Über die Bewegung eines Pendels, dessen Aufhängepunkt beweglich ist.

Die vorliegende Untersuchung beschäftigt sich mit den Gesetzen der Bewegung eines mathematischen Pendels, welches sich von dem gewöhnlichen dadurch unterscheidet, daß sein Aufhängepunkt beweglich ist und zwar auf einer gegebenen festen Horizontalen. Der Begriff des mathematischen Pendels bedingt es, daß wir die Pendelstange als eine gewichtslose Gerade ansehen. Nur die beiden Endpunkte sollen mit Masse versehen sein. Von jeglicher sich bei der Bewegung unserer Punkte geltend machenden Reibung sehen wir ab. Die Stöße, welche unserem Punktsysteme am Anfang der Bewegung mitgeteilt werden, beschränken wir auf solche, welche nur eine Bewegung in einer Ebene zulassen. Diese fällt offenbar mit derjenigen Vertikalebene zusammen, welche durch die als Bahn für den beweglichen Aufhängepunkt vorgeschriebene Horizontale bestimmt ist. Sie sei die xy-Ebene eines rechtwinkligen Koordinatensystems, die x-Axe, positiv nach rechts, sei identisch mit der gegebenen Horizontalen, die y-Axe sei im Sinne der Schwere positiv genommen. Der Aufhängepunkt sei mit A bezeichnet, der mit ihm durch die starre Pendelstange verbundene Punkt mit B. Ersterer mit den Koordinaten ξ und o habe die Masse μ, letzterer mit den Koordinaten x und y die Masse m. Die einzige Bedingungsgleichung des Systems ist bei der angenommenen Lage des Koordinatensystems:

$$(x - \xi)^2 + y^2 = a^2$$

wenn a die Länge der Pendelstange bedeutet. Zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen bedienen wir uns des d'Alembertschen Princips und zwar in seiner transformierten Gestalt der sogenannten zweiten Lagrangeschen Form. Es kommt dann zunächst auf die Einführung independenter Koordinaten an. Die Substitution:

$$x - \xi = a \sin \varphi, \; y = a \cos \varphi$$

leistet das Erforderliche. Aus ihr gehen x und φ oder ξ und φ als independent hervor. Wählen wir die letzte Kombination. Da wegen der alleinigen Wirkung der Schwere, als kontinuierlicher Kraft, eine Kräftefunktion existiert, so haben wir bekanntlich die Bewegungsgleichungen in der Form:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \xi'}\right) = \frac{\partial\,(T+U)}{\partial \xi}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi'}\right) = \frac{\partial\,(T+U)}{\partial \varphi},$$

wenn T die lebendige Kraft, U die Kräftefunktion und φ' und ξ' die Derivierten von φ und ξ nach der Zeit t bedeuten. Die lebendige Kraft T:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$T = \frac{1}{2} \Sigma\, m_i\, (x'^2_i + y'^2_i + z'^2_i)$$

ist für unser System

$$T = \frac{m}{2}\, (\xi'^2 + a^2\varphi'^2 + 2a\xi' \cos\varphi\varphi') + \frac{\mu}{2}\, \xi'^2$$

während $U = mga \cos\varphi$ ist.

Diese Werte substituiert in die allgemeinen Gleichungen, erhalten wir:

$$\frac{d}{dt}\, (\overline{m+\mu}\, \xi' + ma \cos\varphi\varphi') = o$$

und $\frac{d}{dt}\, (ma^2\, \varphi' + ma\, \xi' \cos\varphi) = -ma\, \xi'\varphi' \sin\varphi - mga \sin\varphi.$

Die erste Gleichung ergiebt sofort:

$$(m+\mu)\, \xi' + ma \cos\varphi\varphi' = b,$$

wenn b eine noch zu bestimmende Konstante bezeichnet.

Für ξ' folgt:

$$1) \quad \xi' = \frac{b - am \cos\varphi\varphi'}{m+\mu}$$

Diesen Wert in die zweite Gleichung eingeführt, ergiebt sich

$$\frac{d}{dt}\, (ma^2\varphi' + ma\, \frac{b - am \cos\varphi\varphi'}{m+\mu} \cos\varphi) = -\, mga \sin\varphi - ma\, \frac{b - am \cos\varphi\varphi'}{m+\mu} \sin\varphi\varphi',$$

d. h. $a\varphi''\, (1 - \frac{m}{m+\mu} \cos^2\varphi) + \frac{am}{m+\mu} \sin\varphi \cos\varphi\varphi'^2 = -g \sin\varphi$

Zur Abkürzung $\frac{m}{m+\mu} = \gamma$ gesetzt:

$$2) \quad \varphi''\, (1 - \gamma \cos^2\varphi) + \gamma \sin\varphi \cos\varphi\varphi'^2 = -\frac{g}{a} \sin\varphi.$$

Zur Integration der Gleichung 2) setzen wir nach einem bekannten Verfahren

$$\varphi'^2 = u.$$

Dann ist:

$$2\, \frac{d\varphi}{dt}\, \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{du}{dt} \text{ oder}$$

$$2\, \frac{d\varphi}{dt}\, \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{du}{d\varphi}\, \frac{d\varphi}{dt}$$

$$2\, \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{du}{d\varphi}$$

$$(1 - \gamma \cos^2\varphi)\, \frac{du}{d\varphi} + 2\gamma \sin\varphi \cos\varphi\, .u = -\, 2\, \frac{g}{a} \sin\varphi$$

$$\frac{d}{d\varphi}\, [u\, (1 - \gamma \cos^2\varphi)] = -\, 2\, \frac{g}{a} \sin\varphi$$

$$u\, (1 - \gamma \cos^2\varphi) = -\, 2\, \frac{g}{a} \int \sin\varphi\, d\varphi - k$$

$$\varphi'^2\, (1 - \gamma \cos^2\varphi) = 2\, \frac{g}{a} \cos\varphi - k.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$3)\quad a^2\varphi'^2 = \frac{2\,ag\cos\varphi - a^2k}{1-\gamma\cos^2\varphi}$$

$$4)\quad t = a\int\frac{\sqrt{1-\gamma\cos^2\varphi}}{\sqrt{2\,ag\cos\varphi - a^2k}}\,d\varphi.$$

Hierin ergiebt sich der Wert für die Konstante k aus den zur Zeit $t = o$ auf das System wirkenden Momentankräften, wovon indes später.

Die gewonnenen Resultate 1) und 3) führen uns zu der bekannten Zerlegung der Bewegung eines ebenen Systems in seiner Ebene in eine Translation und in eine Rotation um einen mit der Zeit beweglichen Punkt (A) dieser Ebene. Fassen wir zunächst die Rotation in das Auge, deren Geschwindigkeit durch die Gleichung 3) reguliert wird. Die Größe derselben beträgt:

$$\varphi' = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{2\,ag\cos\varphi - a^2k}{1-\gamma\cos^2\varphi}},$$

wo

$$a^2k = 2\,ag\cos\alpha - c^2\,(1-\gamma\cos^2\alpha),$$

wenn c die aus den für $t = o$ gegebenen Stößen noch zu berechnende Anfangsgeschwindigkeit des Punktes B bezeichnet und α der Anfangswert von φ ist.

Da die Gleichung 3) die Zeit explicite nicht enthält, so folgt, daß beim wiederholten Passieren derselben Stelle der relativen Bahn der Punkt B dieselbe Geschwindigkeit, absolut genommen, besitzen wird. Da ferner die rechte Seite von 3) ihren Wert nicht ändert, wenn φ übergeht in $-\varphi$, so hat jeder Punkt auf der einen Seite der Vertikalen — von dieser sind ja die Winkel φ zu rechnen — auf der anderen Seite einen ihm derartig entsprechenden Punkt in gleicher Höhe, daß B dort dieselbe Geschwindigkeit annimmt. Für $\varphi = o$ nimmt die rechte Seite von 3) ihren absolut größten Wert an, indem dann gleichzeitig der Zähler am größten und der Nenner am kleinsten ist. Für $\varphi = o$ hat also die Funktion, welche die Geschwindigkeit darstellt, einen Kulminationspunkt. Es erhebt sich die Frage, ob deren noch mehr existieren. Indes davon gleich nachher.

Nach den gemachten Bemerkungen können wir den Punkt B in seiner relativen Bahn verfolgen. Geht er von $\varphi = \alpha$ mit der Anfangsgeschwindigkeit c aus, so fällt er — der Einfachheit halber sollen die zur Zeit $t = o$ wirkenden Stöße ein Fallen des Punktes B bedingen — zunächst bis $\varphi = o$ mit zunehmender Geschwindigkeit. Da seine Geschwindigkeit hier also nicht verschwindet, so gelangt er über den tiefsten Punkt seiner Bahn hinaus, und seine Geschwindigkeit durchläuft bei der nun folgenden Steigung dieselben Werte wie beim Herunterfallen, nur in umgekehrter Ordnung. In $\varphi = \alpha$ hat er wieder seine Anfangsgeschwindigkeit c, mit der er seinen Weg in derselben Richtung noch fortsetzt, bis $\cos\varphi = \frac{a^2k}{2ag} = \frac{ak}{2g}$ geworden ist. Es liegen nun verschiedene Möglichkeiten vor:

$$\begin{array}{l} \text{I}\ \ k = o \\ \left.\begin{array}{l}\text{II}\ \ k > o \\ \text{III}\ \ k < o\end{array}\right\}\ \text{u. zwar}\ 1)\ \frac{ak}{2g} < 1 \quad 2)\ \frac{ak}{2g} = 1 \quad 3)\ \frac{ak}{2g} > 1 \end{array}$$

Fall I $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ d. h. der Punkt B kommt gerade, wenn die Pendelstange die horizontale Lage erreicht, zur Ruhe. Es besteht die Bedingungsgleichung für den Anfangsmoment:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$0 = 2\,ag \cos\alpha - c^2\,(1 - \gamma \cos^2\alpha) \text{ oder } \frac{c^2}{2g} = \frac{a \cos\alpha}{1 - \gamma \cos^2\alpha}$$

d. h. die Geschwindigkeitshöhe $\frac{c^2}{2g}$ ist gleich der im Verhältnis von $(1 - \gamma \cos^2\alpha) : 1$ vergrößerten Entfernung des Punktes B in seiner Anfangslage von der gegebenen Horizontalen.

Fall II 1) $\varphi = -\alpha_1, \frac{\pi}{2} > \alpha_1 > \alpha$ d. h. der Punkt B erreicht die Ruhelage unterhalb der gegebenen Horizontalen. Es besteht für den Anfangsmoment die Gleichung

$$\frac{c^2}{2g} = \frac{a \cos\alpha}{1 - \gamma \cos^2\alpha} - \lambda, \lambda > o$$

d. h. die Geschwindigkeitshöhe $\frac{c^2}{2g}$ ist kleiner als die im Fall I angegebene Größe.

Fall II 2) ist unmöglich, denn es müßte für $t = o$ die Gleichung bestehen

$$\cos\alpha = \frac{c^2\,(1 - \gamma \cos^2\alpha)}{2\,ag} + 1.$$

Fall II 3) ebenfalls unmöglich, da $\cos\varphi$ den Wert 1 überschreiten würde.

Fall III 3) ist überhaupt unmöglich aus demselben Grunde wie vorher.

Fall III 1) und 2) sind nur insofern unmöglich, als der Punkt B wegen der Festigkeit der gegebenen Horizontalen diese nicht überschreiten kann. Es wird also nach eingetretenem Verlust von Geschwindigkeit in $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ die Rückkehr stattfinden, und dann kommt dieser Fall auf Fall I zurück. Wir schließen ihn von der ferneren Betrachtung aus. Es bleiben also nur die Möglichkeiten I und II 1) übrig. Demgemäß gelangt der Punkt B nach Umkehr seiner Bewegungsrichtung auf der Seite der positiven Winkel bis $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ oder bis $\varphi = \alpha_1, \frac{\pi}{2} > \alpha_1 > \alpha$, und nun wiederholt sich die relative Bewegung in der beschriebenen Weise immerfort. Die Modifikation unserer Betrachtung für den Fall, daß die Anfangsgeschwindigkeit $c = o$ ist, ist leicht ersichtlich.

Nach dieser Untersuchung können wir zur Beantwortung der oben aufgeworfenen Frage schreiten, ob für die Funktion φ' noch mehr Kulminationspunkte existieren als $\varphi = o$. Wenn wir zu dem Zweck $\frac{d\varphi'}{d\varphi} = o$ bilden, so erhalten wir nach einigen Reduktionen:

$$\sin\varphi\,\left(1 + \gamma \cos^2\varphi - ak\,\frac{\gamma}{g}\,\cos\varphi\right) = o,$$

d. h. 1) $\sin\varphi = o$

2) $\cos\varphi = \frac{ak}{2g} \pm \sqrt{\left(\frac{ak}{2g}\right)^2 - \frac{1}{\gamma}}$

Den Fall 1) haben wir schon früher erhalten. Da nur die Möglichkeiten I u. II 1) für unser Problem in Betracht kommen, so wird $\cos\varphi$ im zweiten Fall stets imaginär, da $\gamma = \frac{m}{m + \mu}$ ein ächter Bruch ist. Also haben wir keinen weiteren Kulminationspunkt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Was nun die in jedem Moment außer der betrachteten Rotation des Systems noch vorhandene Translation, die einzige Bewegung des Rotationscentrums A, betrifft, so beträgt die Geschwindigkeit derselben nach 1)

$$\xi' = \frac{b - am\cos\varphi\varphi'}{m+\mu}, \text{ wo } b \text{ definiert ist durch die Gleichung}$$

$$\xi'_0 = \frac{b - cm\cos\alpha}{m+\mu} \text{ (der Index o bezieht sich auf die Zeit),}$$

d. h. $b = \xi'_0\,(m+\mu) + cm\cos\alpha.$

Es sind jetzt 3 Fälle zu unterscheiden $b > o$, $b = o$, $b < o$. Da der Raum uns nicht gestattet, alle 3 Fälle zu erledigen, so behandeln wir nur den interessantesten $b = o$ oder

$$\xi'_0 = -\frac{cm\cos\alpha}{m+\mu}$$

Dieser Fall enthält die Bedingung, daß die Anfangsgeschwindigkeit des Punktes A der Größe nach gleich der horizontalen Komponente der Rotations-Anfangsgeschwindigkeit des Schwerpunktes sei, der Richtung nach ihr entgegengesetzt. Um dies nachzuweisen, hätten wir zu zeigen, daß $\frac{cm}{m+\mu}$ die Rotationsgeschwindigkeit des Schwerpunktes zur Zeit $t = o$ bezeichnet. Zu dem Ende beweisen wir zuerst, daß $\frac{am}{m+\mu}$ die Entfernung des Schwerpunktes unseres Systems vom Punkte A bedeutet. Ist nämlich ϱ die allgemeine Entfernung eines Massenpunktes m von A, geschätzt auf der Pendelstange AB, so liefert uns der Begriff des Schwerpunktes die Beziehung:

$$\Sigma m\varrho = M\varrho', \varrho' = \frac{\Sigma m\varrho}{M},$$

M als Masse des ganzen Systems, ϱ' als Entfernung des Schwerpunktes von A genommen. Dies giebt in unserem Fall

$$\varrho' = \frac{am}{m+\mu}$$

Ist aber ϱ' die Entfernung des Schwerpunktes vom Centrum der Rotation, so bestimmen wir seine Anfangsgeschwindigkeit c' aus der Proportion

$$c' : c = \frac{am}{m+\mu} : a$$

$$\text{d. h.} \quad c' = \frac{cm}{m+\mu}.$$

Der Ausdruck für ξ'

$$\xi' = -\frac{am\cos\varphi\varphi'}{m+\mu}$$

lehrt, daß die Geschwindigkeit des Punktes A nur von φ abhängt, da ja auch φ' nur Funktion von φ ist, d. h. immer mit φ denselben Wert annimmt, ferner, daß sie ihr Vorzeichen immer mit φ' ändert. Auch erhalten wir hier wie früher für die Rotationsgeschwindigkeit φ' einen Kulminationspunkt für $\varphi = o$. Nur entspricht einem Max. von ξ'

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ein Min. von φ' und umgekehrt. Um die Überzeugung von der Ausschließlichkeit dieses Kulminationspunktes zu gewinnen, bilden wir $\frac{d\xi'}{d\varphi} = o$. Die Ausführung der angedeuteten Differentiation ergiebt nach einigen Reduktionen:

$$\sin\varphi\,(g\,\gamma\cos^3\varphi - 3g\cos\varphi + ak) = o.$$

Die erste Möglichkeit $\sin\varphi = o$ wiederholt nur Bekanntes. Die zweite ($\cos\varphi = x$ gesetzt)

$$g\,\gamma\,x^3 - 3g\,x + ak = o$$

kommt für unser Problem nur in Betracht, wenn die Wurzeln der aufgestellten kubischen Gleichung innerhalb gewisser Grenzen liegen. Letztere ergeben sich aus den früher gegebenen Bedingungen:

$$1)\ k = o \qquad 2)\ k > o \qquad ak < 2g$$

$$\text{für 1) als } x = 1 \text{ und } x = o \quad \left(\varphi = o \text{ und } \varphi = \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{für 2) als } x = 1 \text{ und } x = \frac{ak}{2g} \quad (\varphi = o \text{ und } \varphi = \alpha_1)$$

Es handelt sich also darum zu bestimmen, ob die linke Seite (f) unserer kubischen Gleichung innerhalb der angegebenen Grenzen ihr Vorzeichen wechselt.

$$1)\ k = o \quad \begin{cases} x = 1 & f = g\,(\gamma - 3), \text{ also } f < o \\ x = o & f = o \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} x = \varepsilon \\ o < \varepsilon < 1 \end{matrix}\right\} f = g\,\varepsilon\,(\gamma\,\varepsilon^2 - 3), \text{ also } f < o$$

$$2)\ k > o \quad x = 1 \qquad f = g\,(\gamma - 3) + ak$$

$$f = g\left\{(\gamma - 3) + \frac{ak}{g}\right\}$$

$$f = g\,(\gamma - 3 + 2 - \eta),\ \eta > o$$

$$f = g\,(\gamma - 1 - \eta), \text{ also } f < o$$

$$x = \frac{ak}{2g},\ \frac{f}{g} = \frac{ak}{2g}\left\{\gamma\left(\frac{ak}{2g}\right)^2 - 3 + 2\right\}$$

$$\frac{f}{g} = \frac{ak}{2g}\left\{\gamma\left(\frac{ak}{2g}\right)^2 - 1\right\}, \text{ also } f < o$$

$$x = \varepsilon,\ \frac{ak}{2g} < \varepsilon < 1 \qquad \text{auch } f < o$$

Also wechselt die Funktion f innerhalb der angegebenen Grenzen ihr Vorzeichen nicht, d. h. ξ' hat keine weiteren Kulminationspunkte.

Der Ort des Punktes A ist bestimmt durch die Gleichung

$$\xi = \frac{b_1 - am\sin\varphi}{m + \mu}$$

da $b = o$ genommen worden. Darin hat b_1 der Gleichung zu genügen

$$\xi_0 = \frac{b_1 - am\sin\alpha}{m + \mu}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

oder $$b_1 = \xi_0 (m + \mu) + am \sin \alpha,$$
wo ξ_0 und α sich auf den Anfangsmoment beziehen. Demnach erhalten wir für ξ

$$\text{I} \qquad \xi = \xi_0 + \frac{am}{m + \mu} (\sin \alpha - \sin \varphi)$$

Nennen wir den Winkel, welcher die höchste Lage des Punktes B in seiner relativen Bahn bezeichnet, wieder α_1, so beträgt die größte Entfernung ξ_1 des Punktes A vom Anfangspunkt der Koordinaten

$$\text{II} \qquad \xi_1 = \xi_0 + \frac{am}{m + \mu} (\sin \alpha + \sin \alpha_1)$$

die kleinste ξ_2 dagegen

$$\text{III} \qquad \xi_2 = \xi_0 + \frac{am}{m + \mu} (\sin \alpha - \sin \alpha_1)$$

Aus vorstehenden Gleichungen schließen wir, daß der Punkt A sich zunächst um $\frac{am}{m + \mu} (\sin \alpha + \sin \alpha_1)$ nach der Seite der positiven Winkel φ bewegt, während B von seiner Anfangslage bis zu $\varphi = - \alpha_1$ aufsteigt. Wenn in der Zwischenzeit $\varphi = o$ wird, so befindet sich A in der ursprünglichen Schwerpunktsvertikalen und ist nur halb so weit von seiner Anfangslage entfernt wie für $\varphi = - \alpha$. Kehrt B in $\varphi = - \alpha_1$ seine Bewegungsrichtung um, so geht auch A zurück und rückt nun um das Stück $\frac{am}{m + \mu} (\sin \alpha_1 - \sin \alpha)$ nach der Seite der negativen Winkel φ über seine ursprüngliche Lage hinaus, während B bis $\varphi = \alpha_1$ aufsteigt. Wenn in der Zwischenzeit φ den Wert o annimmt, so befindet sich A wieder in der Schwerpunktsvertikalen der Zeit $t = o$ und für den Anfangswert $\varphi = \alpha$ wieder in seiner Anfangslage. Nachstehende Zeichnung stellt die periodische Bewegung des Punktes A für den von uns behandelten Fall $b = o$ dar:

$$\xi_0 + \frac{am}{m+\mu}(\sin\alpha - \sin\alpha_1),\ \xi_0,\ \xi_0 + \frac{am}{m+\mu}\sin\alpha,\ \xi_0 + 2\frac{am}{m+\mu}\sin\alpha,\ \xi_0 + \frac{am}{m+\mu}(\sin\alpha + \sin\alpha_1)$$

für $\varphi = \alpha_1$ $\qquad$ $\varphi = \alpha$ $\qquad$ $\varphi = o$ $\qquad$ $\varphi = - \alpha$ $\qquad$ $\varphi = - \alpha_1$

Zu unsern 3 Gleichungen fügen wir noch die 4.

$$\text{IV} \qquad \xi_1 - \xi_2 = 2 \frac{am}{m + \mu} \sin \alpha_1,$$

welche den Spielraum von A angiebt. Für den Fall, daß Punkt B bis $\mp \frac{\pi}{2}$ aufsteigt, ist statt $\sin \alpha_1$ in den Gleichungen II — IV 1 zu setzen. Dadurch wird also der Spielraum von A vergrößert, indem nicht nur das größte ξ zu-, sondern auch das kleinste ξ abnimmt. Für den Specialfall, daß die Anfangsgeschwindigkeit der Rotation verschwindet, was bei unserer Annahme $b = o$ auch das Verschwinden der Anfangsgeschwindigkeit ξ' des Punktes A bedingt, gehen die 3 letzten der aufgestellten Gleichungen über in

$$\text{II}' \quad \xi_1 = \xi_0 + 2 \frac{am}{m + \mu} \sin \alpha \qquad \text{III}' \quad \xi_2 = \xi_0$$

$$\text{IV}' \quad \xi_1 - \xi_2 = 2 \frac{am}{m + \mu} \sin \alpha$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Der Punkt A gelangt also dann in negativer Richtung niemals über seine Anfangslage hinaus. Die Gleichung IV enthält den Satz, daß der Spielraum des Punktes A gleich ist dem Doppelten der größten vorkommenden Projektion der Entfernung des Schwerpunktes vom Aufhängepunkt auf die Horizontale.

Interessant ist die Bewegung des Schwerpunktes unseres Systems bei der Annahme $b = o$. Vermöge der Rotation bewegt sich nämlich der Schwerpunkt mit den Axengeschwindigkeiten

$$\frac{am}{m+\mu} \cos \varphi\varphi' \text{ und } -\frac{am}{m+\mu} \sin \varphi\varphi'$$

Vermöge der Translationsbewegung des Systems aber erhält der Schwerpunkt nach der x-Axe in jedem Moment die gleiche Geschwindigkeit, welche ihm die Rotation nach dieser Axe erteilt, nur von entgegengesetztem Zeichen, wie die Formel $\xi' = -\frac{am}{m+\mu} \cos \varphi\varphi'$ lehrt. Er erlangt also zu seiner Gesamtbewegung nur eine Geschwindigkeit längs der x-Axe, von der Größe $\frac{am}{m+\mu} \sin \varphi\varphi'$. Da dieser Ausdruck verschwindet sowohl für $\varphi = o$ als auch für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ resp. $= \alpha_1$, so schließen wir, daß die Geschwindigkeit des Schwerpunktes auf der genannten Strecke mindestens Eine Kulmination hat. Wir überzeugen uns aber leicht, daß nur Eine Kulmination dort stattfindet.

$$\frac{d\left(\frac{am}{m+\mu} \sin \varphi\varphi'\right)}{d\varphi} = o \text{ ergiebt ausgeführt, nach einigen Reduktionen}$$

$$f = \cos^4\varphi - \frac{3-\gamma}{\gamma} \cos^2\varphi + 2\vartheta \frac{1-\gamma}{\gamma} \cos \varphi + \frac{1}{\gamma} = o,$$

wo $\vartheta = \frac{ak}{2g}$, also nach unseren früheren Erörterungen entweder $= o$ ist oder zwischen 0 und 1 liegt. Sollte nun die Schwerpunktsgeschwindigkeit mehrere Male kulminieren, so müßte die vorstehende Gleichung zwischen den den eben unterschiedenen Fällen entsprechenden Grenzen mehrere Wurzeln haben, d. h. die links vom Gleichheitszeichen stehende Funktion f müßte wenigstens Ein Max. und Ein Min. haben zwischen denselben Grenzen. Untersuchen wir also ihre Derivierte (nach φ), welche reduziert und für $\cos \varphi = x$ gesetzt, lautet

$$\psi(x) = 4x^3 - 2\frac{3-\gamma}{\gamma} x + 2\frac{\vartheta(1-\gamma)}{\gamma} = o,$$

indem wir die Fälle $\vartheta = o$ und $0 < \vartheta < 1$ unterscheiden:

1) $\vartheta = o$	für $x = 1$	$\psi(x) = 6\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)$	$\psi(x) < o$
	„ $x = o$	$\psi(x) = o$	$\psi(x) = o$
	„ $x = \varepsilon$	$\psi(x) = 6\varepsilon\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) - \eta$	$\psi(x) < o$
	$o < \varepsilon < 1$	wo $\eta > o$	

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2) $o < \vartheta < 1$ für $x = 1$ $\quad \psi(x) = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)(6 - 2\vartheta)$ $\quad \psi(x) < o$

„ $x = \vartheta$ $\quad \psi(x) = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) 4\vartheta - \eta$ $\quad \psi(x) < o$

wo $\eta > o$

„ $x = \varepsilon$ $\quad \psi(x) = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)(6\varepsilon - 2\vartheta) - \eta$ $\quad \psi(x) < o$

$\vartheta < \varepsilon < 1$ $\quad$ wo $\eta > o$

Die Funktion $\psi(x)$ verschwindet also nicht zwischen den in Betracht kommenden Grenzen, also hat auch die Funktion f kein Max. und Min. in demselben Gebiet, verschwindet demnach nicht mehr als Ein Mal, d. h. die Geschwindigkeit des Schwerpunktes hat keinen weiteren Kulminationspunkt. Da die Berechnung des Kulminationspunktes für φ keinen einfachen Wert ergiebt, so mag sie hier unterbleiben.

Bezeichnen wir die Entfernung des Schwerpunktes von der Horizontalen mit η, so haben wir nach dem Begriff der Geschwindigkeit

$$\eta' = -\frac{am}{m+\mu} \sin\varphi\varphi' \text{ d. h. integriert}$$

$$\eta = \frac{am}{m+\mu} \cos\varphi\,,\ \eta_1 = \frac{am}{m+\mu},\ \eta_2 = \frac{am}{m+\mu} \cos\alpha_1$$

$$\eta_1 - \eta_2 = \frac{am}{m+\mu}(1 - \cos\alpha_1)$$

wo η_1 u. η_2 analog wie in unseren früheren Gleichungen II — IV zu nehmen sind. Der Spielraum $\eta_1 - \eta_2$ wird am größten, wenn der Punkt B zwischen $\frac{\pi}{2}$ und $-\frac{\pi}{2}$ oscilliert.

Über die Bewegung des Schwerpunktes wissen wir nunmehr Folgendes. Da keine Geschwindigkeitskomponente nach der Horizontalen für denselben existiert, so kann er sich nur auf der durch seine Anfangslage bestimmten (schon S. 7 erwähnten) Vertikalen bewegen, welche den Abstand $\xi_0 + \frac{am}{m+\mu} \sin\alpha$ vom Anfangspunkt der Koordinaten hat. Fällt der Punkt B von $\varphi = \alpha$ bis $\varphi = o$, so rückt der Schwerpunkt auf seiner Vertikalen fortwährend nach unten mit zuerst zu- dann abnehmender Geschwindigkeit, in $\varphi = o$, wenn $\eta = \eta_1$, steht er einen Moment still ($\sin\varphi$ verschwindet), tritt dann seine Rücktour an (wegen $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$ ändert die Geschwindigkeit das Vorzeichen), durchläuft seine Vertikale wieder mit erst zu- dann abnehmender Geschwindigkeit, steht in $\varphi = -\alpha_1$ resp. $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, wenn $\eta = \eta_2$, wieder still (φ' verschwindet), kehrt seine Bewegungsrichtung um (φ' ändert das Zeichen), ist für $\varphi = o$ wieder in seiner tiefsten und für $\varphi = \alpha_1 \left(\frac{\pi}{2}\right)$ wieder in seiner höchsten Lage und so fort. Die Wendung des Schwerpunktes in der tiefsten Lage findet allemal statt, wenn $\varphi = o$ ist, die in der höchsten, wenn φ seinen absolut größten Wert annimmt. Der Schwerpunkt beschreibt seine Bahn noch einmal so schnell als der Aufhängepunkt oder der Punkt B.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wir ermitteln jetzt noch die absolute Bahn des Punktes B. Bei der Betrachtung der relativen Bewegung von B hatten wir in der Gleichung $x - \xi = a \sin \varphi$ ξ konstant zu nehmen. Dadurch daß wir jetzt ξ die Variabilität wahren, fügen wir dem Punkte B die ihm außer der Rotation noch zukommende Translation hinzu. Es ist früher gefunden:

$$\xi = \xi_0 + \frac{am}{m+\mu} (\sin \alpha - \sin \varphi)$$

Demnach
$$x = \xi_0 + \frac{am}{m+\mu} \sin \alpha + \frac{a\mu}{m+\mu} \sin \varphi$$

Setzen wir
$$x - \xi_0 - \frac{am}{m+\mu} \sin \alpha = z, \text{ so ist}$$

$$z = \frac{a\mu}{m+\mu} \sin \varphi,$$

woraus mit Hinzunahme der zu $x - \xi = a \sin \varphi$ gehörigen Gleichung

$$y = a \cos \varphi$$

folgt:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{a\mu}{m+\mu}\right)^2} = 1$$

d. h. der Punkt B beschreibt bei unserer Annahme $b = o$ eine Ellipse, deren Mittelpunkt die Koordinaten 0 und $\xi_0 + \frac{am}{m+\mu} \sin \alpha$ hat, und deren Halbaxen resp. sind: a, die Länge der Pendelstange und $\frac{a\mu}{m+\mu}$, die Entfernung des Schwerpunktes vom Punkte B. Die große Axe 2a ist längs derjenigen Vertikalen gerichtet, welche wir als Bahn des Schwerpunktes gefunden haben, die kleine Axe $\frac{2a\mu}{m+\mu}$ längs der festen Horizontalen, der Bahn des Punktes A. Die Brennpunkte haben von der Horizontalen die Entfernung $\pm \frac{a}{m+\mu} \sqrt{m(m+2\mu)}$.

Es liegt nun, nachdem die Bahnen der beiden in unserm System vorkommenden materiellen Punkte und des Schwerpunktes untersucht sind, die Frage nahe, welches die Bahnen der übrigen (geometrischen) Punkte sind. Wenn ε einen ächten Bruch bezeichnet, so können wir den Abstand eines beliebigen Punktes unserer Pendelstange vom Aufhängepunkt mit $a\varepsilon$ bezeichnen. Die am Anfang unserer Untersuchung für den Punkt B aufgestellten Gleichungen gehen für einen beliebigen Punkt der Pendelstange dann über in

$$x - \xi = a\varepsilon \sin \varphi \qquad y = a\varepsilon \cos \varphi.$$

Verfahren wir hier ebenso wie oben, so ergiebt sich als Bahn eines beliebigen Punktes der Pendelstange die Ellipse

$$\frac{y^2}{a^2\varepsilon^2} + \frac{z^2}{a^2\left(\varepsilon - \frac{m}{m+\mu}\right)^2} = 1$$

deren Mittelpunkt zusammenfällt mit demjenigen der für B gefundenen Ellipse. Wegen der

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Variabilität von ε enthält vorstehende Gleichung die für den Aufhängepunkt, den Schwerpunkt und den Endpunkt gefundenen als specielle Fälle in sich für

$$\varepsilon = o, \varepsilon = \frac{m}{m+\mu} \text{ und } \varepsilon = 1 \text{ (Grenzfall).}$$

Die Gleichung lehrt ferner, daß für den in der Mitte zwischen Aufhänge- und Schwerpunkt gelegenen Punkt als Bahn ein Kreis sich ergiebt mit dem Radius $\frac{1}{2} a \frac{m}{m+\mu}$, da für diesen Fall $\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{m}{m+\mu}$ zu nehmen ist. Dieser Kreis bildet den Übergang von dem System der Ellipsen, deren große Axe vertikal gerichtet ist, zu demjenigen der Ellipsen mit horizontalen großen Axen. Erstere kommen allen Punkten der Pendelstange von dem soeben bezeichneten mittleren Punkt bis zum Endpunkt zu, letztere den oberhalb jenes Mittelpunktes bis zum Aufhängepunkt gelegenen. Der Durchgang der ersteren Ellipsen durch eine Gerade für $\varepsilon = \frac{m}{m+\mu}$, d. h. für den Schwerpunkt erklärt sich leicht, wenn man bedenkt, daß für gedachte Ellipsen die kleine Axe gleich der Entfernung des betreffenden Punktes vom Schwerpunkt ist, diese also für den Schwerpunkt selbst verschwindet. Ganz Analoges findet sich bei dem zweiten System der Ellipsen. Alle genannten Ellipsen haben die gemeinsame Eigenschaft, daß die Differenz resp. die Summe ihrer Halbaxen $a\varepsilon$ u. $a\left(\varepsilon - \frac{m}{m+\mu}\right)$ resp. $a\varepsilon$ und $a\left(\frac{m}{m+\mu} - \varepsilon\right)$ (die Differenz für die Punkte unterhalb des Schwerpunktes, die Summe für die Punkte oberhalb) eine konstante Größe ist $\frac{am}{m+\mu}$ (Entfernung des Schwerpunktes vom Aufhängepunkt). Dieselbe hängt also von der Verteilung der Massen in unserem System ab. Ist die Masse des Aufhängepunktes sehr groß im Verhältnis zu derjenigen des Endpunktes, d. h. $\mu = \infty$, so nimmt jene Differenz resp. Summe ihren kleinsten Wert $= o$ an, d. h. die Ellipsen gehen in Kreise über. Wir haben dann den Fall des gewöhnlichen Pendels, indem die Beweglichkeit unseres Aufhängepunktes durch die Annahme $\mu = \infty$ aufgehoben wird. (Setzen wir $\mu = \infty$ in unsere Gleichungen für die Geschwindigkeiten und die Zeit, so erhalten wir die entsprechenden Gleichungen des gewöhnlichen Pendels.) Ist dagegen die Masse des Endpunktes B sehr groß im Verhältnis zu derjenigen des Aufhängepunktes $m = \infty$, so ist der Wert jener Differenz oder Summe am größten $= a$. Dann beschreibt der Punkt B eine Vertikale, seine Ellipse geht über in eine Gerade ($\varepsilon - \frac{m}{m+\mu} = 1 - 1 = o$). Sind aber die Massen unserer beiden Punkte gleich $m = \mu$, so ist jene Differenz oder Summe $\frac{am}{m+\mu} = \frac{a}{2}$, die große Axe der Ellipse des Punktes B ist das Doppelte der kleinen. Der Punkt der Pendelstange, welcher einen Kreis beschreibt, liegt um $\frac{1}{4} a$ vom Aufhängepunkt entfernt.

Das eigentümliche Resultat unserer Untersuchung, daß unter einer gewissen Voraussetzung außer dem Aufhängepunkt auch noch der Schwerpunkt unseres Systems eine Gerade

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und zwar senkrecht zu derjenigen des Aufhängepunktes beschreibt, lehrt, daß wir die Bewegung unseres Systems auch hervorbringen können, wenn wir 2 feste Punkte einer Stange zwingen, 2 zu einander senkrechte Gerade zu beschreiben und dann passende Kräfte anbringen. (Elliptische Hypocykloidenbewegung.) Da ferner die den beiden festen Punkten der oben eingeführten Stange auferlegte Bedingung zur Folge hat, daß bei der Bewegung die Stange stets als Tangente an der sogenannten Astrois herumgleitet (cf. Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte S. 39 Auflage 1), so können wir die bei unserem Pendel frei vorkommende Bewegung auch so erzwingen, daß wir dem Punkte A seine Horizontale als Bahn anweisen, die mit ihm verbundene Stange aber an der genannten Astrois als Tangente herumgleiten lassen.

Da es bei einem Problem der Dynamik in letzter Instanz darauf ankommt, den Ort als Funktion der Zeit darzustellen, so würden wir, da ja im Vorstehenden nicht t, sondern φ als unabhängige Variable auftritt, mit unserer Untersuchung noch nicht zu Ende sein. Wir müßten für jedes φ noch das zugehörige t bestimmen, d. h. wir müßten das Integral

$$t = a \int_{\alpha}^{\varphi} \frac{\sqrt{1 - \gamma \cos^2 \varphi}}{\sqrt{2 ag \cos \varphi - a^2 k}} \, d\varphi$$

umkehren. Mangel an Raum verbietet uns aber, dieser Aufgabe näher zu treten. Es mag hier genügen, auf dieselbe hingewiesen zu haben. Wir geben nur noch die Periode T der Rotationsbewegung an

$$T = 2a \int_{0}^{\alpha_1} \frac{\sqrt{1 - \gamma \cos^2 \varphi}}{\sqrt{2 ag \cos \varphi - a^2 k}} \, d\varphi$$

Es erübrigt nun noch, die Integrationskonstanten, welche im Laufe der Untersuchung aufgetreten sind, aus den Stößen, die dem System am Anfang der Bewegung mitgeteilt werden, abzuleiten. Dieses geschieht auf folgende Weise. Wenn der Punkt A den Stoß r in der Richtung seiner Bahn — andere Stöße kommen für ihn ja nicht in Betracht — erhält und der Punkt B nach den Axen die Stöße resp. p und q, so ergiebt d'Alemberts Prinzip

$$(\mu \xi' - r) \delta \xi + (m x' - p) \delta x + (m y' - q) \delta y = 0,$$

wo x', y', ξ', δx, δy, $\delta \xi$ an die Bedingung

$$(x - \xi)^2 + y^2 = a^2$$

geknüpft sind. Nach den Substitutionen

$$x - \xi = a \sin \varphi \text{ und } y = a \cos \varphi$$

erhalten wir

$$x' = \xi' + a \cos \varphi \varphi', \; y' = - a \sin \varphi \varphi', \; \delta x = \delta \xi + a \cos \varphi \, \delta \varphi, \delta y = - a \sin \varphi \, \delta \varphi,$$

welche Werte der ersten Gleichung folgende Gestalt geben:

$$(\mu \xi' - r) \delta \xi + (m \xi' + ma \cos \varphi \varphi' - p) (\delta \xi + a \cos \varphi \, \delta \varphi) + (ma \sin \varphi \varphi' + q) \, a \sin \varphi \, \delta \varphi = 0.$$

Wegen der Willkürlichkeit von $\delta \xi$ u. $\delta \varphi$ spaltet sich diese Gleichung in die beiden folgenden:

$$(m + \mu) \xi' + ma \cos \varphi \varphi' - (p + r) = 0$$

$$(m \xi' + ma \cos \varphi \varphi' - p) \, a \cos \varphi + (ma \sin \varphi \varphi' + q) \, a \sin \varphi = 0.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Daraus ergeben sich für φ' und ξ' die Werte:

$$\varphi' = \frac{p \cos \varphi - q \sin \varphi - \frac{p+r}{m+\mu} m \cos \varphi}{am \left(1 - \frac{m}{m+\mu} \cos^2 \varphi\right)}$$

$$\xi' = \frac{p \sin^2 \varphi + q \sin \varphi \cos \varphi + r}{(m+\mu) \left(1 - \frac{m}{m+\mu} \cos^2 \varphi\right)}$$

Dieses sind die Geschwindigkeiten für $t = o$ und $\varphi = \alpha$. Da wir die Rotationsanfangsgeschwindigkeit des Punktes B früher mit c und die Translationsgeschwindigkeit mit ξ'_0 bezeichnet haben, so ist demnach:

$$t = o,\ c = \frac{p \cos \alpha - q \sin \alpha - \frac{p+r}{m+\mu} m \cos \alpha}{m \left(1 - \frac{m}{m+\mu} \cos^2 \alpha\right)}$$

$$\xi'_0 = \frac{p \sin^2 \alpha + q \sin \alpha \cos \alpha + r}{(m+\mu) \left(1 - \frac{m}{m+\mu} \cos^2 \alpha\right)}$$

Der Fall $b = o$, auf den wir uns in der vorliegenden Untersuchung beschränkt haben, bedingt nun noch

$$p + r = o$$

$$\text{da } b = \xi'_0 (m+\mu) + m c \cos \alpha.$$

Zum Schluß noch die Bemerkung, daß analog wie beim gewöhnlichen Pendel das dem in der vorliegenden Untersuchung betrachteten mathematischen entsprechende physische Pendel der Form nach dieselben Bewegungsgleichungen hat wie das mathematische, worauf einzugehen wir an dieser Stelle verzichten müssen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Daraus ergeben s

os φ

φ'

ξ'

Dieses sind die G

α. Da wir die Rotations-
anfangsgeschwindigkeit des

nslationsgeschwindigkeit mit
ξ'_0 bezeichnet haben, so ist

m cos α

$t =$

Der Fall $b = o$,

tersuchung beschränkt haben,
bedingt nun noch

Zum Schluß noch

wöhnlichen Pendel das dem
in der vorliegenden Unters

tsprechende physische Pendel
der Form nach dieselben Be

matische, worauf einzugehen
wir an dieser Stelle verzich

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf