Ueber eine Jacobische Transformations-Formel und deren Anwendung auf ein mechanisches Problem.

Die konvergentesten Reihen, welche in der Integralrechnung vorkommen, finden sich in den elliptischen Funktionen, wie sie von Jacobi und Abel dargestellt worden sind. Bekanntlich erscheinen dort diese Funktionen als Brüche, in denen Zähler und Nenner Reihen von der Form: $\sum q^{i^2}.z^i$ enthalten, worin die Summe sich auf i bezieht und i alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ bedeutet, q dagegen ein echter Bruch ist. Setzt man hierin $z = 2x.\sqrt{-1}$, so wird:

$$\sum q^{i^2}.z^i = 1 + 2q\,\mathrm{cs}\,2x + 2q^4.\,\mathrm{cs}\,4x + 2q^9.\,\mathrm{cs}\,6x + 2q^{16}.\,\mathrm{cs}\,8x \ldots.$$

Von dieser Summe ausgehend hat Jacobi in seinen Vorträgen an der hiesigen Universität die elliptischen Funktionen öfters behandelt und also den umgekehrten Weg eingeschlagen, als den er in seinem Werke: Fundamenta nova Theoriae Functionum Ellipticarum befolgt hat.

Bezeichnet man nämlich mit $\Theta(x)$ *) und $H(x)$ die Reihen:

$$\Theta(x) = 1 - 2q.\,\mathrm{cs}\,2x + 2q^4.\,\mathrm{cs}\,4x - 2q^9.\,\mathrm{cs}\,6x + 2q^{16}.\,\mathrm{cs}\,8x \ldots.$$

$$H(x) = 2\sqrt[4]{q}.\sin x - 2\sqrt[4]{q^9}.\sin 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}.\sin 5x \ldots.$$

und setzt:

$$\sin\varphi = \frac{\Theta\left(\frac{\pi}{2}\right).H(x)}{H\left(\frac{\pi}{2}\right).\Theta(x)},\quad \mathrm{cs}\,\varphi = \frac{\Theta(0).H\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{H\left(\frac{\pi}{2}\right).\Theta(x)},\quad \Delta\varphi = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = \frac{\Theta(0).\Theta\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\Theta\left(\frac{\pi}{2}\right).\Theta(x)},$$

*) Statt des dort gebrauchten Zeichens $\Theta(u) = \Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)$ und $H(u) = H\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)$ ist hier stets $\Theta(x)$ und $H(x)$ gesetzt worden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

so ist φ und x verbunden durch die Gleichung: $\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \Theta^2\left(\frac{\pi}{2}\right).x.$ Ferner ist, wenn

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = K$ geschrieben wird, $\Theta^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2K}{\pi}$, $H^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2kK}{\pi}$, $\Theta^2(0) = \frac{2k'K}{\pi}$,

$k^2 + k'^2 = 1$ und die elliptischen Integrale der 2ten und 3ten Gattung enthalten ähnliche Entwickelungen; so z. B. ist für die 2te Gattung:

$$\int_0^{\varphi} \Delta\varphi . d\varphi = -\frac{x . H''\left(\frac{\pi}{2}\right)}{H\left(\frac{\pi}{2}\right) . \Theta^2\left(\frac{\pi}{2}\right)} + \frac{\Theta'(x)\,^{*)}}{\Theta(x) . \Theta^2\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{2E'x}{\pi} + \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x) . \Theta^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}.$$

In den Fundamentis ist ferner $\Theta(x)$ und $H(x)$ in Produkten-Reihen dargestellt worden:

$$\frac{\Theta(x)}{\Theta(0)} = \frac{(1 - 2q . \cos 2x + q^2)(1 - 2q^3 . \cos 2x + q^6)(1 - 2q^5 . \cos 2x + q^{10}) \ldots}{\{(1-q)(1-q^3)(1-q^5) \ldots\}^2}$$

$$\frac{H(x)}{H(0)} = \frac{2 . \sqrt[4]{q} . \sin x . (1 - 2q^2 . \cos 2x + q^4)(1 - 2q^4 . \cos 2x + q^8)(1 - 2q^6 . \cos 2x + q^{12}) \ldots}{\{(1-q)(1-q^3)(1-q^5) \ldots\}^2}$$

wodurch die elliptischen Funktionen $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\Delta\varphi$ die Form von Brüchen annehmen, bei denen Zähler und Nenner aus Produkten-Reihen bestehen. Die 3te Art der Darstellung geht fort nach den Sinus und Cosinus der Vielfachen von x, wobei freilich die Reihen nicht in dem Grade konvergiren, als es bei $\Theta(x)$ und $H(x)$ der Fall ist.

§. 1.

Im Folgenden werde ich an einem ziemlich komplizirten Beispiele zeigen, wie man im Stande ist, eine Gleichung $0 = f(x)$, welche von elliptischen Integralen der ersten und zweiten Gattung abhängt, so nach den Sinus und Cosinus der Vielfachen von x zu entwickeln, daß die vorkommenden Reihen eine ähnliche Konvergenz als die von $\Theta(x)$ und $H(x)$ besitzen. Die Gleichung selbst ist entnommen dem berühmten Probleme über die Figur des Gleichgewichts einer Flüssigkeit, welche mit gleichförmiger Geschwindigkeit um eine Axe rotirt und bei der die einzelnen Theilchen dem Newtonschen Gravitationsgesetz unterworfen sind. Bekanntlich fand Jacobi, daß

---

*) $H''(x) = \frac{d^2H(x)}{dx^2}$, $\Theta'(x) = \frac{d\Theta(x)}{dx}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

unter dieser Voraussetzung das 3axige Ellipsoid Figur des Gleichgewichts *) sein könne und bestimmte die Axen durch die beiden Bedingungsgleichungen

$$\frac{v^2}{2\pi f\varrho} = \frac{A'-C'}{a^2} = \frac{B'-C'}{b^2}, \text{ worin:}$$

$$A' = -\int_0^\infty \frac{du}{\left(1+\frac{u}{a^2}\right)R'}, \quad B' = -\int_0^\infty \frac{du}{\left(1+\frac{u}{b^2}\right)R'}, \quad C' = -\int_0^\infty \frac{du}{\left(1+\frac{u}{c^2}\right)R'},$$

$$R' = \sqrt{\left(1+\frac{u}{a^2}\right)\left(1+\frac{u}{b^2}\right)\left(1+\frac{u}{c^2}\right)}$$

a, b, c bedeuten die Halbaxen des Ellipsoids, 2c ist die Axe, um welche sich die Flüssigkeit mit der gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit v dreht, ϱ die konstante Dichtigkeit derselben, f die Einheit der Anziehung und π das Verhältniß der Kreislinie zum Durchmesser **).

Die Natur der Aufgabe erfordert, daß weder b noch a kleiner als c sei oder daß keine Axe des Aequators kleiner sei als die der Rotation. Ferner sind beide Bedingungsgleichungen für b und a symmetrisch, so daß man willkürlich eine derselben als die größere annehmen kann. Für das Folgende sei festgesetzt $a > b > c$. Durch die Substitution $u = a^2 tg^2 g$ wird:

$$du = \frac{2a^2 \sin g dg}{cs^3 g}, \quad 1+\frac{u}{a^2} = \frac{1}{cs^2 g}, \quad 1+\frac{u}{b^2} = \frac{b^2 cs^2 g + a^2 \sin^2 g}{b^2 cs^2 g}, \quad 1+\frac{u}{c^2} = \frac{c^2 cs^2 g + a^2 \sin^2 g}{c^2 cs^2 g}$$

und wird x und P statt csg und 2abc eingeführt, so erhält man:

$$A' = -P.a.\int_0^1 \frac{x^2.dx}{\sqrt{(a^2-[a^2-b^2]x^2)(a^2-[a^2-c^2]x^2)}}$$

und durch Vertauschung von a, b, c:

$$B' = -P.b.\int_0^1 \frac{x^2.dx}{\sqrt{(b^2-[b^2-a^2]x^2)(b^2-[b^2-c^2]x^2)}}$$

---

*) Crelle's Journal B. XXIV. S. 44.

**) In den Additions à la Connaissance des Temps pour 1846 hat Liouville statt der gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit das Moment der Rotation als konstant eingeführt; was schon Laplace bei dem Umdrehungs-Ellipsoid als Figur des Gleichgewichts gethan hatte. Er versteht darunter die Summe der von den Projektionen der Radii Vectores auf die Ebene des Aequators beschriebenen Flächen, wobei Radius Vector die Entfernung jedes Moleküls vom Schwerpunkte der ganzen Flüssigkeit bedeutet. Ist μ das Moment der Rotation, so wird: $\mu^2 = \frac{(\frac{4}{3}\pi\varrho abc)^2.(a^2+b^2)^2}{25}v^2$ und die Bedingungen des Gleichgewichts sind: $\frac{25\mu^2}{(\frac{4}{3}\pi\varrho abc)^2.(a^2+b^2)^2.2\pi f\varrho} = \frac{A'-C'}{a^2} = \frac{B'-C'}{b^2}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$C' = -P.c.\int_0^1 \frac{x^2.dx}{\sqrt{(c^2-[c^2-a^2]x^2)(c^2-[c^2-b^2]x^2)}}.$$

Man setze $\frac{b}{a} = \beta$, $\frac{c}{a} = \gamma$ und $k^2 = \frac{1-\beta^2}{1-\gamma^2}$, so wird $1 > \beta > \gamma$, $k < 1$. In A' ferner statt x eingeführt $\frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-\gamma^2}}$ gehen die Grenzen des Integrals 0 und 1 über in 0 und φ $= \text{arc}(\sin = \sqrt{1-\gamma^2})$ und es wird: $A' = -\frac{2a^2.\beta.\gamma}{(1-\gamma^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{\text{arc}(\sin=\sqrt{1-\gamma^2})} \frac{\sin^2\varphi.d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$

B' nimmt durch die Substitution: $x = \frac{b.\sin\varphi}{\sqrt{1-\gamma^2}.\sqrt{1-k^2.\sin^2\varphi}}$, die Form an:

$B' = -\frac{2a^2\beta^3\gamma}{(1-\gamma^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{\text{arc}(\sin=\sqrt{1-\gamma^2})} \frac{\sin\varphi^2\,d\varphi}{\{1-k^2\sin^2\varphi\}^{\frac{1}{2}}}$ und C' geht durch die Substitution: $x = \frac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}}.\text{tg}\,\varphi$

über in: $C = -\frac{2a^2\beta\gamma^3}{(1-\gamma^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{\text{arc}(\sin=\sqrt{1-\gamma^2})} \frac{\text{tg}^2\varphi.d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$

Statt der Unbekannten a, b, c sind nun eingeführt a, k, φ, so daß $k = \sqrt{\frac{1-\beta^2}{1-\gamma^2}}$ $\sin\varphi = \sqrt{1-\gamma^2}$. Hieraus folgt $\gamma = \text{cs}\,\varphi$, $\beta = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = \Delta\varphi$ und also

$$b = a.\Delta\varphi, \qquad c = a\,\text{cs}\,\varphi.$$

Die Größen A, B, C verändern sich in:

$$A = -\frac{Pa}{\sin^3\varphi}\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\Delta\varphi},\quad B = -\frac{Pa\,\Delta^2\varphi}{\sin^3\varphi}\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\Delta^3\varphi},\quad C = -\frac{Pa\,\text{cs}^2\varphi}{\sin^3\varphi}\int_0^\varphi \frac{\text{tg}^2\varphi\,d\varphi}{\Delta\varphi}$$

Von den beiden Bedingungsgleichungen

$$\frac{v^2}{2\pi f\varrho} = \frac{1}{a^2}(A-C) = \frac{1}{b^2}(B-C)$$

werde ich nur die eine entwickeln, welche von v^2 unabhängig ist, nämlich

$$\frac{1}{a^2}(A-C) = \frac{1}{b^2}(B-C)$$

und welche dieselbe bleibt, wenn statt der Winkelgeschwindigkeit das Moment der Rotation konstant gesetzt wird. Schreibt man diese Gleichung: $\beta^2 A - B + (1-\beta^2)C = 0$ und giebt A, B, C die gefundenen Werthe, so entsteht:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$0 = \triangle^2\varphi . \int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\triangle\varphi} - \triangle^2\varphi \int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\triangle^3\varphi} + k^2 \sin^2\varphi\, cs^2\varphi \int_0^\varphi \frac{tg^2\varphi\, d\varphi}{\triangle\varphi} \text{ oder}$$

$$\int_0^\varphi \frac{\sin^4\varphi\, d\varphi}{\triangle^3\varphi} - \frac{\sin^2\varphi\, cs^2\varphi}{\triangle^2\varphi} \int_0^\varphi \frac{tg^2\varphi\, d\varphi}{\triangle\varphi} = 0,$$

wofür auch geschrieben werden kann:

$$\int_0^\varphi \left\{ \frac{d\frac{\sin^2\varphi\, cs^2\varphi}{\triangle^2\varphi}}{d\varphi} \int_0^\varphi \frac{tg^2\varphi\, d\varphi}{\triangle\varphi} \right\} d\varphi = 0.$$

Statt diese Gleichung zu entwickeln ist es angemessener die Legendresche Transformation: $k = \frac{2\sqrt{k_2}}{1+k_2}$ $\sin(2\varphi - \varphi_2) = k_2 \sin\varphi_2$ anzuwenden. Hiedurch wird:

$$\sin\varphi_2 = (1+k')\frac{\sin\varphi\, cs\,\varphi}{\triangle\varphi}, \quad \frac{(\triangle\varphi_2 - cs\,\varphi_2)^2}{(1-k_2)^2 \sin^2\varphi_2} = tg^2\varphi$$

und die gegebene Gleichung nimmt die Form an:

$$\int_0^{\varphi_2} \left\{ \frac{d \sin^2\varphi_2}{d\varphi_2} \int_0^{\varphi_2} \frac{(\triangle\varphi_2 - cs\,\varphi_2)^2 d\varphi_2}{\sin^2\varphi_2 \triangle\varphi_2} \right\} d\varphi_2 = 0$$

oder nach partieller Integration:

$$\sin^2\varphi_2 \int_0^\varphi \frac{(\triangle\varphi_2 - cs\,\varphi_2)^2 d\varphi_2}{\sin^2\varphi_2\, \triangle\varphi_2} - \int_0^\varphi \frac{(\triangle\varphi_2 - cs\,\varphi_2)^2\, d\varphi_2}{\triangle\varphi_2} = 0.$$

Es ist, $\frac{d\varphi_2}{\triangle\varphi_2} = du_2 = d\frac{2K_2 \bar{x}_2}{\pi}$, $E'_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k_2^2 \sin^2\varphi_2} . d\varphi_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \triangle\varphi_2\, d\varphi_2$ gesetzt, nach Fundam. §. 47:

$$\int_0^{u_2} \sin^2\varphi_2\, du_2 = -\frac{Z(u_2)}{k_2^2} + \frac{u_2}{k_2^2}\left(1 - \frac{E'_2}{K_2}\right)$$

und hieraus: $\int_0^{u_2} \frac{du_2}{\sin^2\varphi_1} = u_2\left(1 - \frac{E'_2}{K_2}\right) - \triangle\varphi_2 \cot g\,\varphi_2 - Z(u_2).$

Demnach wird:

$$\int_0^{\varphi_2} \frac{(\triangle\varphi_2 - cs\,\varphi_2)^2 d\varphi_2}{\sin^2\varphi_2\, \triangle\varphi_2} = 2u_2\left(1 - \frac{E'_2}{K_1}\right) - 2\triangle\varphi_2 \cot g\,\varphi_2 - 2Z(u_2) - (1+k_2^2)u_2 + \frac{2}{\sin\varphi_2}$$

$$-\int_0^{\varphi_2} \frac{(\triangle\varphi_2 - cs\,\varphi_2)^2 d\varphi_2}{\triangle\varphi_2} = -2u_2 - \frac{1+k_2^2}{k_2^2} Z(u_2) + \frac{(1+k_2^2)\, u_2}{k_2^2}\left(1 + \frac{E'_2}{K_2}\right) + 2\sin\varphi_2$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und die zu betrachtende Gleichung geht über in:

$$-u_2\left\{(1+k_2^2)\frac{2E'_2}{\pi}-k'^2_2\frac{2K_2}{\pi}\right\}-\left\{2\frac{2E'_2}{\pi}-k'^2\frac{2K_2}{\pi}\right\}k_2^2\,u_2\sin\varphi_2-(1+k_2^2)\frac{2K_2}{\pi}Z(u_2)$$
$$-2k_2^2\frac{2K_2}{\pi}\sin^2\varphi Z(u_2)+4k_2^2\frac{2K_2}{\pi}\sin\varphi_2-2k_2^2\frac{2K_2}{\pi}\Delta\varphi_2\,\mathrm{cs}\,\varphi_2\sin\varphi_2=0.$$

Die angeführte Legendresche Transformation von φ in φ_2 und k in k_2 entspricht für die Jacobischen Reihen einer Vertauschung von x und q in 2x und q^2, so daß φ_2 und k_2 entsteht, wenn man in die Reihen für φ und k statt x und q nur zu setzen hat 2x und q^2; demgemäß ist $x_2 = 2x$. Der kürzern Schreibart wegen wurde in $\Theta(x)$ und $H(x)$ der Modul q nicht angedeutet; ist dagegen der Modul q_m, so werde ich dieses durch $\Theta_m(x)$ und $H_m(x)$ bezeichnen, so daß z. B. $\sin\varphi=\dfrac{\Theta(\frac{\pi}{2})H(x)}{H(\frac{\pi}{2})\Theta(x)}$ giebt: $\sin\varphi_2=\dfrac{\Theta_2(\frac{\pi}{2})H_2(2x)}{H_2(\frac{\pi}{2})\Theta_2(2x)}$.

Es ist nun nach den Fundamentis:

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}}=\Theta(\tfrac{\pi}{2}),\quad \sqrt{\frac{2kK}{\pi}}=H(\tfrac{\pi}{2}),\quad \frac{2K}{\pi}Z(u)=\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)},$$
$$\sin\varphi=\frac{\Theta(\frac{\pi}{2})\,H(x)}{H(\frac{\pi}{2})\,\Theta(x)},\quad \mathrm{cs}\,\varphi=\frac{\Theta(0)\,H(x+\frac{\pi}{2})}{H(\frac{\pi}{2})\,\Theta(x)},\quad \Delta\varphi=\frac{\Theta(0)\,\Theta(x+\frac{\pi}{2})}{\Theta(\frac{\pi}{2})\,\Theta(x)};$$

ferner wie man leicht durch Differentiation ableiten kann:

$$\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E'}{\pi}=-\frac{H''(\frac{\pi}{2})}{H(\frac{\pi}{2})},\quad \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2=\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)}-\frac{H''(\frac{\pi}{2})}{H(\frac{\pi}{2})},\quad \left(\frac{2k'K}{\pi}\right)^2=\frac{\Theta''(\frac{\pi}{2})}{\Theta(\frac{\pi}{2})}-\frac{H''(\frac{\pi}{2})}{H(\frac{\pi}{2})};$$

wodurch die obige Gleichung die Form annimmt:

$$0=\left\{\begin{aligned}&2x\left\{\frac{\Theta_2''(\frac{\pi}{2})}{\Theta_2(\frac{\pi}{2})}+\frac{H_2^3(\frac{\pi}{2})\,H_2''(\frac{\pi}{2})}{\Theta_2^4(\frac{\pi}{2})}\right\}+\frac{2xH_2^2(2x)\,H_2^2(\frac{\pi}{2})}{\Theta_2^2(2x)\,\Theta_2^2(\frac{\pi}{2})}\left\{\frac{H_2''(\frac{\pi}{2})}{H_2(\frac{\pi}{2})}+\frac{\Theta_2''(\frac{\pi}{2})}{\Theta_2(\frac{\pi}{2})}\right\}\\&-\frac{H_2^4(\frac{\pi}{2})+\Theta_2^4(\frac{\pi}{2})}{\Theta_2^4(\frac{\pi}{2})}\cdot\frac{\Theta_2'(2x)}{\Theta_2(2x)}-\frac{2H_2^2(\frac{\pi}{2})H_2^2(2x)\,\Theta'(2x)}{\Theta_2^2(\frac{\pi}{2})\Theta_2^2(2x)\Theta(2x)}\\&+\frac{4H_2^3(\frac{\pi}{2})\,H_2(2x)}{\Theta_2(\frac{\pi}{2})\,\Theta_2(2x)}-\frac{2H_2^2(\frac{\pi}{2})\,\Theta_2^2(0)\,H_2(2x)\,H_2(2x+\frac{\pi}{2})\,\Theta_2(2x+\frac{\pi}{2})}{\Theta_2^2(\frac{\pi}{2})\,\Theta_2^3(2x)}\end{aligned}\right.$$

und die Nenner fortgeschafft, so wie überall noch den Faktor $\Theta_2(2x)$ beigefügt:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$0 = \begin{cases} 2x\Theta_2^{\cdot}(2x)\left\{\Theta_2^3\left(\frac{\pi}{2}\right)\Theta_2''\left(\frac{\pi}{2}\right) + H_2^3\left(\frac{\pi}{2}\right)H_2''\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\} + 2x.\ \Theta_2^2(2x)H_2^2(2x)H_2\left(\frac{\pi}{2}\right)\Theta_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \left\{\Theta_2\left(\frac{\pi}{2}\right)H_2''\left(\frac{\pi}{2}\right) + H_2\left(\frac{\pi}{2}\right)\Theta_2''\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\} - \Theta_2^3(2x)\Theta_2'(2x)\left\{H_2^4\left(\frac{\pi}{2}\right) + \Theta_2^4\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\} - \\ 2H_2^2(2x)\Theta_2(2x)\Theta_2'(2x)H_2^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\Theta_2^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + 4H_2(2x)\Theta_2^3(2x)H_2^3\left(\frac{\pi}{2}\right)\Theta_2^3\left(\frac{\pi}{2}\right) - \\ 2H_2(2x)H_2\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\Theta_2(2x)\Theta_2\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)H_2^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\Theta_2^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\Theta_2^2(0). \end{cases}$$

Der Kürze wegen werde ich x und q statt 2x und q^2 einführen, so daß, wenn die Halbaxen a b c durch:

$$a,\ b = \frac{a\Theta_{\frac{1}{2}}(0)\,.\,\Theta_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}{\Theta_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right)\,.\,\Theta_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)},\ c = \frac{a\,.\,\Theta_{\frac{1}{2}}(0)H_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}{H_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right)\Theta_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)}$$

dargestellt werden zwischen x und q. Die Gleichung gilt:

$$0 = \begin{cases} x.\,\Theta^4(x)\left\{\Theta^3\left(\frac{\pi}{2}\right)\Theta''\left(\frac{\pi}{2}\right) + H^3\left(\frac{\pi}{2}\right)H''\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\} + xH^2(x)\Theta^2(x)H\left(\frac{\pi}{2}\right)\Theta\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \left\{\Theta\left(\frac{\pi}{2}\right)H''\left(\frac{\pi}{2}\right) + H\left(\frac{\pi}{2}\right)\Theta''\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\} - \Theta^3(x)\Theta'(x)\left\{H^4\left(\frac{\pi}{2}\right) + \Theta^4\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\} - \\ 2H^2(x)\Theta(x)\Theta'(x)H^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\Theta^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + 4H(x)\Theta^3(x)H^3\left(\frac{\pi}{2}\right)\Theta^3\left(\frac{\pi}{2}\right) - \\ 2H(x)H\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\Theta(x)\Theta\left(x+\frac{\pi}{2}\right)H^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\Theta^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\Theta^2(0). \end{cases}$$

§. 2.

Diese Gleichung soll nach den Sinus und Cosinus der Vielfachen von x entwickelt werden d. h. es sollen die Funktionen:

$$\Theta^4(x),\quad \Theta^3(x)\,.\,\Theta'(x),\quad \Theta^2(x)\,.\,H^2(x),\quad H^2(x)\,.\,\Theta(x)\,.\,\Theta'(x),\quad \Theta^3(x)H(x),$$

$$\Theta(x)\,.\,\Theta\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\,.\,H(x)\,.\,H\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

durch solche Reihen dargestellt werden.

Im Crelleschen Journal hat Jacobi eine identische Gleichung gegeben, welche diese Aufgabe und jede derartige löst. Bedeuten X und x zwei beliebige Größen, so ist

$$1)\ H(x)\,.\,\Theta(X) - H(X)\Theta(x) = H_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x-X}{2}\right)\,.\,H_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x+X}{2}\right).$$

Durch diese merkwürdige Gleichung werde ich einige Produkte von $\Theta(x)$, $H(x)$ und deren Differential-Quotienten in Summen zerlegen, sobald die Anzahl der Faktoren 2^n ist. Bemerkt man, daß $H(x) = -H(-x)$ ist, so läßt sich diese Gleichung schreiben:

$$2)\ H(X)\,.\,\Theta(x) - H(x)\Theta(X) = H_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x-X}{2}\right)\,.\,H_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x-X}{2} + X - \frac{\pi}{2}\right)$$

Hierin $X = \frac{\pi}{2}$ und $2x + \frac{\pi}{2}$ und q^2 statt x und q gesetzt, folgt:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3) $H^2(x) = H_2(\frac{\pi}{2}) \,.\, \Theta_2(2x + \frac{\pi}{2}) - \Theta_2(\frac{\pi}{2}) \,.\, H_2(2x + \frac{\pi}{2})$.

Nach Fundam. §. 62. ist:

4) $\Theta(x) = -\,qe^{2x\sqrt{-1}} \,.\, \Theta(x - lq \,.\, \sqrt{-1})$; $H(x) = -\,qe^{2x\sqrt{-1}} \,.\, H(x - lq \,.\, \sqrt{-1})$.

5) $\Theta(x) = -\,qe^{-2x\sqrt{-1}} \,.\, \Theta(x + lq \,.\, \sqrt{-1})$; $H(x) = -\,qe^{-2x\sqrt{-1}} \,.\, H(x + lq \,.\, \sqrt{-1})$.

6) $\sqrt{-1}\,\Theta(x) = \sqrt[4]{q} \,.\, e^{x\sqrt{-1}} \,.\, H(x - \frac{lq\sqrt{-1}}{2})$; $\sqrt{-1} \,.\, H(x) = \sqrt[4]{q} \,.\, e^{x\sqrt{-1}} \,.\, \Theta(x - \frac{lq\sqrt{-1}}{2})$.

7) $\Theta(x) = \sqrt{-1} \,.\, \sqrt[4]{q} \,.\, e^{-x\sqrt{-1}} \,.\, H(x + \frac{lq \,.\, \sqrt{-1}}{2})$; $H(x) = \sqrt{-1} \,.\, \sqrt[4]{q} \,.\, e^{-x\sqrt{-1}} \,.\, \Theta(x + \frac{lq \,.\, \sqrt{-1}}{2})$

In Gl. 3 statt x geschrieben $x - \frac{lq\sqrt{-1}}{2}$ entsteht:

$$H^2(x - \frac{lq \,.\, \sqrt{-1}}{2}) = H_2(\frac{\pi}{2})\Theta_2(2x + \frac{\pi}{2} - \frac{lq^2 \,.\, \sqrt{-1}}{2}) - \Theta_2(\frac{\pi}{2})H_2(2x + \frac{\pi}{2} - \frac{lq^2 \,.\, \sqrt{-1}}{2}),$$

welche Gleichung mit Hilfe der Formel 4 übergeht in:

$$\frac{\Theta^2(x)}{\sqrt{q \,.\, e^{2x\sqrt{-1}}}} = \frac{\sqrt{-1} \,.\, H_2(\frac{\pi}{2})H_2(2x + \frac{\pi}{2})}{\sqrt{q \,.\, e^{(2x + \frac{\pi}{2})\sqrt{-1}}}} - \frac{\sqrt{-1} \,.\, \Theta_2(\frac{\pi}{2})\Theta_2(2x + \frac{\pi}{2})}{\sqrt{q \,.\, e^{(2x + \frac{\pi}{2})\sqrt{-1}}}}$$

und da $e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}$ ist, folgt:

8) $\Theta^2(x) = \Theta^2(\frac{\pi}{2})\,\Theta^2(2x + \frac{\pi}{2}) - H_2(\frac{\pi}{2})H_2(2x + \frac{\pi}{2})$.

Vertauscht man in Gl. 2:

$$H(X)\Theta(x) - H(x)\Theta(X) = H_{\frac{1}{2}}(\frac{x - X}{2})H_{\frac{1}{2}}(\frac{x + X}{2} - \frac{\pi}{2})$$

X mit $-X$, so wird:

$$H(X)\Theta(x) + H(x)\Theta(X) = -\,H_{\frac{1}{2}}(\frac{x + X}{2}) \,.\, H_{\frac{1}{2}}(\frac{x - X}{2} - \frac{\pi}{2})$$

addirt diese beiden Gleichungen und setzt dann $X = x$, so erhält man:

9) $2 \,.\, H(x)\Theta(x) = H_{\frac{1}{2}}(\frac{\pi}{2})H_{\frac{1}{2}}(x)$.

Beide Seiten dieser Gleichung ins Quadrat erhoben und $H^2_{\frac{1}{2}}(x)$ durch Formel 3 in eine Summe zerlegt, giebt:

10) $4\Theta^2(x)H^2(x) = H^2_{\frac{1}{2}}(\frac{\pi}{2})\left\{H(\frac{\pi}{2})\Theta(2x + \frac{\pi}{2}) - \Theta(\frac{\pi}{2})H(2x + \frac{\pi}{2})\right\}$

Ebenso führt Gl. 8. auf:

$$\Theta^4(x) = \Theta_2^2(\frac{\pi}{2})\Theta_2^2(2x + \frac{\pi}{2}) + H_2^2(\frac{\pi}{2})H_2^2(2x + \frac{\pi}{2})$$
$$- 2\Theta_2(\frac{\pi}{2})H_2(\frac{\pi}{2})\Theta_2(2x + \frac{\pi}{2})H_2(2x + \frac{\pi}{2})$$

Aber aus den Formeln 8, 3, 9 folgt, indem $\Theta(x + \pi) = \Theta(x)$ und $H(x + \pi) = -H(x)$ ist:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\Theta_2^2\left(2x+\tfrac{\pi}{2}\right) = \Theta_4\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\Theta_4\left(4x+\tfrac{\pi}{2}\right) + H_4\left(\tfrac{\pi}{2}\right)H_4\left(4x+\tfrac{\pi}{2}\right)$$

$$H_2^2\left(2x+\tfrac{\pi}{2}\right) = H_4\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\Theta_4\left(4x+\tfrac{\pi}{2}\right) + \Theta_4\left(\tfrac{\pi}{2}\right)H_4\left(4x+\tfrac{\pi}{2}\right)$$

$$2\Theta_2\left(2x+\tfrac{\pi}{2}\right).H_2\left(2x+\tfrac{\pi}{2}\right) = H\left(\tfrac{\pi}{2}\right)H\left(2x+\tfrac{\pi}{2}\right)$$

und daher wird:

$$11)\quad \Theta^4(x) = \begin{cases} \left\{\Theta_2^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\Theta_4\left(\tfrac{\pi}{2}\right) + H_2^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)H_4\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right\}\Theta_4\left(4x+\tfrac{\pi}{2}\right) + \\ \left\{\Theta_2^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)H_4\left(\tfrac{\pi}{2}\right) + H_2^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\Theta_4\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right\}H_4\left(4x+\tfrac{\pi}{2}\right) - \\ \Theta_2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)H_2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)H\left(\tfrac{\pi}{2}\right)H\left(2x+\tfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

Für jeden der Koefficienten von $\Theta_4\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)$ und $H_4\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)$ würde in dieser Formel 4 Multiplikationen von Reihen in q auszuführen sein; es läßt sich diese noch auf 3 zurückbringen. Wie nämlich leicht aus 8 und 3 zu erweisen ist, gilt:

$$\Theta_2^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = H_4^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right) + \Theta_4^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right) \text{ und } H_2^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 2H_4\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\Theta_4\left(\tfrac{\pi}{2}\right)$$

und dadurch:

$$12)\quad \Theta^4(x) = \begin{cases} \left\{3H_4^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right) + \Theta_4^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right\}\Theta_4\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\Theta_4\left(4x+\tfrac{\pi}{2}\right) + \\ \left\{3\Theta_4^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right) + H_4^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right\}H_4\left(\tfrac{\pi}{2}\right)H_4\left(4x+\tfrac{\pi}{2}\right) - \\ \Theta_2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)H_2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)H\left(\tfrac{\pi}{2}\right)H\left(2x+\tfrac{\pi}{2}\right). \end{cases}$$

Differenzirt man diese Gleichung nach x und bemerkt, daß $\Theta'_4\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)$, $H'_4\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)$ u. s. w. die Bedeutung

$$\frac{d\Theta'_4\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)}{d\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)},\quad \frac{dH'_4\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)}{d\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)}$$ u. s. w. haben, so folgt:

$$13)\quad \Theta^3(x)\Theta'(x) = \begin{cases} \left\{3H_4^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right) + \Theta_4^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right\}\Theta_4\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\Theta'_4\left(4x+\tfrac{\pi}{2}\right) + \\ \left\{3\Theta_4^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right) + H_4^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right\}H_4\left(\tfrac{\pi}{2}\right)H'_4\left(4x+\tfrac{\pi}{2}\right) - \\ \tfrac{1}{2}\Theta_2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)H_2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)H\left(\tfrac{\pi}{2}\right).H'\left(2x+\tfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

Die Formel 12 führt auf $H^4(x)$, indem man $x - \frac{\lg \sqrt{-1}}{2}$ statt x setzt und Gl. 6 und 4 in Anwendung bringt:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$14)\quad H^4(x) = \begin{cases} \left\{3H_4^2(\frac{\pi}{2}) + \Theta_4^2(\frac{\pi}{2})\right\}\Theta_4(\frac{\pi}{2})H_4(4x+\frac{\pi}{2}) + \\ \left\{3\Theta_4^2(\frac{\pi}{2}) + H_4^2(\frac{\pi}{2})\right\}H_4(\frac{\pi}{2})\Theta_4(4x+\frac{\pi}{2}) - \\ \Theta_2(\frac{\pi}{2})H_2(\frac{\pi}{2})H(\frac{\pi}{2})H(2x+\frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

und durch Differenziation nach x:

$$15)\quad H^3(x)H'(x) = \begin{cases} \left\{3H_4^2(\frac{\pi}{2}) + \Theta_4^2(\frac{\pi}{2})\right\}\Theta_4(\frac{\pi}{2})H_4'(4x+\frac{\pi}{2}) + \\ \left\{3\Theta_4^2(\frac{\pi}{2}) + H_4^2(\frac{\pi}{2})\right\}H_4(\frac{\pi}{2})\Theta'_4(4x+\frac{\pi}{2}) - \\ \frac{1}{2}\Theta_2(\frac{\pi}{2})H_2(\frac{\pi}{2})H(\frac{\pi}{2})H'(2x+\frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

Setzt man ferner in Gl. 2: $X = 0$ und x und q^2 statt $\frac{x-\pi}{2}$ und q so wird:

$$16)\quad H(x)H(x+\tfrac{\pi}{2}) = \Theta_2(0)H_2(2x).$$

und hierin $x - \frac{lq.\sqrt{-1}}{2}$ statt x geschrieben ergiebt sich mittelst Formel 6:

$$17)\quad \Theta(x)\Theta(x+\tfrac{\pi}{2}) = \Theta_2(0)\Theta_2(2x).$$

Das Produkt der beiden letzten Gleichungen liefert:

$$18)\quad \Theta(x)H(x)\Theta(x+\tfrac{\pi}{2})H(x+\tfrac{\pi}{2}) = \tfrac{1}{2}\Theta_2^2(0)H(\tfrac{\pi}{2})H(2x)$$

indem man Gl. 9. zu Hilfe nimmt. Die beiden leicht auseinander abzuleitenden Formeln, welche auf 9 führten

$$H(X)\Theta(x) + H(x)\Theta(X) = H_{\frac{1}{2}}(\tfrac{x+X}{2})H_{\frac{1}{2}}(\tfrac{x-X}{2}+\tfrac{\pi}{2})$$

$$H(X)\Theta(x) - H(x)\Theta(X) = H_{\frac{1}{2}}(\tfrac{x-X}{2})H_{\frac{1}{2}}(\tfrac{x+X}{2}-\tfrac{\pi}{2})$$

ergeben durch Addition und Subtraktion:

$$19)\quad \begin{cases} 2H(X)\Theta(x) = H_{\frac{1}{2}}(\frac{x+X}{2})H_{\frac{1}{2}}(\frac{x-X}{2}+\frac{\pi}{2}) + H_{\frac{1}{2}}(\frac{x-X}{2})H_{\frac{1}{2}}(\frac{x+X}{2}-\frac{\pi}{2}) \\ 2H(x)\Theta(X) = H_{\frac{1}{2}}(\frac{x-X}{2})H_{\frac{1}{2}}(\frac{x-X}{2}+\frac{\pi}{2}) - H_{\frac{1}{2}}(\frac{x-X}{2})H_{\frac{1}{2}}(\frac{x+X}{2}-\frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

und hierin $X = x + \frac{\pi}{2}$ gesetzt:

$$20)\quad \begin{cases} 2H(x+\frac{\pi}{2})\Theta(x) = \left\{H_{\frac{1}{2}}(x+\frac{\pi}{4}) - H_{\frac{1}{2}}(x-\frac{\pi}{4})\right\}H_{\frac{1}{2}}(\frac{\pi}{4}) \\ 2\Theta(x+\frac{\pi}{2})H(x) = \left\{H_{\frac{1}{2}}(x+\frac{\pi}{4}) + H_{\frac{1}{2}}(x-\frac{\pi}{2})\right\}H_{\frac{1}{2}}(\frac{\pi}{4}) \end{cases}$$

Endlich die Formeln 19 nach x differenzirt:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$21)\quad \begin{cases} 4H(X)\Theta'(x) = \begin{cases} H'_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x+X}{2}\right)H_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x-X}{2}+\frac{\pi}{2}\right)+H'_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x-X}{2}\right)H_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x+X}{2}-\frac{\pi}{2}\right) \\ +H_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x+X}{2}\right)H'_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x-X}{2}+\frac{\pi}{2}\right)+H_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x-X}{2}\right)H'_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x+X}{2}-\frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \\ 4\Theta(X)H'(x) = \begin{cases} H'_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x+X}{2}\right)H_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x-X}{2}+\frac{\pi}{2}\right)-H'_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x-X}{2}\right)H_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x+X}{2}-\frac{\pi}{2}\right) \\ +H_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x+X}{2}\right)H'_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x-X}{2}+\frac{\pi}{2}\right)-H_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x-X}{2}\right)H'_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x+X}{2}-\frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \end{cases}$$

und hierin $X = x$ gesetzt, indem $H'_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = H_{\frac{1}{2}}(0) = 0$ ist:

$$22)\quad \begin{cases} 4H(x)\Theta'(x) = H_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right)H'_{\frac{1}{2}}(x)+H'_{\frac{1}{2}}(0).H_{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \\ 4\Theta(x)H'(x) = H_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right)H'_{\frac{1}{2}}(x)-H'_{\frac{1}{2}}(0).H_{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

Um $\Theta^3(x)H(x)$ zu entwickeln, transformire man die Formel 8:

$$\Theta^2(x) = \Theta_2\left(\frac{\pi}{2}\right)\Theta_2\left(2x+\frac{\pi}{2}\right) - H_2\left(\frac{\pi}{2}\right)H_2\left(2x+\frac{\pi}{2}\right).$$

Aus den Reihen für $\Theta(x)$ und $H(x)$ folgt nämlich leicht:

$$\Theta(x) = \Theta_4\left(2x+\frac{\pi}{2}\right) - H_4\left(2x+\frac{\pi}{2}\right) \text{ und } \Theta\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \Theta_4\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)+H_4\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$$

und daher:

$$2\Theta_2\left(2x+\frac{\pi}{2}\right) = \Theta_{\frac{1}{2}}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\Theta_{\frac{1}{2}}(x);\quad 2H_2\left(2x+\frac{\pi}{2}\right) = \Theta_{\frac{1}{2}}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\Theta_{\frac{1}{2}}(x).$$

Diese Werthe für $\Theta_2\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$ und $H_2\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$ eingesetzt, ergiebt sich:

$$2\Theta^2(x) = \left\{\Theta_2\left(\frac{\pi}{2}\right)-H_2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}\Theta_{\frac{1}{2}}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\left\{\Theta_2\left(\frac{\pi}{2}\right)+H_2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}\Theta_{\frac{1}{2}}(x)$$

oder:

$$23)\quad 2\Theta^2(x) = \Theta_{\frac{1}{2}}(0)\Theta_{\frac{1}{2}}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\Theta_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right)\Theta_{\frac{1}{2}}(x).$$

Multiplizirt man diese Gleichung mit der schon gefundenen $2\Theta(x)H(x) = H_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right)H_{\frac{1}{2}}(x)$, so findet man mittelst 20:

$$24)\quad 8\Theta^3(x)H(x) = \Theta_{\frac{1}{2}}(0)H_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right)H_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\pi}{4}\right)\left\{H_{\frac{1}{4}}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+H_{\frac{1}{4}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right\}+$$
$$\Theta_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right)H_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right)H_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\pi}{2}\right)H_{\frac{1}{4}}(x)$$

Will man das Produkt $H^2(x)\Theta(x)\Theta'(x)$ entwickeln, so hat man nur auszuführen die Multiplikation der Formeln:

$$\Theta(x)\Theta'(x) = \Theta_2\left(\frac{\pi}{2}\right)\Theta'_2\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)-H_2\left(\frac{\pi}{2}\right)H'_2\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$H^2(x) = H_2\left(\frac{\pi}{2}\right)\Theta_2\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)-\Theta_2\left(\frac{\pi}{2}\right)H_2\left(2x+\frac{\pi}{2}\right);$$

dieses giebt:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$H^2(x)\Theta(x)\Theta'(x) = \begin{cases} H_2(\frac{\pi}{2})\Theta_2(\frac{\pi}{2})\left\{\Theta_2(2x+\frac{\pi}{2})\Theta'_2(2x+\frac{\pi}{2}) + H_2(2x+\frac{\pi}{2})H'_2(2x+\frac{\pi}{2})\right\} \\ -\Theta_2^2(\frac{\pi}{2})H_2(2x+\frac{\pi}{2})\Theta'_2(2x+\frac{\pi}{2}) - H_2^2(\frac{\pi}{2})\Theta_2(2x+\frac{\pi}{2})H'_2(2x+\frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

und mit Anwendung von 3, 8, 22:

$$4H^2(x)\Theta(x)\Theta'(x) = \begin{cases} 4H_2(\frac{\pi}{2})\Theta_2(\frac{\pi}{2})\left(\Theta_4(\frac{\pi}{2}) + H_4(\frac{\pi}{2})\right)\left\{\Theta'_4(4x+\frac{\pi}{2}) + H_4'(4x+\frac{\pi}{2})\right\} \\ -H(\frac{\pi}{2})\left(\Theta_2^2(\frac{\pi}{2}) + H_2^2(\frac{\pi}{2})\right)H(2x+\frac{\pi}{2}) - H'(0)\left(\Theta_2^2(\frac{\pi}{2}) + H_2^2(\frac{\pi}{2})\right)H(2x). \end{cases}$$

Bemerkt man, daß $2\Theta_4'(2x+\frac{\pi}{2}) + 2H_4'(2x+\frac{\pi}{2}) = \Theta'(x+\frac{\pi}{2})$, $\Theta_4(\frac{\pi}{2}) + H_4(\frac{\pi}{2}) = \Theta(\frac{\pi}{2})$, $\Theta_2^2(\frac{\pi}{2}) + H_2^2(\frac{\pi}{2}) = \Theta^2(\frac{\pi}{2})$, $\Theta_2^2(\frac{\pi}{2}) - H_2^2(\frac{\pi}{2}) = \Theta^2(0)$ ist, so wird:

$$25)\quad 4H^2(x)\Theta(x)\Theta'(x) = 2H_2(\tfrac{\pi}{2})\Theta_2(\tfrac{\pi}{2})\Theta(\tfrac{\pi}{2})\Theta'(2x+\tfrac{\pi}{2}) - H(\tfrac{\pi}{2})\Theta^2(\tfrac{\pi}{2})H'(2x+\tfrac{\pi}{2}) - H'(0)\Theta^2(0)H(2x);$$

wofür auch die Form:

$$26)\quad 8H^2(x)\Theta(x)\Theta'(x) = H_{\frac{1}{2}}^2(\tfrac{\pi}{2})\left\{H(\tfrac{\pi}{2})\Theta'(2x+\tfrac{\pi}{2}) - \Theta(\tfrac{\pi}{2})H'(2x+\tfrac{\pi}{2})\right\} - 2H(0)\Theta^2(0)H(2x)$$

gewählt werden kann, indem: $H^2(\frac{\pi}{2}) = 2H_2(\frac{\pi}{2})\Theta_2(\frac{\pi}{2})$ angewendet wird. Aus dieser Formel leitete man leicht die für $\Theta^2(x)H(x)H'(x)$ ab durch Vertauschung von x mit $x - \frac{\lg\sqrt{-1}}{2}$. Es wird dann:

$$H\left(x - \frac{\lg\sqrt{-1}}{2}\right) = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt[4]{q\,.\,e^{x\sqrt{-1}}}}\Theta(x),\quad \Theta\left(x - \frac{\lg.\sqrt{-1}}{2}\right) = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt[4]{q\,.\,e^{x\sqrt{-1}}}}H(x)$$

$$\Theta'\left(x - \frac{\lg.\sqrt{-1}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt[4]{q\,.\,e^{x\sqrt{-1}}}}H(x) + \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt[4]{q\,.\,e^{x\sqrt{-1}}}}H'(x)$$

$$\Theta'\left(2x + \frac{\pi}{2} - \lg.\sqrt{-1}\right) = -\frac{2\sqrt{-1}}{q\,.\,e^{4x\sqrt{-1}}}\Theta\left(2x+\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{q\,.\,e^{4x\sqrt{-1}}}\Theta\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$H'\left(2x + \frac{\pi}{2} - \lg.\sqrt{-1}\right) = -\frac{2\sqrt{-1}}{q\,.\,e^{4x\sqrt{-1}}}.H\left(2x+\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{q\,.\,e^{4x\sqrt{-1}}}.H'\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$H\left(2x - \lg\sqrt{-1}\right) = \frac{1}{q\,.\,e^{4x\sqrt{-1}}}.H(2x)$$

Die Werthe in 26 eingesetzt, führt mit Hilfe der Formel 10:

$$4\Theta^2(x)H^2(x) = H_{\frac{1}{2}}^2(\tfrac{\pi}{2})\,.\left\{H(\tfrac{\pi}{2})\Theta(2x+\tfrac{\pi}{2}) - \Theta(\tfrac{\pi}{2})H(2x+\tfrac{\pi}{2})\right\}$$

auf die Entwickelung:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$27)\quad 8\,.\,\Theta^2(x)\,H(x)\,H'(x) = H^2_{\frac{1}{2}}\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\left\{H\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\Theta'\left(2x+\tfrac{\pi}{2}\right) - \Theta\left(\tfrac{\pi}{2}\right)H'\left(2x+\tfrac{\pi}{2}\right)\right\}$$
$$+\,2\,.\,H'(0)\,\Theta^2(0)\,.\,H(2x)\ ^{*)}.$$

Der Unterschied der Gleichungen 27) und 26) giebt nach einigen Umformungen die vorher gefundene Formel 18:

$$\Theta(x)\,H(x)\,\Theta\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right)H\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\Theta_2^{\,2}(0)\,.\,H\left(\tfrac{\pi}{2}\right).\,H(2x).$$

Durch einen Ueberblick der auf den letzten Seiten entwickelten Formeln überzeugt man sich, daß diese hinreichend sind, um der einen Gleichung des angeführten mechanischen Problems die verlangte Gestalt zu geben. Der dabei eingeschlagene Weg so wie die Form der Ausdrücke ist bei den einzelnen verschieden. Dieses kommt daher, weil die Jacobische identische Gleichung 1 auf eine doppelte Weise eine Anwendung zuläßt. Einmal kann das Produkt zweier Faktoren ($\Theta(x)$ oder $H(x+X)$ und deren Differentialquotienten nach x) in eine Summe zerlegt werden, bei denen das Argument x in das Argument $2x+A$, unter A eine von X, lg. $\sqrt{-1}$ und π abhängige Größe verstanden, und der Modul q in q^2 übergeht; dann aber kann die Summe auch das Argument $x+A$ enthalten und der Modul q wird in $\sqrt{q}$ verwandelt. Für den zweiten Fall dient die leicht aus 1 zu erweisende Formel:

$$2H(x+X)\,\Theta(x) = H_{\frac{1}{2}}\left(\frac{X+\pi}{2}\right)H_{\frac{1}{2}}\left(x+\frac{X}{2}\right) + H_{\frac{1}{2}}\left(\frac{X}{2}\right)H_{\frac{1}{2}}\left(x+\frac{X+\pi}{2}\right)$$

aus der z. B. abgeleitet werden kann:

$$2\Theta(x+X)\,H(x) = H_{\frac{1}{2}}\left(\frac{X+\pi}{2}\right)H_{\frac{1}{2}}\left(x+\frac{X}{2}\right) - H_{\frac{1}{2}}\left(\frac{X}{2}\right)H_{\frac{1}{2}}\left(x+\frac{X+\pi}{2}\right)$$

$$2\Theta(x+X)\,\Theta(x) = \Theta_{\frac{1}{2}}\left(\frac{X+\pi}{2}\right)\Theta_{\frac{1}{2}}\left(x+\frac{X}{2}\right) + \Theta_{\frac{1}{2}}\left(\frac{X}{2}\right)\Theta_{\frac{1}{2}}\left(x+\frac{X+\pi}{2}\right)$$

$$2H(x+X)\,H(x) = \Theta_{\frac{1}{2}}\left(\frac{X+\pi}{2}\right)\Theta_{\frac{1}{2}}\left(x+\frac{X}{2}\right) - \Theta_{\frac{1}{2}}\left(\frac{X}{2}\right)\Theta_{\frac{1}{2}}\left(x+\frac{X+\pi}{2}\right)$$

$$2\Theta\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right)\Theta(x) = \Theta_{\frac{1}{2}}\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\left\{\Theta_{\frac{1}{2}}\left(x+\tfrac{\pi}{4}\right) + \Theta_{\frac{1}{2}}\left(x-\tfrac{\pi}{4}\right)\right\}$$

$$2H\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right)H(x) = \Theta_{\frac{1}{2}}\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\left\{\Theta_{\frac{1}{2}}\left(x+\tfrac{\pi}{4}\right) - \Theta_{\frac{1}{2}}\left(x-\tfrac{\pi}{4}\right)\right\}$$

$$2\Theta^2(x) = \Theta_{\frac{1}{2}}\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\Theta_{\frac{1}{2}}(x) + \Theta_{\frac{1}{2}}(0)\,\Theta_{\frac{1}{2}}\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right)$$

$$2H^2(x) = \Theta_{\frac{1}{2}}\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\Theta_{\frac{1}{2}}(x) - \Theta_{\frac{1}{2}}(0)\,\Theta_{\frac{1}{2}}\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right)$$

$$8H(x)\,\Theta(x)\,H\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right)\Theta\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right) = H^2_{\frac{1}{2}}\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\Theta_{\frac{1}{4}}\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\left\{\Theta_{\frac{1}{4}}\left(x+\tfrac{\pi}{4}\right) - \Theta_{\frac{1}{4}}\left(x+\tfrac{\pi}{4}\right)\right\}$$

---

*) Die Differenziation von $\Theta^2(x)\,H^2(x)$ nach x:

$$\frac{d\,.\,\Theta^2(x)\,H^2(x)}{dx} = 2\Theta^2(x)\,H(x)\,H'(x) + 2H^2(x)\,\Theta(x)\,\Theta'(x)$$

kann auch angewendet werden, um 27) aus 26) und 10) herzustellen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ein Produkt von 2^n Faktoren Θ und H und deren Differenzialquotienten, von demselben Modul q und von denen der Unterschied je zweier Argumente von x unabhängig ist, läßt sich demnach in eine Summe zerlegen, deren Modul $\sqrt[2n]{q}$ ist und deren Argumente von x nur um eine Konstante, von π abhängig, verschieden sind.

Soll dagegen ein Produkt von 2 Faktoren Θ oder H von demselben Modul q, deren Argumente x und x + X sind, in eine Summe zerlegt werden, deren Modul q^2 ist, so giebt Gleichung 1 die Formeln:

$$\Theta(x+X)\,\Theta(x) = \Theta_2\left(X+\tfrac{\pi}{2}\right)\Theta_2\left(2x+X+\tfrac{\pi}{2}\right) - H_2\left(X+\tfrac{\pi}{2}\right)H_2\left(2x+X+\tfrac{\pi}{2}\right)$$

$$H(x+X)\,H(x) = H_2\left(X+\tfrac{\pi}{2}\right)\Theta_2\left(2x+X+\tfrac{\pi}{2}\right) - \Theta_2\left(X+\tfrac{\pi}{2}\right)H_2\left(2x+X+\tfrac{\pi}{2}\right)$$

$$\Theta(x+X)\,H(x) = \frac{\sqrt[4]{q}\,.\,e^{(x+X)\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}}\,.\,H_2\left(\tfrac{\pi}{2}+X-\tfrac{lq^2\sqrt{-1}}{4}\right)\Theta_2\left(2x+\tfrac{\pi}{2}+X-\tfrac{lq^2.\sqrt{-1}}{4}\right)$$
$$-\frac{\sqrt[4]{q}\,.\,e^{(x+X)\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}}\,.\,\Theta_2\left(\tfrac{\pi}{2}+X-\tfrac{lq^2.\sqrt{-1}}{4}\right)H_2\left(2x+\tfrac{\pi}{2}+X-\tfrac{lq^2.\sqrt{-1}}{4}\right)$$

woraus hervorgeht, daß auf diesem Wege nicht immer eine Zerlegung in eine Summe von Θ und H erreicht werden kann.

§. 3.

Am Ende des §. 1. war die Gleichung zwischen x und q folgende:

$$28)\ 0 = \begin{cases} x.\Theta^4(x)\left\{\Theta^3\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\Theta''\left(\tfrac{\pi}{2}\right)+H^3\left(\tfrac{\pi}{2}\right)H''\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right\} + x.H^2(x)\,\Theta^2(x)\,H\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\Theta\left(\tfrac{\pi}{2}\right) \\ \left\{\Theta\left(\tfrac{\pi}{2}\right)H''\left(\tfrac{\pi}{2}\right)+H\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\Theta''\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right\} - \Theta^3(x)\,\Theta'(x)\left\{H^4\left(\tfrac{\pi}{2}\right)+\Theta^4\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right\} \\ -2H^2(x)\,\Theta(x)\,\Theta'(x)\,H^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\Theta^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)+4H(x)\,\Theta^3(x)\,H^3\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\Theta^3\left(\tfrac{\pi}{2}\right) \\ -2H(x)\,H\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right)\Theta(x)\,\Theta\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right)H^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\Theta^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\Theta^2(0) \end{cases}$$

und die Formeln 12, 10, 13, 26, 24, 18 ergaben:

$$\Theta^4(x) = \left\{3H_4^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)+\Theta_4^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right\}\Theta_4\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\Theta_4\left(4x+\tfrac{\pi}{2}\right)+\left\{3\Theta_4^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)+H_4^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right\}H_4\left(\tfrac{\pi}{2}\right)H_4\left(4x+\tfrac{\pi}{2}\right)$$
$$-\Theta_2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)H_2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)H\left(\tfrac{\pi}{2}\right)H\left(2x+\tfrac{\pi}{2}\right)$$

$$4\Theta^2(x)\,H^2(x) = H_{\frac{1}{2}}^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\left\{H\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\Theta\left(2x+\tfrac{\pi}{2}\right)-\Theta\left(\tfrac{\pi}{2}\right)H\left(2x+\tfrac{\pi}{2}\right)\right\}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\Theta^3(x)\,\Theta(x) = \left\{3H_4^2(\tfrac{\pi}{2}) + \Theta_4^2(\tfrac{\pi}{2})\right\}\Theta_4(\tfrac{\pi}{2})\Theta_4'(4x+\tfrac{\pi}{2}) + \left\{3\Theta_4^2(\tfrac{\pi}{2}) + H_4^2(\tfrac{\pi}{2})\right\}$$
$$.\,H_4(\tfrac{\pi}{2})H_4^1(4x+\tfrac{\pi}{2}) - \tfrac{1}{2}\Theta_2(\tfrac{\pi}{2})\,H_2(\tfrac{\pi}{2})H(\tfrac{\pi}{2})H'(2x+\tfrac{\pi}{2})$$

$$8H^2(x)\,\Theta(x)\,\Theta'(x) = H_{\frac{1}{2}}^2(\tfrac{\pi}{2})\left\{H(\tfrac{\pi}{2})\;\Theta'(2x+\tfrac{\pi}{2}) - \Theta(\tfrac{\pi}{2})\;H'(2x+\tfrac{\pi}{2})\right\} - 2H'(0)\Theta^2(0)H(2x)$$

$$8\Theta^3(x)\,H(x) = \Theta_{\frac{1}{2}}(0)\,H_{\frac{1}{2}}(\tfrac{\pi}{2})\,H_{\frac{1}{4}}(\tfrac{\pi}{4})\left\{H_{\frac{1}{4}}(x+\tfrac{\pi}{4}) + H_{\frac{1}{4}}(x-\tfrac{\pi}{4})\right\}$$
$$+\,\Theta_{\frac{1}{2}}(\tfrac{\pi}{2})\;H_{\frac{1}{2}}(\tfrac{\pi}{2})\,H_{\frac{1}{4}}(\tfrac{\pi}{2})\;H_{\frac{1}{4}}(x)$$

$$\Theta(x)\,H(x)\,\Theta(x+\tfrac{\pi}{2})\,H(x+\tfrac{\pi}{2}) = \tfrac{1}{2}\Theta_2^2(0)\;H(\tfrac{\pi}{2})\;H(2x).$$

Die Gleichung 28 mag geschrieben werden:

$$29)\quad 0 = A_1 x\,\Theta^4(x) + A_2 x\,H^2(x)\Theta^2(x) + A_3\Theta^3(x)\Theta'(x) + A_4 H^2(x)\,\Theta(x)\,\Theta'(x)$$
$$+\,A_5\,H(x)\,\Theta^3(x) + A_6\,.\,H(x)\,\Theta(x)\,H(x+\tfrac{\pi}{2})\cdot\Theta(x+\tfrac{\pi}{2})$$

so wird:
$$A_1 = \Theta^3(\tfrac{\pi}{2})\Theta''(\tfrac{\pi}{2}) + H^3(\tfrac{\pi}{2})H''(\tfrac{\pi}{2})$$
$$A_2 = H(\tfrac{\pi}{2})\,\Theta(\tfrac{\pi}{2})\left\{\Theta(\tfrac{\pi}{2})H''(\tfrac{\pi}{2}) + H(\tfrac{\pi}{2})\,\Theta''(\tfrac{\pi}{2})\right\}$$
$$A_3 = -\left\{H^4(\tfrac{\pi}{2}) + \Theta^4(\tfrac{\pi}{2})\right\}$$
$$A_4 = -\,2H^2(\tfrac{\pi}{2})\,\Theta^2(\tfrac{\pi}{2})$$
$$A_5 = 4H^3(\tfrac{\pi}{2})\,.\,\Theta^3(\tfrac{\pi}{2})$$
$$A_6 = -\,2H^2(\tfrac{\pi}{2})\,\Theta^2(\tfrac{\pi}{2})\;\Theta^2(0).$$

Ebenso setze man:

$$\Theta^4(x) = A_1^{(1)}\Theta_4(4x+\tfrac{\pi}{2}) + A_1^{(2)}H_4(4x+\tfrac{\pi}{2}) + A_1^{(3)}H(2x+\tfrac{\pi}{2})$$
$$\Theta^2(x)\;H^2(x) = A_2^{(1)}\Theta(2x+\tfrac{\pi}{2}) + A_2^{(2)}H(2x+\tfrac{\pi}{2})$$
$$\Theta^3(x)\;\Theta'(x) = A_3^{(1)}\Theta_4'(4x+\tfrac{\pi}{2}) + A_3^{(2)}H_4'(4x+\tfrac{\pi}{2}) + A_3^{(3)}H'(2x+\tfrac{\pi}{2})$$
$$H^2(x)\;\Theta(x)\,\Theta'(x) = A_4^{(1)}\Theta'(2x+\tfrac{\pi}{2}) + A_4^{(2)}H'(2x+\tfrac{\pi}{2}) + A_4^{(3)}H(2x)$$
$$\Theta^3(x)\;H(x) = A_5^{(1)}\left\{H_{\frac{1}{4}}(x+\tfrac{\pi}{4}) + H_{\frac{1}{4}}(x-\tfrac{\pi}{4})\right\} + A_5^{(2)}H_{\frac{1}{4}}(x)$$
$$\Theta(x)\,H(x)\,\Theta(x+\tfrac{\pi}{2})\,H(x+\tfrac{\pi}{2}) = A_6^{(1)}\,H(2x);$$

worin:

$$A_1^{(1)} = \Theta_4(\tfrac{\pi}{2})\left\{3H_4^2(\tfrac{\pi}{2}) + \Theta_4^2(\tfrac{\pi}{2})\right\}, \quad A_1^{(2)} = H_4(\tfrac{\pi}{2})\left\{3\Theta_4^2(\tfrac{\pi}{2}) + H_4^2(\tfrac{\pi}{2})\right\},$$

$$A_1^{(3)} = -\Theta_2(\tfrac{\pi}{2})\, H_2(\tfrac{\pi}{2})\, H(\tfrac{\pi}{2})$$

$$A_2^{(1)} = \tfrac{1}{4}H_{\frac{1}{2}}^2(\tfrac{\pi}{2})\, H(\tfrac{\pi}{2}), \quad A_2^{(2)} = -\tfrac{1}{4}H_{\frac{1}{2}}^2(\tfrac{\pi}{2})\, \Theta(\tfrac{\pi}{2})$$

$$A_3^{(1)} = A_1^{(1)}, \quad A_3^{(2)} = A_1^{(2)}, \quad A_3^{(3)} = \tfrac{1}{2}A_1^{(3)}$$

$$A_4^{(1)} = \tfrac{1}{2}A_2^{(1)}, \quad A_4^{(2)} = \tfrac{1}{2}A_2^{(2)}, \quad A_4^{(3)} = -\tfrac{1}{4}H'(0)\,\Theta^2(0)$$

$$A_5^{(1)} = \tfrac{1}{8}\Theta_{\frac{1}{2}}(0)\, H_{\frac{1}{2}}(\tfrac{\pi}{2})\, H_{\frac{1}{4}}(\tfrac{\pi}{4}), \quad A_5^{(2)} = \tfrac{1}{8}\Theta_{\frac{1}{2}}(\tfrac{\pi}{2})\, H_{\frac{1}{2}}(\tfrac{\pi}{2})\, H_{\frac{1}{4}}(\tfrac{\pi}{2})$$

$$A_6^{(1)} = \tfrac{1}{2}\Theta_2^2(0)\, H(\tfrac{\pi}{2}).$$

Durch diese Bezeichnung geht die Gleichung 29 über in:

$$\begin{aligned} 0 = {} & A_1 . A_1^{(1)} . x . \Theta_4(4x + \tfrac{\pi}{2}) + A_1 . A_1^{(2)} . x . H_4(4x + \tfrac{\pi}{2}) + \left\{A_1 . A_1^{(3)} + A_2 . A_2^{(2)}\right\} x . H(2x + \tfrac{\pi}{2}) \\ & + A_2 . A_2^{(1)} . x . \Theta(2x + \tfrac{\pi}{2}) + A_3 . A_3^{(1)} . \Theta'_4(4x + \tfrac{\pi}{2}) + A_3 . A_3^{(2)} . H_4^1(4x + \tfrac{\pi}{2}) \\ & + \left\{A_3 . A_3^{(3)} + A_4 . A_4^{(2)}\right\} H'(2x + \tfrac{\pi}{2}) + A_4 . A_4^{(1)}\, \Theta'(2x + \tfrac{\pi}{2}) + \left\{A_4 . A_4^{(3)} + A_6 . A_6^{(1)}\right\} H(2x) \\ & + A_5 . A_5^{(1)} \left\{H_{\frac{1}{4}}(x + \tfrac{\pi}{4}) + H_{\frac{1}{4}}(x - \tfrac{\pi}{4}\right\} + A_5 . A_5^{(2)} . H_{\frac{1}{4}}(x). \end{aligned}$$

Bemerkt man daß:

$$\Theta(2x + \tfrac{\pi}{2}) = \Theta_4(4x + \tfrac{\pi}{2}) + H_4(4x + \tfrac{\pi}{2})$$

$$\Theta^1(2x + \tfrac{\pi}{2}) = 2\,\Theta_4^1(4x + \tfrac{\pi}{2}) + 2H_4^1(4x + \tfrac{\pi}{2})$$

$$\Theta_4(4x + \tfrac{\pi}{2}) = 1 + 2q^4 \operatorname{cs} 8x + 2q^{16} \operatorname{cs} 16x + 2q^{36} \operatorname{cs} 24x + 2q^{64} \operatorname{cs} 32x \ldots.$$

$$H_4(4x + \tfrac{\pi}{2}) = 2q \operatorname{cs} 4x + 2q^9 \operatorname{cs} 12x + 2q^{25} \operatorname{cs} 20x + 2q^{49} \operatorname{cs} 28x \ldots.$$

$$H(2x + \tfrac{\pi}{2}) = 2\sqrt[4]{q} \operatorname{cs} 2x + 2\sqrt[4]{q^9} \operatorname{cs} 6x + 2\sqrt[4]{q^{25}} \operatorname{cs} 10x + 2\sqrt[4]{q^{49}} \operatorname{cs} 14x \ldots.$$

$$\Theta_4^1(4x + \tfrac{\pi}{2}) = -4q^4 \sin 8x - 8q^{16} \sin 16x - 12q^{36} \sin 24x - 16q^{64} \sin 32x \ldots.$$

$$H_4^1(4x + \tfrac{\pi}{2}) = -2q \sin 4x - 6q^9 \sin 12x - 10q^{25} \sin 20x - 14q^{49} \sin 28x \ldots.$$

$$H'(2x + \tfrac{\pi}{2}) = -2\sqrt[4]{q} \sin 2x - 6\sqrt[4]{q^9} \sin 6x - 10\sqrt[4]{q^{25}} \sin 10x - 14\sqrt[4]{q^{49}} \sin 14x \ldots.$$

$$H(2x) = 2\sqrt[4]{q} \sin 2x - 2\sqrt[4]{q^9} \sin 6x + 2\sqrt[4]{q^{25}} \sin 10x - 2\sqrt[4]{q^{49}} \sin 14x \ldots.$$

$$H_{\frac{1}{4}}(x) = 2\sqrt[16]{q} \sin x - 2\sqrt[16]{q^9} \sin 3x + 2\sqrt[16]{q^{25}} \sin 5x - 2\sqrt[16]{q^{49}} \sin 7x \ldots.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$H_{\frac{1}{4}}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+H_{\frac{1}{4}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{2\sqrt[16]{q}\sin x+2\sqrt[16]{q^9}\sin 3x-2\sqrt[16]{q^{25}}\sin 5x-2\sqrt[16]{q^{49}}\sin 7x,\ldots\right\}$$

so geht die zu entwickelnde Gleichung über in:

$$\begin{aligned}
0= \quad & C_1 x\left\{1+2q^4\,\mathrm{cs}\,8x+2q^{16}\,\mathrm{cs}\,16x+2q^{36}\,\mathrm{cs}\,24x+2q^{64}\,\mathrm{cs}\,32x\ldots\right\}\\
&+2C_2 x\left\{q\,\mathrm{cs}\,4x+q^9\,\mathrm{cs}\,12x+q^{25}\,\mathrm{cs}\,20x+q^{49}\,\mathrm{cs}\,28x\ldots\right\}\\
&+2C_3 x\left\{\sqrt[4]{q}\,\mathrm{cs}\,2x+\sqrt[4]{q^9}\,\mathrm{cs}\,6x+\sqrt[4]{q^{25}}\,\mathrm{cs}\,10x+\sqrt[4]{q^{49}}\,\mathrm{cs}\,14x\ldots\right\}\\
&+4D_1\left\{q^4\sin 8x+2q^{16}\sin 16x+3q^{36}\sin 24x+4q^{64}\sin 32x\ldots\right\}\\
&+2D_2\left\{q\sin 4x+3q^9\sin 12x+5q^{25}\sin 20x+7q^{49}\sin 28x\ldots\right\}\\
&+2D_3\left\{\sqrt[4]{q}\sin 2x-3\sqrt[4]{q^9}\sin 6x+5\sqrt[4]{q^{25}}\sin 10x-7\sqrt[4]{q^{49}}\sin 14x\ldots\right\}\\
&+2D_4\left\{\sqrt[4]{q}\sin 2x-\sqrt[4]{q^9}\sin 6x+\sqrt[4]{q^{25}}\sin 10x-\sqrt[4]{q^{49}}\sin 14x\ldots\right\}\\
&+2D_5\left\{\sqrt[16]{q}\sin x-\sqrt[16]{q^9}\sin 3x+\sqrt[16]{q^{25}}\sin 5x-\sqrt[16]{q^{49}}\sin 7x\ldots\right\}\\
&+\sqrt{2}.D_6\left\{\sqrt[16]{q}\sin x+\sqrt[16]{q^9}\sin 3x-\sqrt[16]{q^{25}}\sin 5x-\sqrt[16]{q^{49}}\sin 7x\ldots\right\}
\end{aligned}$$

worin:

$$\begin{aligned}
C_1 = & \left\{\Theta^3\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\Theta''\left(\tfrac{\pi}{2}\right)+H^3\left(\tfrac{\pi}{2}\right)H''\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right\}\left\{3H_4^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)+\Theta_4^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right\}\Theta_4\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\\
&+\tfrac{1}{4}H^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\Theta\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\left\{\Theta\left(\tfrac{\pi}{2}\right)H''\left(\tfrac{\pi}{2}\right)+H\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\Theta''\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right\}H_{\frac{1}{2}}^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\\
C_2 = & \left\{\Theta^3\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\Theta''\left(\tfrac{\pi}{2}\right)+H^3\left(\tfrac{\pi}{2}\right)H''\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right\}\left\{3\Theta_4^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)+H_4^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right\}H_4\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\\
&+\tfrac{1}{4}H^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\Theta\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\left\{\Theta\left(\tfrac{\pi}{2}\right)H''\left(\tfrac{\pi}{2}\right)+H\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\Theta''\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right\}H_{\frac{1}{2}}^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\\
C_3 = & -\left\{\Theta^3\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\Theta''\left(\tfrac{\pi}{2}\right)+H^3\left(\tfrac{\pi}{2}\right)H''\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right\}\Theta_2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)H_2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)H\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\\
&-\tfrac{1}{4}H\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\Theta^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\left\{\Theta\left(\tfrac{\pi}{2}\right)H''\left(\tfrac{\pi}{2}\right)+H\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\Theta''\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right\}H_{\frac{1}{2}}^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\\
D_1 = & \left\{H^4\left(\tfrac{\pi}{2}\right)+\Theta^4\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right\}\left\{3H_4^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)+\Theta_4^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right\}\Theta_4\left(\tfrac{\pi}{2}\right)+\tfrac{1}{2}H^3\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\Theta^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)H_{\frac{1}{2}}^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\\
D_2 = & \left\{H^4\left(\tfrac{\pi}{2}\right)+\Theta^4\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right\}\left\{3\Theta_4^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)+H_4^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right\}H_4\left(\tfrac{\pi}{2}\right)+\tfrac{1}{2}H^3\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\Theta^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)H_{\frac{1}{2}}^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\\
D_3 = & -\tfrac{1}{2}\left\{H^4\left(\tfrac{\pi}{2}\right)+\Theta^4\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right\}\Theta_2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)H_2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\Theta\left(\tfrac{\pi}{2}\right)-\tfrac{1}{4}H^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\Theta^3\left(\tfrac{\pi}{2}\right).H_{\frac{1}{2}}^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\\
D_4 = & \tfrac{1}{2}H'(0)\,\Theta^2(0)\,\Theta^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)H^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)-H^3\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\Theta^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\Theta^2(0)\,\Theta_2^2(0)\\
D_5 = & \tfrac{1}{2}H^3\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\Theta^3\left(\tfrac{\pi}{2}\right).\Theta_{\frac{1}{2}}(0)\,H_{\frac{1}{2}}\left(\tfrac{\pi}{2}\right)H_{\frac{1}{2}}\left(\tfrac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$D_6 = \tfrac{1}{2} H^3\left(\tfrac{\pi}{2}\right) \Theta^3\left(\tfrac{\pi}{2}\right) \Theta_{\frac{1}{2}}\left(\tfrac{\pi}{2}\right) H_{\frac{1}{2}}\left(\tfrac{\pi}{2}\right) H_{\frac{1}{4}}\left(\tfrac{\pi}{4}\right).$$

oder auch:

$$C_1 = A_1 A_1^{(1)} + A_2 . A_2^{(1)}, \quad C_2 = A_1 A_1^{(2)} + A_2 A_2^{(1)}, \quad C_3 = A_1 A_1^{(3)} + A_2 A_2^{(2)}$$

$$D_1 = -A_3 A_1^{(1)} - 2A_4 A_2^{(1)}, \quad D_2 = -A_3 A_1^{(2)} - 2A_4 A_2^{(1)}, \quad D_3 = -\tfrac{1}{2} A_3 A_1^{(3)} - A_4 A_2^{(2)}$$

$$D_4 = A_4 A_4^{(3)} + A_6 A_6^{(1)}, \quad D_5 = A_5 A_5^{(1)}, \quad D_6 = A_5 A_5^{(2)}.$$

Ist in dem Vorigen die gestellte Aufgabe gelöst, d. h. ist gezeigt worden, wie ein Produkt von Θ und H und deren Differentialquotienten von 2^n Faktoren in eine Summe zerlegt werden kann, welche die Konvergenz der Reihen Θ und H besitzt, so bleibt noch für jede Anwendung, also auch für die behandelte Gleichung der Figur des Gleichgewichts, die Untersuchung übrig, den Konstanten (den Funktionen von q, welche als Koefficienten auftreten) die Form von Reihen zu geben, so daß jede Multiplikation unendlicher Reihen vermieden wird. Auch hierzu finden sich die Vorbereitungen in den Fundamentis, wo an vielen Orten, namentlich im 40. Kapitel, Produkte der Art entwickelt sind.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf