Herbart das Rechnen in unserem Sinne pädagogisch gewürdigt war. Was übrigens die metaphysischen Grundfragen betrifft, so lassen sich dieselben nicht auf einigen Seiten erschöpfend beantworten, wie Paul Du Bois-Reymond im ersten Teil seiner „allgemeinen Funktionentheorie" beweist. Jede neue, erfolgreiche Untersuchung der psychologischen und logischen Grundlagen ermöglicht der Mathematik ein sicheres Fortschreiten nach allen Richtungen und kann auch für die Methode der erziehlich verwertbaren Teile nicht ohne Segen sein. So mancher „alte Rechenmeister", vielleicht gar mancher „fertige" Mathematiker wird lächeln über mein Bemühen, auch den Rechenunterricht sachlich aus dem Boden der Mathematik und methodisch aus dem der wissenschaftlichen Pädagogik erwachsen zu lassen; für sie ist und bleibt der Rechenunterricht ein altes, einfaches Uhrwerk, eine Übung im Zählen mit affenartiger Geschwindigkeit, wie Étuden Fingerübungen fürs Klavierspiel bieten. Leider „mufs es auch solche Käuze geben!" —

Der letzte zu erledigende Punkt ist die Wechselwirkung, in welcher der Rechenunterricht zu den früher und gleichzeitig gebotenen anderen Disziplinen stehen soll. Es kann sich bei dieser Frage nicht mehr um den Einflufs des Rechenunterrichts im allgemeinen handeln: das alles ist im Vorhergehenden erledigt. Die besondere Frage heifst: Welche Bildungsstoffe andrer Lehrgegenstände soll der Rechenunterricht mit verwenden?

Der Begriff „allgemeine Bildung" ist ein fliefsender: in den verschiedenen Zeiten unserer Geschichte hat man auch stets verschiedene Anforderungen an einen Menschen gestellt, der den Anspruch auf „allgemeine Bildung" machte. (Siehe: Wittsteins Methode des mathematischen Unterrichts). Es wird jetzt in vielen Konferenzen und Lehrerversammlungen die Auswahl und Anordnung, das quantum und quale des Lehrstoffs beraten und bestimmt, in Zeitungen besprochen und von Behörden befohlen; aber selbst für die Gegenwart scheint mir dieser Prozefs noch nicht abgeschlossen. Es müfsten die bedeutendsten Fachgelehrten, Philosophen und Pädagogen zusammenwirkend die Wertschätzung des Lehrstoffs vornehmen und periodisch erneuern. Vorläufig kann man nur mit Kern sagen: „Wie der geographische und sprachliche Unterricht (namentlich Deutsch) verbindend zwischen die Hauptgruppe des historischen und naturkundlichen Lehrstoffs treten mufs, so kann das Rechnen und die Mathematik in den Anwendungen ihrer Lehren und Gesetze überall da auf die Verschmelzung der Vorstellungsmassen zu einem einheitlichen Ganzen wirken, wo man zählen und messen kann!"

Es hat demnach der Rechenunterricht in Sexta, Quinta und Quarta im theoretischen Teil meist nur die Anschauungsstoffe und im praktischen Teil auch die andern Kenntnisse aus dem jedesmaligen Vorstellungskreise der entsprechenden Stufe zu entnehmen. Selbstverständlich soll der Rechenunterricht nicht Geschichts-, Sprach- und Naturkenntnisse lehren, um den andern Fächern zu nützen, sondern äufserst mafsvoll an bereits erworbenen Begriffen durch Rechnen Urteil und Gedächtnis üben. Soll aber den andern Fächern gleichzeitig ein Vorteil erwachsen, so mufs das schreckliche Durcheinander der eingekleideten Aufgaben, wie es bisher in den Rechenbüchern stattfand, gänzlich aufhören. Es mufs eine Reihe wohlgeordneter Auf-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

gaben aus der Heimatskunde vorangehen, dieser eine andere aus der Naturkunde, dann eine aus der Geographie und Geschichte u. s. w. folgen. Es ergiebt sich hieraus, dafs die Überfülle von Aufgaben aus der Krämerpraxis auf ein berechtigtes Mafs beschränkt wird. — Der Konzentration des Unterrichts dienen Aufgaben aus den Verhältnissen des griechischen und römischen Altertums. Ein erster durchgreifender Versuch in dieser Hinsicht sind Menges und Werneburgs antike Rechenaufgaben.

Der Rechenunterricht, wie er von mir beschrieben, erfordert allerdings annähernd die von Herbart bestimmte Stundenzahl; da man ihm diese schwerlich gewähren wird, so müfsten notwendig in den andern Unterrichtsstunden auch passende Aufgaben aus den eingekleideten des Rechenbuchs gelöst werden; besonders Mafshalten zu empfehlen, dürfte hier überflüfsig sein.

Bezüglich der Anordnung und Auswahl des theoretischen Stoffs ist wenig Neues zu sagen. Die meisten Rechenbücher stimmen im allgemeinen Gang überein. Selbstredend mufs nach dem Vorausgehenden die Flächen- und Körperberechnung, wie sie im „Schellen", „Heis" u. s. w. steht, als besonderer Abschnitt wegfallen, beim Rechenunterricht auf den Gymnasien erst recht, weil daselbst auf den höheren Stufen zu der durch Anschauung gewonnenen Berechnungsweise noch die wissenschaftlich-begründende und erweiternde hinzukommt.

Die Betrachtung anderer Zahlensysteme aufser dem dekadischen halte ich für ungeeignet im Rechenunterricht. Das Zehnersystem und mit ihm die andern erhalten später ihre wissenschaftliche Beleuchtung als besondere Fälle der Potenzreihe. Meier-Hirsch und Heis in ihren Aufgabensammlungen zur Arithmetik und Algebra zeigen deutlich durch Einlegung der Decimalbrüche in die Buchstabenrechnung, dafs dieselben auf der Rechenstufe nicht tiefgehend behandelt werden sollen; auf der obersten Stufe des mathematischen Unterrichts erscheint der Decimalbruch als Potenzreihe, Kettenbruch und Teilbruchreihe und werden die Fehlergrenzen bei Rechnung mit abgekürzten Decimalbrüchen streng untersucht. Quadrat- und Kubikwurzeln fallen gänzlich aus dem Rechenunterricht weg, während die Bildung der Quadrate und Kuben zweistelliger Zahlen aus ihren dekadischen Summanden, so wie in der Formenlehre die Zu- und Abnahme einer Seite und Kante durch Konstruktion, Buntmalen, Zerschneiden und Zusammensetzen geübt werden mufs.

Die zusammengesetzte Regeldetri, Teilungs- und Mischungsrechnung darf nicht zu weit ausgedehnt werden.

Die methodische Behandlung des Stoffs kann hier nicht erschöpfend gegeben werden. Es mögen folgende Andeutungen genügen:

In jeder der drei unteren Klassen ist das Zahlensystem zu wiederholen und weiter zu führen, wobei gehörig auf das Übereinstimmende und Unterscheidende im Sprechen und Schreiben der Zahlen hingewiesen werden mufs.

In Sexta kann uns Morgans Darlegung als Muster dienen. „A knowledge of our method of reckoning and of writing down numbers is taught so early, that the method, by which we began, is hardly recollected. Few, therefore, reflect upon the very commencement of arithmetic, or upon the simplicity and elegance with which calculations are conducted. We find the method of reckoning by ten in our hands, we hardly know how, and we conclude, so natural and obvious does it seem, that it came with our language, and is a part of it; and that we are not much indebted to instruction for so simple a gift. It has been well observed,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

that if the whole earth spoke the same language, we should think that the name of any object was not a mere sign chosen to represent it, but was a sound which had some real connexion with the thing; and that we should laugh at, and perhaps persecute, any one who asserted that any other sound would do as well if we chose to think so. We cannot fall into this error, because, as it is, we happen to know that what we call by the sound „horse", the Romans distinguished as well by that of „equus", but we commit a similar mistake with regard to our system of numeration, because at present it happens to be received by all civilized nations, and we do not reflect on what was done formerly by almost all the world, and is done still by savages. The following considerations will, perhaps, put this matter on a right footing, and shew that in our ideas of arithmetic we have not altogether rid ourselves of the tendency to attach ideas of mysticism to numbers which has prevailed so extensively in all times.

We know that we have nine signs to stand for the first nine numbers, and one for nothing, or zero. Also, that to represent ten we do not use a new sign, but combine tow of the others, and denote it by 10, eleven by 11, and so on. But why was the number „ten" chosen as the limite of our separate symbols — why not nine, eight, or eleven? If we recollected how apt we are to count on the fingers, we shall be at no loss to see the reason. We can imagine our system of numeration formed thus: — A man proceeds to count a number, and to help the memory he puts a finger on the table for each one which he counts. He can thus go as far as ten, after which he must begin again, and by reckoning the fingers a second time he will have counted twenty, and so on. But this is not enough; he must also reckon the number of times wich he has done this, and as by counting on the fingers he has divided the things which he is counting into lots of ten each, he may consider each lot as a unit of its kind, just as we say a number of cheep is one flock, twenty shillings are one pound. Call each lot a ten. In this way he can count a ten of tens, which he may call a hundred, a ten of hundreds, or a thousand, and so on. The process of reckoning would then be as follows: — Suppose, to choose an example, a number of faggots is to be counted. They are first tied up in bundles of ten each, until there are not so many as ten left. Suppose there are seven over. We then count the bundles of ten as we counted the single faggots, and tie them up also by tens, forming new bundles of one hundred each with some bundles of ten remaining. Let these last be six in number. We then tie up the bundles of hundreds by tens, making bundels of thousands, and find that there are five bundles of hundreds remaining. Suppose that on attempting to tie up the thousands by tens, we find there are not so many as ten, but only four. The number of faggots is then 4 thousands, 5 hundreds, 6 tens, and 7. The next question is, how shall we represent this number in a short and convenient manner? It is plain that the way to do this is a matter of choice. Suppose, then, that we distinguish the tens by marking their number with one accent, the hundreds with two accents, and the thousands with three. We may then represent this number in any of the following ways: $76'5''4'''$, $6'7\,5''4'''$, $6'4'''5''7$, $4'''5''6'7$, the whole number of ways being 24. But this is more than we want; one certain method of representing a number is sufficient. The most natural way is to place them in order of magnitude, either putting the largest collection first or the smallest; thus $4'''5''6'7$, or $76'5''4'''$. Of these we choose the first. In writing down numbers in this way

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

it will soon be apparent that the accents are unnecessary. Since the singly accented figure will always be the second from the right, and so on, the place of each number will point out what accents to write over it, and we may there fore consider each figure as deriving a value from the place in which it stands. But here this difficulty occurs. How are we to represent the numbers 3'''3', and 4'''2'7 without accents? If we write them thus, 33 and 427, they will be mistaken for 3'3 and 4''2'7. This difficulty will be obviated by placing cyphers so as to bring each number into the place allotted to the sort of collection which it represents; thus, since the trebly accented letters, or thousands, are in the fourth place from the right, and the singly accented letters in the second, the first number may be written 3030, and the second 4027. The cypher, which plays so important a part in arithmetic that it was anciently called the art of cypher, or cyphering, does not stand for any number in itself, but is merely employed, like blank types in printing, to keep other sign in those places which they must occupy in order to be read rightly."

In Quarta wird ein vollständiger Vergleich zwischen römischer und indischer Zahlenschrift angestellt, in Tertia tritt zur passenden Zeit das griechische Zahlenbild hinzu.

Die vier Species mit mehrstelligen Zahlen sind lange Zeit, bevor der Schüler auf den gebräuchlichen Schematismus geleitet wird, durch Auflösen der mehrziffrigen Zahlen in dekadische Summanden, die durch „plus-Zeichen" verbunden sein müssen, auszuführen, so dafs alle Partial-Summen, -Differenzen, -Produkte und -Quotienten wirklich geschrieben und wieder durch plus verbunden werden.

Das Bilden der Resultate auf kleinstem Raum und in kürzester Zeit ist ein Kopfrechnen mit teilweis schriftlichen Aufzeichnungen; die Einordnung ungeschriebener Teilresultate ins Zehnersystem verwischt fürs Auge den vollständigen Entstehungsprocefs. Bei der Division lasse man die Schüler sich üben, den Dividenden aus seinen dekadischen Summanden in solche vorher umzubilden, welche Produkte des Divisors sind z. B.

$$820:6=(800+20+8):6=(600+180+48):6=300+60+8=368 \text{ u. s. w.}$$

Die Behandlung der Zahl in ihren Teilen und Wechselbeziehungen ist im ganzen ebenso vorzunehmen, wie Rein, Pickel und Scheller in ihrem zur Zeit noch unvollendeten Werk verfahren: „Theorie und Praxis des Volksschulunterrichts nach Herbartschen Grundsätzen."

Den Bruch erkläre ich auf der Rechenstufe als eine benannte Zahl in demselben Sinne, in welchem die dekadischen Einheiten benannte Zahlen sind, wie z. B. 3 Einer, 4 Zehner, 7 Hunderte u. s. w. Das Kind mufs in der ersten Zeit auch die Brüche so schreiben: 3 Viertel, 5 Achtel u. s. w. Diese Definition ist die natürlichste und für das erste Verständnis leichteste. Bei jeder benannten Zahl ist die Ziffer zur Bezeichnung der Anzahl und das Substantivum zur Angabe der Art von Einheiten bestimmt z. B. 7 Mark, 8 Pfund. Die Begriffe „Mark" und „Pfund" enthalten für den Kundigen auch wieder Beziehungen zu höheren und niederen Münz- und Gewichtseinheiten, der Anfänger aber denkt nicht an solche und soll es auch nicht, so lange er mit gleichbenannten Zahlen die vier Spezies übt; erst beim Resolvieren und Reduzieren ist die Aufmerksamkeit auf den zweiten Teil der benannten Zahl zu lenken, auf den Namen, und dieser löst sich dann wieder auf in eine benannte Zahl u. s. f. In der bekannten Definition: „Ein Bruch ist eine Zahl, welche aus einem oder aus mehreren Teilen eines Ganzen besteht", liegen unverhüllt drei Begriffe: Anzahl, Teil, Ganzes, und die Aufmerksamkeit des Schülers

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

bewegt sich unruhig von einem zum andern. Fügt man gar noch gleichzeitig die Erklärung hinzu: „Ein Bruch ist ein Teil von einem oder von mehreren Ganzen“, dann tritt nach scheinbar momentaner Klarheit beim ersten Versuch des Begreifens sehr bald die Trübung im Bewufstsein ein, einfach weil keine dieser Definitionen erarbeitet und verarbeitet war. Man berufe sich nicht darauf, dafs sich die Schüler bei dieser Überladung wohlbefunden und leicht begriffen hätten; ich frage dagegen nur: Wie viel Schüler waren es und wie lange währte der geistige Besitz? Vorbereiten auf den späteren Mathematikunterricht heifst nicht unzeitig vorausnehmen. Die Definition des Bruchs als benannte Zahl reicht aus für den ganzen Rechenunterricht, und die Erklärungen der vier Spezies für ganze Zahlen bleiben giltig für Brüche, nämlich: Addieren heifst, zu einer gegebenen Zahl so viel Einheiten zählen, als eine andere gegebene Zahl angiebt; Subtrahieren heifst, von einer gegebenen Zahl so viel Einheiten abzählen, als eine andere gegebene Zahl angiebt; Multiplikation ist Addition von gleichen Summanden, Division ist Subtraktion von gleichen Subtrahenden. Der berühmte Mathematiker O. Hesse sagt zwar in seiner Abhandlung über die vier Spezies, S. 27: „Es hat bis zur Zeit nicht an Bestrebungen gefehlt, die vier Spezies der Brüche als eine Folge aus den ursprünglichen Definitionen der vier Spezies der Zahlen darzustellen. Versuche der Art mufsten mifsglücken, wenn bei Aufstellung der Definitionen nicht zugleich die Erweiterungen auf negative Zahlen und Brüche zugleich mit ins Auge gefafst wurden. Das letztere ist wohl als unmöglich niemals versucht worden.“ Hesse hat übersehen, dass man, anstatt die Definitionen der vier Spezies zu erweitern, die Erklärung des Bruchs einschränken kann; letzteres ist mit seinen Konsequenzen durchführbar und auf der Rechenstufe pädagogisch geboten.

Das Erweitern und Heben der Brüche ist ein Resolvieren und Reduzieren derselben.

Es wird auf einem System gleicher und paralleler Strecken die Reihe der Ganzen, Halben, Drittel u. s. w. bis 24^{tel} ungefähr gebildet. Das Erweitern und Heben besteht dann nur noch im Aufsuchen eines Bruchs in einer niederen oder höheren Reihe, wie das Wechseln von Münzen in seitlichen Abteilungen des Geldkastens.

Hauptgesetz der Bruchrechnung: Alle Rechnungen mit Brüchen werden nur am Zähler ausgeführt.

Warum? Der Zähler ist die Zahl und der Nenner ist der Name; man kann aber nur mit Zahlen rechnen.

a) Brüche werden addiert, indem man sie gleichnamig macht und dann nur die Zähler addiert.

Warum? Nach dem Hauptgesetz.

b) Brüche werden von einander subtrahiert, indem man sie gleichnamig macht und dann nur die Zähler von einander subtrahiert. Nach dem Hauptgesetz.

c) Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multipliziert, indem man den Zähler mit dieser Zahl multipliziert. Nach dem Hauptgesetz.

Man suche solche Resultate zu heben.

d) Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividiert, indem man den Zähler dividiert, nötigenfalls den Bruch zuvor passend erweitert. Nach dem Hauptgesetz.

e) Eine ganze Zahl oder ein Bruch kann nicht mit einem Bruch multipliziert werden; denn der Multiplikator mufs eine unbenannte Zahl sein.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Giebt man nun genügend viel besondere Aufgaben zu der allgemeinen: „Ein gegebener Bruch ist mit einer gegebenen Zahl zu multiplizieren und das Produkt durch eine andere gegebene Zahl zu dividieren", so entdeckt der Schüler mit oder ohne Hilfe, dafs die Reihenfolge dieser Operationen geändert werden kann, und dafs das Endresultat aussieht, als habe man nach bekannter mechanischer Regel mit einem Bruch multipliziert. Man erlaubt deshalb dem Schüler, den Multiplikator und Divisor als Zähler respektive als Nenner eines Scheinbruchs zu schreiben. Der Schüler erkennt demnach, dafs die Multiplikation eines Bruches mit einem Bruche nur eine kürzere Schreibweise für Multiplikation und nachherige Division eines Bruches mit ganzen Zahlen ist.

f) Wird eine ganze Zahl oder ein Bruch durch eine Zahl dividiert und dieser Quotient mit einer Zahl multipliziert, so kann man aus dem Divisor den Zähler und aus dem Multiplikator den Nenner eines Scheinbruchs bilden und mit diesem Scheinbruch dividieren, indem man mit dem umgestürzten Scheinbruch multipliziert.

Die Division zweier Brüche durch Gleichnamigmachen und nachherige Division ihrer Zähler ist hier nicht zulässig, weil der Quotient zweier benannter Zahlen unbenannt sein mufs.

Alle anderen Ableitungen dieser Regeln, so schön sie im Einzelnen sein mögen, sind im Ganzen weniger wert, weil sie nicht aus einem einzigen obersten Satz abgeleitet sind. Die Macht der Gewohnheit und die endgiltige Be- oder Verurteilung vor der praktischen Anwendung werden gegen mich sein; wer aber weifs, wie oft von Klasse zu Klasse die Begründung der Bruchrechnung zu wiederholen war, wird diese Vereinfachung auf der Rechenstufe wenigstens praktisch prüfen. Es haben sich die berühmtesten Mathematiker mit dieser Sache beschäftigt: ein Beweis für ihre Wichtigkeit. Paul Du Bois-Reymond sagt S. 51 seiner schon erwähnten allgemeinen Funktionenlehre: „Wie sehr der Formalismus bei den elementarsten arithmetischen Operationen uns im Stiche läfst, zeigt u. a. das Beispiel der Bruchmultiplikation. Wie kömmt man auf die Regel von der Multiplikation der Brüche, also dafs $\frac{8}{15}$ das Produkt von $\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{5}$ ist? Die Eulersche Ableitung ($\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$ heifst $\frac{2}{3}$ von $\frac{4}{5}$; Eulers Algebra § 106) verhüllt die Schwierigkeit; denn so kann die Regel nicht entstanden sein. Es scheint, dafs man auch bei den ältesten Autoren eine Aufklärung über den ursprünglichen Sinn dieser Regel vergeblich sucht." Du Bois-Reymond kommt zu der Ansicht, dafs die Bruchmultiplikation entstanden sei bei der Flächenberechnung, „wenn man verzichte, aus blofsen Zeichen Gedanken zu ziehen und die Brüche auffasse als das, was sie wirklich sind, nämlich als Bruchteile lineärer Grösseneinheiten." „Irgend ein findiger Kopf teilt das Rechteck mit den Seiten $\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{5}$ und zugleich das Einheitsquadrat in Quadrate mit der Seite $\frac{1}{15}$, um beide vergleichbar zu machen, und erkennt sogleich, dafs das Rechteck $\frac{8}{15}$ des Quadrats ausmacht." Augustus de Morgan giebt dieselbe Ableitung:

„Now, if we return to our meaning of the word multiplication, we shall find that the multiplication of one fraction by another appears an absurdity. We multiply a number by taking it several times and adding these together. What, then, is meant by multiplying by a fraction? Still, a rule has been found which, in applying mathematics, it is necessary to use for fractions, in all cases where multiplication would have been used had they been whole numbers. Of this we shall now give a simple example. Take an oblong figure, such as ABCD, and find the magnitudes of the sides AB and BC in inches. Draw the line EF equal in length

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

to one inch, and the square G, each of whose sides is one inch. If the lines AB and BC contain an exact number of inches, the rectangle ABCD contains an exact number of squares, each equal to G, and the number of squares contained is found by multiplying the number of inches in AB by the number of inches in BC. In the present case the number of squares is 3×4, or 12. Now, suppose an other rectangle A′B′C′D′, of which neither of the sides is an exact number of inches; suppose, for example, that A′B′ is $\frac{2}{3}$ of an inch, and that B′C′ is $\frac{5}{7}$ of an inch. We may shew, by reasoning, that we can find how much A′B′C′D′ is of G by forming a fraction which has the product of the numerators $\frac{2}{3}$ and $\frac{5}{7}$ for its numerator, and the product of their denominator; that is, that A′B′C′D′ contains $\frac{10}{21}$ of G etc."

Diese mutmafslich älteste Ableitung der Bruchmultiplikation kann frühestens in Quarta, besser auf einer höheren Geometriestufe vorgenommen werden. Die Eulersche Darlegung setzt die Wörter „von" und „mal" als gleichbedeutend und schädigt somit die begriffliche Bestimmtheit. — Dafs die Brüche so oft als möglich als Linien-, Flächen- und Körpergröfsen zur Anschauung gebracht werden müssen, ist selbstverständlich.

Das bedeutendste logische Bildungsmittel im Rechenunterricht ist die Regeldetri. Es genügt hier nicht, den Schüler zum richtigen Denken anzuleiten und einen richtigen „Ansatz" bilden zu lassen: der Schüler mufs so weit als möglich begreifen, worauf sein richtiges Denken beruht, warum sein Gedankengang richtig ist; der übermittelte, richtige Ansatz führt zum Mechanismus und schützt nicht vor Irrtum. Ich will an einigen Beispielen die Behandlung andeuten.

„Wie teuer sind 7 Pfund Quecksilber, wenn 1 Pfund 6 Mark kostet?" Vorfragen: Wenn 1 Pfund Kirschen einen gewissen Wert hat, dann haben 2 Pfund welchen Wert? den zweifachen Wert. 3 Pfund? den dreifachen Wert.

Ist dieser Schlufs in allen Fällen richtig? Einige: Ja! Einige: Nein! Wann nicht? Wenn nicht alle Kirschen gleich gut sind. Warum kosten 3 Pfund dreimal so viel als 1 Pfund, wenn alle Kirschen gleich gut sind? Weil 1 Pfund dann so viel Wert hat, wie jedes andere. Gilt diese Behauptung nur von den Kirschen? Nein. Was verlangt man von gleichen Gewichtsmengen derselben Ware, wenn sie gleichen Wert haben sollen? Dafs sie gleich gut sind. Oder: Dafs sie von gleicher Güte, von gleicher Beschaffenheit sind. — Die Schüler finden, dafs sie beim Schliefsen sich unbewufst nach dem Satze richteten: Gleiche Mengen gleichen Stoffs haben gleichen Wert. Hierbei mufs erwähnt werden, dafs die Münzen ihrerseits ebenfalls nur bestimmte Mengen bestimmten Metalls sind, die als ein allgemeines Tauschmittel benutzt werden.

1te Behandlung:

1	Pfund	Quecksilber	ist	wertgleich	6	Mark
1	„	„	„	„	6	„
1	„	„	„	„	6	„
1	„	„	„	„	6	„
1	„	„	„	„	6	„
1	„	„	„	„	6	„
1	„	„	„	„	6	„
7	„	„	sind	„	7·6	„

Es wird der Satz zum Bewufstsein gebracht, nur nicht in der unverständlichen Kürze:

„Gleiches zu Gleichem addiert, giebt Gleiches."

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die 7 Posten sind zu erklären durch den Ankauf je eines Pfundes an 7 verschiedenen Stellen.

2te Behandlung: 1 Pfund Quecksilber ist wertgleich 6 Mark

7·1 „ „ sind „ 7·6 „

Resultat: „Gleiches mal Gleiches giebt Gleiches."

Erklärung: Es ist 7mal je 1 Pfund an derselben Stelle gekauft. Beispiele mit wirklichen, naturgemäfsen Angaben: Eine Raupe, ein Käfer, ein Vogel, ein Sturm bewegt sich in einer gewissen Zeit u. s. w.

„3 Raupen fressen in einer gewissen Zeit 7 Blätter einer Pflanze, 10 solche Raupen fressen in derselben Zeit wie viel solcher Blätter?"

Die Betrachtung mufs ergeben, dafs die Raupen von gleicher Art und Gröfse sein oder in gleicher Zeit gleichviel fressen müssen, dafs die Blätter von gleicher Gröfse und Beschaffenheit sein müssen. Endergebnis: Gleiche Ursachen haben unter gleichen Umständen gleiche Wirkungen.

Man braucht noch nicht zu beleuchten, dafs die gleichen Umstände selbst wieder gleiche Ursachen sind.

Wenn 3 Raupen 7 Blätter fressen in einer gewissen Zeit,
so mufs 1 Raupe $\frac{7}{3}$ Blätter fressen in derselben Zeit.

Warum? Weil eine Raupe so viel wie jede andere frifst in derselben Zeit oder: weil gleiche Ursachen u. s. w.

10 Raupen fressen $10 \cdot \frac{7}{3}$ Blätter in derselben Zeit.

Warum? Gleiche Ursachen u. s. w. und: 10 Raupen fressen in derselben Zeit 10mal so viel als eine Raupe, oder: wenn sich die Ursache verzehnfacht, mufs sich auch die Wirkung verzehnfachen; allgemein: eine Summe gleicher Ursachen erzeugt unter gleichen Umständen die gleiche Summe ihrer Wirkungen, oder: ein Vielfaches einer Ursache erzeugt u. g. U. ein eben so grofses Vielfache ihrer Wirkung. Es ist selbstverständlich, dafs diese Übungen nicht an jeder Aufgabe vorgenommen werden sollen; aber der Schüler mufs so klar und bewufst denken, dafs er immer diese logische Begründung geben kann.

Man dulde in keiner Klasse und bei keiner Antwort Redefaulheit: das Denken ist meist ebenso lückenhaft wie die Rede. — An den Schlufs auf die „Einheit" mufs sich der Schlufs auf ein „gemeinsames Vielfache" reihen; z. B.

3	Raupen	fressen	7	Blätter	„	„	„
30	„	„	10·7	„	„	„	„
10	„	„	$\frac{10 \cdot 7}{3}$	„	„	„	„

Dieser Schlufs ist wie derjenige auf die Einheit immer möglich. Der Schlufs auf einen gemeinsamen Teiler ist natürlich nur in besonderen Fällen möglich und empfiehlt sich zum fortgesetzten Studium der Zahlenverwandtschaften, darf aber nicht auf zu grofse Zahlen angewendet werden, für deren gemeinschaftlichen Faktor es kein dekadisches Kennzeichen giebt, wie es z. B. im „Fölsing" oft geschieht.

20 Arbeiter bauen 1 Haus in 5 Monaten;
37 Arbeiter bauen dieses Haus in ? Monaten?

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Vorfragen: Wenn 20 Arbeiter das Haus in einer gewissen Zeit bauen, den wievielten Teil des Hauses hat dann jeder dieser 20 Arbeiter in der Bauzeit gefertigt?

Wenn 1 Arbeiter in einer gewissen Zeit den zwanzigsten Teil des Hauses baut, wievielmal so viel Zeit würde er brauchen, wenn er dieses Haus allein fertigen sollte?

1 Arbeiter braucht zu $\frac{1}{20}$ Haus 5 Monate;
1 „ „ „ $20 \cdot \frac{1}{20}$ „ $20 \cdot 5$ „

1 Arbeiter braucht 60 Monate zu 1 Haus;
37 Arbeiter brauchen ? Monate zu diesem Haus?

Übergang: 1 Arbeiter baut in einer gewissen Zeit 1 Haus;
37 Arbeiter bauen in derselben Zeit ? solche Häuser?
Eine gewisse Anzahl Arbeiter bauen 37 Häuser in 60 Monaten;
dieselbe Anzahl Arbeiter baut 1 Haus in ? Monaten?

Wie man sieht, ist hier das indirekte Verhältnis durch direkte ersetzt, also immer wieder der Schlufs aus den bekannten Grundsätzen gebildet. Dieser Gang soll nur in das Verständnis der indirekten Verhältnisse einführen. Wie oft mufste man hören: 20 Arbeiter fertigen das Haus in 5 Monaten, 1 Arbeiter im 20ten Theil der Zeit. Die Ursache dieser Antwort ist nicht nur Leichtsinn, sondern meist Mangel an Erfahrung: der Schüler hat noch keine indirekten Verhältnisse beobachtet. Hier ist also ebenfalls nicht die kürzeste Lösungsweise der kürzeste Weg zum Verständnis. Bei der einfachen Regeldetri werden immer nur zwei von einander abhängige Gröfsen genannt und die dritte, weil unveränderlich gedacht, bleibt verschwiegen. Man betrachte mit den Schülern alle findbaren zusammengehörigen Gröfsendreiheiten, z. B. Länge, Breite und Flächeninhalt; Kraft, Zeit und Leistung. Der Schüler mufs durch Konstruktion und Messung zu den Sätzen gelangen: Wenn die Breite bleibt und die Länge sich vervielfacht, so wird die Fläche ebenso vervielfacht. Wenn die Länge bleibt und die Breite u. s. w. Wenn die Breite bleibt und die Länge so und so viel mal so klein wird, bleibt von der Fläche der eben so vielte Teil. (Ausübung mit Papier und Scheere. Nachweis im Zimmer an allen Rechtecken; Hinweis auf Tuchläden.) Läfst man dann die Teile eines Rechtecks in anderer Anordnung und Lage wieder zu einem Ganzen vereinigen, so gewinnt man den Satz: Wenn die Fläche bleiben soll, und die Länge soll sich vervielfachen, so sinkt die Breite auf den ebensovielten Teil. Für Kraft, Zeit und Werk lassen sich aufserordentlich viel verschiedenartige Beispiele finden, die schon im Vorstellungskreis der Schüler liegen oder leicht gewonnen werden können. Die Schüler müssen selbst Beispiele suchen, und man braucht dabei nicht gleich ausrechnen zu lassen. Nach genügendem Studium konkreter Fälle löst man das indirekte Verhältnis nicht mehr in direkte auf, sondern wählt die kürzere Lösung.

Die Aufgaben über zusammengesetzte Regeldetri unterscheiden sich von denen der einfachen nur dadurch, dafs die unveränderliche dritte Gröfse nun auch veränderlich wird. Jede zusammeng. R. d. t. Aufgabe mufs anfangs in lauter einfache R. d. t. Aufgn. zerlegt werden, indem man eine Anzahl veränderlicher Gröfsen erst einmal als unveränderlich betrachtet; z. B.

3 Raupen fressen in 5 Stunden 7 Blätter;
4 „ „ „ 6 „ ? „

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

a) 3 Raupen fressen 7 Blätter in einer gewissen Zeit;
4 „ „ ? „ „ derselben Zeit.

b) Eine gewisse Anzahl Raupen frifst in 5 Stunden $\frac{4 \cdot 7}{3}$ Blätter;
dieselbe Anzahl Raupen frifst in 6 Stunden ? Blätter.

Die Lösung solcher R. d. t.-Aufgaben in Form eines grofsen Bruchs kann erst nach vollem Verständnis der Teil-Aufgaben von Nutzen sein.

Die vielfach zusammengesetzten Aufgaben passen nicht auf die Rechenstufe des Gymnasiums, sondern gehören an zwei Stellen der Algebra, nämlich in die Lehre von den Proportionen und Gleichungen, wo sie sich auch in der Aufgabensammlung von Heis u. a. finden.

In den Prozent- und Zins-Aufgaben mufs der Schüler begreifen, dafs die benannte Zahl 4 Prozent oder 4 % zwei, resp. drei Zahlenangaben enthält: Kapital (100), Zins (4) und Zeit (1 Jahr).

Es empfiehlt sich, nicht nur Aufgaben mit Zins „für 100“ sondern auch „für 17“, „für 31“, kurz für verschiedene Zahlen zu wählen, auch ist schon vorher bemerkt, dafs die Beispiele nicht vorherrschend Ware und Geld behandeln dürfen.

Der Text der Aufgabe darf dem Schüler nicht Schwierigkeiten bereiten durch undeutsche Wörter und Wortverbindungen. Die kaufmännischen Phrasen müssen vertilgt werden. Der ganze kaufmännische Stil ist ja meist ein entsetzliches Gemisch von Höflichkeits-Längen und Depeschen-Kürzen; ihm ebenbürtig ist nur noch der juristische, welcher durch Häufung verwandter Abstrakta, woran leider die modernen Sprachen selbst in ihren besten Erzeugnissen kranken, das Sprachgefühl erstickt.

Auch die Art, wie der Text gelesen wird, ist von pädagogischer Bedeutung. Ich lasse den Text von Satzteil zu Satzteil mit Unterbrechung lesen, frage den bis dahin gegebenen Inhalt ab und lasse alle möglichen Schlüsse auf die Fortsetzung ziehen. Der Inhalt wird geordnet, mit eignen Worten vom Schüler gegeben, alles Unwesentliche vom Wesentlichen unterschieden und ausgesondert.

Sehr zu empfehlen ist, dafs das Rechenbuch Aufgaben enthält mit weggelassener Frage. Der Schüler mufs auch selbst Aufgaben bilden. Auch die Probe der R. d. t.-Aufgaben durch Einsetzung des gesuchten Wertes und Suchen eines gegebenen ist nützlich. Die beste räumliche Anordnung, der Ansatz u. s. w., mufs vom Schüler selbst gefunden werden.

Das Rechenbuch mufs wie jedes andere Schulbuch seine Methode in sich tragen. So gut der Schüler Grammatik und Übungsbuch, soll er auch Lehr- und Aufgabenbuch im Rechnen besitzen. Die vielvorhandenen dünnen Rechenhefte halte ich für unpraktisch. Nach meiner Darstellung kann Lehr- und Übungsbuch nur ein Ganzes sein; denn die Lehren werden durch die Aufgaben entdeckt, müssen also als Resultate nach einer Reihe von Aufgaben folgen und können nur noch einmal im Zusammenhang am Ende jeden Abschnitts stehen. Das Rechenbuch mit seinen Gesetzen und deren Begründung soll ein Vademecum des Lernenden sein.

Auch die äufsere Ausstattung eines Schulbuchs ist von hoher pädagogischer Bedeutung Erforderlich sind: starkes, gelbliches Papier, grofser, klarer Druck; ästhetische Anordnung, keine Raumverschwendung, aber noch weniger Raumgeiz. Die nicht beschaffbaren Objekte für

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

den Unterricht müssen im Rechenbuch durch Abbildungen ersetzt werden. Selbst der Einband mufs dauerhaft und gefällig sein. Der Schüler mufs das Buch lieben und achten lernen, dem entsprechend es halten und bewahren. Man klage nicht über teure Bücher: sie bilden das bestangelegte Kapital, wenn es gute sind*).

*) Leider ist der Verfasser durch ein Augenleiden verhindert gewesen, die Arbeit anders als in grofsen Unterbrechungen zu vollenden; er bittet daher um Entschuldigung, wenn die Harmonie des Ganzen vermifst werden sollte.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf