Vorwort.

An unserer Schule werden seit einem Jahrzehnt für den geometrischen Unterricht in den Oberklassen die Betrachtungsweisen der Geometrie der Lage nutzbar gemacht. In der Obersekunda lassen sich an die Lehre von den Doppelverhältnissen die neuen Begriffe ungezwungen anknüpfen und dann bei den Sätzen von den harmonischen Punkten, Pascal, Pol und Polare, Brianchon usw. verwerten und einüben. In der Prima werden die Grundtatsachen der Geometrie der Lage von neuem und zwar auf rein geometrischem Wege, also im Staudtschen Sinne, abgeleitet und soweit fortgeführt, daß Ortsaufgaben über die Kegelschnitte gleichzeitig analytisch-geometrisch und rein-geometrisch gelöst werden.

Hiermit ist aber die Verwertbarkeit der Geometrie der Lage für den Schulunterricht nicht erschöpft. Es gibt noch ein Gebiet, das geradezu zur projektiven Behandlung drängt, das ist die geometrische Optik. Bereits Möbius hat erkannt, daß optische und kollineare Verwandtschaft identisch sind, und Abbe hat gezeigt, „daß alle die allgemeinen Sätze, welche die Lagen- und Größenverhältnisse optischer Bilder betreffen, sowie die dabei aufgestellten Begriffe (die Brennweiten, Brennpunkte und sonstigen Kardinalelemente) gänzlich unabhängig sind von den physikalischen und geometrischen Bedingungen ihres Entstehens; daß sie nichts anderes sind, als der Ausdruck mathematisch notwendiger Beziehungen, die sich überall da vorfinden müssen, wo auf irgend eine Weise zwei Raumgebiete in solche Beziehung zueinander treten, daß eine optische Abbildung des einen in das andre stattfindet.“ (Czapski, Grundzüge der Theorie der optischen Instrumente S. 28.) Mit andern Worten: Alle allgemeinen Sätze der optischen (kollinearen) Verwandtschaft folgen aus der Definition: „Zwei Grundgebilde der zweiten Stufe

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

heißen kollinear, wenn sie so aufeinander bezogen sind, daß je zwei ungleichartigen Elementen Pq des einen Systems, von welchem das erstere P im letzteren liegt, zwei ungleichartige Elemente $P_1\, q_1$ des andern entsprechen, von welchen das erstere P_1 ebenfalls im letzteren liegt." (v. Staudt, Geometrie der Lage, Nr. 121.)

Es wäre nicht schwer gewesen, die folgende Darstellung unmittelbar an diese Definition der kollinearen Verwandtschaft anzuknüpfen; es brauchte dann nur der Satz hinzugefügt zu werden, daß es in zwei in einander liegenden kollinearen ebenen Systemen immer mindestens einen Punkt und eine Gerade gibt, die sich selbst entsprechen. Dieser Punkt und diese Gerade sind aber für zentrierte optische Systeme unmittelbar gegeben, und deshalb durfte dieser Satz in einer für die Schule bestimmten Darstellung fehlen.

Wie überall in der Geometrie der Lage zeigte sich auch hier, daß ihre Sätze erst fruchtbar und einfach sind, wenn sie in der allgemeinsten Form erfaßt werden. Die Knotenpunkte und Hauptpunkte z. B. würden einer rein geometrischen Darstellung nur schwer zugänglich sein, wenn man ihre Definitionen unmittelbar an den uneigentlichen Punkt und die ihm optisch verwandten Punkte, die Brennpunkte, anknüpfen wollte. Überraschend einfach aber ergeben sich ihre Eigenschaften, wenn man statt von dem uneigentlichen Punkt von einem beliebigen Punkt ausgeht. Jedem Punkt der optischen Achse lassen sich zwei Punkte zuordnen, die zu ihm in derselben Beziehung stehen, wie der erste Knotenpunkt und der erste Hauptpunkt zum ersten Brennpunkt. Da diese Punkte zugleich die laterale und die angulare Vergrößerung des Punktes bestimmen, so habe ich sie im folgenden, um eine kurze Bezeichnung zu haben, den lateralen und den angularen Punkt genannt. Diese Zuordnung der lateralen und der angularen Punkte zu den Punkten der Achse ist eine projektive, und daraus ergeben sich als besondere Fälle die Eigenschaften der Knotenpunkte und der Hauptpunkte.

Von selbst drängte sich die Aufgabe auf, den Zusammenhang zwischen der optischen, lateralen und angularen Projektivität (welche durch die Zuordnung Objekt und Bild, Objekt und lateraler Punkt, Objekt und angularer Punkt

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

entstehen) zum Gegenstand einer allgemeineren Untersuchung zu machen. Diese führte zu der Erkenntnis, daß es sich hier um „konjugierte“ Projektivitäten handelt (s. mein Lehrbuch Ebene Geometrie der Lage, Göschen, 1900), also um Sätze, die zur Herstellung von Involutionen von höherer als der zweiten Ordnung benutzt werden (s. Wiener, Rein geometrische Theorie der Darstellung binärer Formen durch Punktgruppen auf der Geraden). Ferner zeigte sich, daß die laterale und die angulare Projektivität nicht zwei beliebige unter den der optischen Projektivität der Achse konjugierten Projektivitäten sind, sondern daß für sie der Satz von Lagrange-Helmholtz gilt. Den hier angedeuteten Zusammenhang habe ich näher ausgeführt in dem Aufsatz Konjugierte Projektivitäten und adjungierte Involutionen, der in den Mitteilungen der mathematischen Gesellschaft in Hamburg von 1907 erschienen ist. —

Die Grundlage für den physikalischen Teil der folgenden Arbeit bildet die lichtvolle Darstellung der Optik von Lummer (Band II_1 von Pfaundlers Lehrbuch der Physik), die trotz der Beschränkung auf elementare Hülfsmittel eine vortreffliche Einführung in den Geist der Abbeschen Forschungen bietet.

Über die Form der folgenden Darstellung ist noch zu bemerken, daß sie sich unmittelbar an meinen kleinen Leitfaden Elemente der Geometrie der Lage, Göschen, 1900, anschließt und deshalb auch äußerlich in der Zählung der Paragraphen und Nummern als Fortsetzung desselben behandelt ist.

Hamburg, im März 1907.

Rudolf Böger.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf