1.

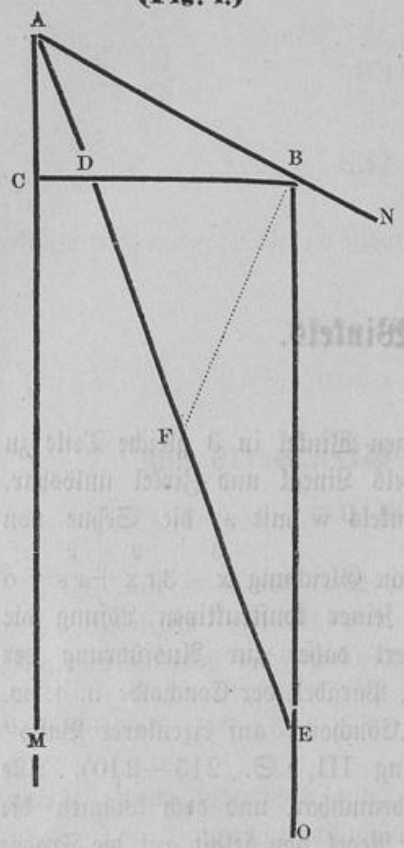
Praktische Dreiteilung des Winkels.

Das Trisektionsproblem, d. h. die Aufgabe, einen beliebigen Winkel in 3 gleiche Teile zu teilen, ist durch elementarplanimetrische Konstruktion mittels Lineal und Zirkel unlösbar. Denn bezeichnet man die Sehne eines gegebenen Centriwinkels w mit s, die Sehne von $\frac{1}{3}$ w mit x, den Radius mit r, so erhält man die kubische Gleichung $x^3 - 3rx^2 + rs^2 = o$ also den sogenannten casus irreducibilis, welcher zu seiner konstruktiven Lösung die Trisektion des Winkels voraussetzt. Die Theorie erfordert daher zur Ausführung der Konstruktion die Benutzung einer Kurve wie der Hyperbel, Parabel, der Conchoide u. s. w. Dr. Hippauf empfiehlt als besonders geeignet die „Conchoide auf circularer Basis" (Hoffmann's Zeitschrift für math. Unterricht, Jahrgang III, S. 215—240). Alle diese Konstruktionen sind aber für den Schulunterricht unbrauchbar, und doch kommen die Schüler bei der **Dreiteilung des rechten Winkels** in der Regel von selbst auf die Frage: „Wie teilt man einen beliebigen andern Winkel in 3 gleiche Teile?" und fühlen sich dann wenig befriedigt, wenn ihnen geantwortet wird: „Das ist unmöglich! das kann nur durch **Probieren** geschehen."

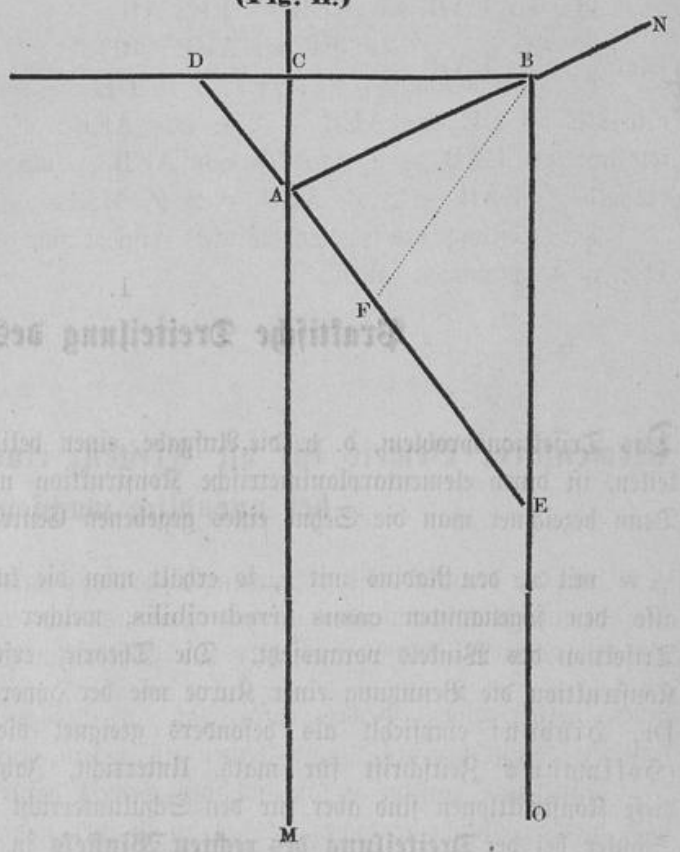
Bei einer solchen Veranlassung fand ich das nachstehende einfache, nur mit Hilfe eines Lineals ausführbare Verfahren, welches durchaus nicht auf bloßem Probieren beruht, also auch nicht **rein mechanisch** ist. Da dasselbe meines Erachtens nicht bloß die Wißbegier der Schüler befriedigt, sondern durch das dabei in Anwendung kommende Beweisverfahren auch den Zwecken des Unterrichts dient und ferner die Lösung mancher interessanten, sonst auszuschließenden Aufgabe ermöglicht (cf. Anhang zu dem Aufsatze von Dr. Hippauf), so verdient es, glaube ich, Berücksichtigung im Unterrichte. Bis jetzt habe ich dieses Verfahren in keinem mir zu Gesicht gekommenen Buche gefunden, und deshalb erlaube ich mir dasselbe hier mitzuteilen, wenn es auch möglicherweise identisch ist mit dem des **Montucla,** welcher, wie Hippauf sagt, zeigt, „wie man sich zum Zweck rein **mechanischer** Lösung eines bloßen **Lineals** bedienen könne."

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

(Fig. I.)



(Fig. II.)



Der zu teilende Winkel sei MAN (in Fig. I spitz, in Fig. II stumpf). Auf dem einen Schenkel AN schneide man eine beliebige Strecke AB = r ab, fälle von A auf den anderen Schenkel AM (oder dessen Verlängerung) das Lot BC, errichte auf BC in B das Lot BO, bestimme auf einer Geraden (einem Lineal) die Punkte D und E so, daß DE = 2 r, lege die Gerade so, daß sie durch A geht, während Punkt E auf BO und D auf BC (oder die Verlängerung davon) zu liegen kommt, so ist ∠ MAE = $^1/_3$ ∠ MAN und ∠ EAN = $^2/_3$ ∠ MAN.

Beweis I. Verbindet man F, die Mitte von DE, mit B, so ist BF = DF = FE = AB = r. Ist ∠ MAE = w, so ist auch ∠ BEF = w (Wechselwinkel bei Parallelen) und ∠ BFA = 2 w (Außenwinkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks) und ebenso ∠ BAF = 2 w (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck,) also ∠ MAN = 3 w, d. h. ∠ MAE = $^1/_3$ ∠ MAN und ∠ EAN = $^2/_3$ ∠ MAN.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

II. $\sin EAB : \sin AEB = BE : AB$;

folglich: $\sin EAB = \frac{BE . \sin AEB}{r}$; $\frac{BE}{DE} = \cos AEB$,

also $BE = DE \cos AEB = 2\, r . \cos AEB$

folglich: $\sin EAB = 2 \sin AEB \cos AEB = \sin 2 . AEB$

deshalb $\angle EAB = 2 \angle AEB = 2 \angle MAE$.

Die Teilung des rechten Winkels ergiebt sich als spezieller Fall, indem die Punkte D, C u. A zusammen fallen.

2.

Elementarer Beweis für die Existenz eines Grenzwerts von $\left\{1+\frac{1}{n}\right\}^n$ bei unendlich wachsendem n.

In den meisten mir bekannten Lehrbüchern wird der Wert von $e = \lim \left\{1+\frac{1}{n}\right\}^n$ für ein unendlich wachsendes n ohne weiteres aus der Binomialreihe abgeleitet. Nur Baltzer (Elemente der Mathematik) und Schlömilch (Kompendium der höheren Analysis) geben vorher einen Beweis dafür, daß ein Grenzwert von $\left\{1+\frac{1}{n}\right\}^n$ bei wachsendem n existiert, der größer als 2 und kleiner als 4 sein muß.

Für ganze positive n läßt sich der Beweis dafür in ganz elementarer Weise führen, nach meiner Ansicht einfacher, als es bei Baltzer und Schlömilch geschieht:

Da Brüche von gleichem Zähler um so kleiner sind, je größer ihr Nenner ist, so ist die n^{te} Potenz von $\left\{1+\frac{1}{n}\right\}$ größer als das Produkt von n Faktoren, von denen jeder folgende kleiner ist als der erste, der $= 1+\frac{1}{n}$ ist:

$$\left\{1+\frac{1}{n}\right\}^n > \left\{1+\frac{1}{n}\right\}\left\{1+\frac{1}{n+1}\right\}\left\{1+\frac{1}{n+2}\right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \left\{1+\frac{1}{2n-3}\right\}\left\{1+\frac{1}{2n-2}\right\}\left\{1+\frac{1}{2n-1}\right\}$$

oder: $\left\{1+\frac{1}{n}\right\}^n > \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+2}{n+1} + \frac{n+3}{n+2} \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{2n-2}{2n-3} \cdot \frac{2n-1}{2n-2} \cdot \frac{2n}{2n-1}$

Da auf der rechten Seite jeder Zähler dem folgenden Nenner gleich ist, so erhält man $\frac{2n}{n} = 2$, und es ist für jedes beliebige ganze positive n, also auch für $n = \infty$:

$\left\{1+\frac{1}{n}\right\}^n > 2$.

Da ferner Brüche mit gleichem Zähler um so größer sind, je kleiner ihr Nenner

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wird, so ist die n^{te} Potenz von $\left\{1+\frac{1}{n}\right\}$ kleiner als das Produkt von n Faktoren, von denen der erste $1+\frac{2}{2n}=1+\frac{1}{n}$ und jeder folgende größer als der vorhergehende ist:

$$\left\{1+\frac{1}{n}\right\}^n < \left\{1+\frac{2}{2n}\right\}\left\{1+\frac{2}{2n-1}\right\}\left\{1+\frac{2}{2n-2}\right\}\cdots\left\{1+\frac{2}{n+3}\right\}\left\{1+\frac{2}{n+2}\right\}\left\{1+\frac{2}{n+1}\right\}$$

oder: $$\left\{1+\frac{1}{n}\right\}^n < \frac{2n+2}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n-2}\cdot\ldots\cdot\frac{n+5}{n+3}\cdot\frac{n+4}{n+2}\cdot\frac{n+3}{n+1}.$$

Da rechts jeder Nenner gleich dem zweitfolgenden Zähler ist, erhält man:

$$\left\{1+\frac{1}{n}\right\}^n < \frac{(2n+2)}{(n+2)}\frac{(2n+1)}{(n+1)} \quad \text{oder:} \quad \left\{1+\frac{1}{n}\right\}^n < \frac{\left\{2+\frac{2}{n}\right\}\left\{2+\frac{1}{n}\right\}}{\left\{1+\frac{2}{n}\right\}\left\{1+\frac{1}{n}\right\}}$$

Für $n = \infty$ wird $\frac{2}{n}=0$ und $\frac{1}{n}=0$ und man erhält: $\lim\left\{1+\frac{1}{n}\right\}^n < 4$.
Für gebrochene und negative Werte von n ist dann der Beweis in derselben Weise zu führen, wie es bei Baltzer und Schlömilch geschieht.

3.

Zum Begriff „Größe des Winkels."

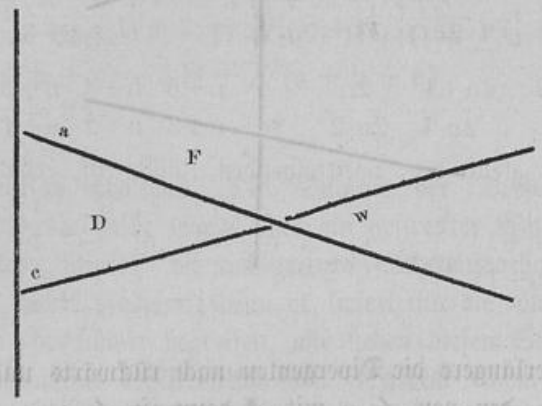
Es könnte fast unglaublich erscheinen, daß unter den „Lehrern der Mathematik" nicht nur **keine Übereinstimmung** in der **Definition** eines der **ersten Grundgebilde,** nämlich **„des Winkels,"** vorhanden ist, sondern daß auch noch **Unklarheit** darüber herrscht, was unter **„Größe des Winkels"** zu verstehen sei. Und doch ist das letztere der Fall. Beweis dafür liefert das Programm der Königlichen Realschule I. O. zu Reichenbach i Schl. vom Jahre 1881 in der Abhandlung: **„Der Anfangsunterricht in der Geometrie.** (Probe eines Leitfadens.) **Von Realschullehrer Emil Hoffmann"** Definiert wird der Winkel als „ein Teil einer Ebene, begrenzt von zwei von einem Punkte ausgehenden Strahlen." Was aber unter der „Größe" eines Winkels zu verstehen sei, resp. wovon dieselbe abhänge, wird nicht gesagt. Nun heißt es im §. 10:

„Lehrsatz 1. An Convergenten ist jeder der beiden äußeren Winkel größer als der innere ihm gleichliegende.

Voraussetzung. Von zwei Punkten einer Geraden aus sind zwei Convergente (Strahlen) bis über den Schnittpunkt hinaus gezeichnet. Ein äußerer Winkel heiße a, der innere ihm gleichliegende c.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Behauptung. $\angle$ a > c
Beweis. $\angle$ a ist in zwei Teile geteilt, in ein Flächenstück F und einen Winkel w.



$\angle$ c besteht aus demselben Flächenstück F und einem Dreieck D.
$\angle$ w > D weil w unendlich ist.
$\angle$ a > c."

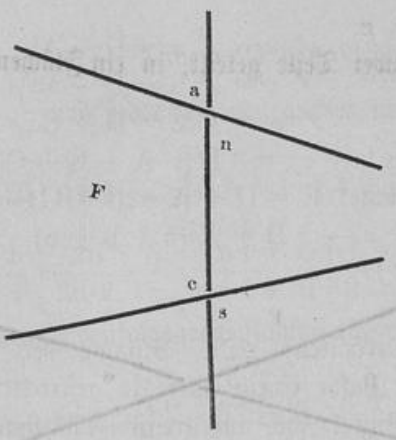
Als ich diesen Beweis zum ersten Male las, war ich vollständig überrascht. Ich hatte bisher geglaubt, Winkel und Dreieck seien zwei ganz verschiedenartige Gebilde, die inbezug auf ihre Größe ebensowenig mit einander verglichen werden könnten wie beispielsweise eine Linie und ein Dreieck oder ein Dreieck und ein Körper. Da aber Herr Hoffmann sagt: „Der Winkel ist größer als ein Dreieck," so muß er Winkel und Dreieck offenbar für gleichartige Größen halten. Unter der Größe eines Dreiecks versteht nun jedermann **den Flächeninhalt** desselben. Also muß Herr H. unter **„Größe des Winkels"** auch die unendliche Flächenausdehnung des von den Schenkeln begrenzten Ebenenteiles verstehen. Bei der Vergleichung von Winkeln inbezug auf ihre Größe haben wir es alsdann mit verschiedenen unendlichgroßen Flächengrößen zu thun.

Was aus dieser Auffassung konsequenterweise folgen würde, wollen wir jetzt untersuchen.

Bei H. heißt es weiter in §. 10:

„Lehrsatz 2. An Divergenten ist es umgekehrt.
Voraussetzung. Von zwei Punkten einer Geraden sind Divergente gezeichnet. Ein äußerer Winkel heiße a, der innere ihm gleichliegende c.
Behauptung. $\angle$ c > a.

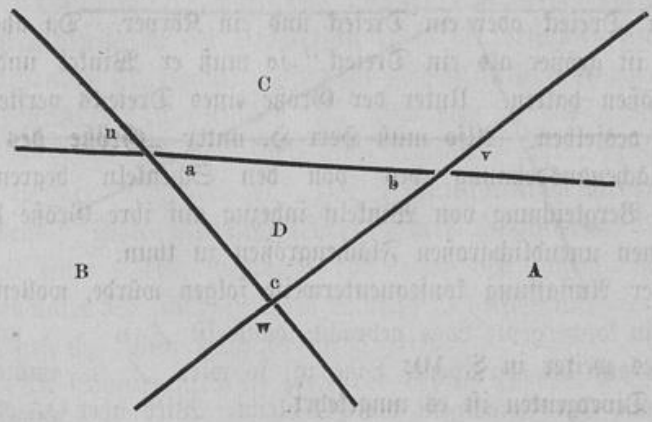
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



Beweis. Man verlängere die Divergenten nach rückwärts und bezeichne den Scheitelwinkel von ∠ a mit n, den von ∠ c mit s, dann ist ∠ s > n nach Lehrsatz 1.,

$$\left.\begin{array}{l}\angle\, s = c\\ \angle\, n = a\end{array}\right\}\text{ als Scheitelwinkel}$$
$$\angle\, c > a.\text{“}$$

Warum schließt H. hier nicht ähnlich wie in Lehrsatz 1: ∠ c besteht aus dem ∠ a und dem Flächenstück F, folglich ist ∠ c > a.? Antwort: Weil diese Schlußweise auch bei Parallelen zulässig wäre, bei denen aber doch ∠ c = a sein soll. Doch davon später. —



Bei 3 sich schneidenden Geraden würde aus beistehender Figur nach H.'scher Betrachtungsweise folgen:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\angle u = \angle a = D + A$$
$$\angle v = \angle b = D + B$$
$$\angle w = \angle c = D + C$$

also: $= \angle u + v + w = (a + b + c) = 3\,D + A + B + C$

Es ist aber die ganze Ebene: $E = D + A + B + C + \angle u + \angle v + \angle w$,
mithin: $E = D + \angle a + b + c - 3\,D + \angle (a + b + c)$
oder: $E = 2\,(a + b + c) - 2\,D$
folglich: $\frac{1}{2}E + D = a + b + c$

Man würde also den Lehrsatz erhalten: „Die Summe der Dreieckswinkel ist **um die Dreiecksfläche größer** als die halbe Ebene oder ein gestreckter Winkel."

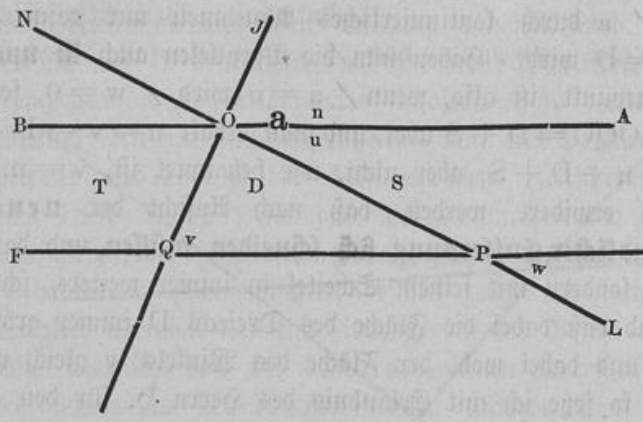
So lange man unter „Winkel" die unbegrenzte Flächenausdehnung desselben versteht, enthält dieser Satz auch nichts Falsches; denn er liefert nur die Gleichung $\infty = \infty + D$. Ein Schüler dürfte nun aber schwer begreifen, wie neben diesem Satz auch der gewöhnliche richtig sein könne: „Die Summe der Dreieckswinkel ist **gleich** einem gestreckten Winkel." —

Sehen wir uns nun in §. 12 den Beweis des Lehrsatzes an: „An Parallelen sind (je zwei) Gleichliegende gleich."

Voraussetzung AB ‖ CF, ... der Gleichliegende zu n heiße v.

Behauptung. $\angle n = v$.

Beweis. Man denke sich die AB um Punkt O



drehbar und zu QC in konvergente Lage gebracht, dann ist $\angle n > v$ nach §. 10 Satz 1. Dreht man nun OA auf die divergente Lage zu, so wird $\angle n$ immer kleiner, bleibt aber doch $> v$, solange OA konvergent der QC bleibt. Wird aber OA oder QC divergent, so ist $\angle n < v$ nach §. 10 Satz 2. Bevor aber $\angle n$, der $> v$ war, durch allmähliches Abnehmen $< v$ werden kann, muß er einmal $= v$ sein. Dies kann aber weder der Fall sein, wenn OA konvergent der QC, noch divergent der QC ist, d. h. also nur dann, wenn, OA d. i. BA‖QC d. i. FC ist."

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dieser Beweis wäre ganz schön, wenn er nicht ein sogenannter „erschlichener" wäre. Denn im §. 10 ist der **Winkel** offenbar als **Flächengröße** aufgefaßt. Hier wird auf einmal der **Winkel** als eine durch **Drehung** des einen Schenkels **kontinuierlich wachsende oder abnehmende Größe** eingeführt, ohne daß bewiesen ist, daß sich die unendlichgroße **Fläche** eines Winkels **wirklich kontinuierlich** ändert, oder ob nicht möglicherweise, wie es ja im Gebiete des Unendlichen häufig vorkommt, an einer Stelle eine **Diskontinuität** eintritt.

Sehen wir uns die Sache genauer an!

Nach dem in §. 10 Lehrsatz 1 angewandten Verfahren muß man sagen: Der Winkel v (als Fläche) besteht aus dem Dreieck D, dem Streifen AOPC oder S und dem Winkel n, also $v = D + S + n$: Das hieße: **„Bei Parallelen ist ein innerer Winkel größer als der gleichliegende äußere."**

In §. 10 heißt es: Der $\angle$ a besteht aus dem Flächenstück F d. i. in unserer letzten Figur JOPC $= \angle n + S$ und $\angle w$. Es ist also:

$$a = n + S + w$$

Ebenso besteht $\angle$ v aus demselben Flächenstück $F = n + S$ und dem Dreieck D,

$$\text{also } v = n + S + D.$$

Durch Subtraktion erhält man $a - v = w - D$

$$\text{oder } a = v + w - D.$$

Es kann also $\angle$ a durch kontinuierliches Abnehmen nur dann gleich v werden, wenn gleichzeitig $w = D$ wird. Haben nun die Parallelen auch **in unendlicher Entfernung keinen** Schnittpunkt, ist also, wenn $\angle a = n$ wird, $\angle w = 0$, so geht das Dreieck D in den Streifen $AOQC = D + S$ über, und man erhält $n = v - D - S$, was dasselbe ist, wie vorhin, $v = n + D + S$, aber nicht, wie behauptet ist, $v = n$.

Sollte aber erwidert werden, daß nach Ansicht der **neuern Gelehrten Parallelen in unendlicher Entfernung sich schneiden müssen,** und daß also der Winkel w nicht verschwinde, sondern mit seinem Scheitel in immer weitere, schließlich unendliche Entfernung rücke, und daß dabei die Fläche des Dreiecks D immer größer und schließlich auch unendlich groß und dabei wohl der Fläche des Winkels w gleich werden könne, wodurch $a = v$ würde, so setze ich mit Erlaubnis des Herrn H. für den unendlich entfernten Winkel w seinen gleichen Scheitelwinkel, der aus dem Dreieck D, dem Streifen $BOQF = T$ und dem Winkel $BON = u$ besteht, also $w = D + T + u$ und erhalte:

$$a = v + D + T + u - D \text{ oder } a = v + T + u.$$

Nun ist aber $a = n + u$ folglich $n = v + T$.

Dasselbe Resultat erhält man, wenn man für n und v die Scheitelwinkel setzt, sofort aus der Figur, vorausgesetzt, daß die Winkel als Flächengrößen betrachtet werden. Es

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

würde sich also im Widerspruch zu dem vorigen Satze ergeben: „Bei Parallelen ist ein **innerer** Winkel **kleiner** als der gleichliegende **äußere.**" Die Folgerung nun: „Da $\angle n$ nicht gleichzeitig größer und kleiner als $\angle v$ sein kann, muß $\angle n = \angle v$ sein" ist aber für Flächengrößen auch nicht zulässig; denn aus $n = v + T$ und $n = v - D - S$ würde folgen $T + D + S = 0$, d. h. die Fläche des ganzen Streifens zwischen den Parallelen müßte $= 0$ sein, während doch die Anschauung zeigt, daß sie ebenfalls ∞ ist und durch vergrößerte Entfernung der Parallelen noch beliebig wachsen kann. Es folgt also nur daraus, daß die Auffassungsweise der **Winkelgröße als einer Flächengröße** eine **falsche** ist. Übrigens hätte meines Erachtens Herr H. durch das Studium der vor mehreren Jahren als Programm-Abhandlung erschienenen **„Mathematischen Studie"** (betreffend das Unendliche) des früheren Direktors der Reichenbacher Realschule Dr. Liersemann belehrt worden sein sollen, daß man mit **unendlichen** Größen nicht so operieren dürfe wie mit **endlichen,** wenn man sich nicht in Widersprüche verwickeln wolle.

Hat nun aber der Verfasser der Abhandlung in §. 12 richtig die Größe des Winkels als **Drehungsgröße** aufgefaßt, so ist allerdings der Satz des Beweises richtig: „Bevor aber Winkel n, der größer als v war, durch allmähliges Abnehmen kleiner als v werden kann, muß er einmal gleich v sein;" aber der ganze Beweis ist trotzdem falsch, da er sich auf §. 10 stützt, in welchem von einer Drehungsgröße des Winkels keine Rede war. Denn wird die Größe eines Winkels durch die größere oder kleinere Drehung des einen Schenkels gemessen, so kann man unmöglich sagen: **„Ein Winkel ist größer als ein Dreieck,"** da die Größe eines Dreiecks niemals durch Drehung gemessen wird.

Der Verfasser hat also in dem Bestreben, eine **neue Parallelentheorie** aufzustellen, einen groben Verstoß gegen die **Logik** begangen, insofern er in derselben Schlußreihe demselben **Begriff „Winkel"** erst eine **Flächengröße** und dann eine **Drehungsgröße** substituierte.

Merkwürdigerweise wird aber in der Hoffmann'schen Zeitschrift für mathematischen Unterricht (Jahrgang 1882, S. 328) von dem Programmreferenten für Schlesien von der betreffenden Arbeit gesagt: „Mit besonderem **pädagogischen Geschick** ist das so heikle Kapitel **der Parallelen** behandelt." Pädagogisches Geschick zeigt sich doch nicht dadurch, daß man eine Schwierigkeit scheinbar beseitigt, indem man die Gesetze der Logik unbeachtet läßt. — Ich hoffe deshalb, daß bei dem vorhandenen Überflusse an mathematischen Leitfaden und Lehrbüchern es bei der betreffenden „Probe eines Leitfadens" geblieben und der Leitfaden selbst noch nicht erschienen ist. —

Der Begriff **„Größe des Winkels"** ist wie jeder andere **räumliche Größenbegriff** eine **Bewegungsgröße.** Durch die Bewegung eines Punktes erhält man bei festbleibendem Ziele eine **gerade,** bei sich kontinuierlich änderndem Zielpunkte eine **krumme** Linie; unter der Größe der erzeugten Linie versteht man in beiden Fällen die Größe der erfolgten Bewegung, resp. des zurückgelegten Weges, die man **Länge** nennt. Die Be-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wegung einer Geraden kann auf zweifache Art geschehen, entweder durch **Parallelverschiebung,** wobei alle Punkte gleichmäßig ihre Lage ändern, oder durch **Drehung** der Geraden um einen festen Punkt. Im ersten Falle erhalten wir als Gebilde einen **Ebenenstreifen**, und die Größe der Bewegung nennen wir **Breite,** eine Größe, die qualitativ von Länge nicht verschieden ist. Durch Parallelverschiebung einer begrenzten **Strecke** ergiebt sich als Produckt von Länge und Breite der Begriff „**Flächengröße**" u. s. w. Qualitativ von dieser Art der Bewegung verschieden ist die zweite als **Drehung** bezeichnete Bewegungsart. Durch sie erhalten wir das Raumgebilde, welches wir **Winkel** nennen. Die **Größe des Winkels** ist daher weder eine **Längen-** noch eine **Flächengröße,** sondern eine **Drehungsgröße.** Da bei der Drehung einer Geraden jeder Punkt derselben einen **Kreisbogen** beschreibt, so mißt man die Größe der zurückgelegten Drehung dadurch, daß man angiebt, der **wievielte Teil** ein so erzeugter Kreisbogen von der Peripherie des ganzen Kreises ist. —

Nachdem wir also den Begriff „Größe des Winkels" mit „Drehungsgröße" indentifiziert haben, könnte es scheinen, als müsse die **Definition des Winkels** lauten: „Unter dem **Winkel** zweier von einem Punkte ausgehenden Geraden (resp. Strahlen) versteht man die **Größe der Drehung,** durch welche die eine Gerade in die Lage der anderen gelangt." (cf. Rottok, Lehrbuch der Planimetrie). Diese Definition wäre allerdings die einzig richtige, wenn wir es in der **Geometrie** (resp. Planimetrie) zunächst nur mit räumlichen **Größen** zu thun hätten. Kambly sagt allerdings in §. 1: „Die Geometrie ist derjenige Teil der Mathematik, welcher sich mit den **räumlichen Größen** beschäftigt." Besser heißt es jedenfalls in Mink's Lehrbuch der Geometrie. §. 5: „Körper, Flächen, Linien, Punkte und deren Verbindungen werden unter der gemeinschaftlichen Benennung **Raumgebilde** zusammengefaßt. Die Wissenschaft von den **Eigenschaften** derselben heißt **Geometrie**. Ähnlich sagt Worpitzky in §. 6: „Jede der Betrachtung unterworfene Zusammenstellung von Raumteilen, Flächen Linien, Punkten heißt eine **Figur**. Diejenige Wissenschaft, welche die Untersuchung der **räumlichen Eigenschaften** der Figuren zum Gegenstande hat, heißt **Geometrie.**" Die Vorstellung der räumlichen Gestalten oder Raumgebilde (Figuren) erhalten wir durch bloße **Anschauung** ohne den Begriff der „Größe" damit zu verbinden, der erst durch die vorgestellte Bewegung der Elemente der Gebilde gewonnen wird. Wie es nun niemandem einfallen wird, das Dreieck als eine **Flächengröße** zu definieren, da ja die Größe des Dreiecks erst aus der eines Parallelogramms gewonnen wird, so darf auch das **Raumgebilde** „Winkel" nicht als **Drehungsgröße** definiert werden, sondern, wie es die Anschauung ergiebt, als **ein Teil der Ebene,** der von zwei Strahlen mit gemeinsamem Anfangspunkt begrenzt wird. Diese Definition verlangt auch, wie Baltzer richtig bemerkt, der Sprachgebrauch, wenn gesagt wird: „Ein Punkt liegt innerhalb oder außerhalb eines Winkels u. s. w." Wenn es sich aber um die

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Größe des Winkels handelt, so hat man nicht an die unendliche Fläche des Ebenenteils, sondern an die „Drehungsgröße" zu denken.

Ganz zu verwerfen ist meines Erachtens die Definition des Winkels als **„Richtungsunterschied** zweier von einem Punkte ausgehenden Geraden," welche leider am meisten verbreitet ist. Denn da Richtung keine Größe ist, so kann nicht eine Richtung von einer andern subtrahiert werden, und das Wort Richtungsunterschied kann deshalb nur soviel bedeuten als „Verschiedenheit der Richtungen;" die größere oder geringere Verschiedenheit der Richtungen kann aber nur durch die jedesmalige Größe des betreffenden Winkels beurteilt werden; daher muß der richtigen Beurteilung des Richtungsunterschiedes der Geraden die Kenntnis des Winkels und seines Größenbegriffs vorausgehen.

Noch ein Punkt ist zu erledigen. Wenn es sich um den Nachweis der Gleichheit zweier Winkel handelt, muß nach den bisherigen Erörterungen nachgewiesen werden, daß ihre Drehungsgrößen gleich sind. Dies geschieht am einfachsten durch den Nachweis, daß beim Aufeinanderlegen mit Scheitel und einem Schenkelpaare auch das andere Schenkelpaar zusammenfallen muß. Zwei Raumgebilde, welche in solche Lage gebracht werden können, daß sie sich decken, sind **kongruent.** Kongruente Raumgebilde haben gleiche Größen. (Daß dies auch für Drehungsgrößen gilt, läßt sich leicht zeigen.) Folglich sind die Winkel gleich. Den umgekehrten Satz: „Gleiche Winkel sind kongruent (lassen sich zur Deckung bringen)" beweist man indirekt mit Hilfe der Worpitsky'schen Definition: „Eine Größe, welche einem Teile einer zweiten gleich ist, heißt **kleiner** als diese, die letztere aber **größer** als jene.

Auf solche Weise wird der Satz von der Gleichheit der korrespondierenden Winkel bei Parallelen am anschaulichsten bewiesen.

4.

Zur Theorie der Parallellinien.

„Parallel sind gerade Linien, die in derselben Ebene liegen und, nach beiden Seiten ins Unendliche verlängert, nach keiner Seite hin mit einander zusammentreffen" heißt es in der 35ten Definition des ersten Buches von **Euklid's** Elementen. Diese Definition, die sich in ähnlichem Wortlaut noch in den meisten elementaren Lehrbüchern (z. B. Reidt, Recknagel, Mink) findet, ist aber in dreifacher Beziehung anfechtbar. Erstens wird durch die Forderung der Verlängerung zweier Geraden ins Unendliche eine unausführbare Konstruktion vorausgesetzt. Zweitens ist das Hauptmerkmal, „das Nichtzusammentreffen," ein negatives, und negative Merkmale geben keine klare Vorstellung vom Wesen der definierten Sache. Drittens ist das Vorhandensein von einander nicht schneidenden

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Geraden vorausgesetzt, ohne daß die Möglichkeit ihrer Existenz nachgewiesen ist. Der Herausgeber der Zeitschrift für mathematischen Unterricht bemerkt im 3ten Jahrgange in seinem Aufsatz: „Die Prinzipien des 1. Buches von Euklids Elementen" zu Nr. 35 Folgendes: „Diese auch bei uns noch gangbare Erklärung von „Parallelen" verlangt eine nicht bloß in praxi (realiter) wegen Mangels der dazu nötigen Vehikel, sondern auch in der Vorstellung in intellectu (idealiter) wegen der dazu nötigen endlosen Zeit **unausführbare Konstruktion:** die Verlängerung zweier Geraden ins Unendliche. Dieser Hinweis auf eine Bedingung, die nicht erfüllt, oder auf eine Untersuchung, die nicht beendet werden kann, gleicht der Behauptung, es liege ganz gewiß im Erdmittelpunkte ein Schatz; man möge ihn nur heben. Wenn man nach dieser Erklärung den Parallelimus zweier Linien prüfen wollte, so wäre es unmöglich, Evidenz darüber zu gewinnen, daß die Geraden sich wirklich nicht treffen." Dazu zitiert er die Äußerung von Fresenius: „Hier wird unserer Vorstellung eine **unerschöpfliche Aufgabe** zugemutet, welche noch dazu, wenn ihr genügt wäre, zu einem **negativen** Resultate führte," und von Becker: „Diese Definition hat fast nur einen **negativen Inhalt** und giebt also keine lebendige Anschauung; überdies setzt sie eine unendliche Verlängerung voraus und führt somit gleich auf ein sehr **gefährliches Gebiet.**" Was speziell den dritten Punkt anbelangt, so behauptet ja die sogenannte **neuere Geometrie** im Gegensatz zu Euklid, daß Parallellinien solche Geraden sind, die einen **unendlich entfernten, resp. unerreichbaren Schnittpunkt** haben. Wenn im Grunde genommen auch der ganze Streit über den unendlichfernen Schnittpunkt der Parallelen auf ein Spiel mit Worten hinausläuft, — denn wenn die Entfernung des betreffenden Schnittpunkts niemals ein Ende hat, so existiert er eben nicht, — und im ganzen nur die Thatsache ausgesprochen wird, daß man gerade Linien, deren Schnittpunkt **sehr weit,** resp. **unmeßbar weit** entfernt ist, ohne ein für endliche Rechnungen fehlerhaftes Resultat als parallel behandeln kann: so ist es jedenfalls ein Mangel der betreffenden Definition, wenn sie ein solches Spiel mit Worten ermöglicht. Einzelne Autoren (Baltzer, Mink, Reidt etc.) beweisen deshalb auch zunächst den Satz: „Gerade Linien, welche mit einer dritten **gleiche Wechselwinkel** bilden, haben keinen Schnittpunkt (sind also parallel)." Der Beweis, welcher sich auf die Kongruenz der von den gleichen Wechselwinkeln gebildeten Flächenstreifen gründet, ist ein indirekter, insofern er aus der Voraussetzung **eines** Schnittpunktes die Existenz eines **zweiten** Schnittpunktes folgert, infolge dessen die Geraden zusammenfallen müßten. Abgesehen davon, daß indirekte Beweise sonst nur bei Umkehrungssätzen angewendet werden, ist durch diesen Beweis auch nur das negative Merkmal des **„Sichnichtschneidens"** nachgewiesen. Daraus folgt aber für die Anschauung nichts Positives über das Wesen des Parallelismus; es ist immer noch die Möglichkeit denkbar, daß parallele Geraden nach dem Unendlichen hin beiderseits divergieren, oder daß sie

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

asymptotisch konvergieren. Aus allem Angeführten geht wohl hervor, daß die Euklidische Definition pädagogisch nicht mehr zeitgemäß ist.

Nach einer andern Definition (z. B. Lieber u. v. Lühmann) sind Parallellinien gerade Linien von **gleicher Richtung**. Aber ist denn der Begriff **„gleiche Richtung"** so einfach und selbstverständlich? Oder bedarf er nicht vielmehr selbst erst einer Definition? Kambly wenigstens scheint dieser Ansicht zu sein; denn er giebt erst den **Grundsatz:** „Wenn zwei gerade Linien in einer Ebene so liegen, daß sie, wie weit man sie auch verlängere, einander nie schneiden, so haben sie **dieselbe** Richtung" und dann die **Erklärung:** „Zwei gerade Linien, die **dieselbe** Richtung haben, **heißen parallel.**" Auf diese Weise kommen wir aber wieder auf die Euklidische Definition zurück. Außerdem ist der Begriff „Richtung" gewissermaßen mit dem der „geraden Linie" identisch. Denn während wir uns bei der geraden Linie den von einem **Ausgangspunkte** nach einem **Zielpunkte** hin **zurückgelegten kürzesten Weg** vorstellen, wird unter Richtung derselbe Weg als erst **zurückzulegender** vorgestellt. **Dieselbe** Richtung setzt also jedenfalls **denselben** Anfangs- und **denselben** Zielpunkt voraus; dies ist aber auf Parallellinien nicht anwendbar, und deshalb ist der Kambly'sche Ausdruck inkorrekt. Von **gleichem** Anfangs- und **gleichem** Zielpunkt bei **gleicher** Richtung zu sprechen wäre widersinnig. Der Ausdruck **„gleiche Richtung"** ist also an und für sich unklar; er erhält, wie wir sehen werden, erst seine Berechtigung und Erklärung mit Hilfe der Parallellinien, kann also nicht zur Definition des Parallelismus verwendet werden. —

Die natürlichste und der **Anschauung** am meisten entsprechende Definition von Parallelen scheint mir zu sein: **Zwei gerade Linien, welche in allen ihren Punkten gleiche Entfernung von einander haben, heissen parallel.**" Diese Definition habe ich allerdings bis jetzt in keinem **Schulbuch** gefunden und zwar aus dem Grunde, wie ich glaube, weil der Begriff **„Entfernung eines Punktes von einer Geraden"** nach der bisherigen Methode aus dem Lehrsatze hergeleitet wird: „Dem größeren Winkel eines Dreiecks liegt die größere Seite gegenüber." Bei Kambly §. 36 Zusatz. Derselbe Begriff läßt sich aber nach meiner Überzeugung viel früher und viel einfacher vermittels des **„rechten Winkels"** *) nicht bloß **veranschaulichen**, sondern auch **„definieren,"** um alsdann bei der **Parallelentheorie** verwendet zu werden. —

Nach Betrachtung der verschiedenen Winkel und Behandlung der Lehrsätze von **Neben- und Scheitelwinkeln** müßte der Lehrgang etwa folgender sein:

Erklärung (1): Jede vom Scheitel aus auf einem Schenkel eines rechten

---

*) Der **„rechte Winkel"** müßte entsprechend seiner Wichtigkeit für die Praxis (die Senkwage, das Bleilot) nicht nur im propädeutischen Unterricht, sondern auch in der Elementarplanimetrie mehr in den Vordergrund treten. Weiteres darüber vielleicht an einer andern Stelle.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Winkels abgemessene Strecke heißt eine **Kathete.** Die Verbindungsstrecke der Endpunkte zweier Katheten desselben Rechten heißt **Hypotenuse:**

Lehrsatz (1): **Gleiche Kathetenpaare haben gleiche Hypotenusen.**

Voraussetzung: Zwei rechte Winkel haben die Katheten AB = $\mathfrak{AB}$ und AC = $\mathfrak{AC}$.

Behauptung: BC = $\mathfrak{BC}$.

Beweis: Infolge der Kongruenz der rechten Winkel ergiebt sich beim Aufeinanderlegen derselben nach der Voraussetzung, daß die Punkte B und $\mathfrak{B}$, sowie C und $\mathfrak{C}$ zusammen fallen müssen. Deshalb decken sich die Hypotenusen BC und $\mathfrak{BC}$, und man erhält: BC = $\mathfrak{BC}$.

Lehrsatz (2): **Jede Kathete ist kleiner als die zugehörige Hypotenuse.**

Voraussetzung: Ein Rechter habe die Katheten a, b und die Hypotenuse c.

Behauptung: $a < c$; $b < c$.

Beweis: Schneidet man auf den Schenkeln eines zweiten Rechten als Katheten die Strecken a und b ab und zieht die zugehörige Hypotenuse, so ist diese = c nach Lehrsatz 1. Legt man nun die beiden Rechten mit den Scheiteln und den Katheten b (oder a) aneinander, so bilden die beiden Rechten einen gestreckten Winkel, mithin die Katheten a (oder b) eine gerade Linie, die Hypotenusen c dagegen eine gebrochene Linie zwischen denselben Punkten. Da der gerade Weg zwischen zwei Punkten der kürzeste ist, so ist $2a < 2c$ (oder $2b < 2c$), folglich: $a < c$ (oder $b < c$), was zu beweisen war.

Lehrsatz (3): **Von einem Punkte kann man nur ein Lot auf eine Gerade fällen.**

Voraussetzung: AB $\perp$ MN.

Behauptung: Vom Punkte A aus ist AB das **einzig mögliche** Lot auf MN.

Beweis: Gäbe es noch ein zweites Lot BC $\perp$ MN, so wäre als Kathete des Rechten ABC : AB < AC und als Hypotenuse des Rechten ACB : AB > AC. Da eine Strecke nicht gleichzeitig kleiner und größer als dieselbe zweite sein kann, so ist die Annahme, daß AC ein zweites Lot auf AB sei, widersinnig, und es ist vom Punkt A aus nur das eine Lot AB auf MN zu fällen möglich.

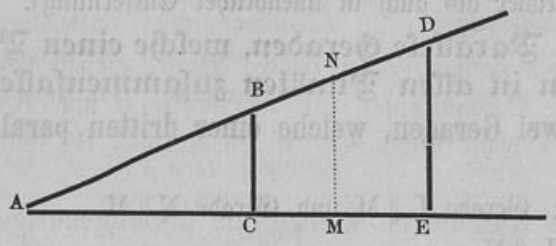
Folgerung (1): **Das Lot von einem Punkte nach einer Geraden ist die kürzeste Strecke, welche man von dem Punkte nach der Geraden ziehen kann.** Denn alle andern Strecken sind Hypotenusen, während das Lot Kathete ist.

Erklärung (2): Die kürzeste Strecke, welche von einem Punkte nach einer Geraden hin möglich ist, mißt die Entfernung des Punktes von der Geraden (oder der Geraden von dem Punkte).

Folgerung (2): **Die Entfernung eines Punktes von einer Geraden (oder einer Geraden von einem Punkte) wird dargestellt durch das von dem Punkte auf die Gerade gefällte Lot.**

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Lehrsatz (4): **Je mehr sich ein Punkt auf einem Schenkel eines Winkels vom Scheitel entfernt (oder dem Scheitel nähert), desto grösser (oder kleiner) wird seine Entfernung von dem andern Schenkel.**



Voraussetzung: AD > AB.

Behauptung: DE > BC.

Beweis: Wäre DE = BC, so müßte, wenn man in M, der Mitte von CE, das Lot MN errichtet und die Halbebene MN ED um MN bis zum Zusammenfallen mit der andern Halbebene dreht, wegen der Kongruenz der rechten Winkel und der Gleichheit der Strecken MC und ME, ME auf MC, Punkt E auf C und ED auf CB, und da ED = CB sein soll, auch Punkt D auf B, folglich auch der Strahl ND mit dem Strahl NB zusammenfallen. Da nun der Strahl NB mit der Graden MA den Punkt A gemeinsam hat, so müßte auch ND einen Punkt mit ME gemeinsam haben. Dies ist aber unmöglich, da zwei Geraden mit zwei gemeinsamen Punkten zusammenfallen. Folglich kann nicht DE=BC sein.

Wäre zweitens DE < BC, so müßte, da die Entfernung sich nicht sprungweise, sondern nur allmählich ändern kann, zwischen B und D ein Punkt D existieren, dessen Entfernung von dem andern Schenkel: DE = BC wäre. Alsdann ergäbe sich die Unmöglichkeit wie im ersten Falle; es bleibt daher nur übrig, daß DE > BC, was zu beweisen war.

Erklärung (3): Zwei Geraden, welche sich in einem Punkte schneiden, heißen **nach** dem Schnittpunkte **zu konvergierend**, **von** dem Schnittpunkte **aus divergierend.**

Lehrsatz (5): Bewegt sich ein Punkt in einer Ebene so, dass seine Entfernung von einer Geraden ungeändert bleibt, so ist die von ihm erzeugte Linie eine Gerade.

Beweis. Läßt man die Entfernung in allen Punkten gleichmäßig abnehmen, so muß sie in allen Punkten gleichzeitig verschwinden, d. h. die erzeugte Linie muß in allen Punkten mit der Geraden zusammenfallen, also selber eine Gerade sein.

Erklärung (4): **Eine Gerade, welche in allen** Punkten von einer andern Geraden **gleiche Entfernung** hat, heißt dieser Geraden **parallel.**

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Folgerung (3): **Zwei Geraden, welche in zwei Punkten gleichweit von einander entfernt sind, sind parallel** (d. h. sie haben in allen Punkten gleiche Entfernung von einander).

Folgerung (4): **Parallele Geraden haben keinen gemeinsamen Punkt** (sowohl in endlicher als auch in unendlicher Entfernung).

Folgerung (5): **Parallele Geraden, welche einen Punkt gemeinsam haben sollen, müssen in allen Punkten zusammenfallen** (sich decken):

Lehrsatz (6): **Zwei Geraden, welche einer dritten parallel sind, sind einander parallel.**

Voraussetzung: Gerade L ‖ M und Gerade N ‖ M.

Behauptung: L ‖ N.

Beweis: Die Entfernung von L und M sei in allen Punkten a, die Entfernung von N und M b, so ist die Entfernung von L und N in allen Punkten entweder gleich der Summe oder gleich der Differenz von a und b; folglich ist L ‖ N.

Folgerung (6): **Durch einen Punkt giebt es zu einer Geraden nur eine Parallele.**

Die Eigenschaften der Winkelpaare bei Parallelen ergeben sich nach den vorausgegangenen Erörterungen auf ganz einfachem naturgemäßen Wege. Nur scheint es mir, bevor ich dies nachweise, zweckentsprechend, erst noch einiges über die Benennungen der betreffenden Winkelpaare zur Erwägung zu stellen.

In den meisten Schulbüchern wird die Lage der 8 Winkel inbezug auf die **„schneidende“** und die **„geschnittenen“** Linien derart inbetracht gezogen, daß man die Winkel als auf **derselben** Seite oder auf **verschiedenen Seiten der schneidenden Geraden liegend** und als **innere** oder **äußere** Winkel inbezug auf **die geschnittenen Geraden** bezeichnet. Man erhält auf diese Weise folgende 4 Arten von Winkelpaaren:

a) je ein innerer und ein äußerer Winkel b) je zwei innere oder zwei äußere Winkel	auf derselben Seite der schneidenden Geraden.
c) je ein innerer und ein äußerer Winkel d) je zwei innere oder zwei äußere Winkel	auf verschiedenen Seiten der schneidenden Geraden.

In logischer Beziehung ist gegen diese Einteilung nichts einzuwenden, und sie wäre ganz brauchbar, wenn nur alle Lehrbücher für dieselben Paare auch dieselben Namen verwendeten; aber in dieser Beziehung sieht es schlimm aus, wie folgende Tabelle zeigt:

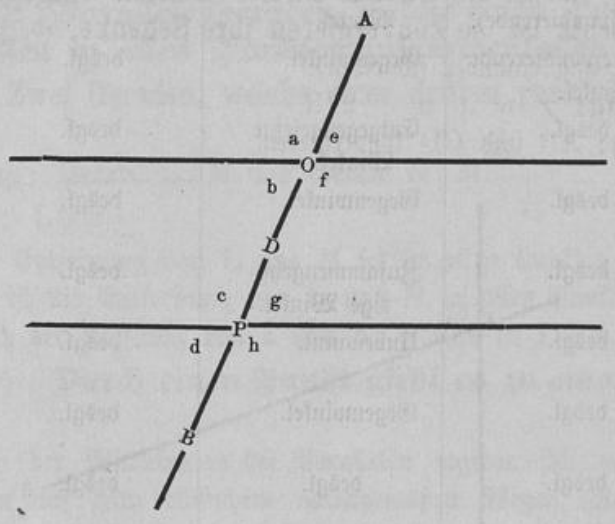
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Verfasser.	Gruppe: a.	b.	c.	d.
Kambly:	Gegenwinkel (Korrespondierende).	Entgegengesetzte Winkel.	Wechselwinkel.	unbenannt.
Reidt:	Korrespondierende Winkel.	Gegenwinkel.	desgl.	konjugierte Winkel.
Focke u. Kraß:	desgl.	Entgegengesetzte Winkel.	desgl.	Ergänzungswinkel
Ohlert:	desgl.	Gegenwinkel.	desgl.	unbenannt.
Gilles:	desgl.	Zusammengehörige Winkel.	desgl.	desgl.
Frischauf:	desgl.	Unbenannt.	desgl.	desgl.
Rottok:	desgl.	Gegenwinkel.	desgl.	desgl.
Schindler:	desgl.	desgl.	desgl.	Gegenwinkel.
Hub. Müller:	desgl.	Ergänzungswinkel	desgl.	unbenannt.
Gauß:	Gegenwinkel.	Entgegengesetzte Winkel.	desgl.	Verschränkte Winkel.
Recknagel:	Korrespondierende Winkel.	Gegenwinkel.	desgl.	unbenannt.
Lieber und v. Lühmann:	Gegenwinkel.	Entgegengesetzte Winkel.	desgl.	desgl.
Gallenkamp:	Gemischte Gegenwinkel.	Äußere oder innere Gegenwinkel.	Äußere oder innere Wechselwinkel.	Gemischte Wechselwinkel.
Mink:	Ungleichartige Gegenwinkel.	Gleichartige Gegenwinkel.	Gleichartige Wechselwinkel.	Ungleichartige Wechselwinkel.
Joh. Müller:	Gemischte Gegenwinkel.	desgl.	Gleichartige Wechselwinkel.	Gemischte Wechselwinkel.

Einfacher gestaltet sich die Sache, wenn man die schneidende Gerade als die **Basis** oder **Grundlinie** der Figur betrachtet und alle Winkel als durch Drehung von der Basis aus entstanden denkt. Da es nur zwei Drehungsrichtungen giebt, von denen die eine der Drehung des Uhrzeigers entspricht, die andre ihr entgegengesetzt ist, so erhalten wir auch in unserer Figur nur 2 Arten von Winkelpaaren:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

1) Winkel von derselben Drehungsrichtung, welche wir **entsprechende** (korrespondierende) Winkel nennen wollen.
2) Winkel von entgegengesetzter Drehungsrichtung, welche **entgegengesetzte** Winkel heißen mögen.



Wir haben also:

1) **entsprechende** Winkel:
   a) a und c, b und d, e und g, f und h;
   b) a und h, b und g, e und d, f und c.
2) **entgegengesetzte** Winkel:
   a) a und d, b und c, e und h, f und g;
   b) a und g, b und h, e und c, f und d.

Will man die unter b) aufgeführten Winkel als auf verschiedenen Seiten der Basis liegend kennzeichnen, so kann dies durch den Zusatz „Wechsel" geschehen, also: **entsprechende** und **entgegengesetzte Wechselwinkel.**

Man erhält alsdann nur den einen

Lehrsatz (7): **Bei Parallelen sind die entsprechenden Winkel gleich, die entgegengesetzten supplementär.**

Beweis. Denkt man sich die Basis AB in D geteilt und das Linienkreuz mit dem Scheitel O so fort bewegt, daß sich A D entlang D B bewegt, bis Punkt O auf P zu liegen kommt, so müssen nach Folgerung (5) die Parallelen zusammenfallen; alsdann decken die entsprechenden Winkel entweder einander oder werden Scheitelwinkel, und die

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

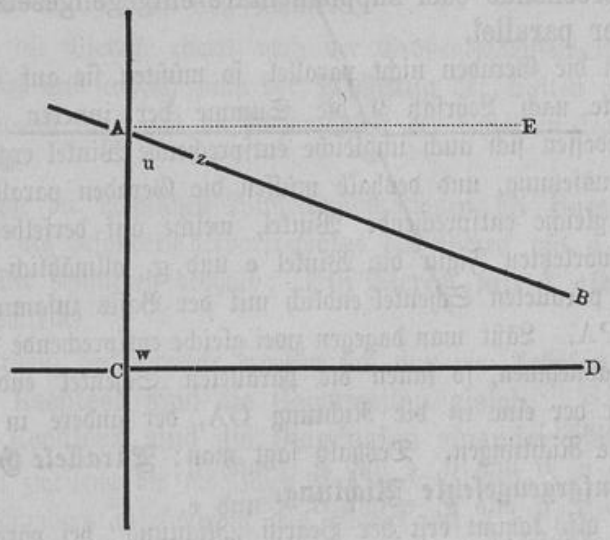
entgegengesetzten Winkel werden Nebenwinkel. Deshalb sind die entsprechenden Winkel gleich und die entgegengesetzten supplementär.

Es erledigt sich nun auch das sozusagen „berüchtigte" Euklidsche 11. Axiom als Lehrsatz folgendermaßen:

Lehrsatz (8): **Wenn die Summe zweier inneren entgegengesetzten Winkel kleiner als 2 Rechte ist, so konvergieren ihre Schenkel** (d. h. sie müssen bei hinreichender Verlängerung einander schneiden).

Voraussetzung: $\angle\, w + u < 2\,R$.

Behauptung: AB und CD konvergieren.



Beweis. Zieht man $AE \parallel CD$, so ist:

$$\angle\, w + z = 2\,R \text{ (Lehrsatz 7.)}$$
$$\angle\, w + u < 2\,R \text{ (Vorauss.)}$$
$$\text{folglich } < w + u < w + z$$
$$\text{mithin auch: } < u < z.$$

Es muß also der Schenkel AB innerhalb des Winkels $EAC = z$ liegen. Da nun nach Lehrsatz (4) die Entfernung der Punkte des Schenkels AB vom Schenkel AE bei zunehmender Entfernung von A immer größer wird, so muß sie einmal gleich und alsdann größer werden als die Entfernung der Parallelen CD von AE, folglich müssen AB und CD sich in einem Punkte schneiden, vorher also konvergieren.

Folgerung (7). **Wenn eine Gerade die eine von zwei Parallelen schneidet, so muß sie bei hinreichender Verlängerung auch die andere schneiden.**

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Lehrsatz (9). Umkehrung von 8): **Zwei konvergierende Geraden bilden mit einer dritten Geraden innere entgegengesetzte Winkel, deren Summe kleiner als zwei Rechte ist.**

Voraussetzung: AB und CD konvergieren.

Behauptung: $\angle w + u < 2$ R.

Beweis: Zieht man AE ∥ CD, so liegt AE außerhalb des Winkels CAB und es ist Winkel $\angle u < z$. Nun ist aber $\angle w + z = 2$ R (Lehrsatz 7); folglich ist $\angle w + u < 2$ R.

Lehrsatz (10). (Umkehrung von 7). **Wenn 2 Geraden mit einer dritten Geraden gleiche entsprechende oder supplementäre entgegengesetzte Winkel bilden, so sind sie einander parallel.**

Beweis: Wären die Geraden nicht parallel, so müßten sie auf einer Seite konvergieren und also müßte nach Lehrsatz 9 die Summe der inneren Winkel kleiner als 2 Rechte sein, infolgedessen sich auch ungleiche entsprechende Winkel ergeben würden. Dies widerspricht der Voraussetzung, und deshalb müssen die Geraden parallel sein.

Läßt man zwei gleiche entsprechende Winkel, welche auf derselben Seite der Basis liegen, z. B. in der vorletzten Figur die Winkel e und g, allmählich gleichmäßig kleiner werden, so fallen die parallelen Schenkel endlich mit der Basis zusammen und zwar beide in dieselbe Richtung PA. Läßt man dagegen zwei gleiche entsprechende Wechselwinkel, z. B. e und d, allmählich abnehmen, so fallen die parallelen Schenkel endlich auch mit der Basis zusammen, aber der eine in die Richtung OA, der andere in die Richtung PB, also in entgegengesetzte Richtungen. Deshalb sagt man: **Parallele Geraden haben entweder gleiche oder entgegengesetzte Richtung.**

Auf diese Weise also kommt erst der Begriff „Richtung" bei parallelen Geraden zur Geltung.

5.

Definition von „Rechteck" und „Rhombus".

Rechteck und Rhombus werden in fast allen Büchern dem Begriff **„Parallelogramm"** untergeordnet. Zum Teil wird sogar **Rechteck** als rechtwinklig-**ungleichseitiges** und **Rhombus** als **schiefwinklig**-gleichseitiges Parallelogramm definiert. Beides ist logisch unhaltbar. Das genus proximum ist für beide Begriffe offenbar nicht „Parallelogramm", sondern „Viereck". Die **wesentlichen** Merkmale, durch die sich Rechteck und Rhombus von andern **Vierecken** unterscheiden, hängen nicht von der Parallelität der Gegenseiten ab, sondern beim Rechteck von der Gleichheit der Winkel, beim Rhombus von der Gleichheit

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

der Seiten, und die Parallelität der Gegenseiten ist nur eine Folge davon. Deshalb darf diese Eigenschaft nicht zur Definition benützt werden, sondern muß als **Lehrsatz** ausgesprochen werden. Die Eigenschaft **„ungleichseitig“** gehört, wie ich später zeigen werde, ebensowenig zum Begriff „Rechteck“ wie die Eigenschaft **„schiefwinklig“** zu dem des Rhombus; es sind dies nur **zufällige** Merkmale, die wieder eine Unterart der betreffenden Begriffe kennzeichnen.

Für die Benennung der Dreiecke giebt entweder die Gleichheit der Winkel oder der Seiten die unterscheidenden Merkmale an. Daß ein recht- oder stumpfwinkliges Dreieck zwar gleichschenklig, aber nicht gleichseitig sein kann, daß ferner ein gleichseitiges Dreieck gleichwinklig sein muß, ist nicht Sache der Definition, sondern der Untersuchung der Abhängigkeit der Winkel und Seiten von einander.

Ebenso müssen die Vierecke zuerst nach der Größenbeschaffenheit ihrer Winkel, dann nach der ihrer Seiten und endlich nach der **Richtung** der Seiten gruppiert, resp. klassifiziert werden. Alsdann kann erst die Abhängigkeit der einzelnen Eigenschaften von einander betrachtet werden.

Wenn man nun die möglichen Winkelkombinationen bei einem Viereck in Betracht zieht, so ergiebt sich als besonders hervortretendes das Viereck mit **4 gleichen** und deshalb **rechten** Winkeln. Wir definieren deshalb: **„Ein Viereck mit 4 gleichen (rechten) Winkeln heißt ein Rechteck.**

Aus der Kongruenz der Dreiecke ergeben sich nun die **Lehrsätze:**

1) In einem Rechteck sind die Gegenseiten gleich.

2) In jedem Rechteck sind die Diagonalen einander gleich.

Betrachtet man zweitens die möglichen Größenverhältnisse der Seiten eines Vierecks, so bietet sich als besonders merkwürdig das Viereck mit 4 gleichen Seiten dar. — **Ein Viereck, dessen 4 Seiten gleich sind, heißt Rhombus.**

Zieht man die Diagonalen, so erhält man infolge der Kongruenz der Dreiecke den **Lehrsatz:** „In jedem Rhombus werden die Winkel durch die Diagonalen halbiert, und die Diagonalen schneiden sich rechtwinklig.“

Wir sehen also, daß die wesentlichen Eigenschaften des Rechtecks und Rhombus die Parallelität der Gegenseiten durchaus nicht voraussetzen.

Berücksichtigen wir drittens die Richtungsgleichheit der Seiten eines Vierecks, so tritt das Viereck mit 2 Paar parallelen Gegenseiten, d. i. das **Parallelogramm,** in den Vordergrund.

Bevor nun die besonderen Eigenschaften der Winkel, Seiten und Diagonalen eines Parallelogramms erörtert werden, ergeben sich die Sätze:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

1) **Jedes Rechteck ist ein Parallelogramm.**
2) **Ein Parallelogramm mit einem rechten Winkel ist ein Rechteck.**
3) **Ein Parallelogramm mit gleichen Diagonalen ist ein Rechteck.**
4) **Jeder Rhombus ist ein Parallelogramm.**
5) **Ein Parallelogramm mit 2 gleichen Nachbarseiten ist ein Rhombus.**
6) **Ein Parallelogramm, dessen Diagonalen sich rechtwinklig schneiden, ist ein Rhombus.**

Sind in einem Rechteck 2 anstoßende Seiten gleich, so sind alle 4 Seiten gleich, und man erhält das **gleichseitige Rechteck** oder **Quadrat.** Sind nur die Gegenseiten gleich, so heißt das Rechteck **ungleichseitig** oder **Oblongum.**

Ist in einem Rhombus ein Winkel ein Rechter, so sind alle 4 Rechte, und wir erhalten als rechtwinkligen Rhombus wieder das **Quadrat.** Ist ein Winkel ein schiefer, so sind alle 4 schief und der Rhombus heißt **schiefwinklig.** Ein besonderer Name für diese Figur fehlt.

Das **Quadrat** ist also sowohl ein gleichseitiges Rechteck als auch ein rechtwinkliger Rhombus; es besitzt deshalb sowohl die besonderen Eigenschaften des Rechtecks als auch die des Rhombus. —

6.

Bemerkungen zum Rechenunterricht.

Der Rechenunterricht an höheren Lehranstalten bezweckt nicht bloß mechanische Fertigkeit im praktischen Rechnen, sondern er soll auch eine Vorbereitung für den Unterricht in der allgemeinen Arithmetik sein. Deshalb sind nicht bloß die verschiedenen Regeln nach logischen Prinzipien zu entwickeln, sondern auch in **formaler** Beziehung hat er auf die späteren Forderungen der Arithmetik möglichst Rücksicht zu nehmen. Es müssen daher die Schüler der untern Klassen einerseits die termini technici sowie die Operationszeichen einschließlich der Klammern verstehen und richtig gebrauchen lernen; andrerseits müssen die verschiedenen Operationen in einer Form eingeübt werden, die auch beim späteren Unterricht in der Arithmetik angewendet werden kann. Im allgemeinen kann in dieser Beziehung das Rechenbuch für Gymnasien ꝛc. von Harms und Kallius empfohlen werden. —

Drei Punkte sind es zunächst, in welchen die von Elementarschulen und auch größtenteils die von andern höheren Lehranstalten zu uns gekommenen Schüler mir Veranlassung gaben, Anstoß an der von ihnen angewandten Form der Rechnung zu nehmen. Der erste Punkt ist die noch immer angewandte Stellung des Divisors vor dem Dividendus und zwar meist mit Anwendung des Doppelpunktes, der doch von allen Mathematikern jetzt

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

nur in der Bedeutung „**dividiert durch**“ gebraucht wird. Die Logik verlangt, daß bei den Grundoperationen die **passive** Zahl, d. h. diejenige, welche durch das Rechnen eine Veränderung erleidet, der **aktiven,** welche die Veränderung bewirkt, vorangestellt wird. Denn ehe eine Änderung eintreten kann, muß erst das vorhanden sein, was verändert werden soll. Auch in pädagogischer Beziehung ist die Nachstellung des Divisors geboten. Denn da der Divisor mit jeder Ziffer des Quotienten multipliziert werden muß, so hat das Auge bei der Voranstellung des Divisors jedesmal einen größern Weg vom Quotienten über den Dividendus hinweg bis zum Divisor zurückzulegen, also eine größere Anstrengung zu erleiden als im andern Falle, wo Divisor und Quotient neben einander stehen. Es wäre daher sehr zu wünschen, daß in **allen** Elementarschulen durch Verfügung die richtige Stellung des Divisors angeordnet würde, wie es vor einigen Jahren durch die Regierung von Münster geschehen ist.

In unserer Simultanschule ist übrigens die richtige Stellung des Divisors bereits seit mehreren Jahren üblich.

Selbstverständlich muß der Divisor nicht nur in Divisionsaufgaben, sondern **überall** dem Dividendus nachgestellt werden, also auch bei der Quadratwurzelberechnung. Der Algorithmus sei folgender:

$$\sqrt{46|33|52|49} = 6807$$

36

1033 : 12

1024

95249 : 1360

95249

Anm. Die unterstrichenen Ziffern bezeichnen die jedesmal für b^2 reservierte Stelle.

Meine zweite Bemerkung betrifft die Multiplikation. Hierbei wird in der Regel noch der Multiplikator **unter** den Multiplikandus gestellt, und das Multiplizieren mit der **niedrigsten** Stelle begonnen, so daß ein Multiplikationsexempel folgende Form zeigt:

$$\begin{array}{r} 502143 \\ \times 426 \\ \hline 3012858 \\ 1004286 \\ 2008572 \\ \hline 213912918 \end{array}$$

Wenn bei der Addition und Subtraktion die Zahlen untereinandergestellt werden, so hat das eine Berechtigung, weil dadurch die gleichnamigen Stellen besser ins Auge fallen. Für die Multiplikation hat aber das Untereinanderstellen keinen Sinn; Multiplikandus und Multiplikator sind gleichberechtigte **Faktoren**; sie gehören daher in dieselbe Zeile.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ferner empfiehlt es sich, die Rechnung mit der **höchsten** Stelle des Multiplikators zu beginnen, so daß vorstehende Aufgabe folgende Form annimmt:

$$\begin{array}{r} 502143 \times 426 = x \\ \hline 2008572 \\ 1004286 \\ 3012858 \\ \hline 213912918 = x \end{array}$$

Unter den Gründen für den Beginn der Rechnung mit der höchsten Stelle des Multiplikators ist der erste rein praktischer Natur. Beim Schreiben der Aufgabe denkt der Schüler nicht an die Anzahl der Stellen des Resultats. Er beginnt möglichst nahe am **linken** Rande der Schiefertafel oder des Heftes, oder mißt, wenn er wirklich an das Resultat denkt, doch in Gedanken den nötigen Raum zu klein ab. Die Folge davon ist, daß bei der Ausrechnung nach der ersten Form die letzten Ziffern jeder Zeile, die weiter nach links kommen sollen, immer mehr zusammengedrängt werden müssen, daß das ganze Exempel infolge dessen unschön aussieht, und daß bei dem Addieren der schlecht unter einander stehenden Stellen leichter Irrtümer möglich sind. Dies wird beim zweiten Verfahren vermieden, da der Raum nach rechts unbeschränkt ist. Fernere Gründe sind:

2) Beim **Kopfrechnen** multipliziert man, wenn der Unterricht nicht etwa rein mechanisch getrieben wird, immer mit der höchsten Stelle des Multiplikators zuerst; warum soll das Verfahren beim schriftlichen Rechnen ein anderes sein?

3) Bei der Buchstabenrechnung wird mit den einzelnen Gliedern des Multiplikators von links nach rechts multipliziert, und dabei rücken die einzelnen Zeilen immer weiter nach rechts, was jedenfalls der Schreibrichtung von links nach rechts entsprechend ist; warum soll man beim elementaren Rechnen umgekehrt verfahren?

4) Die abgekürzte Multiplikation bei Dezimalzahlen ist **nur möglich**, wenn mit der höchsten Stelle des Multiplikators zu multiplizieren begonnen wird; warum sollen die Schüler vorher ein anderes Verfahren einüben, um nachher durch Verwechselung beider in Konfusion zu geraten?

Außerdem wird bei dem zweiten Verfahren das Schreiben von Nullen überflüssig, vorausgesetzt, daß die niedrigste Stelle jedes Teilprodukts genau unter die betreffende Stelle des Multiplikators gesetzt wird. Folgendes Beispiel wird dies veranschaulichen:

Altes Verfahren:

$$\begin{array}{r} 563844 \\ \times 703008 \\ \hline 4510752 \\ 169153200 \\ 39469080 \\ \hline 396386842752 \end{array}$$

Neues Verfahren:

$$\begin{array}{r} 563844 \times 703008 \\ \hline 3946908 \\ 1691532 \\ 4510752 \\ \hline 396386842752 \end{array}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aus den angeführten Gründen möchte ich wünschen, daß das von mir empfohlene Verfahren möglichst bald in allen Schulen Eingang fände.

Der dritte Punkt betrifft die Addition der gemeinen Brüche und zwar besonders das Aufsuchen des sogenannten „Generalnenners" resp. „Hauptnenners." In dieser Beziehung kann ich nicht begreifen, warum das Rechenbuch von Harms und Kallius immer noch die **mechanische** Methode, nach welcher allmählich die gemeinsamen Faktoren der einzelnen Nenner herausgehoben werden, empfiehlt. Wenn auch richtig gesagt wird, daß dieses Herausheben nur mit dem **kleinsten** Primfaktor begonnen werden darf und mit ihm so oft fortgesetzt werden muß, **„bis er in nicht mehr als einem Nenner vorkommt"** (Aufl. VII S. 122), so kommt es doch vor, daß gerade begabte Schüler, welche sehen, daß eine Anzahl Nenner den Faktor 4 oder 8 enthalten, um sich nach ihrer Ansicht das Verfahren zu vereinfachen, diesen Faktor auf einmal herausheben und den Faktor 2 in einem Nenner beibehalten, wodurch der Hauptnenner zu groß wird. — Wenn aber auch auf diese Weise der richtige Generalnenner berechnet ist, so muß behufs der Erweiterung der einzelnen Brüche auf den Generalnenner der Erweiterungsfaktor erst immer mittelst Division des Generalnenners durch den betreffenden Nenner gesucht werden, was bei irgendwie größeren Zahlen doch umständlich ist.

Zur Erläuterung nehme ich das Beispiel aus Harms und Kallius, Seite 123, Nr. 26 a.:

$$\frac{3}{4} + \frac{7}{9} + \frac{5}{8} + \frac{2}{7} + \frac{4}{21} + \frac{9}{10} + \frac{3}{14} = x$$

Von den Nennern 4, 9, 8, 7, 21, 10, 14 können als in andern enthalten 4 und 7 gestrichen werden; es bleiben 9, 8, 21, 10, 14, nach Heraushebung von:

2) 9, 4, 21, 5, 7; nun kann 7 gestrichen werden, und man erhält:
2) 9, 4, 21, 5. Nach Heraushebung von 3 hat man:
2)
3) 3, 4, 7, 5

Dies giebt als Generalnenner:

2. 3. 3. 4. 7. 5 = 2520.

Wenn nun die Schüler die gegebenen Brüche auf den Hauptnenner 2520 erweitern sollen, so werden sie durch allmählige Divisionen die Erweiterungszahlen erhalten:

2520 : 4 = 630; 2520 : 9 = 280
2520 : 8 = 315; 2520 : 7 = 360
2520 : 21 = 120; 2520 : 10 = 252
2520 : 14 = 180; und man erhält also nach dem Satze: „Die Summe gleichnamiger Brüche ist gleich der Summe ihrer Zähler dividiert durch den gemeinschaftlichen Nenner" (S. 120) durch Multiplikation der Zähler mit den Erweiterungsfaktoren:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\frac{1890 + 1960 + 1575 + 720 + 480 + 2268 + 540}{2520} = \frac{9433}{2520}$$

$$= 3\frac{1873}{2520} = x.$$

Während eines mehr als 5jährigen Unterrichts in Quinta habe ich dieses mechanische Verfahren nie angewandt, sondern vorher immer das Zerlegen der Zahlen in Primfaktoren mit Anwendung des Potenzbegriffs so eingeübt, daß die Zerlegung der Zahlen von 1 bis 100 immer gegenwärtig war. (Größere Nenner zu gebrauchen außer etwa 125, 144 und Vielfache der 10 wird kaum notwendig sein, und wenn es geschieht, dann muß die Zerlegung in Primfaktoren schriftlich auch eingeübt sein.) Die Schüler schrieben alsdann beim Abschreiben oder Diktieren der Aufgabe die Zerlegung sofort unter den Nenner, so daß die Aufgabe folgende Gestalt hatte:

$$\frac{3}{4} + \frac{7}{9} + \frac{5}{8} + \frac{2}{7} + \frac{4}{21} + \frac{9}{10} + \frac{3}{14} = x.$$

$$2^2 \quad 3^2 \quad 2^3 \quad 7 \quad 3.7 \quad 2.5 \quad 2.7$$

Dann heißt es: „Der Generalnenner enthält jeden vorhandenen Primfaktor in seiner höchsten vorkommenden Potenz." Es wurde nun unter einen gemeinsamen Bruchstrich der Generalnenner **unausgerechnet** in seinen Faktoren geschrieben, also: $2^3 . 3^2 . 5 . 7$.

Alsdann wurde gezeigt, daß zur Erweiterung der Brüche behufs Gleichnamigmachung die Faktoren des Generalnenners mit dem Zähler zu multiplizieren seien, die in den betreffenden Nennern fehlten. Dabei ist eine Division nicht nötig; es ergeben sich in unserer Aufgabe nun folgende im Kopfe leicht ausführbare Multiplikationen:

$$2 . 5 . 7 . 3^2 . 3 = 1890; \quad 2^3 . 5 . 7 . 7 = 1960$$
$$3^2 . 5 . 7 . 5 = 1575; \quad 2^3 . 3^2 . 5 . 2 = 720$$
$$2^3 . 3 . 5 . 4 = 480; \quad 2^2 . 3^2 . 7 . 9 = 2268$$
$$2^2 . 3^2 . 5 . 3 = 540.$$

Nachdem die Summe der erweiterten Zähler gebildet ist, wird untersucht, ob diese Summe durch Faktoren des Nenners teilbar ist; diese Faktoren werden durch die Division entfernt, und dann wird erst der Hauptnenner durch Multiplikation der noch übrigen Faktoren ausgerechnet.

Bei gemischten Zahlen gestaltet sich das Verfahren vorausgesetzt, daß die gleichnamigen Stellen in horizontaler Richtung, ohne unter einander geschrieben zu sein, addiert werden, formal folgendermaßen:

$$\frac{5}{9} + 3\frac{7}{8} + 9\frac{5}{6} + 17\frac{4}{5} + 84\frac{8}{15} + 116\frac{41}{72} = 233\frac{1}{6}$$

$$3^2 \quad 2^3 \quad 2.3 \quad 5 \quad 3.5. \quad 2^3 . 3^2$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\frac{200+315+300+288+192+205}{2^3.\ \ 3^2.\ \ 5}=\frac{1500}{2^3.3^2.5}=\frac{300}{2^3.3^2}$$

$$=\frac{100}{2^3.3}=\frac{2\,5}{2.3}=\ 4\,\frac{1}{6}$$

Zum Schluß noch einiges über die abgekürzte Multiplikation und Division. Man hält vielfach das Einüben des abgekürzten Rechnens mit Dezimalzahlen für überflüssig, da ja die Schüler der obern Klassen mit Logarithmen zu rechnen pflegen; aber gerade beim Gebrauch der Logarithmentafeln können die Schüler die vorkommenden Interpolationen weit einfacher ausführen, wenn sie abgekürzt multiplizieren und dividieren. Außerdem kommen die Schüler doch auch in die Lage, Rechnungen auszuführen, ohne die Logarithmentafel bei der Hand zu haben, und sie würden ohne abgekürzte Multiplikation und Division die betreffenden Aufgaben dann nur mit größerem Zeitaufwand rechnen können. Ich halte deshalb die Einübung der abgekürzten Multiplikation und Division für notwendig. Nur muß dieselbe eine wirklich praktische sein, und die Schüler dürfen nicht zuviel mit der Bestimmung der Fehlergrenze gequält werden. Als allgemeine Regel gilt: „Man berechnet eine Stelle mehr als verlangt wird und wirft die zuviel berechnete Stelle am Schluß der Rechnung ab. Ist die abgeworfene Ziffer 5 oder größer als 5, so wird die vorhergehende Stelle um eine Einheit erhöht."

Als Erläuterung des Verfahrens mögen folgende Beispiele dienen. Die in Klammer stehenden Buchstaben hinter der Aufgabe bezeichnen die Dezimalstelle, bis zu welcher das Resultat berechnet werden soll.

A. Multiplikation.

a) Der Multiplikand hat soviel Dezimalstellen, als erforderlich sind (d. h. eine mehr als das Resultat haben soll). Alsdann beginnt das abgekürzte Rechnen mit der ersten Dezimalstelle des Multiplikators.

1) $\overline{54{,}3642}.813,\ |\ \underline{45023}\ (t)$

$$\begin{array}{r|l}
4349136 & \\
543642 & \\
1630926 & \\
217457 & \\
27182 & \\
109 & \\
16 & \\
\hline
44222{,}5710 = 44222{,}571 &
\end{array}$$

NB. Bei der Multiplikation mit den rechts von dem Abkürzungsstrich stehenden Ziffern wird immer eine Stelle des Multiplikandus abgeworfen; ihr Einfluß auf die nächstfolgenden aber berücksichtigt*).

*) Die von rechts nach links nach einander abgeworfenen Ziffern sind **über**strichen, die Ziffern des Multiplikators, welche von links nach rechts nach einander diese Abwerfung veranlassen, **unter**strichen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2) $\overline{12{,}345}.0,\underline{64732}$ (h)

$$\begin{array}{r|l} 7407 & \\ 494 & \\ 86 & \\ 4 & \\ \hline 7{,}991 & = 7{,}99 \end{array}$$

3) $0,\overline{54024}.0,\underline{00463}$ (zt)

$$\begin{array}{r|l} 216 & \\ 32 & \\ 2 & \\ \hline 0{,}00250 & = 0{,}0025 \end{array}$$

b) Der Multiplikandus hat weniger Dezimalstellen, als erforderlich sind. Dann rückt der Abkürzungsstrich soviel Stellen nach rechts, als Stellen fehlen.

1) $0,2\overline{46}.0,8\underline{37}$ (t)

$$\begin{array}{r|l} 1968 & \\ 74 & \\ 17 & \\ \hline 0{,}2059 & = 0{,}206 \end{array}$$

2) $\overline{635{,}2}.4{,}30\underline{148}$ (h)

$$\begin{array}{r|l} 25408 & \\ 19056 & \\ 635 & \\ 254 & \\ 50 & \\ \hline 2732{,}299 & = 2732{,}30 \end{array}$$

c) Der Multiplikandus hat mehr Dezimalstellen, als erforderlich sind. Dann rückt der Abkürzungsstrich soviel Stellen nach links (eventuell in den Multiplikandus), als Stellen zu viel sind.

1) $3,\overline{14265}.4\underline{30{,}614}$ (h)

$$\begin{array}{r|l} 1257060 & \\ 94280 & \\ 1885 & \\ 31 & \\ 12 & \\ \hline 1353{,}268 & = 1353{,}27 \end{array}$$

2) $0,34\overline{641}\,37.0,\underline{425}$ (zt)

$$\begin{array}{r|l} 13856 & \\ 693 & \\ 173 & \\ \hline 0{,}14722 & = 0{,}1472 \end{array}$$

B. Division.

Anstatt im Dividendus Nullen anzuhängen, wirft man im Divisor allmählich die Ziffern von rechts nach links ab.

a) Im Divisor lassen sich soviel Stellen abwerfen, als Dezimalstellen für das Resultat erforderlich sind. Dann rückt man im Divisor das Komma ans Ende und im Dividendus gleichviel Stellen nach rechts.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

1) 7,42356 : 2,34568 (zt) = 3,1648

742356 : $2\overline{34568}$ = 3,16478
703704
38652
23457
15195
14074
1121
938
183
164
19
19

2) 1 : 3,1862 (t) = 0,314

10000 : $3\overline{1862}$ = 0,3138
9559
441
319
122
95
27
25
2

3) 7,0008 : 1,682 (h) = 4,16

7001 : $1\overline{682}$ = 4,162
6728
273
168
105
101
4
3
1

b) Im Divisor lassen sich mehr Stellen abwerfen, als Dezimalstellen erforderlich sind. Alsdann rückt man das Komma nur soweit nach rechts, daß im Divisor soviel Stellen hinter dem Komma stehen, als überzählig sind und setzt im Resultat das Komma, sobald die Einerstelle abgeworfen werden soll.

1) 3,6 : 2,750637 (t) = 1,309

36000 : $27\overline{506,37}$ = 1,3085
27506
8494
8252
242
227
15
14
1

2) 0,6532 : 4,10245 (h) = 0,16

653 : $4\overline{102,45}$ = 0,159
410
243
205
38
37
1

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

c) Im Divisor lassen sich weniger Stellen abwerfen, als Dezimalstellen erforderlich sind. Alsdann wird das Komma soviel Stellen gerückt, als der Divisor Dezimalstellen hat, und der Dividendus muß hinter dem gerückten Komma noch soviel Dezimalstellen haben, als fehlen. Sind sie nicht vorhanden, so werden sie durch Nullen ersetzt.

1) 68,45378 : 7,36 (t) = 9,301

6845,38 : $7\overline{36}$ = 9,3008
6624
2213
2208
58
58

2) 56,783 : 75,89 (zt) = 0,7482

5678,30 : $7\overline{589}$ = 0,74822
53123
36600
30356
6244
6071
173
152
21
15
6

Inhalt:

1. Praktische Dreiteilung des Winkels.
2. Elementarer Beweis für die Existenz eines Grenzwertes von $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ bei unendlich wachsendem n.
3. Zum Begriff „Größe des Winkels".
4. Zur Theorie der Parallellinien.
5. Definition von „Rechteck" und „Rhombus".
6. Bemerkungen zum Rechenunterricht.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

c) Im D … werfen, als Dezimalstellen erforderlich sind. Alsdann … zerückt, als der Divisor Dezimalstellen hat, und der … kten Komma noch soviel Dezimalstellen haben, als fehl … werden sie durch Nullen ersetzt.

1) 68,4
684
662
22
22

2) 56,783 : 75,89 (zt) = 0,7482

5678,30 : $7\overline{589}$ = 0,74822
53123
36600
30356
6244
6071
173
152
21
15
6

f :

1. Praktische Dr
2. Elementarer A … es von $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ bei unendlich wachsendem n.
3. Zum Begriff
4. Zur Theorie
5. Definition vo
6. Bemerkungen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf