Wissenschaftliche Beilage zum Programm der Städtischen Realschule
zu Königsberg i. Pr.

Beiträge

zur

Behandlung des stereometrischen Unterrichts an der Realschule.

Von dem

Oberlehrer **M. Stieren.**

Bibliothek des Städt. Gymnasiums * Düsseldorf *

Königsberg i. Pr.
Buchdruckerei von R. Leupold.
1901.

Prog.-No. 21.

9KO
26

21 e

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

HT010047627

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Lehrpläne für die höheren Schulen vom Jahre 1891 verlangen als allgemeines Lehrziel für die Realschule unter anderem die Grundlehren der körperlichen Geometrie. In einer grossen Anzahl von Realschulprogrammen finden wir somit als stereometrisches Lehrpensum der Klasse I: Die wichtigsten Sätze über Gerade und Ebenen, Berechnung von Inhalten, Oberflächen und Kantenlängen. Die Grenzen des Pensums sind recht unbestimmt gezogen, und die Verhandlungen der Versammlung der Direktoren von Ost- und Westpreussen im Jahre 1899 beweisen genugsam, wie verschieden die Ansichten der Herren Kollegen über den Umfang der mathematischen Lehraufgaben von Untersekunda im allgemeinen, der stereometrischen im besonderen sind, die sich im ganzen mit denen der Realschulklasse I decken werden. Die Realschule wird zwar in jenen Verhandlungen wenig berücksichtigt und nur zugegeben, dass sie allenfalls einen etwas grösseren Umfang der einzelnen Gebiete als die anderen Schulen erreichen könne. Da es vielleicht einen oder den anderen meiner Herren Fachkollegen interessieren dürfte, will ich nach einigen allgemeinen Bemerkungen zum stereometrischen Unterricht versuchen, Lehrstoff und Uebungen so zu begrenzen, wie sie mir geeignet erscheinen, dem Realschüler eine möglichst in sich geschlossene stereometrische Bildung mitzugeben. Zunächst handelt es sich um die für die Raumgeometrie verwendbare Stundenzahl, und diese Frage ist eng mit der zweiten verknüpft, ob der planimetrische Unterricht in Klasse II als beendet angesehen werden darf oder eine systematische Wiederholung beziehungsweise Erweiterung

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

desselben in Klasse I notwendig ist. Unserem Lehrplane gemäss schliesse ich in Klasse II nach Behandlung der Aehnlichkeitssätze und Proportionen am Kreise mit der Berechnung der regulären Vielecke und des Kreises nebst einigen algebraisch-geometrischen Aufgaben. Auf mehreren Realgymnasien wird als geometrischer Lehrstoff der U II angegeben: Die Lehre von den Transversalen und merkwürdigen Punkten im Dreieck, die Berechnung von geraden Linien in Dreiecken und Vierecken. Mit Recht werden diese ziemlich speziellen Gebiete der Planimetrie auf sechsklassigen Realanstalten grösstenteils fortgelassen oder wie die Inhalts- und Längenberechnungen im Dreieck (Hero's Formel, ϱ ϱ_1 u. s. w.) in die Trigonometrie hineingezogen, und es ergiebt sich dadurch für die Prima der Realschule eine bedeutende Zeitersparnis, wie auch eine Zersplitterung des mathematischen Unterrichtes in zuviel Disciplinen vermieden wird. Es bliebe noch eine systematische Wiederholung der Planimetrie oder Uebung von Konstruktionsaufgaben in Betracht zu ziehen. Was zunächst die letzteren betrifft, so sind sie nach neueren Ansichten nicht Selbstzweck, dienen nur als Anwendung der besprochenen Lehrsätze, sollen auf den Klassen III und II namentlich durch die Analysis den Schüler an etwas selbständiges scharf folgerichtiges Denken gewöhnen und können meiner Ansicht nach auf Klasse I entbehrt werden. Systematische planimetrische Wiederholungen halte ich erstens deshalb für nicht notwendig, weil fast jeder stereometrische Satz und jede Aufgabe, sowie die geometrischen Ableitungen in der Trigonometrie Gelegenheit bieten, planimetrische Sätze zu wiederholen, und es zweitens der Zweck des mathematischen Unterrichtes ist, nicht vieles Wissen, sondern sicheres Können zu erzielen. Verlangen ja auch die Bestimmungen für die mündliche Reifeprüfung nur das Pensum der Klasse I. Kann somit von einer Erweiterung und systematischen Wiederholung des planimetrischen Lehrstoffes auf Klasse I abgesehen werden, und werden im Sommer 2 Stunden wöchentlich auf Trigonometrie, 3 Stunden auf Algebra verwendet, so bleiben im Winter 2 Stunden

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

für die Stereometrie verfügbar, wenn 2 Stunden der Algebra und 1 Stunde der Trigonometrie zugeteilt werden. Bei der bedeutenden Vereinfachung des Rechnens durch Einführung von vierstelligen Logarithmentafeln kann ich in den letzten Jahren schon 1 Stunde wöchentlich einige Wochen vor Michaelis mit der Stereometrie beginnen.

Ob man an den Anfang der stereometrischen Lehren einige Sätze über Ebenen und Gerade setzt oder mit der Betrachtung der einfachsten Körper z. B. des Würfels beginnt, kann zweifelhaft sein. In den Leitsätzen der oben erwähnten Direktorenkonferenz wird für die U II das letztere und die Besprechung von Ebenen und Geraden im Anschluss an die Körper verlangt. Für den propädeutischen Unterricht der Vollanstalten mag es das Richtige sein. Auf der Realschule beim abgeschlossenen raumgeometrischen Unterricht, wo überdies durch den wenigstens im Vergleich zum Gymnasium ausgedehnteren Zeichenunterricht eine ausgeprägtere räumliche Anschauung geschaffen wird, glaube ich in Uebereinstimmung mit dem Lehrplan und eingeführten Lehrbuch mit einigen wenigen Betrachtungen über Ebenen und Gerade beginnen zu dürfen. Schwierigkeiten bereitet der Begriff der Ebene. Die vielfach gebrauchte Definition der Ebene als Fläche, in welcher die Verbindungsgerade zweier beliebigen Punkte in die Fläche hineinfällt, führt auf nicht einfache Umkehrungssätze. Am einfachsten erscheint es mir, für die Realschule die Ebene durch Drehung eines rechten Winkels um einen Schenkel entstehen zu lassen. Der Begriff der Perpendikularebene, der Satz, dass eine Gerade auf einer Ebene senkrecht steht, wenn sie mit zwei durch ihren Schnittpunkt gezogenen Geraden der Ebene rechte Winkel bildet, ist dann in der Definition selbst enthalten. Die Festlegung der Ebene durch 3 Punkte, 1 Punkt und 1 Gerade, durch zwei sich schneidende oder parallele Gerade lässt sich leicht anschliessen. Die Aufgabe, auf einer Ebene im gegebenen Punkte das Lot zu errichten, der Satz, dass zwei Senkrechte einer Ebene einander parallel sind, die Aufgabe, vom gegebenen Punkte auf eine Ebene das Lot zu fällen, genügen dann

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

vollständig, um dem Schüler die Vorstellung einer Geometrie des Raumes zu geben und den Zusammenhang räumlicher und planimetrischer Konstruktionen klar zu machen. Der Beweis der Gleichheit von Winkeln mit parallelen Schenkeln, die Definition der Neigungswinkel kann füglich bei Besprechung des Prismas beziehungsweise der Pyramide gegeben werden.

Zur Demonstration jener einleitenden Sätze und Aufgaben lasse ich von allen Schülern neben farbig angelegten Zeichnungen Modelle in Pappe, Papier oder Holz mit Holzstäbchen oder Drähten herstellen; einige verwendeten auch dazu durchbohrte Glasplatten mit eingekitteten Metallstäben.

Weitere räumliche Konstruktionsübungen möchte ich für die Realschule nicht empfehlen, schon allein des Zeichnens wegen. Perspektive wird auf sehr vielen Realschulen nicht getrieben; dazu ist bei jenen stereometrischen Konstruktionen eine richtige Anwendung der Perspektive meistens schwerer als die Lösung selbst. Somit bliebe der Schüler auf sein Vorstellungsvermögen oder das Abzeichnen von selbst hergestellten Modellen angewiesen, ohne ein bestimmtes Gesetz dabei befolgen zu können.

Ganz anders liegen die Zeichnungsverhältnisse bei der Körperberechnung, zu welcher ich nunmehr übergehe. Hier habe ich es für äusserst praktisch gefunden, die von Professor Dr. Holzmüller empfohlene schräge Parallelprojektion unter 30^0 mit einer Verkürzung der zur Zeichnungsebene senkrechten Geraden um zwei Drittel ihrer Länge anzuwenden. Auf der Realschule werden ausschliesslich gerade Körper behandelt, und bei diesen lässt sich wohl meistens ein Schnitt finden, von welchem man ausgehen und unter Anwendung jener einfachen Regel recht anschauliche Zeichnungen herstellen kann. Die Konstruktion solcher Zeichnungen halte ich für ein nicht zu unterschätzendes stereometrisches Bildungsmittel. Zu wünschen wäre es, dass im Linearzeichnen räumliche Darstellungen nach bestimmten Projektionsgesetzen auf mathematischer Grundlage angefertigt würden oder die systematische Einführung in die

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

darstellende Geometrie den Lehrstoff jenes Unterrichtes bildete. Leider ist dies auf vielen Anstalten nicht der Fall, leider ist auch das Linearzeichnen nur fakultativ. In einigen Realanstalten ist übrigens das letztere, vom übrigen Zeichenunterricht getrennt, einem Mathematiker der Anstalt übertragen. Eine derartige Unterrichtsverteilung wird in neuester Zeit auch vielfach gefordert, siehe z. B. Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften 1900, No. 6: Die darstellende Geometrie im Lehrplane der höheren Schulen. Ebenso den Vortrag von Fr. Schilling: Ueber darstellende Geometrie, gehalten in Göttingen. Teubner 1900. Beginnt man mit dem Würfel, wie es gewöhnlich geschieht, so können nach Besprechung und Konstruktion seiner verschiedenen Schnitte, wobei die planimetrische Darstellung von $a\sqrt{2}$, $a\sqrt{3}$ u. s. w. zur Wiederholung kommt, die Zeichnungen des Würfels in verschiedenen Stellungen geübt werden: Der Würfel auf einer Fläche ruhend mit einer zweiten Fläche in der Zeichnungsebene, mit einem Diagonalschnitt und 2 vertikalen Kanten in der Zeichnungsebene, der Würfel auf einer Kante in zwei einfachen Stellungen, endlich der Würfel auf einer Ecke stehend mit senkrechter Axe.

Aehnliche Stellungen lassen sich leicht bei den übrigen zu behandelnden Körpern, vor allem beim Tetraeder und Oktaeder entwerfen. Können diese Zeichnungen, wie schon gesagt, an sich als Selbstzweck im stereometrischen Unterricht betrachtet werden, so dienen sie andererseits bei einer Reihe von Berechnungsaufgaben vorzüglich der Anschauung und erleichtern dem Schüler das Auffinden der notwendigen Schnittfiguren. Zu demselben Zweck werden bekanntlich Körper mit Glaswänden oder Körperskelette aus Draht benutzt. Die ersteren sind meist zu klein, um von einer grösseren Schülerzahl deutlich gesehen zu werden; das Demonstrieren des Körpers vor kleineren Abteilungen wirkt störend auf den Rest der Klasse, das Herumreichen der Modelle lenkt die Aufmerksamkeit vom Unterricht ab. Bei den Drahtskeletten fehlen die Flächen, auch erfordern sie viel Platz zur Aufbewahrung, wenn sie nicht zusammen-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

legbar hergestellt sind. Dazu kommt der Uebelstand, dass sowohl bei den Glaskörpern wie den Drahtskeletten die Bezeichnung der Ecken, Kanten und Flächen von Seiten des Lehrers wie der Schüler Schwierigkeiten macht. Jedenfalls ist es wünschenswert, dass jeder Schüler sich zur häuslichen Benutzung Körper in Pappe oder als Drahtskelette selbst anfertigt, wie dies früher wenigstens schon vielfach auf den unteren Klassen geübt wurde. Vielleicht berücksichtigt auch der in vielen Städten eingeführte Handfertigkeitsunterricht Arbeiten dieser Art.

Werden zur Besprechung einzelner Aufgaben Körper in passender Stellung gebraucht, so nimmt das wiederholte Zeichnen an der Schultafel viel Zeit in Anspruch. Auch liefert es, namentlich wenn mehrere Linien innerhalb des Körpers zu ziehen sind, nicht leicht anschauliche Bilder. Man hilft sich hier oft mit Anwendung farbiger Kreiden. Nach meiner Erfahrung heben sich letztere, wenigstens an der hölzernen schwarzen Klassentafel, wenig ab und sind schwer von derselben zu entfernen. Es scheint mir daher angemessen zu sein, Blätter mit derartigen Zeichnungen zu besorgen. Soweit meine Erkundigungen reichen, giebt es Darstellungen in genannter Projektion nicht. Ich habe mir somit Blätter in der Grösse 54×68 und oben erwähnter isometrischer Parallelprojektion mit schwarzer, blauer und roter Ausziehtusche und farbig angelegten Flächen selbst entworfen. Damit soll natürlich nicht das didaktisch so wertvolle Entstehen einer Zeichnung an der Tafel ganz vermieden werden, sondern einerseits in bestimmten Fällen, z. B. bei Wiederholungen, Zeit erspart, andererseits durch möglichst übersichtlich und scharf ausgeführte Bilder die Anschauung unterstützt und die Lösung von Aufgaben erleichtert werden. Einige zwanzig Blätter dürften genügen.

Mit Erfolg habe ich auch die regelmässigen Körper in den gebräuchlichsten Stellungen mit blauer Ausziehtusche auf weissem Papier festgelegt und dann vor der Klasse mit Kohle die nötigen Linien hineingezeichnet. Schwarz hebt sich gegen Weiss und Blau scharf ab, die Kohle lässt

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

sich leicht abklopfen, und ein Blatt ist auf diese Weise für eine Reihe von Aufgaben verwendbar.

Nach der Behandlung des geraden Prismas, wobei der Fall inkommensurabler Kanten fortgelassen wird, gehe ich zur Pyramide über. Die Inhaltsformel einer solchen wird meistens aus der Zerlegung des dreiseitigen Prismas in drei inhaltgleiche dreiseitige Pyramiden abgeleitet und diese Zerlegung durch den Satz begründet: Pyramiden von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe haben gleichen Inhalt. Der Beweis des letzteren Satzes kann entweder durch Teilung der Pyramide in unendlich viele höhengleiche Prismen oder vermittels des Cavalierischen Prinzipes geführt werden. Für die Realschule erscheint mir die letztere Art anschaulicher, leichter verständlich und schon deshalb vorzuziehen zu sein, weil sie in mehrfacher Weise Gelegenheit zur Anwendung der Proportionen und Aehnlichkeitssätze bietet. Bei den Pyramiden werden ausschliesslich die geraden, recht eingehend Tetraeder und Oktaeder besprochen und ausser Inhalt, Oberfläche, Kantenlängen und Neigungswinkeln auch die Radien der um- und eingeschriebenen Kugeln berechnet. Führen doch diese Berechnungen auf bekannte Methoden $\left(\varrho = \frac{J}{s},\ a^2 = c\,p\right.$ im rechtwinkligen Dreieck$\left.\right)$ zurück und bieten die Grundlage für eine Anzahl lehrreicher Umkehrungsaufgaben, in welchen eine die gegebene Kugel um- oder eingeschriebene Pyramide berechnet werden soll. Das Tetraeder ist nebenbei bemerkt besonders geeignet, den kürzesten Abstand zweier windschiefer Kanten aufzusuchen und zu berechnen. Abgestumpfte Pyramiden schliesse ich aus und lasse dafür lieber allgemeine gerade Körperstumpfe, z. B. den Inhalt eines Grandhaufens durch Zerlegung in Prismen und Pyramiden ausrechnen. Die geraden Cylinder und Kegel schliessen sich leicht an das Prisma, beziehungsweise den Kegel mit unendlicher Seitenzahl an. Natürlich werden die Mantelflächen als Rechteck und Kreisausschnitt behandelt. Bei der Zeichnung des Cylinders und Kegels wird man, um die oben genannte isometrische Parallelprojektion beizubehalten, die Kreisflächen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

stets senkrecht zur Zeichnungsebene stellen. Zwei zu einander senkrechte Durchmesser sowie noch zwei Ordinaten, die ein Viertel des Durchmessers abschneiden, genügen zur ungefähren Zeichnung der Projektionsfigur. Ich zeige den Schülern, dass diese Parallelprojektion des Kreises beim schrägen Schnitt des Cylinders entsteht, und führe sie als Ellipse ein. Da in der Physik beim freien Wurf die Parabel vorkommt und wohl auch beim parabolischen Sprachrohr mit ihren Brennpunktseigenschaften gebraucht wird, erwähne ich diese Kurve beim Schnitt parallel zur Kegelseite.

Auch führe ich die mechanische Fadenkonstruktion der Ellipse aus den Brennpunkten und der grossen Axe aus und gebe die Erklärung für die Benennung der Brennpunkte. Sind doch Parabel und Ellipse die beiden Kegelschnitte, deren oberflächliche Kenntnis auch ein Realschüler braucht; ich erinnere nur an die Planeten- und Kometenbahnen, während die Hyperbel mehr in den Hintergrund tritt. Bei einigen Aufgaben, in welchen der Cylinder mit Pyramiden kombiniert wird, kommen schräg abgeschnittene Cylinderstücke vor. Ich nehme deshalb auch die so einfache Inhaltsberechnung des Cylinderhufes als Hälfte eines ganzen Cylinders durch. Auf den abgestumpften geraden Kegel möchte ich nicht verzichten. Verlangt doch die Ableitung von Inhalt und Mantel desselben nur die Anwendung lang geübter Proportionen nebst der auch bei den quadratischen Gleichungen mit 2 Unbekannten benutzten Formel $a^3 - b^3 = (a - b)\ (a^2 + ab + b^2)$.

Den Schluss bildet die Behandlung der Kugel. Hier werden für gewöhnlich zwei verschiedene Methoden benutzt. Entweder man leitet zuerst die Oberfläche und daraus den Inhalt oder umgekehrt, zuerst den Inhalt vermittels des Cavalierischen Prinzipes und daraus die Oberfläche ab. Je nach dem benutzten Lehrbuche wird man sich für die eine oder die andere Methode entscheiden. Beide gestatten in gleich einfacher Weise nicht nur die Formeln für die ganze Kugel, sondern auch für Kugelabschnitt, Kalotte und Zone abzuleiten, so dass ich keinen Grund einsehe, auf der Real-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

schule die Berechnung dieser Kugelteile nicht durchzunehmen. Wird doch dadurch gerade ein gewisser Abschluss erreicht. Für den Realschüler halte ich die Berechnung des Rauminhaltes der Halbkugel als Unterschied des Cylinders und Kegels von gleicher Grundfläche und Höhe nach dem Cavalierischen Prinzip deshalb für geeigneter, als die Ableitung aus der Oberfläche, weil die erstere auf die räumliche Anschauung sehr fördernd einwirkt. Bei schwächeren Schülern habe ich es als praktisch gefunden, den von Cylinder und Kegel gebildeten Restkörper und die Halbkugel in zwei Figuren neben einander zu zeichnen, sowie durch Schattierung der Körper und farbiges Anlegen des Schnittkreises bezüglich des Kreisringes die Anschauung zu unterstützen.

Einen wesentlichen Teil des stereometrischen Unterrichts auf der Realschule bilden die Berechnungsaufgaben. Diese zerfallen in mehrere Klassen. Ich unterscheide zunächst stereometrische Rechenaufgaben, bei denen die körperliche Anschauung garnicht in Betracht kommt; und zwar erstens Einsetzungsaufgaben einfachster Art, bei welchen nur in bekannte Inhalts- oder Flächenformeln numerische Werte einzusetzen sind; zweitens direkte Umkehrungsaufgaben, z. B. welche Höhe hat ein gerader Kreiskegel von Radius r und Inhalt I; drittens Gleichsetzungsaufgaben, wie z. B.: welche Oberfläche hat eine Kugel, wenn ihr Inhalt gleich dem einer Pyramide von gegebener Grundfläche und Höhe ist; endlich Aufgaben, die direkt auf die Lösung von Gleichungen mit mehreren Unbekannten führen, z. B.: zur Berechnung der Endradien eines abgestumpften Kegels sind ihre Summe sowie Inhalt und Höhe des Kegelstumpfes gegeben. Aufgaben dieser Art können wohl Sicherheit im Zifferrechnen geben und zur Einprägung abgeleiteter Formeln dienen, doch haben sie eigentlich nur Wert als algebraische Uebungen und sind als solche schon vielfach in derartige Sammlungen, z. B. quadratischer Gleichungen aufgenommen. Erhöht wird ihr Wert, wenn die gegebenen Stücke nicht rein numerisch, sondern allgemein gegeben sind, wodurch eine nützliche

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wiederholung algebraischer Operationen namentlich des Rechnens mit Wurzelgrössen erzielt werden kann. Ueberhaupt scheint es mir zweckmässig, stereometrische Aufgaben der Mehrzahl nach mit allgemeinen algebraischen Angaben zu behandeln. In der Trigonometrie sind auf der Realschule reine Dezimalzahlenrechnungen ausschliesslich am Platze; Zinseszins-, Rentenaufgaben sowie die quadratischen Gleichungen mit mehreren Unbekannten werden auch meistens gegebene Zahlenwerte erfordern. Um so lehrreicher ist es, in den stereometrischen Rechnungen wenigstens mit einer algebraischen Grösse und Wurzeln zu operieren, da die Ausdrücke mit mehreren Buchstabengrössen oft zu kompliziert werden.

Unter die Gleichsetzungsaufgaben rechne ich auch gewisse Arten von Umkehrungsaufgaben bei den regulären Körpern z. B.: Wie gross ist die Kante (Inhalt Oberfläche) des um die Kugel mit Radius ϱ umgeschriebenen Tetraeders? Hier hat der Schüler den bekannten Wert $\varrho = \frac{a\sqrt{6}}{12}$ noch einmal abzuleiten, um durch Umkehrung sofort $a = 2\,\varrho\,\sqrt{6}$ zu erhalten. Bei jeder allgemein gültigen Formel scheint es mir übrigens angemessen darauf hinzuweisen, dass im Resultate stets eine Gleichung enthalten ist, welche die Auflösung (Umkehrung) nach irgend einer der vorkommenden Grössen als Unbekannten gestattet.

Als eine andere und mindestens ebenso wichtige Klasse von Aufgaben betrachte ich solche, bei denen eine oder mehrere Schnittfiguren zu suchen und aus diesen vermittels der Sätze vom rechtwinkligen Dreieck, durch Proportionen, Aehnlichkeitssätze oder durch Gleichsetzung von Dreiecken beziehungsweise Dreieckssummen die geforderten Stücke nacheinander direkt berechnet werden können. Aufgaben, welche die Aufstellung von Gleichuugen in den Schnittfiguren für mehrere Unbekannte erfordern oder in welchen eine Unbekannte mehrfach vorkommt, halte ich in den meisten Fällen für zu schwierig, wenn auch leichtere Aufgaben dieser Art von begabteren Schülern ohne Hilfe gelöst wurden. Bei der immerhin beschränkten Artenzahl

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

von geraden Körpern, die auf der Realschule betrachtet werden können, werden sich die zur Verwendung kommenden Schnittfiguren zwar häufig wiederholen, doch ist schon das Zeichnen der Schnitte bei verschiedener Lage der Körper, sowie die planimetrische Darstellung der Schnitte ein an und für sich brauchbares stereometrisches Bildungsmittel. Der Schüler ist bei diesen Aufgaben gezwungen, sich den Körper mit den innerhalb oder ausserhalb konstruierten Linien, unterstützt durch eine saubere und übersichtliche Zeichnung, als Raumgebilde klar vorzustellen, und der Hauptzweck des stereometrischen Unterrichtes, die Förderung der räumlichen Anschauung, wird in höherem Masse erreicht als bei den andern vorher erwähnten Aufgaben.

Schliesslich bleiben noch solche Aufgaben anzuführen, bei welchen die Anwendung der trigonometrischen Funktionen entweder notwendig ist oder geschickter und schneller zum Ziele führt. So wird sich z. B. bei der Zonenberechnung der Erde die Anwendung der Trigonometrie nicht vermeiden lassen. Bei manchen andern Aufgaben hingegen, z. B. bei Berechnung des Kegels mit Radius $r = 4$ cm, dessen Inkugelradius $\varrho = 2$ cm gegeben ist, einer Aufgabe, die mit Anwendung einiger Hilfslinien oder Einführung mehrerer Unbekannten rein algebraisch geometrisch gelöst werden kann, wird es ebenfalls gut sein darauf hinzuweisen, dass durch $tg \frac{u}{2} = \frac{\varrho}{r}$ die Winkel des Kegelaxenschnittes und damit trigonometrisch Höhe und Seite des Kegels sofort bestimmbar sind. Auf diese Weise wird eine Verknüpfung von Trigonometrie und Stereometrie hergestellt, die den Schülern meist als ganz heterogene Disciplinen erscheinen. Aus demselben Grunde ziehe ich auch räumliche Gebilde in die trigonometrischen Rechnungen hinein, indem ich Höhen oder Entfernungen aus Messungen in horizontalen und vertikalen Ebenen bestimmen lasse.

Wenn ich im Anschluss an obige Betrachtungen es unternehme, eine kleine Sammlung von stereometrischen Uebungsaufgaben für die Realschule zusammenzustellen, so mag mir dies nicht als Anmassung ausgelegt werden. Bei

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

der namentlich in den letzten Jahren erschienenen grossen Menge von Uebungsbüchern, die sämtlich zu kennen kaum mehr möglich ist, kann eine solche Sammlung nicht durchgehend auf Originalität Anspruch machen. Auch beabsichtige ich hauptsächlich nur Aufgaben der vorletzten besprochenen Art anzuführen, die möglichst einfache Resultate liefern und Gelegenheit zur Anwendung algebraischer Operationen namentlich der Wurzelrechnung bieten. Mit Veranlassung zur folgenden Zusammenstellung gab mir die weniger bekannte, übrigens auch von Reidt in seiner „Anleitung zum mathematischen Unterricht" empfohlene kleine Sammlung stereometrischer Aufgaben von Müttrich (Bonn, Königsberg 1861), welche ich Jahre lang in privatem Unterricht benutzt habe. Ihr sind auch einige wenige Aufgaben, wenngleich in einer für Realschüler berechneten einfacheren Fassung entnommen. Mehrere der von mir angeführten allgemeinen Rotationsaufgaben habe ich in der Sammlung stereometrischer Aufgaben von Reidt gefunden. Die Rücksicht auf einfache Resultate erforderte es, sehr viele Aufgaben an die regulären Körper, Würfel, Oktaeder und Tetraeder anzuschliessen, zumal diese recht eingehend besprochen werden. Hierbei lassen sich Wiederholungen in entsprechenden Aufgaben bei Prisma, Pyramide, Cylinder und Kegel nicht vermeiden. Einerseits können diese für den Schüler nützlich sein, wenn er in verschiedenen Fällen und möglichst verschiedener Stellung der Körper dieselben Stücke wieder berechnen muss, andererseits lassen sich durch passende Auswahl jene Wiederholungsrechnungen umgehen. Was die Schwierigkeit der Aufgaben anbetrifft, so wurden die meisten von unseren Schülern ohne Anleitung gelöst. Es ist auch sicherlich für Schüler der ersten Realschulklasse nicht zu schwer, wenn z. B. der durch die Flächenschwerpunkte des Oktaeders gebildete Würfel durchgenommen ist, später z. B. den Cylinder zu berechnen, dessen Endkreise je vier Oktaederflächen in ihren Schwerpunkten berühren. In manchen Fällen wird für den Durchschnitt der Klasse eine Andeutung der Lösung notwendig sein. So pflege ich bei der so lehrreichen Berechnung des Cylinders,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

dessen Mantel nur fünf Tetraederkanten berührt, anzugeben: Zunächst überlege man möglichst an einem Modell, wie der Cylinder liegen muss, suche dann den Tetraederschnitt, der den Cylinder senkrecht schneidet, so wird der Radius des Cylinders zu der Schnittfigur in einfacher Beziehung (Radius des Inkreises) stehen.

Allen Aufgaben habe ich einige Resultate beigefügt.

Hinsichtlich der Bezeichnungen gilt durchgehend, wenn es nicht anders angegeben ist:

a = Grundkante f = Seitenhöhe
s = Seitenkante h = Körperhöhe
R = Radius der Umkugel
ϱ = " " Inkugel
r = " des Grundkreises
u = Neigungswinkel der Seitenfläche gegen die Grundfläche
v = Neigungswinkel der Seitenkante gegen die Grundfläche
I = Inhalt O = Oberfläche M = Mantel.

Das Prisma.

1. Wie gross ist der Inhalt des rechtwinkligen Prismas, dessen Diagonale d ist, und dessen Kanten sich verhalten wie $1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$.?

$$\text{Res.: } \frac{d^3}{6}.$$

2. Den Radius der Umkugel des dreiseitigen Prismas zu berechnen, dessen Kanten sämtlich a sind.

$$a = \frac{a}{6}\sqrt{21}.$$

3. Wie gross ist der Inhalt eines dreiseitigen Prismas mit den Grundkanten a, wenn sich in dasselbe eine Kugel einschreiben lässt?

$$I = \frac{a^3}{4}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

4. Welchen Inhalt hat das quadratische Prisma mit der Höhe $\frac{8r}{5}$, das der Kugel vom Radius r eingeschrieben ist?

$$I = \frac{144r^3}{125}.$$

5. Desgleichen für ein dreiseitiges Prisma mit gleichseitiger Grundfläche und Höhe $\frac{2r\sqrt{3}}{3}$?

$$I = r^3.$$

6. Das Prisma zu berechnen, dessen Ecken die Kantenmitten zweier Parallelflächen des Würfels mit Kante a sind.

$$I = \frac{a^3}{2}.$$

7. Acht Kantenmitten des Octaeders mit Kante a bilden die Ecken eines zu berechnenden quadratischen Prismas

$$I = \frac{a^3\sqrt{2}}{8} = \frac{3}{8} \text{ Octaeder.}$$

8. Von den Mitten dreier in einer Ecke zusammenstossenden Tetraederkanten a sind Lote auf die Gegenfläche gefällt. Das Prisma zu berechnen, dessen Seitenkanten diese Lote sind.

$$I = \frac{a^3\sqrt{2}}{32} = \frac{3}{8} \text{ Tetraeder.}$$

8a In der gleichkantigen dreiseitigen Doppelpyramide sind die Mitten je dreier in einer Ecke zusammenstossenden Kanten a verbunden. Welchen Inhalt hat das entstandene Prisma?

$$I = \frac{a^3\sqrt{2}}{16}.$$

9. Berechnung des Würfels, dessen Ecken die Schwerpunkte der Octaederflächen sind.

$$I = \frac{2a^3\sqrt{2}}{27} = \frac{2}{9} \text{ Octaeder.}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

9a Von den Schwerpunkten der Seitenflächen der quadratischen gleichkantigen Pyramide sind Lote auf die Grundfläche gefällt. Welchen Inhalt hat das Prisma, dessen Seitenkanten diese Lote sind?

$$I = \frac{a^3\sqrt{2}}{27}.$$

10. Von den Schwerpunkten dreier Tetraederflächen sind Lote auf die vierte gefällt. Welchen Inhalt hat das Prisma, dessen Seitenkanten jene Lote sind?

$$I = \frac{a^3\sqrt{2}}{108} = \frac{1}{9} \text{ Tetraeder.}$$

11. Zwei gerade 6seitige Pyramiden mit den Grundkanten a bilden eine Doppelpyramide, deren Axen sämtlich $2a$ sind. Welcher Körper entsteht durch Verbindung der Kantenmitten?

$$I = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}.$$

12. Desgleichen durch Verbindung der Flächenschwerpunkte.

$$I = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}.$$

13. Welchen Inhalt hat das regelmässige 6seitige Prisma, welches der Kugel mit Radius ϱ umgeschrieben ist?

$$I = 4\varrho^3\sqrt{3}.$$

Die Pyramide.

1. Zur Berechnung der quadratischen Pyramide sind gegeben die Grundkante a und Höhe $h = 2a$ $(a\sqrt{2})$.

Res.: $s = \frac{3a\sqrt{2}}{2}\left(\frac{a\sqrt{10}}{2}\right)$ $f = \frac{a\sqrt{17}}{2}\left(\frac{3a}{2}\right)$

$R = \frac{9a}{8}\left(\frac{5a\sqrt{2}}{8}\right)$ $\varrho = \frac{a}{8}(\sqrt{17} - 1)$; $\frac{a\sqrt{2}}{4}$

$u = 75^0\,58'$ $(70^0\,32')$ $v = 70^0\,32'$ $(63^0\,26')$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2. Desgl. die Grundkante a und Seitenkante $s = \frac{5a}{6}\left(\frac{3a}{2}\right)$.

Res.: $h = \frac{a\sqrt{7}}{6}\left(\frac{a\sqrt{7}}{2}\right)$ $f = \frac{2a}{3}(a\sqrt{2})$ $\varrho = \frac{a\sqrt{7}}{14}$;

$\left(\frac{a\sqrt{7}}{14}(2\sqrt{2}-1)\right)$

$u = 41^0\,25'\,(69^0\,18')$ $v = 31^0\,57'\,(61^0\,52')$.

3. Desgleichen die Höhe h und $s = 3h\,(h\sqrt{2})$.

Res.: $a = 4h\,(h\sqrt{2})$ $f = h\sqrt{5}\left(\frac{h\sqrt{6}}{2}\right)$ $R = \frac{9h}{2}\,(h)$

$u = 26^0\,34'\,(54^0\,44')$ $v = 19^0\,28'\,(45^0)$.

4. Desgl. die Seitenhöhe f und Oberfläche $O = \frac{96}{25}f^2\,(3f^2)$

Res.: $a = \frac{6f}{5}\,(f)$ $h = \frac{4f}{5}\left(\frac{f\sqrt{3}}{2}\right)$ $R = \frac{17f}{20}\left(\frac{5f\sqrt{3}}{12}\right)$

$\varrho = \frac{3f}{10}\left(\frac{f\sqrt{3}}{6}\right)$

$u = 53^0\,8'\,(60^0)$ $v = 43^0\,19'\,(50^0\,46')$.

5. Zur Berechnung der dreiseitigen Pyramide sind gegeben die Grundkante a und $h = \frac{a}{3}\left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)$.

Res.: $s = \frac{2a}{3}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$ $f = \frac{a\sqrt{7}}{6}\left(\frac{a}{2}\right)$ $R = \frac{2a}{3}\left(\frac{a\sqrt{6}}{4}\right)$

$\varrho = \frac{a}{12}(\sqrt{21}-3)$; $\frac{a\sqrt{6}}{12}(\sqrt{3}-1)$

$u = 49^0\,6'\,(54^0\,44')$ $v = 30^0\,(35^0\,16')$.

6. Desgleichen die Grundkante a und $s = \frac{5a}{6}$.

Res.: $h = \frac{a\sqrt{13}}{6}$ $f = \frac{2a}{3}$ $\varrho = \frac{a\sqrt{39}}{78}(4-\sqrt{3})$

$u = 64^0\,20'$ $v = 46^0\,9'$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

7. Zur Berechnung der sechsseitigen Pyramide sind gegeben die Grundkante a und Höhe $h = \frac{a}{2}$.

Res.: $s = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ $f = a$ $R = \frac{5a}{4}$ $\varrho = \frac{a\sqrt{3}}{2}(2 - \sqrt{3})$

$u = 30^0$ $v = 26^0\,34'$.

8. Desgleichen h und $f = \frac{h\sqrt{7}}{2}$.

Res.: $a = h$ $s = h\sqrt{2}$ $R = a$ $\varrho = \frac{h\sqrt{3}}{4}(\sqrt{7} - \sqrt{3})$

$u = 49^0\,6'$ $v = 45^0$.

9. Der Kugel vom Radius R sind eingeschrieben:

a) eine quadratische Pyramide mit Grundkante $a = \frac{4R}{3}$

Res.: $h = \frac{2R}{3}$ $s = \frac{2R}{3}\sqrt{3}$ $f = \frac{2R}{3}\sqrt{2}$

$\varrho = \frac{2R}{3}(\sqrt{2} - 1)$. $u = 45^0$ $v = 35^0\,16'$

oder die Resultate von b.

b) eine quadratische Pyramide mit Höhe $h = \frac{4R}{3}$

Res.: $a = \frac{4R}{3}$ $s = \frac{2R}{3}\sqrt{6}$ $f = \frac{2R\sqrt{5}}{3}$

$\varrho = \frac{R}{3}(\sqrt{5} - 1)$. $u = 63^0\,26'$ $v = 54^0\,44'$.

c) eine dreiseitige Pyramide mit Grundkante $a = \frac{4R\sqrt{3}}{5}$

Res.: $h = \frac{8R}{5}\left(\frac{2R}{5}\right)$ $s = \frac{4R\sqrt{5}}{5}\left(\frac{2R\sqrt{5}}{5}\right)$

$f = \frac{2R\sqrt{17}}{5}\left(\frac{2R\sqrt{2}}{5}\right)$ $\varrho = \frac{R}{10}(\sqrt{17} - 1)$;

$\frac{2R}{5}(\sqrt{2} - 1)$.

$u = 75^0\,58'\,(45^0)$. $v = 63^0\,26'$. $(26^0\,34')$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

d) eine dreiseitige Pyramide mit Höhe $h = \frac{3R}{2}$

Res.: $a = \frac{3R}{2}$ $s = R\sqrt{3}$ $f = \frac{R}{4}\sqrt{39}$

$\varrho = \frac{R}{8}(\sqrt{13} - 1)$ $u = 73^0\,54'$. $v = 60^0$.

e) eine dreiseitige Pyramide mit $s = \frac{2R\sqrt{5}}{5}$

Res.: $h = \frac{2R}{5}$ $a = \frac{4R\sqrt{3}}{5}$ $f = \frac{2R\sqrt{2}}{5}$

$\varrho = \frac{2R}{5}(\sqrt{2} - 1)$ $u = 26^0\,34'$ $v = 14^0\,2'$.

f) eine sechsseitige Pyramide mit Grundkante $a = \frac{4R}{5}$

Res.: $h = \frac{8R}{5}\left(\frac{2R}{5}\right)$ $s = \frac{4R\sqrt{5}}{5}\left(\frac{2R\sqrt{5}}{5}\right)$

$f = \frac{2R\sqrt{19}}{5}\left(\frac{4R}{5}\right)$ $\varrho = \frac{8R}{365}(2\sqrt{57} - 3)$;

$\frac{2R}{65}(4\sqrt{3} - 3)$.

g) eine sechsseitige Pyramide mit $s = \frac{6R}{5}$

Res.: $h = \frac{18R}{25}$ $a = \frac{24R}{25}$ $f = \frac{6R\sqrt{21}}{25}$

$\varrho = \frac{3R}{25}(\sqrt{7} - 1)$.

10. Um die Kugel mit Radius ϱ sind konstruiert:

a) eine quadratische Pyramide mit $h = 3\varrho$

Res.: $f = 2\varrho\sqrt{3}$ $a = 2\varrho\sqrt{3}$ $s = \varrho\sqrt{15}$ $R = \frac{5\varrho}{2}$

b) eine dreiseitige Pyramide mit $h = \frac{8\varrho}{3}$

Res.: $f = \frac{10\varrho}{3}$ $a = 4\varrho\sqrt{3}$ $s = \frac{4\varrho}{3}\sqrt{13}$ $R = \frac{13\varrho}{3}$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

c) eine sechsseitige Pyramide mit $h = \frac{9\varrho}{4}$

Res.: $f = \frac{15\varrho}{4}$ $a = 2\varrho\sqrt{3}$ $R = \frac{91\varrho}{24}$.

Diejenigen Körper zu berechnen, welche entstehen durch Verbindung:

11. Der Ecken einer Würfelfläche a^2 mit der Mitte der Gegenfläche.

$$R = \frac{3a}{4}, \quad \varrho = \frac{a}{4}(\sqrt{5} - 1).$$

12. Der Seitenmitten einer Würfelfläche a^2 untereinander und mit der Mitte der Gegenfläche.

$$I = \frac{a^3}{6}, \quad R = \frac{5a}{8}, \quad \varrho = \frac{a}{4}.$$

13. Der Mitten von 4 parallelen Würfelkanten a untereinander und mit den Mitten der beiden zu ihnen senkrechten Würfelflächen.

$$I = \frac{a^3}{3}, \quad \varrho = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

14. Der Mittelpunkte der 6 Würfelflächen a^2.

$$\text{Octaeder} = \frac{a^3}{6}.$$

15. Der Mitten dreier in einer Ecke zusammenstossenden Würfelkarten a untereinander und mit der Gegenecke.

$$I = \frac{5a^3}{48}, \quad s = \frac{3a}{2}, \quad h = \frac{5a\sqrt{3}}{6}.$$

16. Der Mitten dreier in einer Ecke zusammenstossenden Würfelflächen a^2 untereinander und mit der Gegenecke.

$$I = \frac{a^3}{12}, \quad s = \frac{a\sqrt{6}}{2}, \quad h = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

17. Der Mitten von vier in einer Ecke zusammenstossenden Octaederkanten a untereinander und mit der Gegenecke.

$$I = \frac{a^3\sqrt{2}}{16} = \frac{3}{16}\,\text{Octaeder}, \quad s = \frac{a\sqrt{5}}{2}, \quad f = \frac{a\sqrt{19}}{4}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

18. Der Mitten von vier in einer Ecke zusammenstossenden Octaederflächen untereinander und mit der Gegenecke.

$$I = \frac{4a^3\sqrt{2}}{81} = \frac{4}{27} \text{ Octaeder}, \quad s = a, \quad f = \frac{a}{6}\sqrt{34}.$$

19. Von den Ecken einer Octaederfläche mit der Mitte der Gegenfläche, Tetraeder mit Kante a des Octaeders.

19a Der Kantenmitten des Tetraeders.

$$\text{Octaeder} = \frac{1}{2} \text{ Tetraeder}.$$

20. Der Flächenschwerpunkte der quadratischen gleichkantigen Pyramide.

$$I = \frac{2a^3\sqrt{2}}{81}, \quad f = \frac{a}{3}, \quad O = \frac{2a^2}{9}(\sqrt{2} + 1).$$

21. Von 4 Flächenschwerpunkten des Octaeders, welche in einem Axenschnitt liegen untereinander und mit den Mitten der zum Schnitt parallelen Kanten.

$$I = \frac{2a^3\sqrt{2}}{27} = \frac{2}{9} \text{ Octaeder}, \quad O = \frac{a^2}{9}(\sqrt{26} + 2\sqrt{11}).$$

22. Ein Tetraeder zu zeichnen und zu berechnen, welches durch 6 Flächendiagonalen des Würfels mit Kante a gebildet wird.

$$I = \frac{a^3}{3}.$$

23. Die Ecken eines Würfels sind abgestumpft durch 8 Ebenen, welche durch die Mitten von je 3 Kanten gehen. Wie gross ist der Restkörper?

$$I = \frac{5a^3}{6}, \quad O = a^2(3 + \sqrt{3}).$$

24. Dasselbe für das Octaeder.

$$I = \frac{5a^3\sqrt{2}}{24}, \quad O = \frac{a^2}{2}(3 + \sqrt{3}).$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

25. Die Ecken des Octaeders sind abgestumpft durch Ebenen, welche $\frac{1}{3}$ der Kanten abschneiden.

Restkörper? $I = \frac{8a^3\sqrt{2}}{27}$, $O = \frac{2a^2}{3}(1 + 2\sqrt{3})$.

26. Dasselbe für das Tetraeder.

$$I = \frac{23}{27} \text{ Tetraeder}. \quad O = \frac{7a^2\sqrt{3}}{9}.$$

27. Auf die 6 Würfelflächen mit Seite a sind gerade quadratische Pyramiden mit Höhe $\frac{a}{2}$ aufgesetzt. Der entstandene Körper ist zu berechnen.

Rhombendodecaeder $I = 2a^3$, $O = 6a^2\sqrt{2}$.

28. Auf die 4 Tetraederflächen sind gerade dreiseitige Pyramiden mit der halben Tetraederhöhe aufgesetzt. Berechnung des entstandenen Körpers.

Würfel mit $I = \frac{a^3\sqrt{2}}{4} = 3$ Tetraeder, $O = 3a^2$.

29. Ein Würfel mit Kante a und Octaeder mit Axen $2a$ durchdringen sich so, dass beide Körper denselben Mittelpunkt haben und die Octaederaxen auf den Würfelflächen senkrecht stehen. Wie gross ist der entstandene Körper?

$$I = \frac{3a^3}{2}, \quad O = 3a^2(1 + \sqrt{3}).$$

30. Auf die Flächen eines Octaeders mit Kante a sind gerade Pyramiden mit der Höhe $\frac{a\sqrt{6}}{12}$ aufgesetzt. Berechnung des entstandenen Körpers.

Rhombendodecaeder $I = \frac{a^3\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2}$ Octaeder.

$O = 3a^2\sqrt{2}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

31. Die Ecken eines Würfels sind abgestumpft durch Ebenen, welche $\frac{3}{4}$ der Kanten abschneiden. Welche Oberfläche hat der entstandene Restkörper?

$$\text{Antw.: } \frac{3a^2}{4}(1 + 2\sqrt{3}).$$

32. Die Ecken einer quadratischen gleichkantigen Pyramide mit Kante a sind abgestumpft durch Ebenen, welche die halben Kanten abschneiden. Wie gross sind Inhalt und Oberfläche des Restkörpers?

$$\text{Antw.: } \frac{5}{8} \text{ der Pyramide}, \quad O = \frac{a^2}{4}(3 + 2\sqrt{3}).$$

33. Welchen Inhalt und welche Oberfläche hat der von den beiden Diagonalentetraedern des Würfels mit Kante a gebildete Körper?

$$I = \frac{a^3}{2}, \qquad O = 3a^2\sqrt{3}.$$

Der Cylinder.

1. Aus dem Rechteck mit den Seiten a und b $(a > b)$ wird auf doppelte Weise ein Cylindermantel hergestellt. Welcher Cylinder hat den grösseren Inhalt?

2. Der Kugel vom Radius R ist ein Cylinder eingeschrieben, in welchem $r : h = 2 : 3$ ist.

$$\text{Res.: } r = \frac{4R}{5} \quad h = \frac{6R}{5} \quad I = \frac{72}{125} \text{ der Kugel.}$$

3. Desgleichen $r : h = 3 : 8$.

$$\text{Res.: } h = \frac{8R}{5} \quad r = \frac{3R}{5} \quad I = \frac{54}{125} \text{ der Kugel.}$$

4. Desgleichen mit dem Mantel $\frac{48R^2\pi}{25} = \frac{12}{25}$ Kugelfläche.

$$\text{Res.: } r = \frac{4R}{5};\ \frac{3R}{5} \quad h = \frac{6R}{5};\ \frac{8R}{5}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

5. Die Endkreise eines Cylinders gehen durch je 3 Ecken eines Octaeders.

$$\text{Res.: } r = \frac{a\sqrt{3}}{3} \quad h = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

5a Die Inkreise zweier Octaederflächen bilden die Endflächen eines Cylinders.

$$\text{Res.: } r = \frac{a\sqrt{3}}{6} \quad h = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

5b Wie gross ist der Inhalt des Hohlcylinders, dessen Endflächen durch In- und Umkreise zweier Octaederflächen gebildet werden?

$$I = \frac{a^3\pi\sqrt{6}}{12} = \frac{9}{4} \text{ der Inkugel.}$$

6. Die Endkreise eines Cylinders berühren je 3 zusammenstossende Würfelflächen in ihren Schwerpunkten.

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{3} \quad r = \frac{a\sqrt{6}}{6}. \quad I = \frac{1}{9} \text{ der Umkugel.}$$

7. Die Endkreise eines Cylinders berühren je 4 Octaederflächen in ihren Schwerpunkten.

$$r = \frac{a}{3} \quad h = \frac{a\sqrt{2}}{3}. \quad I = \frac{1}{9} \text{ der Umkugel.}$$

8. Auf einer Tetraederfläche steht ein Cylinder, dessen oberer Kreis die 3 anderen Flächen in ihren Schwerpunkten berührt.

$$h = \frac{a\sqrt{6}}{9} \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{9}. \quad I = \frac{8}{9} \text{ der Inkugel.}$$

9. Auf der Grundfläche einer gleichkantigen quadratischen Pyramide steht ein Cylinder, dessen obere Kreislinie die übrigen Flächen in ihren Schwerpunkten berührt.

$$r = \frac{a}{3} \quad h = \frac{a\sqrt{2}}{6} \quad I = \frac{1}{18} \text{ der Umkugel.}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

10. Welchen Radius hat ein Cylinder, dessen Mantel durch 6, und zwar nur durch 6 Ecken eines Würfels geht?

$$r = \frac{a\sqrt{6}}{3} \text{ oder } \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

11. Welchen Radius hat ein Cylinder, dessen Mantel 5 Kanten eines Tetraeders berührt?

$$r = \frac{a}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}).$$

12. Welchen Radius hat ein Cylinder, dessen Mantel 6 Kanten einer quadratischen gleichkantigen Pyramide berührt?

$$r = \frac{a}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}).$$

13. Welchen Radius hat ein Cylinder, dessen Mantel 4 Tetraederecken enthält?

$$r_1 = \frac{a}{2} \qquad r_2 = \frac{3a\sqrt{2}}{8}.$$

14. Die Grundfläche eines gleichseitigen Kegels wird durch den Endkreis eines Cylinders halbiert. In welchem Verhältnis teilt der obere Endkreis des letzteren den Kegelmantel.

Antw.: In gleiche Teile.

Kegel und Doppelkegel.

1. Der Kugel mit Radius R ist ein Kegel mit Höhe $h = \frac{3R}{2}\left(\frac{R}{2}, \frac{4R}{3}\right)$ eingeschrieben.

Res.: $r = \frac{R\sqrt{3}}{2}\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}, \frac{2R\sqrt{2}}{3}\right)$. $I = \frac{9}{32}\left(\frac{3}{32}, \frac{8}{27}\right)$ der Kugel.

2. Ebenso ein Kegel mit Radius $r = \frac{R\sqrt{7}}{4}$.

Res.: $h = \frac{7R}{4} \qquad I = \frac{49R^3\pi}{192}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3. Der Kugel mit Radius ϱ ist ein Kegel mit der Höhe $h = \frac{5\varrho}{2}$ (4ϱ) umgeschrieben.

$$\text{Res.:}\quad r = \varrho\sqrt{5}\left(\frac{4\varrho\sqrt{3}}{3}\right) \quad R = \frac{9\varrho}{4}\left(\frac{8\varrho}{3}\right).$$

4. Der Grundkreis eines Kegels ist einer Octaederfläche ein- (um)geschrieben, seine Spitze der Schwerpunkt der Gegenfläche.

$$I_1 = \frac{a^3\pi\sqrt{6}}{108} \quad I_2 = \frac{a^3\pi\sqrt{6}}{27}.$$

5. Der Grundkreis eines Kegels berührt 3 in einer Ecke zusammenstossende Würfelflächen in ihren Schwerpunkten, seine Spitze ist die Gegenecke des Würfels.

$$I = \frac{a^3\pi\sqrt{3}}{27} = \frac{2}{27} \text{ der Umkugel.}$$

6. Der Grundkreis eines Kegels geht durch die Mitten dreier in einer Ecke zusammenstossender Würfelkanten, seine Spitze ist die Gegenecke.

$$I = \frac{5a^3\pi\sqrt{3}}{108}.$$

7. Die No. 5 und 6 entsprechenden Aufgaben für das Octaeder.

$$I = \frac{2a^3\pi\sqrt{2}}{81} \quad I_2 = \frac{a^3\pi\sqrt{2}}{32} = \frac{3}{32} \text{ der Umkugel.}$$

8. Dem Tetraeder mit Kante a ist ein Kegel mit Höhe $a\sqrt{6}$ derart umgeschrieben, dass eine Ecke im Mittelpunkt der Kegelgrundfläche liegt.

$$I_1 = \frac{a^3\pi\sqrt{6}}{4} = 2 \text{ Umkugeln.}$$

8a Dieselbe Aufgabe für die quadratische gleichkantige Pyramide mit $h = 2a\sqrt{2}$.

$$I = \frac{16a^3\pi\sqrt{2}}{27} = \frac{16}{9} \text{ der Umkugel.}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

9. Eine Octaederaxe bildet die Höhe eines Kegels, sein Mantel enthält 4 Kanten desselben.

$$I = \frac{2a^3\sqrt{2}\pi}{3} = 2 \text{ Umkugeln.}$$

9a Eine Würfelaxe bildet die Höhe eines Kegels, sein Mantel enthält 3 Würfelkanten.

$$I = 2a^3\pi\sqrt{3} = 4 \text{ Umkugeln.}$$

10. Aus dem Tetraeder mit Kante a sind 4 möglichst grosse Kegel mit gemeinsamer Spitze im Mittelpunkt des Tetraeders herausgeschnitten. Inhalt derselben?

$$I = \frac{a^3\pi\sqrt{6}}{108} = 2 \text{ Inkugeln.}$$

10a Desgleichen aus dem Octaeder 8 Kegel.

$$I = \frac{a^3\pi\sqrt{6}}{27} = \text{der Inkugel.}$$

11. Auf den Endflächen eines Cylinders mit quadratischem Axenschnitt a^2 stehen 2 sich durchdringende Kegel mit den Spitzen in den Mittelpunkten der Gegenfläche. Wie gross ist das beiden gemeinsame Stück und der entstandene sanduhrförmige Körper.

$$\frac{a^3\pi}{48}, \quad \frac{7a^3\pi}{48}.$$

12. Um die Kugel mit Radius ϱ ist ein Kegel mit der Höhe 5ϱ konstruiert. Wie verhalten sich die Oberfläche dieser Kugel zum Kegelmantel und zur Oberfläche seiner Umkugel?

Antw.: 9 : 15 : 64.

13. Auf der Grundfläche eines Kegels mit der Höhe $3a$ steht ein Würfel mit Kante a, dessen 4 obere Ecken im Kegelmantel liegen. Teilung des Kegels durch die Ebene jener 4 Ecken?

Antw.: 19 : 8.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Rotationsaufgaben zum Kegel.

1. Ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a rotiert um die Hypotenuse.

$$I = \frac{a^3 \pi \sqrt{2}}{6} \qquad O = a^2 \pi \sqrt{2}.$$

2. Ein gleichseitiges Dreieck mit Seite a rotiert um eine Seite.

$$I = \frac{a^3 \pi}{4} \qquad O = a^2 \pi \sqrt{3}.$$

3. Rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $2a$ und $a\sqrt{5}$ rotiert um die Hypotenuse.

$$I = \frac{20\, a^3 \pi}{9} \qquad O = \frac{2\, a^2 \pi}{3}(5 + 2\sqrt{5}).$$

4. Rhombus mit Seite a rotiert um die Diagonale $\frac{2\,a}{3}$.

$$I = \frac{16\, a^3 \pi}{81} \qquad O = \frac{4\, a^2 \pi \sqrt{2}}{3}.$$

5. Gleichschenkliges Dreieck mit Schenkeln a und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel 120^0 rotiert um einen Schenkel.

$$I = \frac{a^3 \pi}{4} \qquad O = \frac{a^2 \pi}{2}(3 + \sqrt{3}).$$

6. Gleichschenkliges Dreieck mit Schenkeln a und Basis $\frac{6\,a}{5}$ rotiert um einen Schenkel.

$$I = \frac{192}{625} a^3 \pi \qquad O = \frac{264}{125} a^2 \pi.$$

7. Gleichschenkliges Trapez mit Schenkeln $3a$ und den parallelen Seiten a und $4a$ rotiert um die Seite $4a$.

$$I = \frac{27\, a^3 \pi}{2} \qquad O = 12\, a^2 \pi \sqrt{3}.$$

8. Desgleichen um die Seite a.

$$I = \frac{81\, a^3 \pi}{4} \qquad O = 21\, a^2 \pi \sqrt{3}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

9. Regelmässiges Sechseck mit Seite a rotiert um die lange Diagonale.

$$I = a^3 \pi \qquad O = 2\,a^2 \pi \sqrt{3}.$$

10. Ein gleichseitiges Dreieck mit Seite a rotiert um die durch eine Ecke zur Gegenseite parallel gelegte Axe.

$$I = \frac{a^3 \pi}{2} \qquad O = 2\,a^2 \pi \sqrt{3}.$$

11. Ein Rhombus mit den Diagonalen a und $a\sqrt{3}$ rotiert um eine Seite.

$$I = \frac{3\,a^3 \pi}{4} \qquad O = 2\,a^2 \pi \sqrt{3}.$$

Kegelstumpf.

1. In- und Umkreis zweier paralleler Octaederflächen bilden die Endkreise eines Kegelstumpfes.

$$I = \frac{7a^3 \pi \sqrt{6}}{108} = \frac{7}{4} \text{ der Inkugel.}$$

$$M = \frac{3\,a^2 \pi}{4} = \frac{9}{8} \text{ der Inkugelfläche.}$$

2. Ein gleichseitiges Dreieck mit Seite a rotiert um eine durch eine Ecke zu einer Höhe parallel gedachte Axe.

$$I = \frac{a^3 \pi \sqrt{3}}{4}, \qquad O = 3\,a^2 \pi\,.$$

3. Ein regelmässiges Sechseck mit Seite a rotiert um eine kurze Diagonale.

$$I = \frac{19\,a^3 \pi \sqrt{3}}{12}, \qquad O = 7\,a^2 \pi\,.$$

4. Desgleichen um eine Seite.

$$I = \frac{9\,a^3 \pi}{2}, \qquad O = 6\,a^2 \pi \sqrt{3}\,.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

5. Ein gleichschenkliges Trapez mit den parallelen Seiten $4a\sqrt{2}$ und $3a\sqrt{2}$ nnd den Schenkel $\frac{a}{2}\sqrt{6}$ rotiert um die Verbindungsgerade der Mitten der parallelen Seiten.

$$I = \frac{37a^3\pi}{6}, \qquad M = \frac{7a^2\pi\sqrt{3}}{2}.$$

6. Der Kugel vom Radius R ist ein Kegelstumpf mit den Radien $r_1 = \frac{12R}{13}$, $r_2 = \frac{5R}{13}$ eingeschrieben.

$$I = \frac{R^3\pi \,.\, 3893}{3 \,.\, 13^3}, \qquad M = \frac{17R^2\pi\sqrt{2}}{13}.$$

7. Der Kugel vom Radius R ist ein Kegelstumpf mit $r_1 = \frac{24R}{25}$ und $h = \frac{27R}{25}$ eingeschrieben.

$$I = 387\,R^3\pi\left(\frac{3}{25}\right)^3. \qquad M = 39\,R^2\pi\sqrt{10}\left(\frac{3}{25}\right)^2.$$

8. Der Kugel vom Radius ϱ ist ein Kegelstumpf umgeschrieben mit $r_1 = n\varrho$.

$$I = \frac{2\varrho^3\pi}{3}\left(n^2 + 1 + \frac{1}{n^2}\right), \qquad M = \varrho^2\pi\left(n + \frac{1}{n}\right)^2.$$

9. Von den Endkreisen eines Kegelstumpfes geht der eine durch 3 Ecken, der andere durch die Mitten der 3 Seitenkanten der geraden dreiseitigen Pyramide mit Grundkanten und Höhe a.

$$I = \frac{7a^3\pi}{72}, \qquad M = \frac{a^2\pi}{2} = \frac{9}{32} \text{ der Umkugel.}$$

Kalotte und Kugelabschnitt.

1. In welchem Verhältnis wird die Umkugel des Tetraeders durch die Ebene einer Fläche geteilt?

Antw.: 7 : 20.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2. Um einen Kegel mit gleichseitigem Axenschnitt ist die Umkugel gelegt. Welches Stück schneidet die Kegelgrundfläche von ihr ab?

Antw.: $\frac{5}{32}$ der Umkugel.

3. Durch die Kugel mit Radius r ist ein centrales kreisrundes Loch vom Durchmesser $\frac{10r}{13}$ gebohrt. Wie gross ist der Kugelrest?

Antw.: $\left(\frac{12}{13}\right)^3$ der Kugel.

4. Die Kugel von Radius r hat eine centrale konische Bohrung mit den Endradien $\frac{4r}{5}$ und $\frac{3r}{5}$. Wie gross ist der Kugelrest?

Antw.: $\frac{7}{20}$ der Kugel.

5. Die Mittelpunkte zweier Kugeln vom Radius r sind um $\frac{3r}{2}$ von einander entfernt. Wie gross ist das beiden gemeinsame Kugelstück?

Antw.: $\frac{11}{128}$ einer Kugel.

6. Die Mittelpunkte zweier Kugeln vom Radius r sind um $\frac{r}{2}$ von einander entfernt. Welche Oberfläche und welchen Inhalt hat eine der entstandenen konvex-konkaven Linsen?

Oberfläche: $4r^2\pi$. Volum.: $\frac{47r^3\pi}{96}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

7. Eine Halbkugel mit Radius r und ein Cylinder mit der Höhe $\frac{2r}{3}$ stehen auf gemeinsamer Grundfläche. Welchen Inhalt hat das gemeinsame Körperstück?

Antw.: $\frac{46 r^3 \pi}{81}$.

8. Die Höhe eines Kegels mit gleichseitigem Axenschnitt und Radius r bildet den Durchmesser einer Kugel. Wie gross ist das gemeinsame Körperstück?

Antw.: $\frac{7 r^3 \pi \sqrt{3}}{32} = \frac{7}{16}$ der Kugel.

9. In welchem Verhältnis wird die Inkugel eines gleichseitigen Kegels durch den Berührungskreis geteilt?

Antw.: 5 : 27.

10. Der Kugel vom Radius ϱ ist ein Kegel mit der Höhe $h = 4\varrho$ umgeschrieben. In welchem Verhältnis wird die Kugel durch den Berührungskreis geteilt?

Antw.: 7 : 20.

11. Eine Halbkugel hat ihren Mittelpunkt im Höhenfusspunkt eines gleichseitigen Kegels und berührt seinen Mantel. In welchem Verhältnis wird sie durch den Berührungskreis geteilt?

Antw.: 5 : 11.

12. Welcher Teil der Kugelfläche vom Radius r wird von einem leuchtenden Punkte beleuchtet, der $3r$ vom Centrum entfernt ist?

Antw.: $\frac{1}{3}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

13. Um die Spitze eines Kegels vom Radius r und der Höhe $\frac{4r}{3}$ ist mit letzterer eine Kugel konstruiert. Wie gross ist das beiden Körpern gemeinsame Stück?

Antw.: $\frac{r^3 \pi \,.\, 128}{405}$.

14. Ein Kugelabschnitt hat die Höhe $2a$ und den Inhalt $\frac{28 a^3 \pi}{3}$. Wie verhält sich der Inhalt des Kegels mit derselben Grundfläche und Höhe zur ganzen Kugel?

Antw.: 36 : 125.

15. Ein Kugelabschnitt mit der Höhe $\frac{a}{2}$ und dem Inhalt $\frac{7 a^3 \pi}{48}$ hat mit einem Kegel dieselbe Grundfläche und Höhe. Wie verhält sich der Kegelmantel zur Kalotte des Kugelabschnittes?

Antw.: $\sqrt{6} : 3$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

13. U adius r und der
K ugel konstruiert.
V emeinsame Stück?

14. F z und den Inhalt
2 t des Kegels mit
d r ganzen Kugel?

15. E und dem Inhalt
7 Grundfläche und
E antel zur Kalotte
d

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf