Die Parameterdarstellung der Kurven 3. Ordnung vom Geschlecht 1 wird gewöhnlich so ausgeführt, dass man die allgemeine Gleichung einer Kurve 3. Grades durch besondere Wahl des Koordinatensystems auf eine spezielle Form wie $x_1 x_3^2 - x_2(x_1 - x_2)(k^2 x_1 - x_2) = 0$ bringt und mit Hilfe der Substitutionen $\varrho x_1 = \mu^3$, $\varrho x_2 = \mu$, $\varrho x_3 = \sqrt{(1-\mu^2)(1-k^2\mu^2)}$ elliptische Funktionen einführt. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Parameterdarstellung der Kurven 3. Ordnung durch Thetafunktionen, indem man derselben die kanonischen Gleichungen der Kurve $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6m x_1 x_2 x_3 = 0$ oder $(x_1 + x_2 + x_3)^3 + 6n x_1 x_2 x_3 = 0$ zugrundelegt. Die folgenden Ausführungen stützen sich auf die Abhandlung des Herrn Prof. Krazer „Über Thetafunktionen, deren Charakteristiken aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind" Math. Ann. Bd. 22 pg. 416 und folgende und eine Arbeit von mir „Beiträge zur Behandlung des Umkehrproblems von Thetafunktionen, deren Charakteristiken aus Dritteln ganzer Zahlen bestehen", Festschrift zum 150jährigen Bestehen der Friedrich-Alexanders-Universität Erlangen, dargebracht vom Neuen Gymnasium zu Nürnberg.

1.

Die Kurve 3. Ordnung

$$U \equiv x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6m x_1 x_2 x_3 = 0 \quad (K_1)$$

und ihre Hessesche Kurve

$$H \equiv -m^2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + (1 + 2m^3) x_1 x_2 x_3 = 0 \quad (K_2)$$

bestimmen das Kurvenbüschel $\lambda U + \mu H = 0$, dessen Grundpunkte die neun Wendepunkte der Kurve $U = 0$ sind. Unter den Kurven dieses Büschels sind auch solche enthalten, die in drei Gerade zerfallen. Dieselben sind dadurch charakterisiert,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

dass ihre Hessesche Kurve mit der Grundkurve zusammenfallen muss. Auf einer aus drei Geraden bestehenden Kurve 3. Ordnung ist nämlich jeder Punkt ein Wendepunkt; denn in jedem liegen drei aufeinanderfolgende Punkte auf einer Geraden. Will man also die Gleichungen der Kurven 3. Ordnung ableiten, die aus drei Geraden bestehen und die in dem Kurvenbüschel $\lambda U + \mu H = 0$ enthalten sind, so hat man nur die Hessesche Form dieser Gleichung zu bilden und die Bedingung aufzustellen, unter der diese mit der ursprünglichen übereinstimmt. Die Hessesche Form der Gleichung $\lambda U + \mu H = 0$ lautet:

$$-\tfrac{1}{4}(\lambda - m^2\mu)\left(2m\lambda + \tfrac{\mu}{3}(1+2m^3)\right)^2\{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3\} + \{(\lambda - m^2\mu)^3 + \tfrac{1}{4}\left(2m\lambda + \tfrac{\mu}{3}(1+2m^3)\right)^3\}x_1x_2x_3 = 0.$$

Diese kann in die Form $\lambda' U + \mu' H = 0$*) gebracht werden, wenn man setzt:

$$\text{a)}\quad (1+8m^3)\lambda' = -\tfrac{1}{4}(1+2m^3)(\lambda - m^2\mu)\left(2\mu\lambda + \tfrac{\mu}{3}(1+2m^3)\right)^2 + m^2\{(\lambda - m^2\mu)^3 + \tfrac{1}{4}\left(2m\lambda + \tfrac{\mu}{3}(1+2m^3)\right)^3\},$$

$$\text{b)}\quad (1+8m^3)\mu' = \tfrac{6}{4}m(\lambda - m^2\mu)\left(2m\lambda + \tfrac{\mu}{3}(1+2m^3)\right)^2 + (\lambda - m^2\mu)^3 + \tfrac{1}{4}\left(2m\lambda + \tfrac{\mu}{3}(1+2m^3)\right)^3.$$

Nach einigen Umformungen ergeben sich aus diesen Gleichungen die weiteren

$$\left.\begin{aligned} \text{a)}\quad \lambda' &= -\tfrac{1}{3}S\lambda^2\mu - \tfrac{1}{36}T\lambda\mu^2 + \tfrac{2}{9}S^2\mu^3, \\ \text{b)}\quad \mu' &= \lambda^3 + \tfrac{1}{3}S\lambda\mu^2 + \tfrac{1}{108}T\mu^3, \end{aligned}\right\} \quad \text{(I)}$$

wobei $S = m(1-m^3)$ und $T = 1 - 20m^3 - 8m^6$ ist.

Soll aber die Gleichung $\lambda' U + \mu' H = 0$ mit der gegebenen Gleichung $\lambda U + \mu H = 0$ übereinstimmen, so muss $\frac{\lambda'}{\mu'} = \frac{\lambda}{\mu}$ sein; die Bedingungsgleichung hiefür ist

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{-\tfrac{1}{3}S\lambda^2\mu - \tfrac{1}{36}T\lambda\mu^2 + \tfrac{2}{9}S^2\mu^3}{\lambda^3 + \tfrac{1}{3}S\lambda\mu^2 + \tfrac{1}{108}T\mu^3},$$

woraus unmittelbar die Gleichung resultiert

$$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 + \tfrac{2}{3}S\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \tfrac{1}{27}T\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) - \tfrac{1}{27}S^2 = 0 \quad \text{(II)};$$

*) Salmon, Höhere Kurven pg. 238.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

die Wurzeln derselben sind

$$(\frac{\lambda}{\mu})_1 = m^2,\ (\frac{\lambda}{\mu})_2 = -\tfrac{1}{3}(1-m)^2,\ (\frac{\lambda}{\mu})_3 = -\tfrac{1}{3}(\tau-m)^2,\ (\frac{\lambda}{\mu})_4 = -\tfrac{1}{3}(\tau^2-m)^2,$$

wobei τ und τ^2 für 3. Einheitswurzeln stehen.

Setzt man die vier Werte von $\frac{\lambda}{\mu}$ der Reihe nach in die Gleichung

$$\lambda U+\mu H \equiv (\frac{\lambda}{\mu}-m^2)(x_1{}^3+x_2{}^3+x_3{}^3)+(6m\frac{\lambda}{\mu}+(1+2m^3))x_1x_2x_3 = 0$$

ein, so gehen daraus vier Gleichungen von Kurven 3. Ordnung hervor, die in je drei Gerade zerfallen und die zu dem syzygetischen Kurvenbüschel gehören, nämlich

$$\left.\begin{aligned} x_1x_2x_3 &= 0,\\ x_1{}^3+x_2{}^3+x_3{}^3-3x_1x_2x_3 &= 0,\\ x_1{}^3+x_2{}^3+x_3{}^3-3\tau x_1x_2x_3 &= 0,\\ x_1{}^3+x_2{}^3+x_3{}^3-3\tau^2x_1x_2x_3 &= 0. \end{aligned}\right\}\ \text{(III)}.$$

Die drei letzten Gleichungen (III) lassen sich in lineare Faktoren

$$(x_1+k_1x_2+k_2x_3)(x_1+k_1'x_2+k_2'x_3)(x_1+k_1''x_2+k_2''x_3)$$

zerlegen; zwischen den Grössen k bestehen neun Gleichungen, deren Wurzeln sich in folgender Weise zuordnen:

k_1,	k_1',	k_1''	k_2,	k_2',	k_2''
1,	τ,	τ^2;	1,	τ^2,	τ,
τ^2,	τ,	1;	τ^2,	1,	τ,
τ,	τ^2,	1;	τ,	1,	τ^2.

Führt man die Faktorenzerlegung der Gleichungen (III) aus, so lauten diese

$$\left.\begin{aligned} x_1x_2x_3 &= 0,\\ (x_1+x_2+x_3)(x_1+\tau x_2+\tau^2x_3)(x_1+\tau^2{}_2+\tau x_3) &= 0,\\ (x_1+\tau^2x_2+\tau^2x_3)(x_1+\tau x_2+x_3)(x_1+x_2+\tau x_3) &= 0,\\ (x_1+\tau x_2+\tau x_3)(x_1+\tau^2x_2+x_3)(x_1+x_2+\tau^2x_3) &= 0. \end{aligned}\right\}\ \text{(III')}.$$

Für die Schnittpunkte der Kurven (K_1) und (K_2) bestehen ferner die Gleichungen $x_1{}^3+x_2{}^3+x_3{}^3 = 0$ und $x_1x_2x_3 = 0$. Die letzte sagt aus, dass die Wendepunkte der beiden Kurven (K_1) und (K_2) auf den Seiten $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ des Koordinaten-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

dreiecks liegen. Löst man die beiden Gleichungen nach x_1, x_2, x_3 auf, so erhält man als Koordinaten der neun Wendepunkte

$$\begin{array}{lllll} & & x_1 : x_2 : x_3 = & & \\ \text{auf } x_1 = 0: & 0 : 1 : -1; & 0 : 1 : -\tau^2; & 0 : 1 : -\tau; \\ \text{auf } x_2 = 0: & -\tau^2 : 0 : 1; & -1 : 0 : 1; & -\tau : 0 : 1; \\ \text{auf } x_3 = 0: & 1 : -\tau^2 : 0; & 1 : -\tau : 0; & 1 : -1 : 0. \end{array}$$

Diese Koordinaten befriedigen aber gleichzeitig die Gleichungen (III'), woraus hervorgeht, dass unter dem syzygetischen Büschel von Kurven 3. Ordnung $\lambda U + \mu H = 0$ zwölf Gerade sich befinden, von denen immer je drei durch die neun Wendepunkte der Kurve 3. Ordnung gehen, während auf jeder drei Wendepunkte liegen. Eine Gerade, die durch drei Wendepunkte geht, heisst Wendepunktlinie. Die Gleichungen der zwölf Wendepunktlinien im ursprünglichen Koordinatensystem lauten demnach:

$$\left.\begin{array}{lll} x_1 = 0, & x_2 = 0, & x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, & x_1 + \tau x_2 + \tau^2 x_3 = 0, & x_1 + \tau^2 x_2 + \tau x_3 = 0, \\ x_1 + \tau^2 x_2 + \tau^2 x_3 = 0, & x_1 + \tau x_2 + x_3 = 0, & x_1 + x_2 + \tau x_3 = 0, \\ x_1 + \tau x_2 + \tau x_3 = 0, & x_1 + \tau^2 x_2 + x_3 = 0, & x_1 + x_2 + \tau^2 x_3 = 0. \end{array}\right\} \text{(IV)}.$$

Drei von den zwölf Geraden, die zusammen die neun Wendepunkte enthalten, bilden ein Wendepunktdreieck und da sich diese zwölf Geraden in vier Gruppen von je dreien anordnen, die alle zwölf Wendepunkte enthalten, so gibt es vier Wendepunktdreiecke. Durch jeden Wendepunkt gehen vier Wendepunktlinien. Von den neun Wendepunkten sind nur drei reell, also ist auch nur ein Wendepunktdreieck reell. Ferner sind vier Wendepunktlinien und vier Ecken von Wendepunktdreiecken reell. Unter letzteren befinden sich die drei Ecken des reellen Dreiecks und die Ecke, die der Verbindungsgeraden der drei reellen Wendepunkte in dem zugehörigen Dreiecke gegenüberliegt.

Will man von einem Wendepunktdreieck zu einem andern übergehen, so kann man diesen Übergang bewerkstelligen, indem man z. B. setzt:

$$y_1 = x_1 + x_2 + x_3, \quad y_2 = x_1 + \tau x_2 + \tau^2 x_3, \quad y_3 = x_1 + \tau^2 x_2 + \tau x_3;$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

alsdann ist

$$y_1^3+y_2^3+y_3^3 = 3(x_1^3+x_2^3+x_3^3)+18x_1x_2x_3 \text{ und}$$
$$y_1y_2y_3 = x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3,$$

woraus sich die Gleichung

$$y_1^3+y_2^3+y_3^3+6m'y_1y_2y_3$$
$$= 3(1+2m')\{x_1^3+x_2^3+x_3^3\}+18(1-m')x_1x_2x_3 = 0$$

ergibt, wenn

$$m = \frac{1-m'}{1+2m'} \text{ oder } m' = \frac{1-m}{1+2m} \text{ ist.}$$

2.

Professor Krazer hat in seiner anfangs erwähnten Abhandlung: Über Thetafunktionen, deren Charakteristiken aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind,*) sämtliche Gleichungen hergeleitet und hinsichtlich ihrer gegenseitigen Beziehungen untersucht, die zwischen den neun Thetafunktionen bestehen, die aus der Gleichung

$$\vartheta[{}^{\varepsilon}_{\varepsilon'}](v) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} e^{a(m+\frac{\varepsilon}{3})^2+2(m+\frac{\varepsilon}{3})(v+\frac{\varepsilon'}{3}\pi i)}$$

hervorgehen, wenn die Charakteristiken ε und ε' der Reihe nach die Werte 0, 1, —1 annehmen. Ist $[\alpha]$ eine beliebige der acht eigentlichen Perioden-Charakteristiken und $[\beta]$ eine zweite davon unabhängige, wobei aber $[\alpha]$ und $[\beta]$ der Einfachheit halber für $[{}^{\alpha}_{\alpha'}]$, $[{}^{\beta}_{\beta'}]$ steht, so kann man die acht eigentlichen Perioden-Charakteristiken in der Form schreiben

$$[\alpha],\ [-\alpha];\ [\beta],\ [\beta+\alpha],\ [\beta-\alpha];\ [-\beta],\ [-\beta+\alpha],\ [-\beta-\alpha].$$

Drei verschiedene Charakteristiken, deren Summe der Charakteristik [0] kongruent ist, bilden ein Dreiersystem. Man erkennt dann, dass die drei Charakteristiken eines Dreiersystems allgemein durch drei Charakteristiken von der Form

*) Siehe auch Krazer, Lehrbuch der Thetafunktionen, S. 390 u. ff.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$[\eta|\eta+\alpha|\eta-\alpha]$ repräsentiert werden und dass es, da kongruente Charakteristiken als nicht verschieden anzusehen sind, im ganzen zwölf verschiedene Dreiersysteme gibt, die sich in vier Komplexe von je drei Systemen gruppieren, nämlich

$$[\,0\,|\,\alpha\,|\,-\alpha\,];\ [\,0\,|\,\beta\,|\,-\beta\,];\ [\,0\,|\beta+\alpha|-\beta-\alpha];$$
$$[\,\beta\,|\,\beta+\alpha\,|\,\beta-\alpha\,];\ [\,\alpha\,|\,\alpha+\beta\,|\,\alpha-\beta\,];\ [\,\beta-\alpha\,|\,2\beta\,|\,-2\alpha\,];$$
$$[-\beta|-\beta+\alpha|-\beta-\alpha];\ [-\alpha|-\alpha+\beta|-\alpha-\beta];\ [-\beta+\alpha|\,2\alpha\,|\,-2\beta\,];$$
$$[\,0\,|\beta-\alpha|-\beta+\alpha];$$
$$[\,\beta+\alpha\,|\,2\beta\,|\,2\alpha\,];$$
$$[-\beta-\alpha|-2\alpha|\,-2\beta\,].$$

Neben den neun Thetapotenzen $\vartheta^3[\eta](v)$ gibt es zwölf Thetaprodukte $\vartheta[\eta](v)\vartheta[\eta+\varrho](v)\vartheta[\eta-\varrho](v) = \vartheta[\eta,\varrho](v)$, deren Charakteristikensumme der Charakteristik $[0]$ kongruent ist. Von diesen zwölf Thetaprodukten lassen sich, wie Prof. Krazer zeigte, durch drei Thetaprodukte, deren Charakteristiken einen der obigen Komplexe von je drei Dreiersystemen bilden, die neun übrigen und die neun Thetapotenzen linear ausdrücken. Setzt man zur Abkürzung

$$e^{\frac{2}{3}\varepsilon\varepsilon'\pi i} = \tau^{|\varepsilon|},\quad e^{\frac{2}{3}(\varepsilon\eta'-\varepsilon'\eta)\pi i} = \tau^{\varepsilon|\eta} \text{ und } \tau^{|\eta|}\vartheta[\eta,\varrho](v) = \vartheta\{\eta,\varrho\}(v)$$

so lautet die allgemeine Thetaformel, die ein Thetaprodukt durch drei von einander linear unabhängige Thetaprodukte ausdrückt:

$$\begin{aligned}\vartheta\{\eta,\beta+m\alpha\}(v)\sum_n \tau^{n(\beta+m\alpha)|\eta}\tau^{mn\alpha|\eta+n\beta}\vartheta\{\eta+n\beta,\alpha\}(0)\\ = \sum_n \tau^{n(\beta+m\alpha)|\eta-mn\alpha}\vartheta\{0,\beta+m\alpha\}(0)\,\vartheta\{n\beta,\alpha\}(v)\end{aligned} \tag{A}$$
$$m,\, n = 0,\, 1,\, -1.$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich zunächst drei weitere, wenn man der Zahl m die Werte $0,\ 1,\ -1$ erteilt und aus jeder dieser drei Gleichungen gehen drei neue hervor, wenn man über die Charakteristik $[\eta]$ besonders verfügt und zwar werden für die späteren Ausführungen an Stelle der Charakteristik $[\eta]$ der Reihe nach die Charakteristiken

$[0], [\alpha], [-\alpha]$; $[0], [\beta-\alpha], [-\beta+\alpha]$; $[0], [\beta+\alpha], [-\beta-\alpha]$ gesetzt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Betrachtet man zunächst die vier Quotienten

$$c_1 = \frac{\vartheta\{\beta,\alpha\}(0)}{\vartheta\{0,\alpha\}\,0}, \qquad c_2 = \frac{\vartheta\{\alpha,\beta\}(0)}{\vartheta\{0,\beta\}(0)},$$

$$c_3 = \frac{\vartheta\{\alpha,\beta+\alpha\}(0)}{\vartheta\{0,\beta+\alpha\}(0)}, \qquad c_4 = \frac{\vartheta\{\alpha,\beta-\alpha\}(0)}{\vartheta\{0,\beta-\alpha\}(0)}$$

und setzt $\tau^{\alpha|\beta} = \tau$, $\tau^{\beta|\alpha} = \tau^2$, so liefert die Formel (A) für das Argument $v = 0$ folgende zwölf lineare Beziehungen zwischen den vier Grössen c:

$$\left.\begin{array}{llll}
c_2 = \dfrac{1-c_1}{1+2c_1}, & c_1 = \dfrac{1-c_2}{1+2c_2}, & c_4 = \dfrac{1-c_3}{1+2c_3}, & c_3 = \dfrac{1-c_4}{1+2c_4}, \\[2ex]
\tau c_3 = \dfrac{1-\tau c_1}{1+2\tau c_1}, & \tau^2 c_3 = \dfrac{1-\tau^2 c_2}{1+2\tau^2 c_2}, & \tau c_1 = \dfrac{1-\tau c_3}{1+2\tau c_3}, & \tau^2 c_1 = \dfrac{1-\tau^2 c_4}{1+2\tau^2 c_4}, \\[2ex]
\tau^2 c_4 = \dfrac{1-\tau^2 c_1}{1+2\tau^2 c_1}, & \tau c_4 = \dfrac{1-\tau c_2}{1+2\tau c_2}, & \tau^2 c_2 = \dfrac{1-\tau^2 c_3}{1+2\tau^2 c_3}, & \tau c_2 = \dfrac{1-\tau c_4}{1+2\tau c_4}.
\end{array}\right\}(\mathrm{A}_0)$$

Da $c_2 c_3 c_4 = \dfrac{1-c_1^{\,3}}{1+8c_1^{\,3}}$ ist, so bestehen zwischen den Grössen c folgende Beziehungen mit invariantem Charakter:

$$\frac{c_1(1-c_1^{\,3})}{1+8c_1^{\,3}} = \frac{c_2(1-c_2^{\,3})}{1+8c_2^{\,3}} = \frac{c_3(1-c_3^{\,3})}{1+8c_3^{\,3}} = \frac{c_4(1-c_4^{\,3})}{1+8c_4^{\,3}} \quad (\mathrm{J}).$$

Setzt man endlich

$$\begin{array}{lll}
\vartheta\{0,\alpha\}(v) = x_1, & \vartheta\{\beta,\alpha\}(v) = x_2, & \vartheta\{-\beta,\alpha\}(v) = x_3, \\
\vartheta\{0,\beta\}(v) = y_1, & \vartheta\{\alpha,\beta\}(v) = y_2, & \vartheta\{-\alpha,\beta\}(v) = y_3, \\
\vartheta\{0,\beta+\alpha\}(v) = z_1, & \vartheta\{\beta-\alpha,\beta+\alpha\}(v) = z_2, & \vartheta\{-\beta+\alpha,\beta+\alpha\}(v) = z_3, \\
\vartheta\{0,\beta-\alpha\}(v) = t_1, & \vartheta\{\beta+\alpha,\beta-\alpha\}(v) = t_2, & \vartheta\{-\beta-\alpha,\beta-\alpha\}(v) = t_3,
\end{array}$$

so lauten die nach obiger Angabe aus Formel (A) gewonnenen Gleichungen

$$(\mathrm{T}'_1)\left\{\begin{array}{l} ky_1 = x_1 + x_2 + x_3\,, \\ ky_2 = x_1 + \tau^2 x_2 + \tau x_3\,, \\ ky_3 = x_1 + \tau x_2 + \tau^2 x_3\,; \end{array}\right. \qquad (\mathrm{T}''_1)\left\{\begin{array}{l} kz_1 = x_1 + \tau x_2 + \tau x_3\,, \\ kz_2 = \tau^2 x_1 + \tau^2 x_2 + \tau x_3\,, \\ kz_3 = \tau^2 x_1 + \tau x_2 + \tau^2 x_3\,; \end{array}\right.$$

$$(\mathrm{T}'''_1)\left\{\begin{array}{l} kt_1 = x_1 + \tau^2 x_2 + \tau^2 x_3\,, \\ kt_2 = \tau x_1 + \tau x_2 + \tau^2 x_3\,, \\ kt_3 = \tau x_1 + \tau^2 x_2 + \tau x_3\,, \end{array}\right.$$

wobei k für $\sqrt[3]{\dfrac{1-3c_1^{\,2}+2c_1^{\,3}}{c_1^{\,2}}}$ steht. Entsprechend erhält man

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

noch drei Gruppen von solchen Gleichungen (T) und zwar werden in der zweiten Gruppe die Grössen x_ν, z_ν, t_ν ($\nu = 1, 2, 3$) durch y_1, y_2, y_3, in der dritten die Grössen x_ν, y_ν, t_ν durch z_1, z_2, z_3 und in der letzten die Grössen x_ν, y_ν, z_ν durch t_1, t_2, t_3 ausgedrückt.

Multipliziert man von je drei zusammengehörigen Gleichungen (T_1) die linken und entsprechend die rechten Seiten derselben miteinander, so besteht zwischen den drei in ihnen vorkommenden Thetaprodukten die Gleichung

$$(W_p) \qquad \vartheta^3\{0,a\}(v)+\vartheta^3\{\beta,a\}(v)+\vartheta^3\{-\beta,a\}(v) - \frac{1+2c_1^{\,3}}{c_1^{\,2}}\vartheta\{0,a\}(v)\vartheta\{\beta,a\}(v)\vartheta\{-\beta,a\}(v) = 0.$$

Entsprechend den vier Gruppen von Gleichungen (T) gibt es vier Gleichungen (W_p), von denen die zweite die Thetaprodukte $\vartheta\{0,\beta\}(v)$, $\vartheta\{a,\beta\}(v)$, $\vartheta\{-a,\beta\}(v)$, die dritte die Thetaprodukte $\vartheta\{0,\beta+a\}(v)$, $\vartheta\{\beta-a,\beta+a\}(v)$, $\vartheta\{-\beta+a,\beta+a\}(v)$ und endlich die vierte die Thetaprodukte $\vartheta\{0,\beta-a\}(v)$, $\vartheta\{\beta+a,\beta-a\}(v)$, $\vartheta\{-\beta-a,\ \beta-a\}(v)$ verbindet.

Fasst man die drei Thetaprodukte

$$\vartheta\{0,a\}(v) = x_1,\ \vartheta\{\beta,a\}(v) = x_2,\ \vartheta\{-\beta,a\}(v) = x_3$$

als homogene Punktkoordinaten in der Ebene auf, so wird durch die Gleichung (W_p), indem man v als beweglichen Parameter betrachtet, eine ebene Kurve definiert, deren Gleichung

$$x_1^{\,3}+x_2^{\,3}+x_3^{\,3}+6m_1x_1x_2x_3 = 0$$

ist, wobei die Grösse m_1 für $-\dfrac{1+2c_1^{\,3}}{6c_1^{\,2}}$ steht.

Diese Gleichung wird von den drei Thetaprodukten identisch erfüllt, was immer der Wert des veränderlichen Parameters v ist. Die Gleichungen (T) dagegen sind als Transformationsgleichungen aufzufassen, die eine der vier Gleichungen (W_p) in eine andere überführen. So ergeben sich beispielsweise aus den Gleichungen (T'_1) die Beziehungen

$$x_1x_2x_3 = \frac{k^3}{27}(y_1^{\,3}+y_2^{\,3}+y_3^{\,3})-\frac{k^3}{9}y_1y_2y_3\,,$$

$$x_1^{\,3}+x_2^{\,3}+x_3^{\,3} = \frac{k^3}{9}(y_1^{\,3}+y_2^{\,3}+y_3^{\,3})+\frac{2k^3}{3}y_1y_2y_3\,,$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

woraus man unter Berücksichtigung der Gleichungen (A_0) die neue Gleichung

$$y_1^3+y_2^3+y_3^3-\frac{1+2c_2^3}{c_2^2}y_1y_2y_3=0 \quad \text{erhält.}$$

Die Übereinstimmung der Gleichungen (W_p) mit der Gleichung (K_1) einer Kurve 3. Ordnung im Art. 1 sagt aus, dass die Koordinaten eines Punktes der Kurve 3. Ordnung ohne Doppelpunkt durch drei Thetaprodukte, zwischen denen keine lineare Beziehung besteht, als Funktionen eines veränderlichen Parameters dargestellt werden können und da vier Gleichungen (W_p) existieren, so lässt sich diese Parameterdarstellung auf vier Arten durch die oben mit x_ν, y_ν, z_ν, t_ν ($\nu = 1, 2, 3$) bezeichneten Thetaprodukte bewerkstelligen.

Vergleicht man endlich die Gleichungen (IV) für die zwölf Wendepunktlinien im Art. 1 mit den aus der Thetaformel (A) gewonnenen Gleichungen (T), in denen neun Thetaprodukte durch drei von einander unabhängige Thetaprodukte ausgedrückt werden, so erkennt man, dass die zwölf Gleichungen $\vartheta\{\eta,\varrho\}(v)=0$ die zwölf Wendepunktlinien einer Kurve 3. Ordnung vorstellen. Von diesen Gleichungen enthalten je drei sämtliche neun Wendepunkte und bilden ein Wendepunktdreieck, wenn die drei in ihnen auftretenden Dreiersysteme von Charakteristiken einem von den oben aufgeführten Charakteristikenkomplexen angehören.

3.

Um die Frage zu erledigen, für welche Argumente v das Thetaprodukt $\vartheta\{\eta,\varrho\}(v)$ verschwindet, sucht man zunächst die Werte von v, für die $\vartheta[{}^{\varepsilon}_{\varepsilon'}](v)$ Null wird. Versteht man unter μ eine ganze Zahl, so wird die unendliche Reihe

$$\vartheta[{}^{\varepsilon}_{\varepsilon'}](v)=\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} e^{a(m+\frac{\varepsilon}{3})^2+2(m+\frac{\varepsilon}{3})(v+\frac{\varepsilon'}{3}\pi i)}$$

völlig ungeändert bleiben, wenn man darin m mit $-m-\mu$ vertauscht. Addiert man obige Summe und die, die man aus ihr durch Vertauschen von m mit $-m-\mu$ erhält, so wird

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$2\vartheta\left[{\varepsilon \atop \varepsilon'}\right](v)$$
$$=\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} e^{\frac{\varepsilon^2}{9}a+\frac{2}{3}\varepsilon(v+\frac{\varepsilon'}{3}\pi i)}\Big\{e^{a(m+\mu)^2-2(m+\mu)(v+\frac{\varepsilon}{3}a+\frac{\varepsilon'}{3}\pi i)}$$
$$+e^{am^2+2m(v+\frac{\varepsilon}{3}a+\frac{\varepsilon'}{3}\pi i)}\Big\}.$$

Da $e^{+\pi i}=-1$ ist, so ist $e^{\eta}+e^{\varrho}=0$, wenn η und ϱ um ungerade Vielfache von πi von einander verschieden sind. Demnach wird obige Summe Null werden, sobald

$$a(m+\mu)^2-2(m+\mu)(v+\tfrac{\varepsilon}{3}a+\tfrac{\varepsilon'}{3}\pi i) \text{ und } am^2+2m(v+\tfrac{\varepsilon}{3}a+\tfrac{\varepsilon'}{3}\pi i)$$

um ein ungerades Vielfaches von πi sich unterscheiden. Findet dieses nicht für einen bestimmten Wert von m, sondern für jeden beliebigen Wert von m statt, so werden sämtliche Glieder der Reihe Null. Die Differenz obiger Ausdrücke

$$(2m+\mu)\big(a\mu-2(v+\tfrac{\varepsilon}{3}a+\tfrac{\varepsilon'}{3}\pi i)\big)$$

verwandelt sich in $\pi i(2m+\mu)\nu$, sobald man darin

$$v+\tfrac{\varepsilon}{3}a+\tfrac{\varepsilon'}{3}\pi i=\frac{\nu\pi i+\mu a}{2}$$

setzt. Dadurch wird diese Differenz ein ungerades Vielfaches von πi, sobald man μ und ν so wählt, dass $\nu(2m+\mu)$ ungerade ausfällt. Dies erreicht man, wenn man für μ und ν gleichzeitig eine ungerade Zahl nimmt. Sind p und q beliebige Zahlen, so wird $\vartheta\left[{\varepsilon \atop \varepsilon'}\right](v)$ Null werden, wenn

$$v=\frac{(2p+1)\pi i+(2q+1)a}{2}-\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}$$

ist, wobei man wie früher unter $\left[{\varepsilon \atop \varepsilon'}\right]$ die Grösse $\frac{\varepsilon}{3}a+\frac{\varepsilon'}{3}\pi i$ versteht.

Das Thetaprodukt $\vartheta\{\eta,\varrho\}(v)$ wird demnach verschwinden, wenn man für v einen der folgenden drei Werte setzt

$$v=\frac{(2p+1)\pi i+(2q+1)a}{2}-\begin{bmatrix}\eta\\ \eta'\end{bmatrix},$$
$$v=\frac{(2p+1)\pi i+(2q+1)a}{2}-\begin{bmatrix}\eta+\varrho\\ \eta'+\varrho'\end{bmatrix},$$
$$v=\frac{(2p+1)\pi i+(2q+1)a}{2}-\begin{bmatrix}\eta-\varrho\\ \eta'-\varrho'\end{bmatrix}.$$

Da nach dem Vorausgehenden jedes Thetaprodukt eine Gerade darstellt, die durch drei Wendepunkte der Kurve geht,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

so geben die Nullwerte dieser Funktionen die Argumente der neun Wendepunkte. Bezeichnet man $\frac{(2p+1)\pi i+(2q+1)a}{2}$ mit $\frac{\gamma}{3}$ und setzt $[\varrho]$ für $[{}^{\varrho}_{\varrho'}]$, so lauten die Argumente für die neun Wendepunkte der Kurve 3. Ordnung:

$$v^{(1)} = \tfrac{\gamma}{3}-[0], \quad v^{(2)} = \tfrac{\gamma}{3}-[a], \quad v^{(3)} = \tfrac{\gamma}{3}-[-a],$$
$$v^{(4)} = \tfrac{\gamma}{3}-[\beta], \quad v^{(5)} = \tfrac{\gamma}{3}-[\beta+a], \quad v^{(6)} = \tfrac{\gamma}{3}-[\beta-a],$$
$$v^{(7)} = \tfrac{\gamma}{3}-[-\beta], \quad v^{(8)} = \tfrac{\gamma}{3}-[-\beta+a], \quad v^{(9)} = \tfrac{\gamma}{3}-[-\beta-a].$$

Numeriert man die neun Wendepunkte nach den oben angeführten Argumenten, so gruppieren sie sich auf die zwölf Wendepunktlinien nach dem folgenden Schema

(x_1) 1, 2, 3; (y_1) 1, 4, 7; (z_1) 1, 5, 9; (t_1) 1, 6, 8;
(x_2) 4, 5, 6; (y_2) 2, 5, 8; (z_2) 2, 6, 7; (t_2) 3, 5, 7;
(x_3) 7, 8, 9; (y_3) 3, 6, 9; (z_3) 3, 4, 8; (t_3) 2, 4, 9.

Aus obiger Tabelle geht hervor, dass immer nur drei solche Wendepunkte auf einer Geraden liegen, für die die Charakteristikensumme kongruent 0 (mod 3) ist oder deren zugehörigen Charakteristiken ein Dreiersystem bilden. Durch jeden Wendepunkt gehen vier Wendepunktlinien, die sich wieder in vier Gruppen teilen. Um diese Gruppierung kenntlich zu machen, führt man nach der Formel

$$\vartheta[\sigma](v) = e^{\frac{\sigma^2}{9}a+\frac{2}{3}\sigma(v+\frac{\sigma'}{3}\pi i)}\vartheta[0](v+|\sigma|)$$

die einzelnen Thetafunktionen auf die Funktion $\vartheta[0](v)$ zurück, indem man gleichzeitig für die Charakteristiken $[{}^{\alpha}_{\alpha'}]$ und $[{}^{\beta}_{\beta'}]$ die besonderen $[{}^{1}_{0}]$ und $[{}^{0}_{1}]$ setzt. Dann ist

$$x_1 = \vartheta\{0,a\}(v) = e^{\frac{2a}{9}} \quad \vartheta[0](v) \quad \vartheta[0](v+\tfrac{a}{3}) \quad \vartheta[0](v-\tfrac{a}{3}),$$
$$x_2 = \vartheta\{\beta,a\}(v) = e^{\frac{2a}{9}} \quad \vartheta[0](v+\tfrac{\pi i}{3})\vartheta[0](v+\tfrac{a}{3}+\tfrac{\pi i}{3})\vartheta[0](v-\tfrac{a}{3}+\tfrac{\pi i}{3}),$$
$$x_3 = \vartheta\{-\beta,a\}(v) = e^{\frac{2a}{9}} \quad \vartheta[0](v-\tfrac{\pi i}{3})\vartheta[0](v+\tfrac{a}{3}-\tfrac{\pi i}{3})\vartheta[0](v-\tfrac{a}{3}-\tfrac{\pi i}{3});$$

$$y_1 = \vartheta\{0,\beta\}(v) = \quad \vartheta[0](v) \quad \vartheta[0](v+\tfrac{\pi i}{3}) \quad \vartheta[0](v-\tfrac{\pi i}{3}),$$
$$y_2 = \vartheta\{a,\beta\}(v) = e^{\frac{a}{3}+2v}\vartheta[0](v+\tfrac{a}{3})\vartheta[0](v+\tfrac{a}{3}+\tfrac{\pi i}{3})\vartheta[0](v+\tfrac{a}{3}-\tfrac{\pi i}{3}),$$
$$y_3 = \vartheta\{-a,\beta\}(v) = e^{\frac{a}{3}-2v}\vartheta[0](v-\tfrac{a}{3})\vartheta[0](v-\tfrac{a}{3}+\tfrac{\pi i}{3})\vartheta[0](v-\tfrac{a}{3}-\tfrac{\pi i}{3});$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$z_1 = \vartheta\langle 0,\beta+\alpha\rangle(v) = e^{\frac{2a}{9}+\frac{4}{9}\pi i}\vartheta[0](v)\vartheta[0](v+\tfrac{a}{3}+\tfrac{\pi i}{3})\vartheta[0](v-\tfrac{a}{3}-\tfrac{\pi i}{3}),$$
$$z_2 = \vartheta\langle \beta-\alpha,\beta+\alpha\rangle(v) = e^{\frac{2a}{9}-\frac{8}{9}\pi i}\vartheta[0](v-\tfrac{a}{3}+\tfrac{\pi i}{3})\vartheta[0](v-\tfrac{\pi i}{3})\vartheta[0](v+\tfrac{a}{3}),$$
$$z_3 = \vartheta\langle -\beta+\alpha,\beta+\alpha\rangle(v) = e^{\frac{2a}{9}-\frac{8}{9}\pi i}\vartheta[0](v+\tfrac{a}{3}-\tfrac{\pi i}{3})\vartheta[0](v-\tfrac{a}{3})\vartheta[0](v+\tfrac{\pi i}{3});$$

$$t_1 = \vartheta\langle 0,\beta-\alpha\rangle(v) = e^{\frac{2a}{9}-\frac{4}{9}\pi i}\vartheta[0](v)\vartheta[0](v-\tfrac{a}{3}+\tfrac{\pi i}{3})\vartheta[0](v+\tfrac{a}{3}-\tfrac{\pi i}{3}),$$
$$t_2 = \vartheta\langle \beta+\alpha,\beta-\alpha\rangle(v) = e^{\frac{2a}{9}+\frac{8}{9}\pi i}\vartheta[0](v+\tfrac{a}{3}+\tfrac{\pi i}{3})\vartheta[0](v-\tfrac{\pi i}{3})\vartheta[0](v-\tfrac{a}{3}),$$
$$t_3 = \vartheta\langle -\beta-\alpha,\beta-\alpha\rangle(v) = e^{\frac{2a}{9}+\frac{8}{9}\pi i}\vartheta[0](v-\tfrac{a}{3}-\tfrac{\pi i}{3})\vartheta[0](v+\tfrac{a}{3})\vartheta[0](v+\tfrac{\pi i}{3}).$$

Wie aus dieser Darstellung hervorgeht, lassen sich die Wendepunktlinien folgendermassen charakterisieren:

I. Gruppe. Jede Gerade geht durch einen reellen und durch zwei zugehörige imaginäre Wendepunkte und ist selbst reell.

II. Gruppe. Die reelle Wendepunktlinie enthält die drei reellen Wendepunkte.

III. Gruppe. Jede Gerade geht durch drei imaginäre Wendepunkte und zwar ist jeder der drei Punkte auf der einen Geraden je einem der drei Punkte auf der andern Geraden zugehörig; die Geraden sind imaginär, haben aber einen reellen Punkt gemeinsam.

IV. Gruppe. Jede Gerade geht durch einen reellen und durch zwei imaginäre Wendepunkte, die einander nicht zugehören, und ist imaginär.

Je drei zusammengehörige Wendepunktlinien bilden ein Wendepunktdreieck. Von diesen ist eines reell und jede Wendepunktlinie desselben enthält einen reellen Wendepunkt. Von dem zweiten Dreieck ist die Seite reell, die durch die drei reellen Wendepunkte geht, die zwei andern Seiten sind imaginär, aber ihr Schnittpunkt ist reell. Die beiden übrigen Dreiecke sind imaginär.

Resultat. Die zwölf Thetaprodukte $\vartheta\langle\eta,\varrho\rangle(v) = 0$ stellen zwölf Gerade vor, die durch die neun Wendepunkte der Kurve hindurchgehen und zwar so, dass immer vier in je einem Wendepunkt sich treffen. Diese zwölf Geraden ordnen sich viermal zu je

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

dreien so an, dass jede aus drei Geraden bestehende Gruppe sämtliche neun Wendepunkte enthält. Drei solche Gerade bilden ein Wendepunktdreieck; unter diesen ist jedoch nur eines reell, zwei sind imaginär und das vierte hat eine reelle Seite und eine reelle Ecke. Reell sind also immer drei Wendepunkte, vier Wendepunktlinien, ein Wendepunktdreieck und vier Ecken von Wendepunktdreiecken.

4.

Ist die Gleichung der Kurve 3. Ordnung in der Form (W_p) gegeben und sind x'_1, x'_2, x'_3 die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Kurve, so ist die Gleichung der konischen Polaren in Bezug auf diesen Punkt als Pol

$$x'_1(x_1^2+2m_1x_2x_3)+x'_2(x_2^2+2m_1x_1x_3)+x'_3(x_3^2+2m_1x_1x_2)=0.$$

Wählt man für den Punkt x'_1, x'_2, x'_3 jeden der neun Wendepunkte, setzt also in der obigen Gleichung der Reihe nach

$$\begin{array}{llllll}
\text{a)} & x'_1=0, & x'_2=-x'_3, & x'_2=-\tau x'_3, & x'_2=-\tau^2x'_3; \\
\text{b)} & x'_2=0, & -x'_1=x'_3, & -\tau x'_1=x'_3, & -\tau^2x'_1=x'_3; \\
\text{c)} & x'_3=0, & x'_1=-x'_2, & x'_1=-\tau x'_2, & x'_1=-\tau^2x'_2,
\end{array}$$

so lauten die Gleichungen der konischen Polaren in Bezug auf die neun Wendepunkte

$$\left\{\begin{array}{l}
L_1\equiv(x_2-x_3)(x_2+x_3-2m_1x_1)=0, \\
L_2\equiv(x_2-\tau^2x_3)(x_2+\tau^2x_3-2m_1\tau x_1)=0, \\
L_3\equiv(x_2-\tau x_3)(x_2+\tau x_3-2m_1\tau^2x_1)=0.
\end{array}\right\} \qquad \text{(L)}$$

Die weiteren sechs Gleichungen erhält man aus diesen durch zyklische Vertauschung der Grössen x_1, x_2, x_3.

Die Gleichung der konischen Polare in Bezug auf einen Wendepunkt zerfällt in zwei Gleichungen, von denen die eine die Gleichung der Wendetangente und die andere die Gleichung der zugehörigen harmonischen Geraden ist, und zwar heissen die Gleichungen der neun Wendetangenten

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\text{a)}\begin{cases}-2m_1x_1+x_2+x_3 &= 0\,,\\ -2m_1\tau x_1+x_2+\tau^2x_3 &= 0\,,\\ -2m_1\tau^2x_1+x_2+\tau x_3 &= 0\,;\end{cases}\quad \text{b)}\begin{cases}x_1-2m_1x_2+x_3 &= 0\,,\\ \tau^2x_1-2m_1\tau x_2+x_3 &= 0\,,\\ \tau x_1-2m_1\tau^2x_2+x_3 &= 0\,;\end{cases}$$

$$\text{c)}\begin{cases}x_1+x_2-2m_1x_3 &= 0\,,\\ x_1+\tau^2x_2-2m_1\tau x_3 &= 0\,,\\ x_1+\tau x_2-2m_1\tau^2x_3 &= 0\,.\end{cases}\qquad (\mathrm{L}')$$

Aus den Gleichungen (L') und denen für die harmonischen Polaren folgen ohne weiteres die Sätze:

Die Wendetangenten in zwei Wendepunkten schneiden sich auf der harmonischen Polaren des Wendepunktes, der mit den beiden ersten auf derselben Wendepunktlinie liegt (Fig. 1).

Liegen drei Wendepunkte auf einer Geraden, so schneiden sich ihre harmonischen Polaren in einem Punkt; dieser Punkt ist die der Wendepunktlinie gegenüberliegende Ecke des Wendepunktdreiecks (Fig. 1).

Da die neun Wendepunkte zu je dreien auf zwölf Geraden liegen, deren Schnittpunkte die Ecken der Wendepunktdreiecke sind, so schneiden sich die neun zugehörigen harmonischen Polaren zu je dreien in diesen Eckpunkten. Auf jeder harmonischen Polaren liegen vier jener Eckpunkte, denn durch jeden Wendepunkt gehen vier Wendepunktlinien. Von den neun harmonischen Polaren sind drei reell und sechs imaginär, von ihren Schnittpunkten dagegen sind vier reell und acht imaginär.

Aus der Krazerschen Formel (II) [Math. Ann. Bd. 22 Seite 439]

$$\begin{aligned}&3\vartheta\{\varrho,\alpha\}(0)\vartheta^3\{\varrho\}(v)\\ &=\sum_m\sum_n \tau^{n\alpha|\varrho+m\beta}\,\tau^{m\beta|\varrho}\,\vartheta^3\{m\beta+n\alpha\}(0)\vartheta\{m\beta,\alpha\}(v)\\ &\qquad m,\,n=0,\,1,\,-1\end{aligned}\qquad (\mathrm{B})$$

ergibt sich der Zusammenhang der neun Thetapotenzen vom 3. Grad mit den Thetaprodukten eines Charakteristikenkomplexes, wenn man an Stelle der Charakteristik $[\varrho]$ der Reihe nach die Charakteristiken $[0]$, $[\alpha]$, $[-\alpha]$, $[\beta]$, $[\beta+\alpha]$, $[\beta-\alpha]$, $[-\beta]$, $[-\beta+\alpha]$, $[-\beta-\alpha]$ setzt. Die drei in der Gleichung (B) als Grundfunktionen benützten Thetaprodukte sind durch die Wahl der

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Charakteristik $[\alpha]$ bestimmt, insofern als die drei Produkte von dritten Einheitswurzeln abgesehen immer wieder erhalten werden, wenn an die Stelle der Charakteristik $[\beta]$ irgend eine andere der fünf bei bestimmten $[\alpha]$ zulässigen Charakteristiken tritt. Berücksichtigt man weiter, dass für die Charakteristik $[\alpha]$ eine jede von den acht der Charakteristik $[0]$ nicht kongruenten Charakteristiken gesetzt werden darf und dass die Gleichung (B) ungeändert bleibt, wenn man für die Charakteristik $[\alpha]$ die Charakteristik $[-\alpha]$ setzt, so erkennt man, dass es nur vier verschiedene Systeme von je drei Produkten der betrachteten Art gibt. Man erhält daher nur vier wesentlich verschiedene Systeme der Gleichungen (B), wenn man an Stelle der Charakteristiken $[\alpha]$ und $[\beta]$ auf alle möglichen Weisen spezielle Charakteristiken einführt. Betrachtet man $[\alpha]$ und $[\beta]$ als feste Charakteristiken, so erhält man auch für die Gleichung (B) die drei noch übrigen Systeme, wenn man einmal die Charakteristiken $[\alpha]$, $[\beta]$ durch die Charakteristiken $[\beta]$, $[\alpha]$, dann $[\beta+\alpha]$, $[\beta-\alpha]$ beziehungsweise $[\beta-\alpha]$, $[\beta+\alpha]$ ersetzt.

Schreibt man zur Abkürzung $\tau^{|\eta|}\vartheta^3[\eta](v) = \vartheta^3\langle\eta\rangle(v)$ und

$$\begin{array}{lll}
\vartheta^3\langle 0\rangle(v) = \xi_1, & \vartheta^3\langle\alpha\rangle(v) = \eta_1, & \vartheta^3\langle-\alpha\rangle(v) = \zeta_1, \\
\vartheta^3\langle\beta\rangle(v) = \xi_2, & \vartheta^3\langle\beta+\alpha\rangle(v) = \eta_2, & \vartheta^3\langle\beta-\alpha\rangle(v) = \zeta_2, \\
\vartheta^3\langle-\beta\rangle(v) = \xi_3, & \vartheta^3\langle-\beta+\alpha\rangle(v) = \eta_3, & \vartheta^3\langle-\beta-\alpha\rangle(v) = \zeta_3,
\end{array}$$

so lauten die aus der Formel (B) sich ergebenden drei Gruppen von je drei Gleichungen

$$(\mathrm{B}')\qquad \begin{array}{ll}
1)\ 3k'\xi_1 = -2m_1x_1+x_2+x_3, & \\
2)\ 3k'\tau\eta_1 = -2m_1\tau x_1+x_2+\tau^2x_3, & \\
3)\ 3k'\tau^2\zeta_1 = -2m_1\tau^2x_1+x_2+\tau x_3, &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
4)\ 3k'\xi_2 = x_1-2m_1x_2+x_3, & 7)\ 3k'\xi_3 = x_1+x_2-2m_1x_3, \\
5)\ 3k'\tau^2\eta_2 = \tau^2x_1-2m_1\tau x_2+x_3, & 8)\ 3k'\eta_3 = x_1+\tau^2x_2-2m_1\tau x_3, \\
6)\ 3k'\tau\zeta_2 = \tau x_1-2m_1\tau^2x_2+x_3, & 9)\ 3k'\zeta_3 = x_1+\tau x_2-2m_1\tau^2x_3,
\end{array}$$

wobei $m_1 = -\dfrac{1+2c_1{}^3}{6c_1{}^2}$ ist und k' für $\dfrac{\vartheta\langle\beta,\alpha\rangle(0)}{\vartheta^3\langle 0\rangle(0)-\vartheta^3\langle\alpha\rangle(0)}$ steht.

Vergleicht man die Gleichungen (B') mit den Gleichungen (L') der neun Wendetangenten, so erkennt man deren vollständige Übereinstimmung; es sind daher die neun Gleichungen $\vartheta^3\langle\varrho\rangle(v) = 0$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

die Gleichungen für die neun Wendetangenten der Kurven 3. Ordnung.

Aus den drei ersten Gleichungen (B′) folgt

$$-2m_1x_1 = k'\{\xi_1+\eta_1+\zeta_1\},\quad x_2 = k'\{\xi_1+\tau\eta_1+\tau^2\zeta_1\},\quad x_3 = k'\{\xi_1+\tau^2\eta_1+\tau\zeta_1\}$$

und hieraus ergibt sich

$$6m_1x_1x_2x_3 = -3k'^3\{\xi_1^3+\eta_1^3+\zeta_1^3-3\xi_1\eta_1\zeta_1\},$$

$$x_1^3x_2^3x_3^3 = -\frac{k'^3}{8m_1^3}\{\xi_1+\eta_1+\zeta_1\}^3+k'^3\{2\xi_1^3-3\xi_1^2\eta_1-3\xi_1\eta_1^2+2\eta_1^3$$
$$-3\xi_1^2\zeta_1+12\xi_1\eta_1\zeta_1-3\eta_1^2\zeta_1-3\xi_1\zeta_1^2-3\eta_1\zeta_1^2+2\zeta_1^3\}.$$

Substituiert man diese Grössen in die Gleichung (W_p), so erhält man

$$(W_t)\qquad [\xi_1+\eta_1+\zeta_1]^3+6n_1\xi_1\eta_1\zeta_1 = 0,$$

wobei $$n_1 = -\frac{36m_1^3}{1+8m_1^3}\quad \text{ist.}$$

Diese Gleichung wird von den drei Thetapotenzen, deren Charakteristiken ein Dreiersystem bilden, identisch erfüllt, was immer der Wert des veränderlichen Parameters v ist. Die Gleichung (W_t) ist die Gleichung einer Kurve 3. Ordnung bezogen auf ein Wendetangentendreieck. Betrachtet man also drei Thetapotenzen, deren Charakteristiken ein Dreiersystem bilden, als homogene Punktkoordinaten in der Ebene, so ist durch die Gleichungen

$$\xi_1 = \vartheta^3\{0\}(v),\quad \eta_1 = \vartheta^3\{a\}(v),\quad \zeta_1 = \vartheta^3\{-a\}(v)$$

die Parameterdarstellung einer Kurve 3. Ordnung bezogen auf ein Wendetangentendreieck gegeben. Die Gleichungen (B) zerfallen in vier Systeme von je neun Gleichungen. Drei zusammengehörige Gleichungen von ihnen transformieren immer je ein Wendepunktdreieck in ein Wendetangentendreieck. Da aber jedes Wendepunktdreieck in drei verschiedene Wendetangentendreiecke transformiert werden kann, so gibt es zwölf verschiedene Wendetangentendreiecke, diese werden von den neun Wendetangenten in folgender Weise gebildet:

$$\text{I.}\begin{cases}\xi_1,\ \eta_1,\ \zeta_1;\\ \xi_2,\ \eta_2,\ \zeta_2;\\ \xi_3,\ \eta_3,\ \zeta_3.\end{cases}\quad \text{II.}\begin{cases}\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3;\\ \eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3;\\ \zeta_1,\ \zeta_2,\ \zeta_3.\end{cases}\quad \text{III.}\begin{cases}\xi_1,\ \eta_2,\ \zeta_3;\\ \xi_3,\ \eta_1,\ \zeta_2;\\ \xi_2,\ \eta_3,\ \zeta_1.\end{cases}\quad \text{IV.}\begin{cases}\xi_1,\ \eta_3,\ \zeta_2;\\ \xi_3,\ \eta_2,\ \zeta_1;\\ \xi_2,\ \eta_1,\ \zeta_3.\end{cases}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die zwölf Wendetangentendreiecke zerfallen ihrer Beschaffenheit nach in vier Gruppen:

I. Gruppe: Jedes Dreieck enthält eine reelle Wendetangente und zwei imaginäre, die aber in je zwei zugehörigen imaginären Wendepunkten an die Kurve gezogen sind.

II. Gruppe: Das Dreieck enthält die drei reellen Wendetangenten.

III. Gruppe: Jedes Dreieck enthält drei imaginäre Wendetangenten und zwar sind die Wendetangenten in zugehörigen Wendepunkten gezogen.

IV. Gruppe: Jedes Dreieck enthält eine reelle Wendetangente und zwei imaginäre, die in nicht zugehörigen, imaginären Wendepunkten an die Kurve gezogen sind.

Beim Übergang von einem Dreieck der I. Abteilung zu einem Dreieck der II., III. oder IV. Abteilung ändert sich nur die Konstante n. Das einzige reelle Wendetangentendreieck ist das Dreieck ξ_1, ξ_2, ξ_3. Macht man von dem Wendepunktdreieck x_1, x_2, x_3 den Übergang zu diesem, so erhält man zunächst aus der 1., 4., 7. der Gleichungen (B′) die folgenden:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{3k'}{2(1+m_1-2m_1^2)}\{(2m_1-1)\xi_1+\xi_2+\xi_3\}, \\ x_2 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\{\xi_1+(2m_1-1)\xi_2+\xi_3\}, \\ x_3 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\{\xi_1+\xi_2+(2m_1-1)\xi_3\}. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen findet man ferner:

$$\begin{aligned} 6m_1x_1x_2x_3 = \frac{27k'^3}{8(1+m_1-2m_1^2)^3}\{&(12m_1^2-6m_1)(\xi_1^3+\xi_2^3+\xi_3^3) \\ &+6m_1(1-2m_1+4m_1^2)(\xi_1^2\xi_2+\xi_1^2\xi_3+\xi_1\xi_2^2+\xi_1\xi_3^2 \\ &+\xi_2\xi_3^2+\xi_2^2\xi_3)+(54m_1^2+72m_1^3+48m_1^4)\xi_1\xi_2\xi_3\}, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} x_1^3+x_2^3+x_3^3 = \frac{27k'^3}{8(1+m_1-2m_1^2)^3}\{&(1+6m_1-12m_1^2+8m_1^3)(\xi_1^3+\xi_2^3 \\ &+\xi_3^3)+3m_1(1-2m_1+4m_1^2)(\xi_1^2\xi_2+\xi_1^2\xi_3+\xi_1\xi_2^2 \\ &+\xi_1\xi_3^2+\xi_2\xi_3^2+\xi_2^2\xi_3)+(36m_1-18)\xi_1\xi_2\xi_3\}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der zwei letzten Gleichungen ergibt sich durch Substitution aus der Gleichung (W_p) die weitere

$$[\xi_1+\xi_2+\xi_3]^3+6n_2\xi_1\xi_2\xi_3 = 0, \text{ worin } n_2 = -\frac{4(1-m_1)^3}{(1-2m_1)^2} \text{ ist.}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Grössen m_1, m_2, m_3, m_4 hängen ebenso wie die Grössen c_1, c_2, c_3, c_4 linear mit einander zusammen. Man erhält dieselben aus den Beziehungen für die Grössen c_ν im Art. 2, wenn man an Stelle von c_ν die Grösse m_ν ($\nu = 1, 2, 3, 4$) setzt und τ^2 für τ und τ für τ^2 schreibt.

Die Krazersche Formel (I') [Math. Ann. Bd. 22, Seite 442] liefert die Transformationsformeln, die von einem Wendetangentendreieck zu einem andern überleiten. Sie enthält im ganzen zwölf Gleichungssysteme von je sechs Gleichungen. Die dort auftretenden Konstanten c_1, c_2, c_3 lassen sich mittels der Nullrelationen durch die Konstante m_1 ausdrücken. Das erste System solcher Transformationsgleichungen lautet, wenn a für $\frac{3m_1}{m_1{}^3-1}$, b für $\frac{1}{m_1-1}$, d für $\frac{1}{m_1-\tau^2}$ und e für $\frac{1}{m_1-\tau}$ gesetzt wird:

$$\begin{array}{llll}
1) & a\xi_2 = b\xi_1+d\eta_1+e\zeta_1, & 4) & a\xi_3 = b\xi_1+e\eta_1+d\zeta_1, \\
2) & \tau a\eta_2 = e\xi_1+b\eta_1+d\zeta_1, & 5) & \tau^2 a\eta_3 = d\xi_1+b\eta_1+e\zeta_1, \\
3) & \tau^2 a\zeta_2 = d\xi_1+e\eta_1+b\zeta_1, & 6) & \tau a\zeta_3 = e\xi_1+d\eta_1+b\zeta_1.
\end{array}$$

Die übrigen Gleichungen dieser Art lassen sich leicht aus den obigen sechs herleiten; man darf nur an die Stelle des Dreiersystems $[0|\alpha|-\alpha]$ die elf übrigen treten lassen und dabei beobachten, dass die Konstante m_ν sich ändert, wenn man von einem Wendetangentendreieck der ersten Abteilung zu einem der anderen übergeht.

Die Parameterdarstellung einer Kurve 3. Ordnung unter Zugrundelegung des reellen Wendetangentendreiecks lautet demnach, wenn man die einzelnen Thetafunktionen auf die Funktion $\vartheta[0](v)$ zurückführt und an Stelle der Charakteristik $[\beta]$ die Charakteristik $\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]$ setzt:

$$\xi_1 = \vartheta^3[0](v);\ \xi_2 = \vartheta^3[0](v+\tfrac{\pi i}{3});\ \xi_3 = \vartheta^3[0](v-\tfrac{\pi i}{3}).$$

5.

Die Kurve 3. Ordnung ist einteilig, wenn von den vier Tangenten, die man von einem Punkt der Kurve aus an dieselbe ziehen kann, zwei reell und zwei imaginär sind. Sind dagegen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

alle vier Tangenten reell oder imaginär, so ist die Kurve zweiteilig.

Ist x'_1, x'_2, x'_3 ein Punkt der Kurve, so ist die Gleichung dieser vier Tangenten, wenn man die kanonische Gleichungsform (W_p) der Kurve zu grunde legt:*)

$$9\{x_1^2x'_1+x_2^2x'_2+x_3^2x'_3+2m(x'_1x_2x_3+x'_2x_1x_3+x'_3x_1x_2)\}^2$$
$$= 4(x_1^3+x_2^3+x_3^3+6mx_1x_2x_3)\{x_1x'^2_1+x_2x'^2_2+x_3x'^2_3+2m(x_1x'_2x'_3$$
$$+x_2x'_1x'_3+x_3x'_1x'_2)\}.$$

Schneidet man das Tangentenbüschel mit der Geraden $x_3 = 0$, so stimmt das Doppelverhältnis der vier Schnittpunkte mit dem Doppelverhältnis des Tangentenbüschels überein; dasselbe hängt also nur von den Wurzeln der Gleichung:

$$(x'^2_1+8mx'_2x'_3)x_1^4+2(2x'^2_2-2mx'_1x'_3)x_1^3x_2-3(2x'_1x'_2 \qquad (1)$$
$$+4m^2x'^2_3)x_1^2x_2^2+2(2x'^2_1-2mx'_2x'_3)x_1x_3^3+(x'^2_2+8mx'_1x'_3)x_2^4=0$$

ab, deren Invarianten

$$s = -12Sx'^4_3 \text{ und } t = -Tx'^{12}_3$$

sind, wobei man unter S und T die Invarianten der Gleichung (W_p) versteht, nämlich

$$S = m(1-m^3) \text{ und } T = 1-20m-8m^6.$$

Ist durch eine lineare Substitution die Gleichung (1) auf die kanonische Form

$$a_0x_1^4+6a_2x_1^2x_2^2+a_4x_2^4 = 0 \quad (2)$$

der biquadratischen Gleichung gebracht, so ersieht man, dass die letztere zwei reelle und zwei imaginäre Wurzeln hat, wenn a_0 und a_4 entgegengesetzte Vorzeichen besitzen, dagegen vier reelle oder vier imaginäre, wenn die Vorzeichen von a_0 und a_4 die gleichen sind. Bezeichnet man mit s' und t' die Invarianten der Gleichung (2), so ist ihre Diskriminante

$$t'^2-\frac{s'^3}{27} = -\frac{1}{27}a_0a_4(a_0a_4-9a_2^2)^2.$$

Diese ist für die erste Annahme positiv und für die zweite negativ. Die Kurve ist also einteilig, wenn

$$t'^2-\frac{s'^3}{27}>0 \text{ und zweiteilig, wenn } t'^2-\frac{s'^3}{27}<0^{**)} \text{ ist.}$$

---

*) Siehe: Salmon, Höhere Kurven. Seite 241.

**) Vgl. Salmon, Vorlesungen über Algebra, Seite 267 und höhere Kurven, Seite 241.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es ist aber $t'^2 - \frac{s'^3}{27} = \Delta^6(t^2 - \frac{s^3}{27}) = \Delta^6(T^2 + 64S^3)x'_3{}^{12}$, daher besteht für die einteiligen Kurven die Bedingung

$T^2 + 64S^3 > 0$ und für die zweiteiligen $T^2 + 64S^3 < 0$.

Für die kanonische Form der Gleichungen lauten diese Bedingungen $(1+8m^3)^3 > 0$ und $(1+8m^3)^3 < 0$.

Es erübrigt noch das Doppelverhältnis der vier Tangenten durch die Invarianten S und T auszudrücken. Sind α, β, γ, δ die Wurzeln der Gleichung (1) und setzt man $(\alpha-\delta)(\beta-\gamma) = d_1$, $(\beta-\delta)(\gamma-\alpha) = d_2$, $(\alpha-\beta)(\gamma-\delta) = d_3$, so drücken die Quotienten $-(d_2:d_1)$, $-(d_3:d_2)$, $-(d_1:d_3)$ die drei Doppelverhältnisse der vier Punkte α, β, γ, δ aus. Die Gleichung, die diese drei Grössen d_1, d_2, d_3 zu Wurzeln hat, da $d_1+d_2+d_3 = 0$ ist, lautet:

$$q^3 + (d_1d_2 + d_1d_3 + d_2d_3)q - d_1d_2d_3 = 0.$$

Bezeichnet man den Koeffizienten $x'_1{}^2 + 8mx'_2x'_3$ der Gleichung (1) mit a_0, während s und t ihre Invarianten sind, so findet man mit Hilfe der symmetrischen Funktionen

$$d_1d_2 + d_1d_3 + d_2d_3 = -\frac{12s}{a_0{}^2} \quad (3), \text{ ferner}$$

$$(d_1d_2 + d_1d_3 + d_2d_3)^3 = (d_1d_2 - d_3{}^2)(d_1d_3 - d_2{}^2)(d_2d_3 - d_1{}^2) = -12^3\frac{s^3}{a_0{}^6} \quad (4),$$

endlich $(-2d_1{}^2 - d_2d_3)(-2d_2{}^2 - d_1d_3)(-2d_3{}^2 - d_1d_2) = \frac{432^2t^2}{a_0{}^6}$ (5).

Multipliziert man Gleichung (4) mit 108 und Gleichung (5) mit 27 und addiert beide, so ergibt sich unter Berücksichtigung der Relation $d_1{}^3 + d_2{}^3 + d_3{}^3 = 3d_1d_2d_3$, die weitere Beziehung

$$d_1{}^2d_2{}^2d_3{}^2 = \frac{16^2}{a_0{}^6}(s^3 - 27t^2) \quad (6).$$

Setzt man schliesslich $a_0q = 2s^{\frac{1}{2}}q'$, wodurch sich die Verhältnisse der Wurzeln nicht ändern, so erhält man als Gleichung, die die Grössen d_1, d_2, d_3 bestimmt:

$$q'^3 - 3q' + 2\sqrt{1 + \frac{T^2}{64S^3}} = 0.^{*)}$$

Ist w eine Wurzel dieser Gleichung, so sind die beiden andern $-\frac{w}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4}w^2 + 3}$, $-\frac{w}{2} - \sqrt{-\frac{3}{4}w^2 + 3}$. Bezeichnet man das

*) Salmon, höhere Kurven, Seite 243.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Doppelverhältnis der vier Tangenten mit ε^2, so ist $w^2 = \frac{3\varepsilon^4}{\varepsilon^4-\varepsilon^2+1}$ und wenn man hierin für w seinen Wert in S und T setzt, so findet man für das Doppelverhältnis die bekannte Gleichung:

$$-\frac{16S^3}{T^2} = \frac{(\varepsilon^4-\varepsilon^2+1)^3}{(1+\varepsilon^2)(2-\varepsilon^2)(1-2\varepsilon^2)^2}.$$

Das Doppelverhältnis der vier Tangenten ist somit von der Lage des Punktes x'_1, x'_2, x'_3 unabhängig und ausserdem lassen sich die Wurzeln der Gleichung rational durch die eine ε^2 darstellen, nämlich:

$$\varepsilon^2,\ \frac{1}{\varepsilon^2};\quad 1-\varepsilon^2,\ \frac{1}{1-\varepsilon^2};\quad \frac{\varepsilon^2-1}{\varepsilon^2},\ \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2-1}.$$

6.

In der kanonischen Form der Gleichung einer Kurve 3. Ordnung tritt als einzige wesentliche Konstante die Grösse m auf. Bei der Parameterdarstellung der Kurve durch die Thetafunktion ist die wesentliche Konstante die Grösse a, die durch die linearen Transformationen der Punkte x_1, x_2, x_3 ungeändert bleibt. Die Grösse a soll im folgenden durch die Konstante m der kanonischen Gleichung ausgedrückt werden. Zu dem Ende geht man von dem Abelschen Integral aus, das zu den Thetafunktionen gehört, deren Charakteristiken aus Dritteln ganzer Zahlen bestehen. Es wird nämlich die Auflösung der Gleichung $\frac{\vartheta\{\beta,\alpha\}(v)}{\vartheta\{0,\alpha\}(v)} = x$ nach v durch die Gleichung geliefert

$$v = \frac{c_1{}^3-1}{3c_1x'_0}\int_{x_0,\,x_0}^{x,\,y}\frac{dx}{y^2+2mx},$$

wenn y eine durch die Gleichung $1+x^3+y^3+6mxy = 0$ (W_p) definierte Funktion von x ist.*) Dabei ist $x'_0 = \left\{\frac{d}{dv}\left[\frac{\vartheta\{\beta,\alpha\}(v)}{\vartheta\{0,\alpha\}(v)}\right]\right\}_{v=0}$, ferner $\frac{c_1{}^3-1}{3c_1x'_0} = \frac{1-\tau}{3\tau^2}c_1\frac{\vartheta[\alpha](0)}{\vartheta'[\alpha](0)}$; letztere Grösse soll künftig mit C bezeichnet werden.

*) Sievert, Beiträge zur Behandlung des Umkehrproblems von Thetafunktionen, deren Charakteristiken aus Dritteln ganzer Zahlen bestehen, Nürnberg 1893.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Das obige Integral lässt sich auf das elliptische Normalintegral zurückführen, wodurch die Periodizitätsmoduln des obigen Integrals durch die Periodizitätsmoduln des letzteren gegeben sind.

In der Gleichung (W_p) setzt man $x^3 = \zeta$ und bestimmt y^3 so, dass es eine rationale Funktion der Variabeln σ und ζ z. B. $\varrho(\sigma,\zeta)$ wird. Wie immer man auch σ wählen mag, jedenfalls muss $\sqrt[3]{\zeta}\sqrt[3]{\varrho(\sigma,\zeta)}$ eine rationale Funktion von σ und ζ werden, die $R(\sigma,\zeta)$ sein möge. Aus der Gleichung $\sqrt[3]{\zeta}\sqrt[3]{\varrho(\sigma,\zeta)} = R(\sigma,\zeta)$ ergibt sich dann $\zeta \,.\, \varrho(\sigma,\zeta) = R^3(\sigma,\zeta)$. Substituiert man die Werte für x^3 und y^3 in die Gleichung (W_p) und setzt $R(\sigma,\zeta) = \sigma + 3m^2$, so findet man $\varrho(\sigma,\zeta) = -1 - \zeta - 6m(\sigma + 3m^2)$. Darnach werden die Substitutionen 1) $xy = \sigma + 3m^3$, 2) $x^3 = \zeta$, 3) $y^3 = -6m(\sigma+3m^2) - \zeta - 1$ die Gleichung (W_p) auf die gewünschte Form

$\zeta\big(6m(\sigma + 3m^2) + \zeta + 1\big) + (\sigma + 3m)^3 = 0$ bringen, woraus

$$\zeta = -3m(\sigma+3m^2) - \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{-\sigma^3 + 3m(9m^2+1)\sigma + 54m^6 + 9m^3 + \tfrac{1}{4}}$$

folgt.

Die obigen Substitutionen führen also das Abelsche Integral auf ein elliptisches zurück. Aus ihnen findet man leicht die Differenzialgleichung

$$(x^3 - y^3)dx = -(2mx + y^2)d\sigma.$$

Substituiert man hierin den Wert für $x^3 - y^3$ als Funktion von σ und integriert, so ergibt sich:

$$C\int_{x_0,\, x_0}^{x,\, y} \frac{dx}{2mx + y^2} = C\int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d\sigma}{2\sqrt{-\sigma^3 + 3m(9m^3+1)\sigma + 54m^6 + 9m^3 + \frac{1}{4}}} \quad \text{(J)}.$$

Versteht man unter

$$\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{216m^6 + 36m^3 + 1 + \sqrt{8m^3+1}} = g \text{ und}$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{216m^6 + 36m^3 + 1 - \sqrt{8m^3+1}} = h$$

die arithmetischen Werte dieser dritten Wurzeln, so sind für $8m^3 + 1 > 0$ die Grössen g und h reell. Es besitzt daher die Gleichung

$$\sigma^3 - 3m(9m^3+1)\sigma - (54m^6 + 9m^3 + \tfrac{1}{4}) = 0$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

für diesen Fall eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln, dagegen für $8m^3+1<0$ drei reelle Wurzeln.

Ist die Kurve zweiteilig, so ist $(8m^3+1)^3<0$; es hat daher für zweiteilige Kurven die obige Gleichung drei reelle Wurzeln e_1, e_2, e_3, wobei $e_1>e_2>e_3$ sein soll.

Will man den Radikanden $R(\sigma)$ in Gleichung (J) durch eine lineare Substitution in die Form $(1-z^2)(1-k^2z^2)$ bringen, so muss das Doppelverhältnis $\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2$ erhalten bleiben. Die Zahl der Zuordnungen der Wurzeln e_1, e_2, e_3, ∞ und $1, -1, \frac{1}{k}, -\frac{1}{k}$ ist 24; es treten aber bei den 24 Permutationen der Wurzeln e_1, e_2, e_3, ∞ nur sechs verschiedene Werte des Doppelverhältnisses (siehe Art. 5) auf; k kann also nur sechs Werte haben, von denen drei nur durch das Vorzeichen von den drei übrigen verschieden sind. Und da $\frac{1}{k}$ und $-\frac{1}{k}$ gleichzeitig im Radikanden vorkommen, so erhält man nur drei Werte von k, wenn man die Grössen e_1, e_2, e_3, ∞ und $1, -1, \frac{1}{k}, -\frac{1}{k}$ in beliebiger Weise einander zuordnet. Von den sechs Werten k sind nur zwei reell und absolut genommen kleiner als 1, nämlich

$$\frac{\sqrt{e_1-e_3}-\sqrt{e_1-e_2}}{\sqrt{e_1-e_3}+\sqrt{e_1-e_2}} \quad \text{und} \quad \frac{\sqrt{e_1-e_3}-\sqrt{e_2-e_3}}{\sqrt{e_2-e_3}+\sqrt{e_1-e_3}}.$$

Ordnet man den Werten von $\sigma: e_3, \infty, e_1, e_2$ die Werte von z in der folgenden Weise zu $: \frac{1}{k}, 1, -1, -\frac{1}{k}$ und setzt

$$\frac{1}{\sigma-e_1}=\sqrt{\frac{1}{(e_1-e_3)(e_1-e_2)}}\cdot\frac{1-z}{1+z};\quad \frac{\sigma-e_3}{\sigma-e_2}=\sqrt{\frac{e_1-e_3}{e_1-e_2}}\cdot\frac{1-kz}{1+kz},$$

so ergibt sich aus diesen Gleichungen, wenn man jede differentiiert und durch sich dividiert, die Differentialgleichung

$$\frac{d\sigma}{2\sqrt{-(\sigma-e_1)(\sigma-e_2)(\sigma-e_3)}}=\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{e_2-e_3}}\cdot\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

woraus durch Integration $v=C\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{e_2-e_3}}\int\limits_{z_0}^{z}\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$ folgt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Schreibt man μ für $C\sqrt{\frac{k}{e_2-e_3}}$, so ist

$$v = \mu\left\{\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} - \int_0^{z_0} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}\right\}.$$

Wird das erste dieser beiden Integrale mit u und das zweite mit u_0 bezeichnet, so ist

$$v = \mu(u-u_0) \text{ und } z = snu.$$

Dadurch drücken sich die Variabeln σ und ζ als Funktionen von u wie folgt aus:

$$\sigma = e_1 + \sqrt{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}\,\frac{1+snu}{1-snu},$$

$$\zeta = -\sqrt{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}\left\{\sqrt{\frac{e_2-e_3}{k}}\cdot\frac{\Delta nu}{cnu} - 3m\right\}\frac{1+snu}{1-snu} - 3me_1 - 9m^3 - \tfrac{1}{2}.$$

Durch diese letzteren Gleichungen sind die Koordinaten x und y bestimmt; dieselben erfüllen die Gleichung (W_p) identisch, ebenso wie die Thetafunktionen mit dem Argument v. Die Grösse k ist bei dieser Transformation durch die Gleichung: $k = \frac{\sqrt{e_1-e_3}-\sqrt{e_1-e_2}}{\sqrt{e_1-e_3}+\sqrt{e_1-e_2}}$ gegeben. Da die Wurzeln e_1, e_2, e_3 reell sind, so ist k reell und kleiner als 1; demnach ist die Periode $4K$ reell und $2iK'$ rein imaginär. Die Grösse a, von der die Thetafunktion allein abhängt, ist also $a = -\frac{K'}{2K}\pi$.

Ist die Kurve einteilig, so ist $(8m^3+1)^3 > 0$. Es sind also in diesem Fall zwei Wurzeln der oben angeführten Gleichung 3. Grades imaginär und eine reell und zwar sind dieselben

$$e_1 = g+h;\ e_2 = -\frac{g+h}{2} + \frac{g-h}{2}\sqrt{-3};\ e_3 = -\frac{g+h}{2} - \frac{g-h}{2}\sqrt{-3}.$$

Dann ist $e_1-e_3 = \frac{3(g+h)}{2} + \frac{g-h}{2}\sqrt{-3}$; $e_1-e_2 = \frac{3(g+h}{2} - \frac{g-h}{2}\sqrt{-3}$.

Es sind also die Grössen e_1-e_2 und e_1-e_3 konjugiert imaginär, k ist folglich rein imaginär. Für einteilige Kurven ist daher K reell und $K_1 = 2K+iK'$, wobei K' wieder reell ist. Für einteilige Kurven ist also

$$a = -\frac{K'}{2K}\pi + \pi i.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Grösse a ist die einzige, wesentliche Konstante, von der die Thetafunktion abhängt. Sie lässt sich mit Hilfe des Moduls k berechnen, während k selbst eine Funktion der Konstanten m ist.

7.

Aus der Formel

$$\vartheta[\varrho](v+|\sigma|) = \vartheta[\varrho+\sigma](v)e^{-\frac{\sigma^2}{9}a-\frac{2}{3}\sigma(v+\frac{\varrho'}{3}\pi i+\frac{\sigma'}{3}\pi i)},$$

wobei $[\sigma] = \frac{\sigma}{3}a+\frac{\sigma'}{3}\pi i$ ist, ergeben sich noch die folgenden

$$\vartheta[2\varrho+\sigma](v) = e^{\frac{2}{3}\varrho'\pi i(2\varrho+\sigma)}\vartheta[-\varrho+\sigma](v),$$

$$\vartheta[-2\varrho+\sigma](v) = e^{\frac{2}{3}\varrho'\pi i(2\varrho-\sigma)}\vartheta[\varrho+\sigma](v) \text{ und}$$

$$\vartheta[\varrho,\sigma](v+|\lambda|) = e^{-\frac{\lambda^2}{3}a-2\lambda v-\frac{2}{3}\lambda(\varrho'+\lambda')\pi i}\vartheta[\varrho+\lambda,\sigma](v).$$

Mit Hilfe dieser Beziehungen kann man leicht die Richtigkeit der Gleichungen

$$\frac{\vartheta\{\varrho,\sigma\}(v+|\varrho|)}{\vartheta\{0,\sigma\}(v+|\varrho|)} = \frac{\vartheta\{-\varrho,\sigma\}(v)}{\vartheta\{\varrho,\sigma\}(v)} \text{ und } \frac{\vartheta\{\varrho,\sigma\}(v+|\sigma|)}{\vartheta\{0,\sigma\}(v+|\sigma|)} = \tau^{\varrho|\sigma}\frac{\vartheta\{\varrho,\sigma\}(v)}{\vartheta\{0,\sigma\}(v)}$$

prüfen. Es sind daher die Grössen $x = \frac{\vartheta\{\beta,\alpha\}(v)}{\vartheta\{0,\alpha\}(v)} = \varphi(v)$ und $y = \frac{\vartheta\{-\beta,\alpha\}(v)}{\vartheta\{0,\alpha\}(v)} = \chi(v)$, die für jeden Wert des Parameters v der Gleichung

$$f(x,y) = 1+x^3+y^3+6m_1xy = 0$$

genügen, doppelt periodische Funktionen mit den Perioden $\alpha a+\alpha'\pi i = [3\alpha] = A$ und $\beta a+\beta'\pi i = [3\beta] = B$. Setzt man die Werte für x und y in die letztere Gleichung ein, so gilt auch für die Gleichung

$$X(v) = f(\varphi(v),\chi(v))$$

das nämliche. Ist die Gleichung $F(x,y) = 0$ die Gleichung einer Kurve n. Ordnung und setzt man in ihr für x und y ebenfalls $\varphi(v)$ und $\chi(v)$, so ist die Funktion

$$\Phi(v) = F(\varphi(v),\chi(v))$$

ebenso wie $X(v)$ eine doppelt periodische Funktion mit den Perioden A und B. Die Funktion $X(v)$ wird nach Art. 3 in den Punkten

$$v' = \tfrac{\gamma}{3},\ \tfrac{\gamma}{3}-[\alpha],\ \tfrac{\gamma}{3}-[-\alpha]$$

unendlich von der 3. Ordnung. In denselben Punkten wird

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$\Phi(v)$ unendlich von der n. Ordnung; es ist daher $\Phi(v)$ eine Funktion von der $3n$. Ordnung. Soll diese doppelt periodische Funktion in den Punkten $v_1, v_2, v_3 \ldots v_{3n}$ Null von der ersten Ordnung werden, so muss sich die Summe der Nullwerte von der Summe der Unendlichkeitswerte um ganze Periodenvielfache unterscheiden, d. h. es ist

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} v_\nu - n\sum_{\nu=1}^{\nu=3} v'_\nu = mA+nB \text{ oder da } n\sum_{\nu=1}^{\nu=n} v'_\nu = n\gamma \text{ ist, so ist}$$

$v_1+v_2+v_3+\ldots+v_{3n} \equiv n\gamma$ (mod. A, B) oder wenn man für die Charakteristiken $[\alpha]$ und $[\beta]$ die besonderen $\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]$ und $\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]$ setzt, so ist

$$v_1+v_2+v_3+\ldots+v_{3n} \equiv n\gamma \text{ (mod. } a, \pi i).$$

Es verschwindet also die Funktion $\Phi(v)$ für die Argumente $v_1, v_2, v_3 \ldots v_{3n}$, wenn für diese Werte die obige Beziehung besteht. Umgekehrt besteht der Satz:

Hat man $3n$ beliebige Argumente $v_1, v_2, v_3 \ldots v_{3n}$, die der obigen Gleichung genügen, so liegen die ihnen entsprechenden Punkte der Kurve 3. Ordnung stets auf einer Kurve n. Ordnung.

Setzt man zwischen den Argumenten v und w die Beziehung fest

$$w = v+c \qquad\qquad w = -v+c,$$

wo c eine beliebige Grösse ist, so wird dadurch jedem Punkte der Kurve 3. Ordnung ein anderer in ganz bestimmter Weise zugeordnet. Diese eindeutige Transformation der Kurve in sich ist aber keine lineare, wenn c eine beliebige Grösse ist; denn sind v_1, v_2, v_3 die Argumente von irgend drei Punkten der Kurve, die auf einer Geraden liegen, für die also die Beziehung

$$v_1+v_2+v_3 \equiv \gamma \text{ (mod. } a, \pi i)$$

besteht, so findet für die entsprechenden Punkte w_1, w_2, w_3 die Kongruenz

$$w_1+w_2+w_3 \equiv \gamma+3c \text{ (mod. } a, \pi i)$$

statt, d. h. die drei Punkte liegen bei beliebigem c nicht auf einer Geraden. Setzt man aber

$$c = \frac{\mu a+\mu'\pi i}{3}, \text{ dann wird } w_1+w_2+w_3 \equiv \gamma \text{ (mod. } a, \pi i).$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es entsprechen dann drei Punkten, die in einer Geraden liegen, wieder drei Punkte, die ebenfalls auf einer Geraden sich befinden. Diese Transformation ist alsdann eine Kollineation, die die Kurve ungeändert lässt. Nach der Bezeichnungsweise, wie sie bei den analytischen Untersuchungen gebraucht wurde, ist die letztere Substitution dargestellt durch

$$w = v + [\lambda] \text{ und } w = -v + [\lambda].$$

An Stelle von $[\lambda]$ können die neun Normalcharakteristiken treten, so dass es im ganzen achtzehn solcher Substitutionen gibt. Es existieren daher achtzehn Kollineationen, die die Kurve 3. Ordnung in sich überführen. In der Tat überzeugt man sich leicht, dass jedes der zwölf Thetaprodukte $\vartheta[\varrho,\sigma](v)$ in sich oder in eines derselben übergeführt wird, wenn man für v eine der erwähnten achtzehn Substitutionen macht.

Diese Transformationen verwandeln das System der neun Wendepunkte in sich selbst, denn da die Argumente derselben durch die Kongruenz

$$v \equiv \frac{\gamma}{3} + \frac{\nu a + \nu' \pi i}{3} (\nu, \nu' = 0,\ 1,\ -1)$$

gegeben sind, so wird die Transformation $w = v + \frac{\mu a + \mu' \pi i}{3}$ den Wendepunkt, dem das Argument v zugehört, in einen anderen transformieren mit dem Argument $w_1 = \frac{\gamma}{3} + \frac{(\mu+\nu)a + (\mu'+\nu')\pi i}{3}$ und die Transformation $w = -v + \frac{2}{3}\gamma + \frac{\mu a + \mu' \pi i}{3}$ in den Wendepunkt mit dem Argument $w_2 = \frac{\gamma}{3} + \frac{(\mu-\nu)a + (\mu'-\nu')\pi i}{3}$.

Aus der Gleichung $w = -v + c$ folgt die Relation $w + v + (\gamma - c) \equiv \gamma$, d. h. die entsprechenden Punkte der Kurve 3. Ordnung liegen mit dem Punkte, zu dem das Argument $\gamma - c$ gehört, in einer Geraden oder die Transformation $w = -v + c$ ist eine Kollineation, bei der das Zentrum der Kollineation auf der Kurve liegt. Sollen insbesondere die entsprechenden Punkte zusammenfallen, so ist

$2w + (\gamma - c) \equiv \gamma$ oder $w = \frac{c}{2} + \frac{\nu a + \nu' \pi i}{2}$, woraus sich die vier Werte

$w_1 = \frac{c}{2}$, $w_2 = \frac{c}{2} + \frac{a}{2}$, $w_3 = \frac{c}{2} + \frac{\pi i}{2}$, $w_4 = \frac{c}{2} + \frac{a + \pi i}{2}$ ergeben.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es gibt also vier Punkte, die mit den entsprechenden zusammenfallen; gleichzeitig sagt aber obige Kongruenz aus, dass die vier Tangenten, die von dem Punkte, dessen Argument $\gamma - c$ ist, ausgehen, die Kurve in vier entsprechenden Punkten berühren. Ist endlich der Punkt $\gamma - c$ ein Wendepunkt, ist also $c = \frac{2}{3}\gamma - \frac{\nu a + \nu' \pi i}{3}$, so fällt einer der vier Punkte mit ihm zusammen, die drei übrigen liegen auf einer Geraden, dieselbe ist die harmonische Polare des Wendepunktes. Wählt man also einen Wendepunkt als Zentrum der Kollineation, so wird die harmonische Polare desselben die Kollineationsachse dieser perspektivischen Transformation.

Die hier gewonnenen Resultate sollen noch zur Betrachtung der Tripel von Oskulationspunkten verwendet werden. Man vergleiche darüber die Abhandlung von Gent „Ueber den Zusammenhang der Systeme derjenigen Punkte, in welchen Kegelschnitte eine allgemeine Kurve 3. Ordnung oskulieren," in Schlömilchs Zeitschrift Bd. 17.

8.

Zieht man (Fig. 2) durch einen Wendepunkt, dessen Argument v ist, drei Sekanten G_1, G_2, G_3, so schneiden dieselben die Kurve noch in sechs weiteren Punkten P_1, P'_1; P_2, P'_2; P_3, P'_3. Sind die Argumente derselben u_1, u'_1; u_2, u'_2; u_3, u'_3, so bestehen nach Art. 7 die Relationen

$$1)\ u_\nu + u'_\nu + v \equiv \gamma,\ \nu = 1,\ 2,\ 3.$$

Berücksichtigt man, dass $3v \equiv \gamma$ ist, so ergibt sich durch Addition der drei Kongruenzen (1)

$$2)\ u_1 + u_2 + u_3 + u'_1 + u'_2 + u'_3 \equiv 2\gamma, \text{ d. h.}$$

Legt man durch einen Wendepunkt einer Kurve 3. Ordnung drei Sekanten, so liegen die sechs Schnittpunkte derselben mit der Kurve auf einem Kegelschnitt.

Da man das Sekantenziehen durch einen Wendepunkt nach Art. 7 als eine perspektivische Zentralprojektion auffassen darf, so liegen die Punkte P'_1, P'_2, P'_3 . . . perspektivisch zu den Punkten P_1, P_2, P_3 . . . ; es müssen sich daher die Ver-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

bindungsgeraden entsprechender Punkte auf der harmonischen Geraden $\mathfrak{H}$ desselben als Kollineationsachse schneiden (Fig. 2). Fasst man P_1, P'_2 als Punkte des ersten Systems und P_2, P'_1 als Punkte des zweiten Systems auf, so folgt unmittelbar, dass sich auch die Geraden P'_1P_2 und $P_1P'_2$ auf der harmonischen Polaren schneiden müssen. Lässt man zwei Sekanten zusammenfallen, so gehen die Verbindungsgeraden P_1P_2, $P'_1P'_2$ in die Tangenten über und es ergibt sich der Satz:

Die Tangenten in zwei Punkten einer Kurve 3. Ordnung, die mit einem Wendepunkt auf derselben Geraden liegen, schneiden sich auf der harmonischen Polaren des Wendepunkts.

Liegen die drei Wendepunkte W_1, W_2, W_3 auf einer Geraden und man betrachtet W_3 als Projektionszentrum und zieht durch dasselbe die Sekanten W_1W_2 und P_1P_2, so sind die Punkte P_1 und W_1 den Punkten P_2 und W_2 zugeordnet; es schneiden sich daher die Geraden P_1W_1 und P_2W_2 auf der harmonischen Polaren $\mathfrak{H}_3$ von W_3 (Fig. 3). Die Sekanten P_1W_1 und P_2W_2 schneiden die Kurve noch in den Punkten P'_1 und P'_2, die Verbindungsgerade $P'_1P'_2$ geht durch den Wendepunkt W_3. Denn bezeichnet man das Argument eines Punktes P_ν mit u_ν und sind $\frac{\gamma}{3}+c_1$, $\frac{\gamma}{3}+c_2$, $\frac{\gamma}{3}+c_3$ die Argumente der Wendepunkte W_1, W_2, W_3, so bestehen die Relationen:

$$3)\ c_1+c_2+c_3 \equiv 0 \ (\text{mod. } a,\ \pi i),$$

$$4)\ u_1+u_2+\tfrac{\gamma}{3}+c_3 \equiv \gamma,\quad 5)\ u_1+u'_1+\tfrac{\gamma}{3}+c_1 \equiv \gamma,$$

$$6)\ u_2+u'_2+\tfrac{\gamma}{3}+c_2 \equiv \gamma.$$

Addiert man die Kongruenzen (5) und (6) und subtrahiert davon die Kongruenz (4), so ergibt sich unter Berücksichtigung der Kongruenz (1) die Beziehung: $u'_1+u'_2+\frac{\gamma}{3}+c_3 \equiv \gamma$, d. h. die Punkte P'_1, P'_2 und W_3 liegen in einer Geraden.

Aus Figur 3 ersieht man ferner, dass der Schnittpunkt H_3 der Wendepunktlinie mit der harmonischen Polaren $\mathfrak{H}_3$ der zugeordnete harmonische Punkt von W_3 in Bezug auf die Punkte W_1 und W_2 ist. Dasselbe gilt für die Schnittpunkte H_1 und H_2 der harmonischen Polaren $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ mit der Wendepunktlinie in Bezug auf die zugehörigen Wendepunkte (Fig. 3).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es sind also die sechs Punkte W_1, W_2, W_3, H_1, H_2, H_3, in Involution.*)

Lässt man die Sekanten $P_1 W_1$ und $P_2 W_2$ in die Wendetangenten übergehen, so resultiert hieraus der Satz:

Die Tangenten in zwei Wendepunkten schneiden sich auf der harmonischen Polaren desjenigen Wendepunktes, der mit den ersten in einer Geraden liegt.

Da die Punkte W_1, H_3, W_2, W_3; W_2, H_1, W_3, W_1; W_3, H_2, W_1, W_2 harmonisch gelegene Punkte sind, so müssen die Strahlenbüschel, deren Zentren die Schnittpunkte zweier Wendetangenten sind und deren Strahlen durch obige Punkte gehen, harmonisch sein; es bilden daher je zwei Wendetangenten und die durch ihren Schnittpunkt gehende harmonische Polare mit der von ihrem Schnittpunkt nach dem 3. Wendepunkt gehenden Geraden ein harmonisches Strahlenbüschel.

Fällt die Gerade G_3 in Figur 2 mit der Geraden G_1 zusammen, so erhält man einen Kegelschnitt, der die Kurve in den Punkten P_1 und P'_1 zweipunktig berührt und ausserdem die Kurve noch in zwei Punkten P_2 und P'_2 schneidet, die mit dem Wendepunkt in einer Geraden liegen. Lässt man die Gerade G_2 um den Wendepunkt sich drehen, so erhält man ein Kegelschnittbüschel; sämtliche Kegelschnitte dieses Büschels haben die Eigenschaft die Kurve 3. Ordnung in den Punkten P_1 und P'_1 zweipunktig zu berühren. Fällt endlich noch bei dieser Drehung G_2 mit G_1 zusammen, so fallen von den sechs Schnittpunkten P_ν drei mit P_1 und drei mit P'_1 zusammen; in dem Kegelschnittbüschel ist also ein Kegelschnitt vorhanden, der die Kurve 3. Ordnung in den Punkten P_1 und P'_1 dreipunktig berührt oder oskuliert. Dieser Kegelschnitt ist in dem ganzen Büschel der einzige, der diese Eigenschaft besitzt.

Die notwendige Bedingung dafür, dass überhaupt durch zwei Punkte einer Kurve 3. Ordnung ein Kegelschnitt gelegt werden kann, der dieselbe in diesen Punkten oskuliert, ist, dass die Verbindungsgerade der beiden Punkte durch einen Wendepunkt geht. Denn geht die Gerade $P_1 P'_1$ nicht durch den

*) Vgl. Gent, a. a. O. Absatz IV.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wendepunkt W_ν, sondern schneidet die Kurve 3. Ordnung in einem Punkte P mit dem Augumente u, so besteht die Relation:

$$u_1 + u'_1 + u \equiv \gamma.$$

Ein Kegelschnitt, der die Kurve in den Punkten P_1 und P'_1 zweipunktig berührt, schneidet sie noch in den Punkten P_2 und P'_2, deren Argumente v_1 und v'_1 sind. Für diese Punkte gilt die Kongruenz

$$2u_1 + 2u'_1 + v_1 + v'_1 \equiv 2\gamma.$$

Aus diesen beiden Kongruenzen folgt aber: $v_1 + v'_1 + u \equiv 3u$ d. h. die drei Punkte P_2, P'_2 und P liegen nicht in einer Geraden. Lässt man die Gerade P_2P mit $P_1P'_1$ zusammenfallen, so wird P_2 mit einem der Punkte P_1 oder P'_1 zusammenfallen, während P'_2 nicht mit dem übrig bleibenden zusammenfällt. Der Kegelschnitt berührt daher die Kurve nur in einem der Punkte P_1 oder P'_1 dreipunktig, aber nicht in dem andern.

Fallen noch die beiden Punkte P_1 und P'_1 zusammen, so geht die Sekante G_1 in die Tangente über, die man vom Wendepunkt an die Kurve ziehen kann. Es gibt also einen Kegelschnitt, der die Kurve sechspunktig berührt. Nun kann man aber von einem Wendepunkt drei Tangenten an die Kurve 3. Ordnung legen; es gibt daher auf ihr 27 Punkte, in denen sie eine sechspunktige Berührung mit einem Kegelschnitt eingeht.

9.

Zieht man aus einem beliebigen Punkt P_a der Kurve 3. Ordnung Strahlen nach den neun Wendepunkten, so erhält man neun Punkte P'_a, P'_b, P'_c . . . P'_i, in denen die Strahlen die Kurve nochmals treffen. Im vorausgehenden Abschnitt wurde gezeigt, dass durch zwei Punkte der Kurve 3. Ordnung, deren Verbindunggerade durch einen Wendepunkt geht, ein Oskulationskegelschnitt gelegt werden kann; es gehen daher durch den Punkt P_a neun Kegelschnitte, welche die Kurve ausser in diesem Punkt noch in den neun Punkten P'_a, P'_b, P'_c . . . P'_i dreipunktig berühren. Verbindet man wieder einen der neun Punkte mit den neun Wendepunkten, so erhält man ein zweites System von Punkten, in denen die Kurve von

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Kegelschnitten oskuliert wird. Da von den neun Wendepunkten nur drei reell und sechs imaginär sind, so sind auch von den neun Oskulationspunkten nur drei reell. Liegt der Punkt P_a mit zwei Wendepunkten in einer Geraden, so fallen zwei Punkte des Punktsystems zusammen; dann ist aber Punkt P_a ein Wendepunkt. In diesem Fall bilden die neun Wendepunkte selbst ein System von Oskulationspunkten und die Oskulationskegelschnitte gehen in die Wendepunktlinien über.

Im Folgenden werden nur solche Oskulationspunkte betrachtet, die auf die drei reellen Wendepunkte bezogen sind. Die drei reellen Wendepunkte seien W_l, W_m, W_n mit den Argumenten w_l, w_m, w_n.

Um zu solchen Oskulationspunkten zu gelangen, verbindet man (Fig. 4) den Punkt P_l auf der Kurve mit dem Wendepunkt W_l; die Verbindungsgerade schneidet die Kurve noch in einem weiteren Punkt P'_l; für diese Gerade gilt, wenn man die zu den Punkten gehörigen Argumente v mit demselben Index bezeichnet, die Relation:

$$1)\quad v_l+v'_l+\tfrac{\gamma}{3}+w_l \equiv \gamma.$$

Verbindet man die Punkte P_l und P'_l mit dem Wendepunkt W_m durch Gerade, die die Kurve in den Punkten P'_n und P_n schneiden, so bestehen noch die Relationen

$$2)\quad v_l+v'_n+\tfrac{\gamma}{3}+w_m \equiv \gamma,$$

$$3)\quad v'_l+v_n+\tfrac{\gamma}{3}+w_m \equiv \gamma.$$

Legt man schliesslich durch P'_n und P_n und den Wendepunkt W_l je eine Gerade und treffen diese die Kurve ausserdem in den Punkten P_m und P'_m, so gelten noch die Beziehungen

$$4)\quad v_m+v'_n+\tfrac{\gamma}{3}+w_l \equiv \gamma,$$

$$5)\quad v_m+v'_m+\tfrac{\gamma}{3}+w_l \equiv \gamma.$$

Durch Addition der Relationen 1, 4, 5 erhält man

$$C)\quad v_l+v_m+v_n+v'_l+v'_m+v'_n \equiv 2\gamma.$$

Subtrahiert man von der Kongruenz (C) nach einander die Summe der Kongruenzen 2, 3, dann 3, 4, ferner 2, 5 und endlich 1, 6, so ergeben sich hieraus die weiteren Beziehungen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$6)\ v_m + v'_m + \tfrac{\gamma}{3} + w_m \equiv \gamma,$$
$$7)\ v_l + v'_m + \tfrac{\gamma}{3} + w_n \equiv \gamma,$$
$$8)\ v_m + v'_l + \tfrac{\gamma}{3} + w_n \equiv \gamma,$$
$$9)\ v_n + v'_n + \tfrac{\gamma}{3} + w_n \equiv \gamma.$$

Aus diesen Kongruenzen folgen noch weitere, wenn man die Beziehungen 1, 2, 7, dann 4, 6, 8 und 3, 5, 9 addiert, nämlich

$$D)\ 3v_l + v'_l + v'_m + v'_n \equiv 2\gamma,$$
$$E)\ 3v_m + v'_l + v'_m + v'_n \equiv 2\gamma,$$
$$F)\ 3v_n + v'_l + v'_m + v'_n \equiv 2\gamma.$$

Die Relationen 1, 4, 5, ferner 2, 3, 6 und 7, 8, 9 sagen aus, dass die Geraden $P_l P'_l - P_m P'_n - P_n P'_m$ durch den Wendepunkt W_l, ferner die Geraden $P_l P'_n - P_n P'_l - P_m P'_m$ durch den Wendepunkt W_m und die Geraden $P_l P'_m - P_m P'_l - P_n P'_n$ durch den Wendepunkt W_n gehen. Es sind also die Punkte P'_l, P'_m, P'_n die Projektionen der drei Wendepunkte aus jedem Punkte des Tripels P_l, P_m, P_n und umgekehrt. Die Punkte P_l, P_m, P_n sind demnach durch die Wendepunkte W_l, W_m, W_n in der Weise mit P'_l, P'_m, P'_n verbunden, dass das eine aus dem andern entsteht, wenn man die Wendepunkte aus irgend einem Punkte des andern projiziert. Zwei solche Punkttripel sind zugeordnete Tripel von Oskulationspunkten.

Die Kongruenzen (C) und (1) bis (9) sagen dann aus:

Ein System zugeordneter Tripel von Oskulationspunkten liegt immer auf einem Kegelschnitt; die Zuordnung der beiden Tripel ist so, dass die drei Geraden, die einen Punkt des einen Tripels mit einem Punkt des andern verbinden, durch die zugehörigen Wendepunkte gehen.

Lässt man die Punkte P'_l, P'_m, P'_n der Reihe nach mit dem Punkt P'_l, P'_m, P'_n zusammenfallen, so folgt aus den Kongruenzen (D) bis (E) der Satz:

Für jeden Punkt eines Tripels von Oskulationspunkten gibt es drei verschiedene Kegelschnitte, die die Kurve 3. Ordnung in diesen Punkten oskulieren;

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

jeder Kegelschnitt oskuliert dann die Kurve zum zweiten Mal in einem der drei Punkte des zugeordneten Tripels.

Die Relationen 1, 2, 7 oder 4, 6, 8 oder 3, 5, 9 können als die Bedingungen dafür gelten, dass die Punkte P'_l, P'_m, P'_n ein Tripel von Oskulationspunkten bilden, während die Kongruenzen 1 bis 5 und die daraus abgeleiteten die Bedingungen ausdrücken, dass die beiden Punkttripel P_l, P_m, P_n und P'_l, P'_m, P'_n einander zugeordnet sind.

Aus den Kongruenzen (D) bis (F) im Zusammenhang mit der Kongruenz (C) folgen weiter die Sätze:

Wenn ein Kegelschnitt die Kurve in einem Punkte des Tripels P_l, P_m, P_n oskuliert und ausserdem noch die Kurve in den Punkten P'_l, P'_m, P'_n schneidet, so liegen die beiden Punkttripel auf einem Kegelschnitt und

Legt man durch die Punkte eines Tripels von Oskulationspunkten einen Kegelschnitt, der die Kurve in dem zugeordneten Tripel schneidet, so gehen durch das zugeordnete Tripel drei Kegelschnitte, von denen jeder die Kurve 3. Ordnung in einem Punkt des ersten Tripels oskuliert.

Für jeden Punkt eines Tripels von Oskulationspunkten gibt es drei Kegelschnitte, die die Kurve 3. Ordnung in diesem Punkt des zugeordneten Tripels oskulieren. Die Verbindungsgerade zweier Oskulationspunkte geht durch einen Wendepunkt. Es müssen daher, wenn P ein Punkt der Kurve und P_l, P_m, P_n ein Tripel von Oskulationspunkten ist, die Strahlen PP_l—PP_m—PP_n durch drei Wendepunkte gehen, die auf einer Geraden liegen. Hat man zwei zugeordnete Tripel von Oskulationspunkten, P_l, P_m, P_n und P'_l, P'_m, P'_n, die auf einem Kegelschnitt liegen, so gehen durch P'_l, P'_m, P'_n drei Kegelschnitte, die die Kurve in P_l, P_m, P_n, oskulieren. Da aber die Punkte P_l, P_m, P_n selbst ein Tripel von Oskulationspunkten bilden, so treffen die von den Punkten P_l, P_m, P_n nach P'_l, P'_m, P'_n führenden Geraden die Kurve in Wendepunkten, die auf einer Geraden liegen; folglich bestehen die Relationen 1 bis 9, d. h. die

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

beiden Punkttripel sind zugeordnete Tripel von Oskulationspunkten. Daraus resultiert der Satz:

Wenn zwei Punkttripel auf einem Kegelschnitt liegen, so gehören sie zugeordneten Tripeln von Oskulationspunkten an.

Den Kongruenzen (1), (4), (5) gemäss kann man auch ein Tripel von Oskulationspunkten als eine Zentralprojektion des zugeordneten Tripels in Bezug auf einen Wendepunkt auffassen. Die Kollineationsachse dieser perspektivischen Projektion ist die harmonische Polare des Wendepunktes. Sind P'_l, P'_m, P'_n die Projektionen von P_l, P_n, P_m, in Bezug auf den Wendepunkt W_l, so schneiden sich die Geraden $P_lP_m - P'_lP'_n$, $P_mP_n - P'_mP'_n$, $P_lP_n - P'_lP'_m$ auf der Polaren $\mathfrak{H}_l$ (Fig. 4).

Man könnte aber auch P'_l, P_m, P'_m als Projektionen von P_l, P'_n, P_n in Bezug auf W_l auffassen, dann schneiden sich $P'_lP_m - P_lP'_n$, $P_mP'_m - P_nP'_n$ auf der nämlichen Geraden (Fig. 4). Ähnliche Betrachtungen kann man in Bezug auf die Wendepunkte W_m und W_n anstellen.

Zwei zugeordnete Tripel von Oskulationspunkten lassen sich in Bezug auf einen Wendepunkt auf vier Arten einander projektivisch zuordnen; dadurch entstehen sechs Paare einander entsprechender Verbindungsgeraden; jedes Paar schneidet sich auf der harmonischen Polaren des zugehörigen Wendepunktes.

10.

Nach Abschnitt 8 schneiden sich die Tangenten in den Oskulationspunkten $P_l - P'_l$, $P_m - P'_n$ und $P_n - P'_m$ auf der harmonischen Polaren vom Wendepunkt W_l; ebenso schneiden sich die Tangenten in den Oskulationspunkten $P_m - P'_m$, $P_n - P'_l$, $P_l - P'_n$ auf der harmonischen Polaren vom Wendepunkt W_m, endlich die Tangenten in den Oskulationspunkten $P_n - P'_n$, $P_l - P'_m$, $P_m - P'_l$ auf der harmonischen Polaren des Wendepunktes W_n. Diese sechs Tangenten, die die Kurve in den Punkten P_ν und P'_ν ($\nu = l, m, n$) berühren, schneiden

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

aber die Kurve nochmals in sechs Punkten p_ν und p'_ν ($\nu = l, m, n$), die ebenfalls Tripel von zugeordneten Oskulationspunkten bilden.

Für die Tangenten in den Punkten P_ν und P'_ν gelten nämlich, wenn u_ν und u'_ν ($\nu = l, m, n$) die Argumente der zugehörigen Punkte p_ν und p'_ν sind, die Kongruenzen

$$\begin{array}{ll} 10)\ 2v_l+u_l \equiv \gamma, & 13)\ 2v'_l+u'_l \equiv \gamma, \\ 11)\ 2v_m+u_m \equiv \gamma, & 14)\ 2v'_m+u'_m \equiv \gamma, \\ 12)\ 2v_n+u_n \equiv \gamma, & 15)\ 2v'_n+u'_n \equiv \gamma. \end{array}$$

Aus den Kongruenzen 10, 13 — 11, 14 — 12, 15 lassen sich unter Berücksichtigung der Relationen (1) bis (5) die weiteren ableiten:

$$\begin{array}{ll} \text{I)}\ u_l+u'_l+\tfrac{\gamma}{3}+w_l \equiv \gamma, & \text{III)}\ u'_l+u_n+\tfrac{\gamma}{3}+w_m \equiv \gamma, \\ \text{II)}\ u_l+u'_n+\tfrac{\gamma}{3}+w_m \equiv \gamma, & \text{IV)}\ u_m+u'_n+\tfrac{\gamma}{3}+w_l \equiv \gamma, \end{array}$$

$$\text{V)}\ u_n+u'_m+\tfrac{\gamma}{3}+w_l \equiv \gamma.$$

Die letzten fünf Kongruenzen drücken aber die Bedingung dafür aus, dass zwei Tripel von Oskulationspunkten einander zugeordnet sind.

Von den Punkten p_ν und p'_ν kann man durch weiteres Tangentenziehen zu einem neuen System zugeordneter Tripel von Oskulationspunkten gelangen, so dass allmählich die Kurve 3. Ordnung mit solchen Systemen überdeckt wird (Fig. 5).

Bilden die Punkte P_l, P_m, P_n ein Tripel von Oskulationspunkten, so gelten für dieselben die Kongruenzen

$$3v_l+v'_l+v'_m+v'_n \equiv 2\gamma,\ v_l+v_m+v_n+v'_l+v'_m+v'_n \equiv 2\gamma,$$

woraus man durch Subtraktion $2v_l - v_m - v_n \equiv 0$ erhält.

Ist p_l der Schnittpunkt der Kurve mit der Tangente an die Kurve im Punkte P_l, so gilt für diesen Punkt die Beziehung $2v_l+u_l \equiv \gamma$.

Aus den beiden letzten Kongruenzen erhält man durch Subtraktion

$$v_m+v_n+u_l \equiv \gamma \text{ d. h.}$$

die Punkte P_m, P_n und p_l liegen auf einer Geraden (Fig. 5).

Legt man in drei Oskulationspunkten Tangenten an die Kurve 3. Ordnung, so liegt der Schnittpunkt

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

jeder Tangente mit der Kurve auf der Verbindungsgeraden der beiden anderen Oskulationspunkte.

Diesen Satz kann man zur Konstruktion einer Kurve 3. Ordnung benützen, wenn die Wendepunkte derselben und die Tangenten in zwei zugeordneten Tripeln von Oskulationspunkten gegeben sind (Fig. 6).

Umgekehrt gilt auch der Satz: Haben drei Punkte P_l, P_m, P_n einer Kurve 3. Ordnung die Eigenschaft, dass der Schnittpunkt der Tangente in einem dieser Punkte mit der Kurve auf der Verbindungsgeraden der beiden andern Punkte liegt, so bilden die Schnittpunkte ein Tripel von Oskulationspunkten und

Haben von drei Punkten P_l, P_m, P_n einer Kurve 3. Ordnung zwei die Eigenschaft, dass die Schnittpunkte der Tangenten in diesen Punkten mit der Kurve auf den Verbindungsgeraden der beiden andern liegen, dann hat auch der dritte Punkt dieselbe Eigenschaft.

Bestehen nämlich neben den Kongruenzen

$$16)\ 2v_l+u_l \equiv \gamma,\quad 17)\ 2v_m+u_m \equiv \gamma,\quad 18)\ 2v_n+u_n \equiv \gamma$$

noch die beiden folgenden

$$19)\ v_m+v_n+u_l \equiv \gamma \text{ und } 20)\ v_l+v_n+u_m \equiv \gamma,$$

so ergibt sich hieraus, wenn man von der Summe der drei ersten die Summe der zwei letzten subtrahiert, die Beziehung:

$$v_l+v_m+u_n \equiv \gamma \quad \text{(Fig. 5).}$$

Von den sechs Punkten zweier zugeordneter Tripel von Oskulationspunkten kann auch einer in einen der drei Wendepunkte fallen. Fällt z. B. P_l mit dem Wendepunkt W_l zusammen, dann wird die Gerade $P_l W_l$ Wendetangente, also fällt auch der Schnittpunkt P'_l in den Wendepunkt W_l, die beiden Verbindungsgeraden von W_m mit P_l und P'_l und ebenso die von W_n mit P_l und P'_l fallen dann in die Wendepunktlinie; daraus geht hervor, dass auch P_m und P'_m auf den Wendepunkt W_m und P_n und P'_n auf den Wendepunkt W_n fallen.

Fällt einer der Punkte P_ν oder P'_ν ($\nu = l, m, n$) zweier zugeordneter Tripel von Oskulationspunkten

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

in einen der drei Wendepunkte, zu denen die Tripel gehören, so fallen die beiden anderen zu diesem Tripel gehörigen Punkte in die beiden anderen Wendepunkte und von den Punkten des zugeordneten Tripels fällt ebenfalls je einer in einen der drei Wendepunkte.

Liegt ein Punkt z. B. P_l auf dem Berührungspunkt einer der Tangenten, die man von einem Wendepunkt aus an die Kurve ziehen kann, so fällt auch P'_l mit P_l zusammen, dann decken sich aber auch die Verbindungsgeraden von P_l und P'_l mit dem Wendepunkt W_m, folglich fallen auch die dritten Schnittpunkte P_n und P'_n dieser beiden Geraden mit der Kurve in einen Punkt. Ebenso decken sich die Verbindungsgeraden von P_l und P'_l mit dem Wendepunkt W_n und ihre dritten Schnittpunkte P_m und P'_m mit der Kurve fallen in einen Punkt zusammen. Es sind dann die Geraden $P_m P'_m W_m$ und $P_n P'_n W_n$ Tangenten, die von W_m und W_n ausgehen. Es gilt daher der Satz:

Wenn ein Punkt zweier zugeordneter Tripel von Oskulationspunkten auf dem Berührungspunkte einer der drei Tangenten liegt, die man von einem Wendepunkt aus an die Kurve 3. Ordnung legen kann, so haben die einzelnen Oskulationspunkte der beiden zugehörigen Tripel eine solche Lage, dass immer ein Punkt P_ν mit einem Punkt P'_ν $(\nu = l, m, n)$ zusammenfällt. Die drei Punkte, in denen dies geschieht, sind Berührungspunkte je einer der drei Tangenten aus einem der drei Wendepunkte.

11.

Die Betrachtungen über Tripel von Oskulationspunkten für die drei reellen Wendepunkte kann man auch auf Systeme von Punkten P und P' ausdehnen, die auf irgend drei von den neun Wendepunkten bezogen sind, die auf einer Geraden liegen. Mit Hilfe der einzelnen Systeme bestimmt man dann das gesamte System von 18 einander zugeordneten Oskulations-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

punkten P und P', die auf sämtliche neun Wendepunkte bezogen sind.

Eine Gruppe von neun Oskulationspunkten P'_a, P'_b, $P'_c \ldots P'_i$ ist durch einen ihrer Punkte z. B. P'_a bestimmt, sobald man die neun Wendepunkte W_a, W_b, $W_c \ldots W_i$ der Kurve kennt. Trifft die Gerade $P'_a W_a$ die Kurve in dem Punkt P_a und projiziert man von P_a aus als Zentrum die neun Wendepunkte, so gehen die Projektionsstrahlen durch die Punkte P'_a, P'_b, $P'_c \ldots P'_i$. Zieht man von P'_a aus nach einem Wendepunkt W_l eine Gerade, die die Kurve im Punkte P_l schneidet, so treffen die aus P_l nach den Wendepunkten gehenden Strahlen die Kurve in den nämlichen neun Punkten P'_a, P'_b, $P'_c \ldots P'_i$. Ist W_m irgend ein Wendepunkt und trifft $P_l W_m$ die Kurve in P'_n, so muss P'_n mit einem der Punkte P'_a, P'_b, $P'_c \ldots P'_i$ zusammenfallen. Fällt der Wendepunkt W_m auf den Wendepunkt W_l, so leuchtet die Richtigkeit dieser Behauptung sofort ein. Ist aber W_m von W_l verschieden, so gibt es noch einen Wendepunkt W_n, der mit W_l und W_m auf einer Geraden liegt. Trifft der Strahl $P_l W_m$ die Kurve in dem Punkt P'_m, so bestehen für die drei Punkte die Kongruenzen:

$$v_l + v'_a + \tfrac{\gamma}{3} + w_l \equiv \gamma, \quad v_l + v'_n + \tfrac{\gamma}{3} + w_m \equiv \gamma, \quad v_l + v'_m + \tfrac{\gamma}{3} + w_n \equiv \gamma;$$

es bilden daher die drei Punkte P'_a, P'_n, P'_m ein Tripel von Oskulationspunkten. Die Gerade $P'_a W_a P_a$ geht aber durch den Wendepunkt W_a und den Punkt P_a; es müssen daher auch $P_a P'_m$ und $P_a P'_n$ durch Wendepunkte gehen, die mit W_a auf einer Geraden liegen, da sonst die drei Punkte P'_a, P'_n, P'_m kein Tripel von Oskulationspunkten bilden, d. h. P'_m und P'_n müssen mit zweien der Punkte P'_a, P'_b, $P'_c \ldots P'_i$ zusammenfallen. Es ist also eine Gruppe von Oskulationspunkten durch einen ihrer Punkte bestimmt, so dass jeder Kurvenpunkt nur einer Gruppe angehört. Zieht man aus P'_a Strahlen nach den neun Wendepunkten, die die Kurve in den Punkten P_a, P_b, $P_c \ldots P_i$ treffen, so werden die Wendepunkte aus jedem dieser Punkte auf die nämliche Gruppe von Oskulationspunkten projiziert. Beide Gruppen sind zugeordnete Gruppen von Oskulationspunkten.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Verbindet man einen Punkt der Kurve 3. Ordnung mit drei in einer Geraden liegenden Wendepunkten, so erhält man zunächst ein Tripel von Oskulationspunkten, das durch den Punkt und die drei Wendepunkte bestimmt ist. Will man für den Punkt ein System erhalten, das auf drei andere Wendepunkte, die in einer Geraden liegen, bezogen ist, so braucht man nur die Punkte P_ν und P'_ν mit den Indizes der neuen Wendepunkte zu bezeichnen. Die neun Wendepunkte liegen aber zu je dreien auf den zwölf Wendepunktlinien. Man erhält also zwölf Systeme von zugehörigen Oskulationspunkten.

Ist z. B. ein Wendepunkt W_l und ein Punkt P_m gegeben, so sucht man den Wendepunkt W_n, der mit W_l und W_m auf einer Geraden liegt. Dann bestimmt man die Punkte, zu denen die Strahlen $P_l(W_l W_m W_n)$ führen; es sind dies die Punkte P'_l, P'_m, P'_n. Die Punkte P_l, P_m, P_n, nach denen die Strahlen $P'_l(W_l W_m W_n)$ führen, bilden dann das zugeordnete Tripel von Oskulationspunkten. Dieselben liegen auf neun Geraden; von diesen gehen

$P_l P'_l - P_m P'_n - P_n P'_m$ durch den Wendepunkt W_l,
$P_m P'_m - P_l P'_n - P_n P'_l$ durch den Wendepunkt W_m,
$P_n P'_n - P_l P'_m - P'_l P_m$ durch den Wendepunkt W_n.

In dem System von 18 Oskulationspunkten gibt es 81 Transversalen, von denen jede je einen Wendepunkt und einen Punkt P und P' enthält. Die Kongruenzen (1) bis (9) des Art. 9, die die Bedingungen ausdrücken, dass sechs Punkte zwei zugeordnete Tripel von Oskulationspunkten bilden, bleiben ungeändert, wenn man in ihnen für die Argumente der Wendepunkte W_l, W_m, W_n die Argumente dreier anderer Wendepunkte setzt, die auf einer Geraden liegen, deren Argumente also der Bedingung $w_a + w_b + w_c \equiv 0$ (mod. a, πi) genügen. Man erhält dann zu P'_l, P'_m, P'_n ein anderes Punkttripel. Es kann demnach das Punkttripel P'_l, P'_m, P'_n durch drei Wendepunktlinien erzeugt werden, von denen keine zwei denselben Wendepunkt enthalten. Nun ordnen sich aber die zwölf Wendepunktlinien auf vier Arten zu je dreien so an, dass immer drei Wendepunktlinien einer Gruppe sämtliche neun Wendepunkte enthalten. Daher sind von den zwölf Punkt-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

dre Kurve 3. Ordnung mit
zu punkten, so erhält man
Pu unkten, das durch den
der mmt ist. Will man für
pu uf drei andere Wende-
ma bezogen ist, so braucht
W den Indizes der neuen
abe n Wendepunkte liegen
als unktlinien. Man erhält
skulationspunkten.

so ein Punkt P_m gegeben,
ein r mit W_l und W_m auf
der man die Punkte, zu
Pu ren; es sind dies die
die , P_m, P_n, nach denen
Tri n dann das zugeordnete
Ge elben liegen auf neun

Wendepunkt W_l,
Wendepunkt W_m,
Wendepunkt W_n.

81 lationspunkten gibt es
ein inen Wendepunkt und
des ongruenzen (1) bis (9)
zwe ken, dass sechs Punkte
ung punkten bilden, bleiben
pur Argumente der Wende-
pur dreier anderer Wende-
also gen, deren Argumente
Ma (mod. a, πi) genügen.
Es n anderes Punkttripel.
We P'_m, P'_n durch drei
selb denen keine zwei den-
We nen sich aber die zwölf
imn je dreien so an, dass
We ruppe sämtliche neun
von den zwölf Punkt-

© The Tiffen Company, 2007
TIFFEN Gray Scale
A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19
R G B W G K C Y M

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

tripeln, die eine Gruppe von 18 Oskulationspunkten enthält, nur vier von einander verschieden. Jedes Tripel von Oskulationspunkten besitzt drei ihm zugeordnete Tripel; die neun Punkte dieser zugeordneten Tripel bilden die zugeordnete Gruppe zu der, welcher das gegebene Tripel angehört. Für ein in einer Gruppe von Oskulationspunkten enthaltenes Tripel kann demnach jeder Punkt der zugeordneten Gruppe als Projektionszentrum dienen. Umgekehrt kann man sagen, von jedem Punkt der zugeordneten Gruppe gehen die Strahlen, die nach den Punkten eines in der ursprünglichen Gruppe enthaltenen Tripels führen, durch drei in gerader Linie liegende Wendepunkte.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

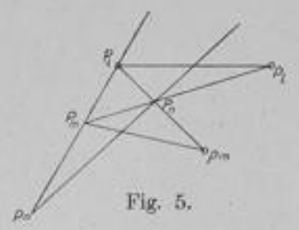

Fig. 5.

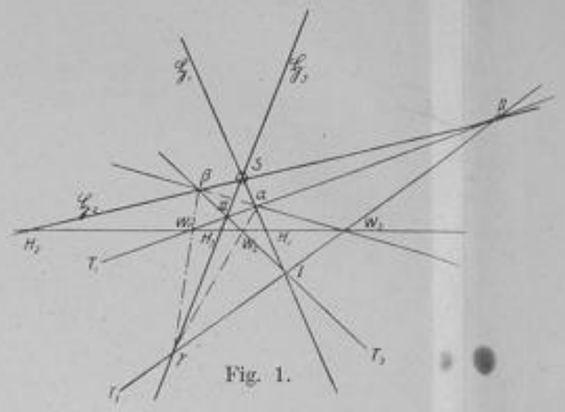

Fig. 1.

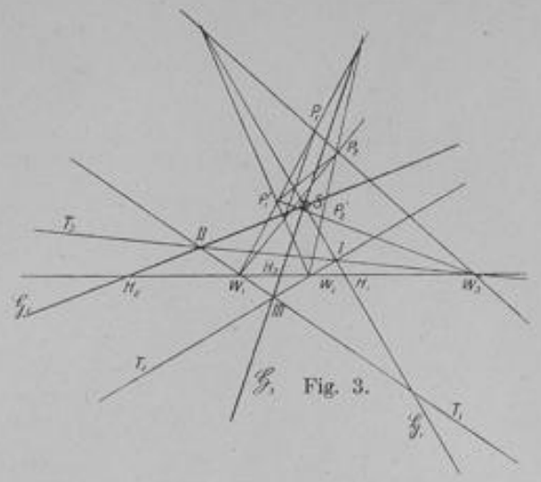

Fig. 3.

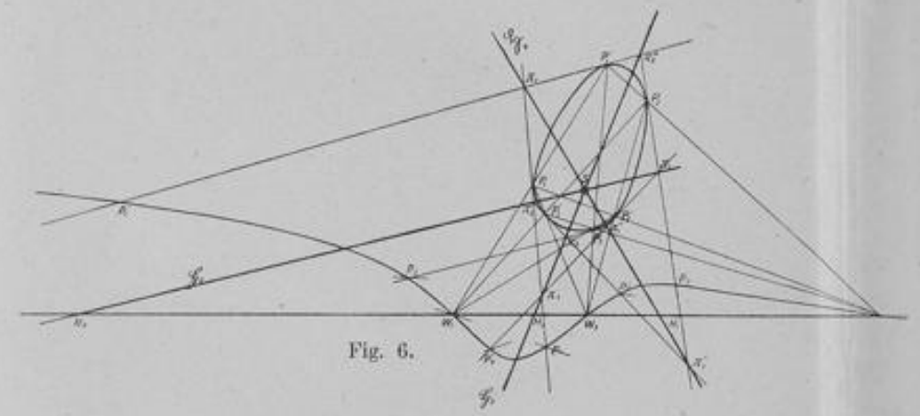

Fig. 6.

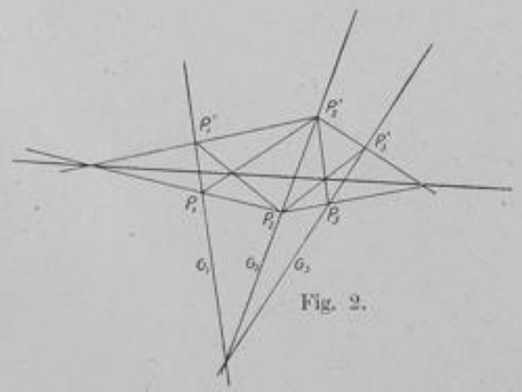

Fig. 2.

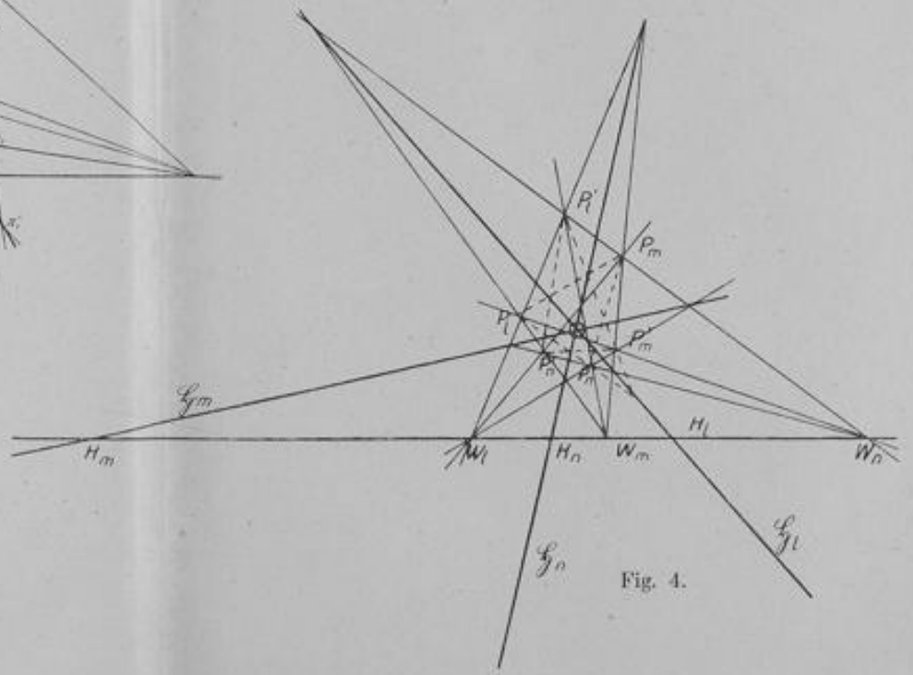

Fig. 4.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf