KEGELSCHNITTSYSTEME
AM VOLLSTÄNDIGEN VIERSEIT

VON

PROF. DR. HERMANN PFAFF

MIT 3 FIGUREN IM TEXT

WISSENSCHAFTLICHE BEILAGE ZU DEN SCHULNACHRICHTEN
DES HERZOGLICHEN GYMNASIUMS ZU HELMSTEDT
OSTERN 1913

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG

Progr.-Nr. 989.

Q he
12 (1913)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Landes- u. Stadt-Bibl.
Düsseldorf

44. g. 304

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Eigenschaften der auf geradlinige Figuren bezogenen Kreise und Kreissysteme lassen sich auf Kegelschnitte übertragen, wenn man die imaginären Kreispunkte durch ein beliebiges Punktepaar ersetzt und so die allen Kreisen gemeinsame unendlich ferne Sehne ins Endliche verlegt. So kann jeder Satz von Kreissystemen am Dreieck, Viereck oder Vierseit das Thema für eine die Kegelschnitte betreffende Untersuchung liefern. Da man über das Punktepaar willkürlich verfügen kann, so ermöglicht die Ermittelung der in dem erweiterten Umfang gültigen Sätze und ihres analytischen Ausdrucks eine umfassende Diskussion der Rechnungsergebnisse und damit eine eingehende Prüfung der nach Gestalt und Lage variablen Kurven.

Die im folgenden betrachteten Kegelschnittsysteme sind auf die von je drei Seiten eines vollständigen Vierseits gebildeten Dreiecke bezogen, die kurz als „Dreiecke des Vierseits" bezeichnet werden sollen. Es wird sich im wesentlichen um die Verallgemeinerung folgender Sätze handeln:

1. Die vier den Dreiecken eines Vierseits umschriebenen Kreise schneiden sich in demselben Punkte.
2. Die vier Kreise, welche die Dreiecke eines Vierseits zu Polardreiecken haben, bilden ein Büschel.

Die Untersuchung soll analytisch, und zwar mittels trimetrischer Punktkoordinaten geführt, und, soweit möglich, durch dualistische Deutung der Rechnungsergebnisse auch auf das Viereck übertragen werden. Sie erfordert zunächst die Ermittelung der Bedingung, der die Konstanten zweier Kegelschnitte

$$K \equiv c_{11}x_1^2 + c_{22}x_2^2 + c_{33}x_3^2 - 2c_{23}x_2x_3 - 2c_{13}x_1x_3 - 2c_{12}x_1x_2 = 0,$$
$$K' \equiv c'_{11}x_1^2 + c'_{22}x_2^2 + c'_{33}x_3^2 - 2c'_{23}x_2x_3 - 2c'_{13}x_1x_3 - 2c'_{12}x_1x_2 = 0$$

genügen müssen, wenn gefordert wird, daß zwei ihrer Schnittpunkte auf der Geraden

$$M \equiv \mu_1x_1 + \mu_2x_2 + \mu_3x_3 = 0$$

liegen.

Die durch die beiden anderen Schnittpunkte gehende Sehne sei

$$N \equiv \nu_1x_1 + \nu_2x_2 + \nu_3x_3 = 0.$$

M und N sind dann eines der drei Geradenpaare, in die das Kegelschnittsbüschel

$$K - \varphi K' = 0$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

zerfällt. Es wird sich also φ so bestimmen lassen, daß die Gleichung $K - \varphi K' = 0$ mit der Gleichung

$$M . N = 0$$

identisch wird. Entwickelt man beide Gleichungen, so ergibt die Vergleichung ihrer Glieder mit Verwendung eines Proportionalitätsfaktors ϱ die Bedingungen

$$(1) \qquad \begin{cases} \mu_1 \nu_1 = \varrho\,(c_{11} - \varphi c'_{11}), \\ \mu_2 \nu_2 = \varrho\,(c_{22} - \varphi c'_{22}), \\ \mu_3 \nu_3 = \varrho\,(c_{33} - \varphi c'_{33}), \end{cases}$$

$$\mu_2 \nu_3 + \mu_3 \nu_2 = -2\varrho\,(c_{23} - \varphi c'_{23}),$$
$$\mu_3 \nu_1 + \mu_1 \nu_3 = -2\varrho\,(c_{13} - \varphi c'_{13}),$$
$$\mu_1 \nu_2 + \mu_2 \nu_1 = -2\varrho\,(c_{12} - \varphi c'_{12}),$$

aus denen man durch Elimination der ν_i

$$\mu_2^2(c_{33} - \varphi c'_{33}) + \mu_3^2(c_{22} - \varphi c'_{22}) + 2\mu_2\mu_3(c_{23} - \varphi c'_{23}) = 0,$$
$$\mu_3^2(c_{11} - \varphi c'_{11}) + \mu_1^2(c_{33} - \varphi c'_{33}) + 2\mu_1\mu_3(c_{13} - \varphi c'_{13}) = 0,$$
$$\mu_1^2(c_{22} - \varphi c'_{22}) + \mu_2^2(c_{11} - \varphi c'_{11}) + 2\mu_1\mu_2(c_{12} - \varphi c'_{12}) = 0$$

und schließlich durch Gleichsetzung der hieraus folgenden Werte des Faktors φ

$$(2) \qquad \varphi = \frac{\mu_2^2 c_{33} + \mu_3^2 c_{22} + 2\mu_2\mu_3 c_{23}}{\mu_2^2 c'_{33} + \mu_3^2 c'_{22} + 2\mu_2\mu_3 c'_{23}} = \frac{\mu_3^2 c_{11} + \mu_1^2 c_{33} + 2\mu_1\mu_3 c_{13}}{\mu_3^2 c'_{11} + \mu_1^2 c'_{33} + 2\mu_1\mu_3 c'_{13}}$$
$$= \frac{\mu_1^2 c_{22} + \mu_2^2 c_{11} + 2\mu_1\mu_2 c_{12}}{\mu_1^2 c'_{22} + \mu_2^2 c'_{11} + 2\mu_1\mu_2 c'_{12}}$$

erhält.

Mit dem Werte von φ ist nach (1) zugleich das Verhältnis der ν_i und damit die zweite Schnittsehne

$$(3) \qquad N \equiv \frac{c_{11} - \varphi c'_{11}}{\mu_1} x_1 + \frac{c_{22} - \varphi c'_{22}}{\mu_2} x_2 + \frac{c_{33} - \varphi c'_{33}}{\mu_3} x_3 = 0$$

bestimmt.

Die gewonnenen Resultate können noch eine zweifache besondere Verwertung finden.

1. Faßt man die x_i als Linienkoordinaten auf, so gibt die Relation (2) die Bedingung, unter der zwei gemeinsame Tangenten der Kegelschnitte K und K' sich in einem festen Punkte M schneiden) die beiden anderen gemeinsamen Tangenten haben dann den durch (3 bestimmten Schnittpunkt N.

2. Ist M die unendlich ferne Gerade, in deren Gleichung

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

die Faktoren a_i die Seitenlängen des Fundamentaldreiecks bedeuten so gehen die Kegelschnitte K und K' durch dieselben beiden unendlich fernen Punkte, haben also gleiche Asymptotenrichtung. Sie sind dann homothetisch, d. h. ähnlich und in ähnlicher Lage und haben

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

höchstens zwei im Endlichen liegende Punkte gemeinsam. Ersetzt man die μ_i durch a_i, so ergibt die Relation (2) die Bedingung der Homothetie, die Gleichung (3) entspricht der Chordale, d. h. der im Endlichen liegenden Schnittsehne.

Als Beispiel diene der später zu verwendende einfache Fall, daß der eine Kegelschnitt

$$K \equiv c_1 x_2 x_3 + c_2 x_1 x_3 + c_3 x_1 x_2 = 0$$

dem Koordinatendreieck umschrieben ist, das zugleich dem anderen

$$K' \equiv \varkappa_1 x_1^2 + \varkappa_2 x_2^2 + \varkappa_3 x_3^2 = 0$$

als Polardreieck dient. Die Bedingung der Homothetie dieser Kurven lautet dann nach (2)

$$(4) \qquad \frac{\varkappa_1}{a_1^2} : \frac{\varkappa_2}{a_2^2} : \frac{\varkappa_3}{a_3^2} =$$

$$(-a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) : (a_1 c_1 - a_2 c_2 + a_3 c_3) : (a_1 c_1 + a_2 c_2 - a_3 c_3).$$

I. Die den Dreiecken eines Vierseits umschriebenen Kegelschnitte.

Die vier Geraden des Vierseits seien die Seiten des Koordinatendreiecks $A_1 A_2 A_3$ (Fig. 1) und die Gerade

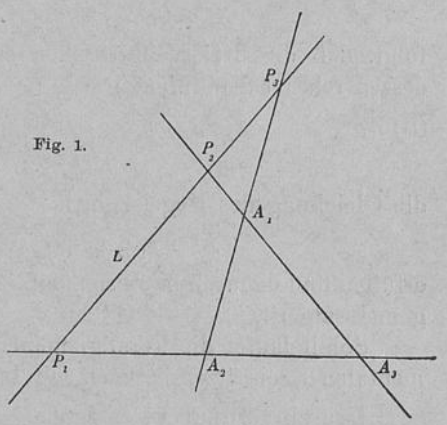
$$L \equiv \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0,$$

welche die ersteren in den Punkten P_1, P_2, P_3 schneidet. Es soll ein dem Dreieck $A_1 A_2 A_3$ umschriebener Kegelschnitt

$$K \;.\;.\;.\;.\; \frac{c_1}{x_1} + \frac{c_2}{x_2} + \frac{c_3}{x_3} = 0$$

mit drei den Dreiecken $A_1 P_2 P_3$, $A_2 P_1 P_3$, $A_3 P_1 P_2$ umschriebenen Kegelschnitten

Fig. 1.



$$K_1 \;.\;.\;.\;.\; \frac{c_1'}{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3} + \frac{c_2'}{x_2} + \frac{c_3'}{x_3} = 0,$$

$$K_2 \;.\;.\;.\;.\; \frac{c_1''}{x_1} + \frac{c_2''}{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3} + \frac{c_3''}{x_3} = 0,$$

$$K_3 \;.\;.\;.\;.\; \frac{c_1'''}{x_1} + \frac{c_2'''}{x_2} + \frac{c_3'''}{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3} = 0$$

verglichen werden mit der besonderen Bestimmung, daß alle vier Kegelschnitte durch dieselben beiden Punkte der Geraden

$$M \equiv \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3 = 0$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

gehen. Die Anwendung des Kriteriums (2) auf die Gleichungen

$$K \equiv c_1 x_2 x_3 + c_2 x_1 x_3 + c_3 x_1 x_2 = 0,$$

$$K_1 \equiv c_3' \lambda_2 x_2^2 + c_2' \lambda_3 x_3^2 + (c_1' + \lambda_2 c_2' + \lambda_3 c_3') x_2 x_3 + \lambda_1 c_2' x_1 x_3 + \lambda_1 c_3' x_1 x_2 = 0$$

ergibt

$$c_2' : c_3' = -\frac{\mu_3}{c_3}(\mu_1 \lambda_2 - \mu_2 \lambda_1) : \frac{\mu_2}{c_2}(\mu_3 \lambda_1 - \mu_1 \lambda_3);$$

die Gleichung der zweiten Schnittsehne N_1 der beiden Kurven lautet nach (3)

$$\frac{c_3' \lambda_2}{\mu_2} x_2 + \frac{c_2' \lambda_3}{\mu_3} x_3 = 0$$

oder

$$N_1 \equiv \frac{x_2}{c_2}\left(\frac{\mu_3}{\lambda_3} - \frac{\mu_1}{\lambda_1}\right) - \frac{x_3}{c_3}\left(\frac{\mu_1}{\lambda_1} - \frac{\mu_2}{\lambda_2}\right) = 0.$$

In analoger Rechnung findet man für die zweiten Schnittsehnen N_2 und N_3 der Kurvenpaare K und K_2, K und K_3:

$$N_2 \equiv \frac{x_3}{c_3}\left(\frac{\mu_1}{\lambda_1} - \frac{\mu_2}{\lambda_2}\right) - \frac{x_1}{c_1}\left(\frac{\mu_2}{\lambda_2} - \frac{\mu_3}{\lambda_3}\right) = 0,$$

$$N_3 \equiv \frac{x_1}{c_1}\left(\frac{\mu_2}{\lambda_2} - \frac{\mu_3}{\lambda_3}\right) - \frac{x_2}{c_2}\left(\frac{\mu_3}{\lambda_3} - \frac{\mu_1}{\lambda_1}\right) = 0.$$

Aus der leicht ersichtlichen Identität

$$N_1 + N_2 + N_3 = 0$$

folgt, daß die drei Schnittsehnen sich in einem Punkte schneiden, dessen relative Koordinaten

$$(5) \qquad x_1 : x_2 : x_3 = \frac{c_1}{\frac{\mu_2}{\lambda_2} - \frac{\mu_3}{\lambda_3}} : \frac{c_2}{\frac{\mu_3}{\lambda_3} - \frac{\mu_1}{\lambda_1}} : \frac{c_3}{\frac{\mu_1}{\lambda_1} - \frac{\mu_2}{\lambda_2}}$$

die Gleichung des Kegelschnitts

$$K \equiv c_1 x_2 x_3 + c_2 x_1 x_3 + c_3 x_1 x_2 = 0$$

erfüllen und dadurch beweisen, daß jener Punkt den vier Kegelschnitten gemeinsam ist.

Somit lautet die Verallgemeinerung des ersten der beiden fundamentalen Kreissätze, zugleich mit ihrer dualistischen Ergänzung:

Die vier durch zwei feste Punkte gelegten, den Dreiecken eines Vierseits umschriebenen Kegelschnitte schneiden sich in demselben dritten Punkte.*)	Die vier von zwei festen Geraden berührten, den Dreiecken eines Vierecks eingeschriebenen Kegelschnitte haben eine gemeinsame dritte Tangente.

Wir betrachten nun zwei besondere Fälle:

*) Dieser Satz findet sich in synthetischer Begründung bei Steiner-Schröter, Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projektive Eigenschaften (Seite 480).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

A. Die Gerade M ist gemeinsame Tangente des Kegelschnittsystems.

Die Bedingung für die Berührung des Kegelschnittes K durch die Gerade M lautet

$$c_1^2\mu_1^2 + c_2^2\mu_2^2 + c_3^2\mu_3^2 - 2c_2c_3\mu_2\mu_3 - 2c_1c_3\mu_1\mu_3 - 2c_1c_2\mu_1\mu_2 = 0.$$

Denkt man sich den Berührungspunkt auf der Geraden M verschoben, so beschreibt der gemeinsame Schnittpunkt der vier Kegelschnitte eine Kurve, deren Gleichung man erhält, wenn man die aus (5) folgenden relativen Werte der c_i

$$c_1 : c_2 : c_3 = \left(\frac{\mu_2}{\lambda_2} - \frac{\mu_3}{\lambda_3}\right) x_1 : \left(\frac{\mu_3}{\lambda_3} - \frac{\mu_1}{\lambda_1}\right) x_2 : \left(\frac{\mu_1}{\lambda_1} - \frac{\mu_2}{\lambda_2}\right) x_3$$

in die vorstehende Bedingungsgleichung einsetzt. Sie lautet, wenn zur Abkürzung

$$(6) \qquad \begin{cases} \varrho\mu_1\left(\frac{\mu_2}{\lambda_2} - \frac{\mu_3}{\lambda_3}\right) = q_1, \\ \varrho\mu_2\left(\frac{\mu_3}{\lambda_3} - \frac{\mu_1}{\lambda_1}\right) = q_2, \\ \varrho\mu_3\left(\frac{\mu_1}{\lambda_1} - \frac{\mu_2}{\lambda_2}\right) = q_3 \end{cases}$$

gesetzt wird,

$$(7) \quad q_1^2x_1^2 + q_2^2x_2^2 + q_3^2x_3^2 - 2q_2q_3x_2x_3 - 2q_1q_3x_1x_3 - 2q_1q_2x_1x_2 = 0$$

und repräsentiert einen dem Koordinatendreieck eingeschriebenen Kegelschnitt, der aber auch zugleich von den Geraden

$$L \equiv \lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 + \lambda_3x_3 = 0$$

und

$$M \equiv \mu_1x_1 + \mu_2x_2 + \mu_3x_3 = 0$$

berührt wird, da die dem entsprechenden Bedingungsgleichungen

$$\frac{q_1}{\lambda_1} + \frac{q_2}{\lambda_2} + \frac{q_3}{\lambda_3} = 0$$

und

$$\frac{q_1}{\mu_1} + \frac{q_2}{\mu_2} + \frac{q_3}{\mu_3} = 0,$$

wie aus (6) leicht ersichtlich, erfüllt sind. Demnach bestehen folgende Sätze:

Die vier Kegelschnitte, die eine Seite eines Fünfseits in demselben Punkte P berühren und den von den anderen vier Geraden gebildeten Dreiecken umschrieben sind, schneiden sich in demselben Punkte.

Die vier Kegelschnitte, welche eine durch einen Eckpunkt eines Fünfecks gelegte Gerade G in diesem Punkte berühren und den von den anderen vier Eckpunkten gebildeten Dreiecken eingeschrieben sind,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Rückt P auf seiner Geraden fort, so beschreibt Q den dem Fünfseit eingeschriebenen Kegelschnitt.

haben eine gemeinsame Tangente T. Dreht sich G um diesen Punkt, so erzeugt T den dem Fünfeck umschriebenen Kegelschnitt.

B. Die Gerade M ist die unendlich ferne.

Die vier Kegelschnitte sind in diesem Falle homothetisch; für sie gilt demnach der Satz:

Je vier homothetische, den Dreiecken eines Vierseits umschriebene Kegelschnitte schneiden sich in demselben Punkte.

Dieser Satz soll im folgenden näher spezialisiert werden.

1. Fallen die beiden den Kurven gemeinsamen unendlich fernen Punkte in einen zusammen, so ist die Bedingung des Falles A erfüllt, die vier homothetischen Kegelschnitte sind samt der Ortskurve ihres Schnittpunktes Parabeln, da sie sämtlich die unendlich ferne Gerade berühren. Da, wie unter A gezeigt, die Ortskurve die Seiten des Vierseits zu Tangenten hat, so folgt:

Von den den Dreiecken eines Vierseits umschriebenen Parabeln haben je vier parallelachsige einen gemeinsamen Schnittpunkt. Der Ort dieses Punktes für alle Kurven des Systems ist die dem Vierseit eingeschriebene Parabel.

Die Gleichung dieser Parabel lautet nach (7)

$$(8)\qquad P \equiv q_1^2 x_1^2 + q_2^2 x_2^2 + q_3^2 x_3^2 - 2 q_2 q_3 x_2 x_3 - 2 q_1 q_3 x_1 x_3 - 2 q_1 q_2 x_1 x_2 = 0,$$

wenn

$$(9)\qquad \begin{cases} q_1 = \varrho a_1 \left(\dfrac{a_2}{\lambda_2} - \dfrac{a_3}{\lambda_3}\right), \\ q_2 = \varrho a_2 \left(\dfrac{a_3}{\lambda_3} - \dfrac{a_1}{\lambda_1}\right), \\ q_3 = \varrho a_3 \left(\dfrac{a_1}{\lambda_1} - \dfrac{a_2}{\lambda_2}\right) \end{cases}$$

gesetzt wird. Offenbar bestimmt lediglich die Achsenrichtung der vier homothetischen umschriebenen Parabeln die Lage ihres Schnittpunktes auf der ermittelten Ortskurve. Dieser ist nach (5) bestimmt durch

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{c_1}{\dfrac{a_2}{\lambda_2} - \dfrac{a_3}{\lambda_3}} : \frac{c_2}{\dfrac{a_3}{\lambda_3} - \dfrac{a_1}{\lambda_1}} : \frac{c_3}{\dfrac{a_1}{\lambda_1} - \dfrac{a_2}{\lambda_2}}$$

$$= \frac{a_1 c_1}{q_1} : \frac{a_2 c_2}{q_2} : \frac{a_3 c_3}{q_3}.$$

Die Ortskurve P wird in ihm, wie man in leichter Rechnung findet, von der Geraden

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$q_1 x_1 (-a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) + q_2 x_2 (a_1 c_1 - a_2 c_2 + a_3 c_3) + q_3 x_3 (a_1 c_1 + a_2 c_2 - a_3 c_3) = 0$$

berührt. Es zeigt sich nun, daß diese Gleichung durch die Koordinaten ξ_i des unendlich fernen Punktes ξ der Parabel

$$K \equiv c_1 x_2 x_3 + c_2 x_1 x_3 + c_3 x_1 x_2 = 0$$

erfüllt wird, der als Pol der unendlich fernen Geraden durch

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = c_1 (-a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) : c_2 (a_1 c_1 - a_2 c_2 + a_3 c_3) : c_3 (a_1 c_1 + a_2 c_2 - a_3 c_3)$$

bestimmt wird. Die Substitution dieser relativen Werte in die obige Tangentengleichung ergibt die Gleichung

$$q_1 c_1 (-a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3)^2 + q_2 c_2 (a_1 c_1 - a_2 c_2 + a_3 c_3)^2 + q_3 c_3 (a_1 c_1 + a_2 c_2 - a_3 c_3)^2 = 0,$$

die sich leicht mit Hilfe der den Kegelschnitt K als Parabel kennzeichnenden Relation

$$a_1^2 c_1^2 + a_2^2 c_2^2 + a_3^2 c_3^2 - 2 a_2 a_3 c_2 c_3 - 2 a_1 a_3 c_1 c_3 - 2 a_1 a_2 c_1 c_2 = 0$$

in die nach (9) identische Gleichung

$$\frac{q_1}{a_1} + \frac{q_2}{a_2} + \frac{q_3}{a_3} = 0$$

überführen läßt. Die an die Parabel P im gemeinsamen Kurvenschnittpunkt gelegte Tangente geht also durch den unendlich fernen Punkt der Parabel K, d. h. sie ist Durchmesser dieser Parabel. Man gewinnt so eine beachtenswerte Beziehung der einem Dreieck um- und eingeschriebenen Parabeln: Jede Tangente einer eingeschriebenen Parabel ist zugleich Durchmesser einer der beiden durch den Berührungspunkt gehenden umschriebenen.*) Da durch einen festen Punkt im allgemeinen auch zwei eingeschriebene Parabeln gehen, so kann man folgern:

Die durch den Schnittpunkt zweier demselben Dreieck umschriebenen Parabeln gelegten Durchmesser berühren die beiden durch denselben Punkt gehenden, dem Dreieck eingeschriebenen Parabeln.

Auf das gegebene Vierseit bezogen, ergibt das Resultat der obigen Rechnung den Satz:

Durch jeden Punkt der einem Vierseit eingeschriebenen Parabel lassen sich um die Dreiecke des Vierseits vier homothetische Parabeln legen, deren Achsen die

*) Mit anderen Worten: Der Ort der Punkte, in denen die einem Dreieck eingeschriebenen Parabeln von einem System paralleler Tangenten berührt werden, ist diejenige dem Dreieck umschriebene Parabel, deren Achse die Richtung dieser Tangenten hat.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Richtung der durch den Punkt an die erstere gelegten Tangente haben.

Da die eingeschriebene Parabel noch weiterhin von Bedeutung sein wird, so soll für sie zunächst der Brennpunkt und die Direktrix bestimmt werden. Auch hier ermittelt man zunächst den unendlich fernen Punkt der Kurve als Pol der unendlich fernen Geraden; man findet mit Berücksichtigung der Relation

$$\frac{q_1}{a_1} + \frac{q_2}{a_2} + \frac{q_3}{a_3} = 0$$

in leichter Rechnung das Koordinatenverhältnis

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \frac{q_1}{a_1^2} : \frac{q_2}{a_2^2} : \frac{q_3}{a_3^2},$$

und folglich, indem man die ξ_i reziprok nimmt, für den Brennpunkt der Parabel:

$$\eta_1 : \eta_2 : \eta_3 = \frac{a_1^2}{q_1} : \frac{a_2^2}{q_2} : \frac{a_3^2}{q_3}. \tag{10}$$

Als Gleichung der Direktrix, d. h. der Polare des Brennpunktes in gezug auf die Parabel, ergibt sich nun

$$q_1 x_1 (-q_1\eta_1 + q_2\eta_2 + q_3\eta_3) + q_2 x_2 (q_1\eta_1 - q_2\eta_2 + q_3\eta_3)$$
$$+ q_3 x_3 (q_1\eta_1 + q_2\eta_2 - q_3\eta_3) = 0$$

oder mit Einsetzung der Werte (10) und Verwendung des Kosinussatzes für die Seiten a_i und die Winkel α_i des Koordinatendreiecks nach leichter Umformung

$$G \equiv \frac{q_1}{a_1} x_1 \cos\alpha_1 + \frac{q_2}{a_2} x_2 \cos\alpha_2 + \frac{q_3}{a_3} x_3 \cos\alpha_3 = 0. \tag{11}$$

2. Sind die vier Kegelschnitte Kreise, so hat man für die Koordinaten ihres gemeinsamen Schnittpunktes nach (5), indem man sowohl c_i als μ_i durch a_i ersetzt,

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{a_1}{\frac{a_2}{\lambda_3} - \frac{a_3}{\lambda_3}} : \frac{a_2}{\frac{a_3}{\lambda_3} - \frac{a_1}{\lambda_1}} : \frac{a_3}{\frac{a_1}{\lambda_1} - \frac{a_2}{\lambda_2}}$$
$$= \frac{a_1^2}{q_1} : \frac{a_2^2}{q_2} : \frac{a_3^2}{q_3}$$

und erhält so mit Hinblick auf (10) die Bestätigung des bekannten Satzes:

Die vier den Dreiecken eines Vierseits umschriebenen Kreise schneiden sich im Brennpunkt der ihm eingeschriebenen Parabel.

3. Sind die vier Kegelschnitte gleichseitige Hyperbeln, d. h. besteht die Relation

$$c_1 \cos\alpha_1 + c_2 \cos\alpha_2 + c_3 \cos\alpha_3 = 0,$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

so ergibt sich als Ortsgleichung für ihren Schnittpunkt, wenn für c_i die aus (5) entnommenen Werte

$$(12) \qquad c_1 : c_2 : c_3 = \left(\frac{a_2}{\lambda_2} - \frac{a_3}{\lambda_3}\right) x_1 : \left(\frac{a_3}{\lambda_3} - \frac{a_1}{\lambda_1}\right) x_2 : \left(\frac{a_1}{\lambda_1} - \frac{a_2}{\lambda_2}\right) x_3$$
$$= \frac{q_1 x_1}{a_1} : \frac{q_2 x_2}{a_2} : \frac{q_3 x_3}{a_3}$$

substituiert werden,

$$\frac{q_1}{a_1} x_1 \cos \alpha_1 + \frac{q_2}{a_2} x_2 \cos \alpha_2 + \frac{q_3}{a_3} x_3 \cos \alpha_3 = 0,$$

d. h. die Gleichung (11) und folglich der Satz:

Von den den Dreiecken eines Vierseits umschriebenen gleichseitigen Hyperbeln haben je vier parallelachsige einen gemeinsamen Schnittpunkt. Der Ort dieses Punktes für alle Kurven des Systems ist die Direktrix der dem Vierseit eingeschriebenen Parabel.

Da jede einem Dreieck umschriebene gleichseitige Hyperbel der Ort der Mittelpunkte der Kegelschnitte ist, die das Dreieck zum Polardreieck und deren Achsen die Richtung der Hyperbelasymptoten haben, so folgt zugleich:

Die vier Kegelschnitte, welche die Dreiecke eines Vierseits zu Polardreiecken und einen Punkt der Direktrix der ihm eingeschriebenen Parabel zum Mittelpunkt haben, sind koaxial.*)

Man erkennt leicht die Berechtigung zur Erweiterung dieses Satzes zu folgendem:

Alle Kegelschnitte, welche beliebige Tangentendreiecke einer Parabel zu Polardreiecken und einen Punkt der Direktrix zum gemeinsamen Mittelpunkt haben, sind koaxial.

Es ist bemerkenswert, daß man zu dem hier auf analytischer Grundlage erhaltenen Resultat auch durch eine rein geometrische Überlegung gelangen kann, die zugleich tiefer in das Problem einführt, indem sie zeigt, daß die vom Zentrum der Kurven an die Parabel gelegten Tangenten das gemeinsame Achsenkreuz bilden. Da nämlich die Seiten zweier Polardreiecke eines Kegelschnittes Tangenten eines zweiten Kegelschnittes sind, so hat ein von den Seiten eines Polardreieckes und zwei konjugierten Durchmessern berührter Kegelschnitt auch die unendlich ferne Gerade, die mit diesen ein Polardreieck bildet, zur Tangente, er ist also eine Parabel. Umgekehrt sind zwei Tangenten einer Parabel konjugierte Durchmesser jedes Kegelschnittes, der ein beliebiges Tangentendreieck der Parabel zum Polardreieck und den Schnittpunkt der Tangenten zum Mittelpunkt hat. Schneiden sich

*) Dieser inhaltlich eigentlich dem zweiten Teile zuzuweisende Satz ist der einfacheren Begründung halber schon hier eingefügt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

diese Tangenten rechtwinklig, also auf der Direktrix, so entsteht der Satz:

Die von einem Punkte der Direktrix einer Parabel an diese gelegten Tangenten sind die gemeinsamen Achsen aller Kegelschnitte, die beliebige Tangentendreiecke der Parabel zu Polardreiecken und jenen Punkt zum Mittelpunkt haben.

4. Die allgemeinere Untersuchung der homothetischen Kurven soll sich namentlich auf die Beziehung erstrecken, in welcher ihr gemeinsamer Schnittpunkt zu ihrer Gestalt und Achsenrichtung steht, insbesondere auf die Bestimmung des Ortes des Schnittpunktes der vier Kurven bei Variation

a. ihrer Achsenrichtung ohne Änderung der Gestalt,

b. ihrer Gestalt, d. h. des Asymptotenwinkels, ohne Änderung der Achsenrichtung.

a. Im ersteren Falle ist zunächst die Beziehung zwischen den Konstanten des Kegelschnittes

$$K \equiv c_1 x_2 x_3 + c_2 x_1 x_3 + c_3 x_1 x_2 = 0$$

und seinem Asymptotenwinkel δ festzustellen.

Durch Kombination der Kurvengleichung mit

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

gewinnt man nach Eliminierung von x_1 als analytischen Ausdruck des durch A_1 in der Richtung der Asymptoten des Kegelschnitts gelegten Geradenpaares

$$a_2 c_3 x_2^2 + (-a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) x_2 x_3 + a_3 c_2 x_3^2 = 0$$

oder

$$(x_2 - \gamma x_3)(x_2 - \gamma' x_3) = 0,$$

wenn

$$\left.\begin{matrix}\gamma \\ \gamma'\end{matrix}\right\} = -\frac{-a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3}{2 a_2 c_3} \pm \frac{\sqrt{M}}{2 a_2 c_3} \tag{13}$$

und

$$M = a_1^2 c_1^2 + a_2^2 c_2^2 + a_3^2 c_3^2 - 2 a_2 a_3 c_2 c_3 - 2 a_1 a_3 c_1 c_3 - 2 a_1 a_2 c_1 c_2$$

gesetzt wird. Der Asymptotenwinkel δ oder — was dasselbe ist — der von den Geraden

$$x_2 - \gamma x_3 = 0,$$
$$x_2 - \gamma' x_3 = 0$$

gebildete Winkel wird bestimmt durch

$$\operatorname{tg} \delta = \pm \frac{(\gamma - \gamma') \sin \alpha_1}{1 + \gamma\gamma' + (\gamma + \gamma') \cos \alpha_1}. \tag{14}$$

Nun ist

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$(15)\qquad \begin{cases} \gamma - \gamma' = \dfrac{\sqrt{M}}{a_2 c_3}, \\ \gamma + \gamma' = \dfrac{-a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3}{a_2 c_3}, \\ \gamma\gamma' = \dfrac{a_3 c_2}{a_2 c_3}, \end{cases}$$

und mit Berücksichtigung der Proportion

$$a_1 : a_2 : a_3 = \sin\alpha_1 : \sin\alpha_2 : \sin\alpha_3$$

und bekannter goniometrischer Formeln läßt sich leicht herleiten

$$1 + \gamma\gamma' + (\gamma + \gamma')\cos\alpha_1 = \frac{a_1(c_1\cos\alpha_1 + c_2\cos\alpha_2 + c_3\cos\alpha_3)}{a_2 c_3}.$$

Durch Substitution der erhaltenen Ausdrücke in die quadrierte Gleichung (14) und mit Einführung des Umkreisradius r des Koordinatendreiecks mittels $a_1 = 2r\sin\alpha_1$ folgt die gesuchte Relation

$$a_1^2 c_1^2 + a_2^2 c_2^2 + a_3^2 c_3^2 - 2a_2 a_3 c_2 c_3 - 2a_1 a_3 c_1 c_3 - 2a_1 a_2 c_1 c_2$$
$$- 4r^2 \operatorname{tang}^2\delta\,(c_1\cos\alpha_1 + c_2\cos\alpha_2 + c_3\cos\alpha_3)^2 = 0,$$

und nach Einsetzung der Werte (12) als Ortsgleichung für den Kurvenschnittpunkt

$$q_1^2 x_1^2 + q_2^2 x_2^2 + q_3^2 x_3^2 - 2q_2 q_3 x_2 x_3 - 2q_1 q_3 x_1 x_3 - 2q_1 q_2 x_1 x_2$$
$$- 4r^2 \operatorname{tang}^2\delta\left(\frac{q_1}{a_1}x_1\cos\alpha_1 + \frac{q_2}{a_2}x_2\cos\alpha_2 + \frac{q_3}{a_3}x_3\cos\alpha_3\right)^2 = 0,$$

oder mit Verwendung der abkürzenden Zeichen P (8) und G (11)

$$P - 4r^2 \operatorname{tang}^2\delta \,.\, G^2 = 0.$$

Die Ortskurve ist also ein Kegelschnitt, der die Parabel P doppelt berührt, und zwar in ihren beiden (imaginären) Schnittpunkten mit ihrer Direktrix G.

Die Kurve gestattet eine einfache und bequeme Prüfung, wenn man sie in rechtwinkligen Koordinaten, bezogen auf die Achse der Parabel P als Abszissenachse und ihren Scheitel als Anfangspunkt, ausdrückt. Ihre Gleichung lautet, wenn der Parameter der Parabel $4a$ ist,

$$y^2 - 4ax - (x + a)^2 \operatorname{tg}^2\delta = 0$$

oder

$$y^2 + (x - a)^2 = \left(\frac{x + a}{\cos\delta}\right)^2.$$

In letzterer Form läßt die Gleichung erkennen, daß der Kegelschnitt mit der Parabel P den Brennpunkt und die diesem entsprechende Direktrix gemeinsam hat, und daß seine Exzentrizität gleich $\frac{1}{\cos\delta}$ ist. Hat also der Schnittpunkt einer Gruppe von vier homothetischen umschriebenen Kegelschnitten vom Brennpunkte und der Direktrix der

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Parabel P bez. die Abstände e und h, so ist der Asymptotenwinkel der vier Kurven bestimmt durch

$$\cos\delta = \pm\frac{h}{e}.$$

Man sieht hieraus, daß der Charakter der vier homothetischen Kegelschnitte zugleich den der Ortskurve ihres Schnittpunktes bestimmt, und daß dieser auf, innerhalb oder außerhalb der Parabel P liegt, je nachdem die Kurven Parabeln, Ellipsen oder Hyperbeln sind. Es mag noch bemerkt werden, daß die Ortskurve der Ort der Schnittpunkte solcher Tangentenpaare der Parabel P ist, die sich unter dem Asymptotenwinkel δ schneiden*), eine Tatsache, deren Begründung hier zu weit führen würde. Das Resultat der bisherigen Betrachtung ist der Satz:

In dem vierfachen System ähnlicher, den Dreiecken eines Vierseits umschriebener Kegelschnitte haben je vier parallelachsige einen gemeinsamen Schnittpunkt. Der Ort dieses Punktes für alle Kurven des Systems ist ein Kegelschnitt, der mit der dem Vierseit eingeschriebenen Parabel den Brennpunkt und die Direktrix gemein hat, und zwar eine Parabel, Ellipse oder Hyperbel, je nachdem die umschriebenen Kegelschnitte selbst Parabeln, Ellipsen oder Hyperbeln sind.

b. Es handelt sich nun um den Ort des Schnittpunktes der homothetischen Kegelschnitte, wenn bei unveränderter Achsenrichtung die Gestalt der Kurven sich ändert.

Wie oben gezeigt, haben die Geraden

$$x_2 - \gamma x_3 = 0, \qquad x_2 - \gamma' x_3 = 0$$

mit der durch (13) definierten Bedeutung der Faktoren γ und γ' die Richtung der Asymptoten, die Halbierungslinien ihrer Winkel also die der Achsen des Kegelschnitts K. Der analytische Ausdruck dieser Winkelhalbierenden ist

$$\frac{x_2}{x_3} = \frac{\gamma\sqrt{1+\gamma'^2+2\gamma'\cos\alpha_1} \pm \gamma'\sqrt{1+\gamma^2+2\gamma\cos\alpha_1}}{\sqrt{1+\gamma'^2+2\gamma'\cos\alpha_1} \pm \sqrt{1+\gamma^2+2\gamma\cos\alpha_1}},$$

oder nach gehöriger Entwickelung

$$(\gamma+\gamma')(x_2^2 - x_3^2) - 2\gamma\gamma' x_3(x_2 + x_3\cos\alpha_1) + 2x_2x_3 + 2x_2^2\cos\alpha_1 = 0.$$

Nach Einsetzung der oben (15) für $\gamma+\gamma'$ und $\gamma\gamma'$ ermittelten Werte und Verwendung der Formel

$$\cos\alpha_1 = \frac{a_2^2 + a_3^2 - a_1^2}{2a_2a_3}$$

erhält man hieraus als Gleichung des durch A_1 in der Richtung der Achsen des Kegelschnittes K gelegten Geradenpaares

*) Vgl. Salmon-Fiedler, Anal. Geom. d. Kegelschn. § 229_5.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\frac{c_1}{a_1}(a_1^2x_2^2 - a_1^2x_3^2) + \frac{c_2}{a_2}(a_1^2x_3^2 - a_2^2x_2^2 - a_3^2x_3^2 - 2a_2a_3x_2x_3)$$
$$+ \frac{c_3}{a_3}(-a_1^2x_2^2 + a_2^2x_2^2 + a_3^2x_3^2 + 2a_2a_3x_2x_3) = 0.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$a_1^2x_2^2 - a_1^2x_3^2 = \varrho\vartheta_1,$$
$$a_1^2x_3^2 - a_2^2x_2^2 - a_3^2x_3^2 - 2a_2a_3x_2x_3 = \varrho\vartheta_2,$$
$$-a_1^2x_2^2 + a_2^2x_2^2 + a_3^2x_3^2 + 2a_2a_3x_2x_3 = \varrho\vartheta_3,$$

so erhält man die leicht ersichtlichen Relationen

$$(16) \qquad \begin{cases} \frac{c_1}{a_1}\vartheta_1 + \frac{c_2}{a_2}\vartheta_2 + \frac{c_3}{a_3}\vartheta_3 = 0, \\ \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 = 0. \end{cases}$$

Die Substitution der c_i (12) in die erste dieser Gleichungen ergibt

$$\frac{\vartheta_1 q_1}{a_1^2}x_1 + \frac{\vartheta_2 q_2}{a_2^2}x_2 + \frac{\vartheta_3 q_3}{a_3^2}x_3 = 0$$

und beweist, daß der gesuchte Ort des Kurvenschnittpunktes eine Gerade ist. Diese geht, wie die zweite der Gleichungen (16) zeigt, durch den Punkt

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{a_1^2}{q_1} : \frac{a_2^2}{q_2} : \frac{a_3^2}{q_3},$$

d. h. nach (10) durch den Brennpunkt der Parabel P. Man hat also den Satz:

In dem vierfachen System parallelachsiger, den Dreiecken eines Vierseits umschriebener Kegelschnitte haben je vier ähnliche einen gemeinsamen Schnittpunkt. Der Ort dieses Punktes für alle Kurven des Systems ist eine Gerade, die durch den Brennpunkt der dem Vierseit eingeschriebenen Parabel geht.

Die geometrische Beziehung der festen Achsenrichtung des Kurvensystems zur Ortsgeraden des Schnittpunktes wird offenbar, wenn man die beiden Gruppen von je vier homothetischen Kegelschnitten in Betracht zieht, die durch die Schnittpunkte der Parabel P mit der Geraden gehen. Diese Kurven sind nach dem unter 1. gefundenen Ergebnis Parabeln, deren Achsen die Richtung der in jenen Schnittpunkten an P gelegten Tangenten haben. Da die Ortsgerade durch den Brennpunkt der Parabel P geht, so sind diese Tangenten zueinander normal und bestimmen, da die beiden Parabelgruppen dem hier vorliegenden Kurvensysteme angehören, die Richtung der Achsen aller Kegelschnitte dieses Systems. Man kann also zusammenfassend sagen:

Durch jeden Punkt der Ebene eines Vierseits lassen sich vier seinen Dreiecken umschriebene homothetische Kegelschnitte legen, die Parabeln, Ellipsen oder Hyperbeln sind, je nachdem der Punkt auf, innerhalb oder außer-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

halb der dem Vierseit eingeschriebenen Parabel liegt, und deren Achsenrichtung sich nicht ändert, wenn der Punkt eine durch den Brennpunkt dieser Parabel gehende Gerade beschreibt. Die gemeinsame Achsenrichtung wird durch die in den Schnittpunkten der Geraden mit der Parabel an letztere gelegten Tangenten bestimmt.

II. Die Kegelschnitte, welche die Dreiecke eines Vierseits zu Polardreiecken haben.

Das Koordinatendreieck $A_1 A_2 A_3$ (Fig. 2) ist Polardreieck des Kegelschnittes

(17) $$K \equiv \varkappa_1 x_1^2 + \varkappa_2 x_2^2 + \varkappa_3 x_3^2 = 0 .$$

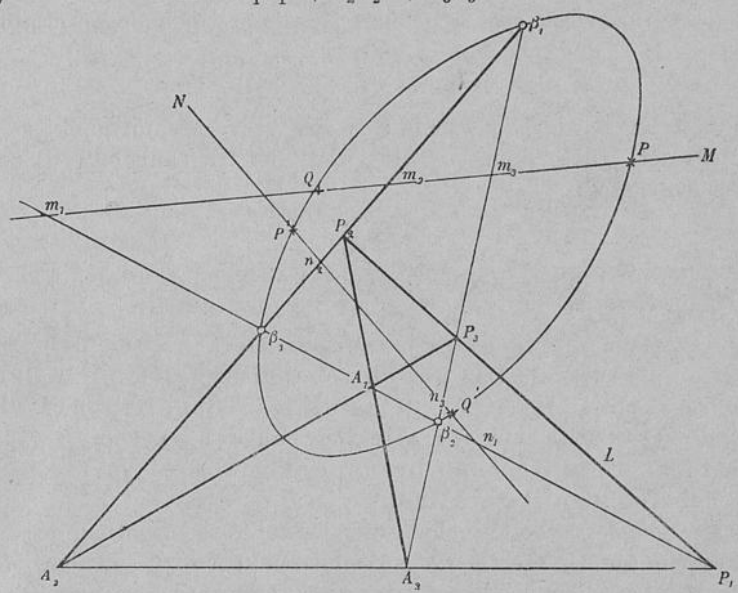


Fig. 2.

Der Gleichung eines Kegelschnittes K_1, dem das Dreieck $A_1 P_2 P_3$ als Polardreieck entspricht, kann man die Form

$$\varkappa_1'(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3)^2 + \varkappa_2' x_2^2 + \varkappa_3' x_3^2 = 0 ,$$

oder wenn $\lambda_2^2 + \frac{\varkappa_2'}{\varkappa_1'} = c_2$ und $\lambda_3^2 + \frac{\varkappa_3'}{\varkappa_1'} = c_3$ gesetzt wird,

(18) $$K_1 \equiv \lambda_1^2 x_1^2 + c_2 x_2^2 + c_3 x_3^2 + 2\lambda_2\lambda_3 x_2 x_3 + 2\lambda_1\lambda_3 x_1 x_3 + 2\lambda_1\lambda_2 x_1 x_2 = 0$$

geben. Für die Kegelschnitte K_2 und K_3, die die Dreiecke $A_2 P_3 P_1$ und $A_3 P_1 P_2$ zu Polardreiecken haben, lassen sich leicht die analogen Gleichungsformen bilden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Auch hier soll nun vorausgesetzt werden, daß die feste Gerade

$$M \equiv \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3 = 0$$

eine gemeinsame Schnittsehne der vier Kegelschnitte sei. Nach (2) ist dies für K (17) und K_1 (18) der Fall, wenn folgende Gleichungen bestehen:

$$c_2 \mu_3^2 + c_3 \mu_2^2 - 2\lambda_2 \lambda_3 \mu_2 \mu_3 = \varphi(\varkappa_2 \mu_3^2 + \varkappa_3 \mu_2^2),$$
$$\lambda_1^2 \mu_3^2 + c_3 \mu_1^2 - 2\lambda_1 \lambda_3 \mu_1 \mu_3 = \varphi(\varkappa_3 \mu_1^2 + \varkappa_1 \mu_3^2),$$
$$c_2 \mu_1^2 + \lambda_1^2 \mu_2^2 - 2\lambda_1 \lambda_2 \mu_1 \mu_2 = \varphi(\varkappa_1 \mu_2^2 + \varkappa_2 \mu_1^2).$$

Multipliziert man diese drei Gleichungen der Reihe nach mit $\mu_1^2, \mu_2^2, \mu_3^2$ und subtrahiert jede derselben von der durch Addition der beiden anderen entstehenden, so folgt

$$(19) \qquad \varphi = \frac{\lambda_1^2 \mu_2 \mu_3 - \mu_1(-\lambda_2 \lambda_3 \mu_1 + \lambda_1 \lambda_3 \mu_2 + \lambda_1 \lambda_2 \mu_3)}{\varkappa_1 \mu_2 \mu_3}$$
$$= \frac{c_2 \mu_1 \mu_3 - \mu_2(\lambda_2 \lambda_3 \mu_1 - \lambda_1 \lambda_3 \mu_2 + \lambda_1 \lambda_2 \mu_3)}{\varkappa_2 \mu_1 \mu_3}$$
$$= \frac{c_3 \mu_1 \mu_2 - \mu_3(\lambda_2 \lambda_3 \mu_1 + \lambda_1 \lambda_3 \mu_2 - \lambda_1 \lambda_2 \mu_3)}{\varkappa_3 \mu_1 \mu_2}.$$

Die beiden anderen Schnittpunkte der Kegelschnitte K und K_1 liegen hiernach, wie sich in leichter Rechnung nach Vorschrift der Gleichung (3) ergibt, auf der Geraden

$$(20) \qquad N \equiv \mu_1 x_1 \left(-\frac{\mu_1}{\lambda_1} + \frac{\mu_2}{\lambda_2} + \frac{\mu_3}{\lambda_3}\right) + \mu_2 x_2 \left(\frac{\mu_1}{\lambda_1} - \frac{\mu_2}{\lambda_2} + \frac{\mu_3}{\lambda_3}\right)$$
$$+ \mu_3 x_3 \left(\frac{\mu_1}{\lambda_1} + \frac{\mu_2}{\lambda_2} - \frac{\mu_3}{\lambda_3}\right) = 0.$$

Beachtet man, daß diese Schnittsehne von den Konstanten der beiden Kegelschnitte unabhängig ist, vielmehr allein durch das Vierseit und die Gerade M bestimmt wird, so kann man ohne weitere Rechnung folgern, daß sie auch Schnittsehne der Kurvenpaare K und K_2, K und K_3 ist. Die vier durch zwei Punkte P, Q der Geraden M gelegten Kegelschnitte, für welche die Dreiecke des Vierseits Polardreiecke sind, gehen also noch durch zwei andere, auf der Geraden N liegende Punkte P', Q', d. h. sie bilden ein Büschel. Ebenso werden die vier von zwei festen Geraden berührten Kegelschnitte, welche die Dreiecke eines Vierecks zu Polardreiecken haben, noch von zwei anderen festen Geraden berührt, d. h. sie bilden eine Schar.

Es fragt sich nun, welche nähere Beziehung zwischen dem Viereck der Grundpunkte P, Q, P', Q' des Büschels und dem gegebenen Vierseit besteht. M und N sind zwei Gegenseiten des Vierecks, deren wechselseitige Beziehung zugleich bestimmend ist für die anderen Gegenseitenpaare. Es zeigt sich nun, daß die Pole der einen Geraden M in bezug auf die dem Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte auf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

der anderen Geraden N liegen. Ein dem Fundamentaldreieck eingeschriebener Kegelschnitt

$$p_1^2 x_1^2 + p_2^2 x_2^2 + p_3^2 x_3^2 - 2 p_2 p_3 x_2 x_3 - 2 p_1 p_3 x_1 x_3 - 2 p_1 p_2 x_1 x_2 = 0$$

wird unter der Bedingung

$$\frac{p_1}{\lambda_1} + \frac{p_2}{\lambda_2} + \frac{p_3}{\lambda_3} = 0$$

auch von der Geraden L berührt, ist also einer der dem Vierseit eingeschriebenen Schar. Sind ξ_i die Koordinaten des Pols der Geraden M in bezug auf ihn, so verhält sich

$$p_1 : p_2 : p_3 = \mu_1 (-\mu_1 \xi_1 + \mu_2 \xi_2 + \mu_3 \xi_3) : \mu_2 (\mu_1 \xi_1 - \mu_2 \xi_2 + \mu_3 \xi_3)$$
$$: \mu_3 (\mu_1 \xi_1 + \mu_2 \xi_2 - \mu_3 \xi_3).$$

Die obige Bedingungsgleichung ergibt als Ort dieses Poles die Gerade

$$\frac{\mu_1}{\lambda_1}(-\mu_1 \xi_1 + \mu_2 \xi_2 + \mu_3 \xi_3) + \frac{\mu_2}{\lambda_2}(\mu_1 \xi_1 - \mu_2 \xi_2 + \mu_3 \xi_3)$$
$$+ \frac{\mu_3}{\lambda_3}(\mu_1 \xi_1 + \mu_2 \xi_2 - \mu_3 \xi_3) = 0$$

oder

$$\mu_1 \xi_1 \left(-\frac{\mu_1}{\lambda_1} + \frac{\mu_2}{\lambda_2} + \frac{\mu_3}{\lambda_3}\right) + \mu_2 \xi_2 \left(\frac{\mu_1}{\lambda_1} - \frac{\mu_2}{\lambda_2} + \frac{\mu_3}{\lambda_3}\right) + \mu_3 \xi_3 \left(\frac{\mu_1}{\lambda_1} + \frac{\mu_2}{\lambda_2} - \frac{\mu_3}{\lambda_3}\right) = 0,$$

d. i. — nach (20) — die Gerade N. M und N sind also konjugierte Polaren in bezug auf die dem Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte und teilen als solche die Diagonalen des Vierseits harmonisch. Schneidet demnach (Fig. 2) die gegebene Gerade M die Diagonalen $A_1 P_1$, $A_2 P_2$, $A_3 P_3$ in den Punkten m_1, m_2, m_3, und sind n_1, n_2, n_3 die ihnen bezüglich der Punkte A_i und P_i harmonisch entsprechenden Punkte, so ist N die durch die letzteren gelegte Gerade.

Die dem Vierseit und einem Paar konjugierter Polaren dualistisch entsprechenden Gebilde sind das Viereck und ein Paar konjugierter Pole, deren jeder der gemeinsame Schnittpunkt der Polaren des anderen in bezug auf die dem Viereck umschriebenen Kegelschnitte ist. Dabei wird jedes Gegenseitenpaar des Vierecks durch die nach den Polen gezogenen Strahlen harmonisch getrennt.

Das Viereck der Grundpunkte $PQP'Q'$ ist also mit dem gegebenen Vierseit — dual entsprechend das Vierseit der gemeinsamen Tangenten mit dem gegebenen Viereck — durch harmonische Punktreihen resp. Strahlenbüschel verknüpft. Nennt man dem entsprechend

ein Viereck einem Vierseit harmonisch zugeordnet, wenn jede Diagonale des Vierseits durch ihre Schnittpunkte mit je zwei Gegenseiten des Vierecks harmonisch geteilt wird,	ein Vierseit einem Viereck harmonisch zugeordnet, wenn je zwei Gegenseiten des Vierecks durch die nach je zwei Gegenecken des Vierseits gelegten Strahlen harmonisch getrennt werden,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

so kann man dem erhaltenen Resultat folgenden Ausdruck geben:

Die vier durch ein festes Punktepaar gelegten Kegelschnitte, für welche die Dreiecke eines Vierseits polar sind, haben noch ein zweites Punktepaar gemeinsam, welches mit dem ersteren ein dem Vierseit harmonisch zugeordnetes Viereck bildet.

Die vier von zwei festen Geraden berührten Kegelschnitte, für welche die Dreiecke eines Vierecks polar sind, werden noch von zwei anderen festen Geraden berührt, welche mit den ersteren ein dem Viereck harmonisch zugeordnetes Vierseit bilden.

Man überzeugt sich leicht, daß die harmonische Beziehung der beiden Figuren eine wechselseitige ist, d. h. ist ein Viereck einem Vierseit harmonisch zugeordnet, so auch das Vierseit dem Viereck. Denn wird (Fig. 2) die Diagonale $A_1 P_1$ durch die Schnittpunkte m_1 und n_1 mit dem Geradenpaar M, N harmonisch geteilt, so wird auch dieses durch die nach den Gegenecken A_1, P_1 gezogenen Strahlen harmonisch getrennt. Man kann daher der Umkehrung des letzten Satzpaares die Form geben:

Sind ein Viereck und Vierseit einander harmonisch zugeordnet, so bilden

je drei Seiten des Vierseits ein Polardreieck eines dem Viereck umschriebenen Kegelschnittes.

je drei Ecken des Vierecks ein Polardreieck eines dem Vierseit eingeschriebenen Kegelschnittes.

Dieser Satz führt zu einer weiteren wichtigen Folgerung. Da das Diagonaldreieck eines Vierseits das gemeinsame Polardreieck sämtlicher ihm eingeschriebenen Kegelschnitte ist, so bilden je drei Punkte des Vierecks $PQP'Q'$ ein harmonisches Tripel eines Kegelschnittes, der auch das Diagonaldreieck des gegebenen Vierseits zum Polardreieck hat. Zwei harmonische Tripel desselben Kegelschnittes liegen aber auf einem zweiten Kegelschnitt; folglich muß der durch die Diagonalschnittpunkte β_i (Fig. 2) des Vierseits und die Punkte P, Q gelegte Kegelschnitt auch durch P' und Q' gehen. Die dual entsprechende Beziehung ergibt sich leicht mittels des Satzes, daß die Seiten zweier Polardreiecke desselben Kegelschnittes einen anderen Kegelschnitt berühren. Daher die Sätze:

1. Sind ein Viereck und Vierseit einander harmonisch zugeordnet, so

liegen die Ecken des Vierecks auf einem durch die Diagonalschnittpunkte des Vierseits gehenden Kegelschnitt.

berühren die Seiten des Vierseits einen dem Diagonaldreieck des Vierecks eingeschriebenen Kegelschnitt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2. Bilden vier Kegelschnitte, welche die Dreiecke eines Vierseits zu Polardreiecken haben, ein Büschel, so gehört diesem auch ein dem Diagonaldreieck des Vierseits umschriebener Kegelschnitt an.

Bilden vier Kegelschnitte, welche die Dreiecke eines Vierecks zu Polardreiecken haben, eine Schar, so gehört dieser auch ein dem Diagonaldreieck des Vierecks eingeschriebener Kegelschnitt an.

Die Punkte P', Q' erhält man also aus dem gegebenen Punktepaare P, Q als Schnittpunkte der harmonischen Polare der Geraden M in bezug auf das gegebene Vierseit mit dem durch dessen Diagonalschnittpunkte und das Punktepaar P, Q gelegten Kegelschnitt. Analog konstruiert man für vier von zwei festen Geraden berührte Kegelschnitte, für welche die Dreiecke eines Vierecks polar sind, das zweite sie berührende Geradenpaar, indem man vom harmonischen Pol des Schnittpunktes des ersteren in bezug auf das gegebene Viereck an den die Seiten seines Diagonaldreiecks und die beiden gegebenen Geraden berührenden Kegelschnitt die Tangenten legt.

Auch hier sollen zwei Sonderfälle eingehender betrachtet werden.

A. Die Gerade M fällt mit einer Seite des Vierseits zusammen.

Ist diese Seite die Gerade L (Fig. 3), d. h. verhält sich

$$\mu_1 : \mu_3 : \mu_3 = \lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 ,$$

so fällt nach (20) die Gerade N mit M zusammen, und da zufolge (19) $c_2 = \lambda_2^2$ und $c_3 = \lambda_3^2$ ist, so entartet der Kegelschnitt (18) — und dem entsprechend auch K_2 und K_3 — in die Doppelgerade

$$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3)^2 = 0 .$$

Die beiden durch P, Q (Fig. 3) gehenden Kegelschnitte, deren einer das Dreieck $A_1 A_2 A_3$ zum Polardreieck hat, während der andere durch die Diagonalschnittpunkte β_i des gegebenen Vierseits geht, haben, da P' und Q' mit P und Q zusammenfallen, in diesem Punktepaare eine doppelte Berührung. Diese Tatsache läßt sich in verschiedener Weise interpretieren, je nachdem man sie auf das feste Dreieck $\beta_1 \beta_2 \beta_3$ oder auf das gegebene Vierseit bezieht.

a. Bedenkt man, daß das Dreieck $A_1 A_2 A_3$ dem Diagonaldreieck $\beta_1 \beta_2 \beta_3$ bezüglich der Geraden L perspektivisch eingeschrieben ist, und daß es nur einen Kegelschnitt gibt, der ein gegebenes Dreieck zum Polardreieck hat und einen gegebenen Kegelschnitt doppelt berührt, so erhält man den Satz:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Konstruiert man die Kegelschnitte, die beliebige einem festen Dreieck umschriebene Kegelschnitte doppelt berühren und ein anderes festes, dem ersteren perspektivisch eingeschriebenes Dreieck zum Polardreieck haben, so ist die Perspektivachse die gemeinsame Berührungssehne sämtlicher Kurvenpaare.

Konstruiert man die Kegelschnitte, die beliebige einem festen Dreieck eingeschriebene Kegelschnitte doppelt berühren und ein anderes festes, dem ersteren perspektivisch umschriebenes Dreieck zum Polardreieck haben, so ist das Perspektivzentrum der Pol der Berührungssehnen sämtlicher Kurvenpaare

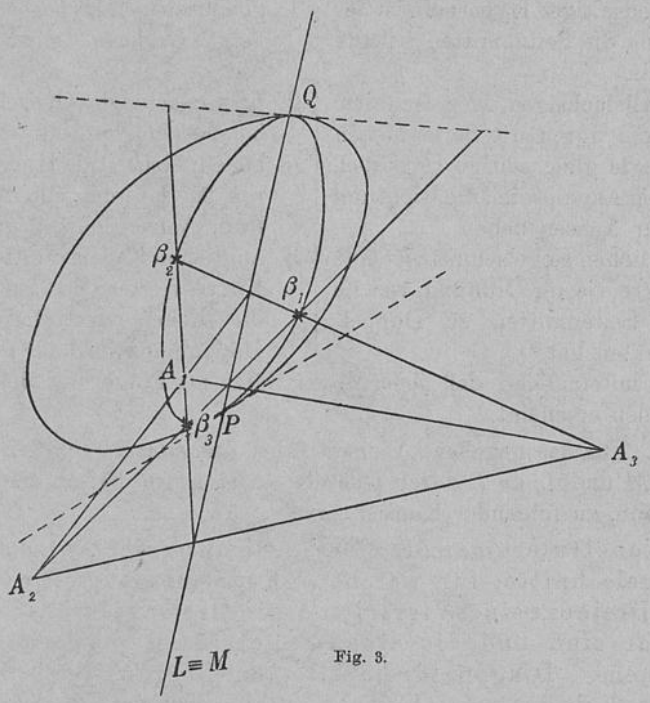


Fig. 3.

Für den ersteren dieser beiden Sätze ist der Sonderfall beachtenswert, daß die Perspektivachse die unendlich ferne Gerade ist. Kegelschnitte, die sich in zwei unendlich fernen Punkten doppelt berühren, sind konzentrisch und homothetisch. Man hat also mit Berücksichtigung des Umstandes, daß die Punkte A_i nun die Seiten des Dreiecks $\beta_1 \beta_2 \beta_3$ halbieren, den Satz:

Der Mittelpunkt eines einem Dreieck umschriebenen Kegelschnittes ist zugleich der Mittelpunkt des ihm homothetischen Kegelschnittes, der das Dreieck der Seitenmitten zum Polardreieck hat.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dieser Satz kann mancherlei Anwendung finden. Unmittelbar einleuchtend als Folgerung ist, da die Mittellote der Seiten eines Dreiecks zugleich die Höhen des Dreiecks der Seitenmitten sind, der bekannte Satz, daß der Mittelpunkt des Kreises, der ein Dreieck zum Polardreieck hat, in dessen Höhenschnittpunkt liegt. Er läßt aber auch den inneren Zusammenhang einer Reihe von Sätzen erkennen, die solche Kegelschnitte betreffen, denen ein festes Dreieck eingeschrieben ist oder als Polardreieck dient. So verknüpft er die Parallelsätze:

Der Ort der Mittelpunkte der einem Dreieck umschriebenen

1. gleichseitigen Hyperbeln ist der durch die Seitenmitten gelegte Kreis,
2. parallelachsigen Kegelschnitte ist die durch die Seitenmitten gelegte gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten die Richtung ihrer Achsen haben,
3. ähnlichen Kegelschnitte ist eine Kurve vierter Ordnung, welche die Seitenmitten zu Doppelpunkten hat,*)

Der Ort der Mittelpunkte der auf ein gemeinsames Polardreieck bezogenen

1. gleichseitigen Hyperbeln ist der dem Dreieck umschriebene Kreis,
2. parallelachsigen Kegelschnitte ist die dem Dreieck umschriebene gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten die Richtung ihrer Achsen haben,
3. ähnlichen Kegelschnitte ist eine Kurve vierter Ordnung, welche die Ecken des Dreiecks zu Doppelpunkten hat,*)

derart miteinander, daß jeder dieser Sätze als Folgerung des nebenstehenden erscheint.

b. Für das gegebene Vierseit führt das Zusammenfallen der Geraden M und L, da L durch jede der anderen drei Seiten ersetzt werden kann, zu folgender Konsequenz:

Konstruiert man die vier Kegelschnitte, für welche die Dreiecke eines Vierseits polar sind und die einen seinem Diagonaldreieck umschriebenen Kegelschnitt doppelt berühren, so liegen die Berührungspunkte paarweise auf den Seiten des Vierseits.

Konstruiert man die vier Kegelschnitte, für welche die Dreiecke eines Vierecks polar sind und die einen seinem Diagonaldreieck eingeschriebenen Kegelschnitt doppelt berühren, so schneiden sich die gemeinsamen Tangenten paarweise in den Ecken des Vierecks.

---

*) Vgl. Gundelfinger, Vorlesungen aus der anal. Geom. der Kegelschnitte, Anhang Nr. 172 und 177.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

B. Die Gerade M ist die unendlich ferne.

Da die Punkte n_i (Fig. 2) in diesem Falle die Diagonalen $A_i P_i$ halbieren, so wird die Gerade N zur Mediane des Vierseits, als deren Gleichung man aus (20) erhält, indem man μ_i durch a_i ersetzt,

$$(21) \qquad a_1 x_1 \left(-\frac{a_1}{\lambda_1} + \frac{a_2}{\lambda_2} + \frac{a_3}{\lambda_3}\right) + a_2 x_2 \left(\frac{a_1}{\lambda_1} - \frac{a_2}{\lambda_2} + \frac{a_3}{\lambda_3}\right) + a_3 x_3 \left(\frac{a_1}{\lambda_1} + \frac{a_2}{\lambda_2} - \frac{a_3}{\lambda_3}\right) = 0.$$

Die vier Kegelschnitte sind in diesem Falle ähnlich und ähnlich gelegen, für sie besteht also der Satz:

Je vier homothetische Kegelschnitte, welche die Dreiecke eines Vierseits zu Polardreiecken haben, schneiden sich in denselben beiden Punkten der Mediane. Durch dieselben Punkte geht auch der dem Diagonaldreieck umschriebene, den ersteren homothetische Kegelschnitt.

In betreff der Lage der Zentra dieser Kurvengruppe ist zu beachten, daß die Mittelpunkte der Kegelschnitte eines Büschels auf dem sog. „Neunpunkte-Kegelschnitt“ des Vierecks der Grundpunkte, d. h. auf dem durch die Mitten der Seiten und durch die Diagonalpunkte dieses Vierecks gelegten Kegelschnitt liegen. Dieser zerfällt, wenn zwei Grundpunkte im Unendlichen liegen, in die unendlich ferne Gerade und denjenigen Durchmesser eines beliebigen der homothetischen Kegelschnitte, der die gemeinsame, im Endlichen liegende Schnittsehne halbiert. Dieser Durchmesser ist die Polare des unendlich fernen Punktes der Schnittsehne in bezug auf den Kegelschnitt. Hieraus folgt, daß die Mittelpunkte solcher vier homothetischen Kegelschnitte, für die je drei Seiten eines Vierseits ein Polardreieck bilden, auf der Polare des unendlich fernen Punktes der Mediane des Vierseits in bezug auf einen dieser vier Kegelschnitte, z. B.

$$\varkappa_1 x_1^2 + \varkappa_2 x_2^2 + \varkappa_3 x_3^2 = 0$$

liegen. Durch Kombination der Gleichung (21) mit

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

ergibt sich für den im Unendlichen liegenden Punkt der Mediane das Koordinatenverhältnis

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{\frac{a_2}{\lambda_2} - \frac{a_3}{\lambda_3}}{a_1} : \frac{\frac{a_3}{\lambda_3} - \frac{a_1}{\lambda_1}}{a_2} : \frac{\frac{a_1}{\lambda_1} - \frac{a_2}{\lambda_2}}{a_3},$$

oder mit Berücksichtigung der abkürzenden Zeichen q_i (9)

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{q_1}{a_1^2} : \frac{q_2}{a_2^2} : \frac{q_3}{a_3^2},$$

und somit als Gleichung seiner Polare, d. h. der die Zentra der vier homothetischen Kegelschnitte enthaltenden Geraden

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\frac{\varkappa_1 q_1}{a_1^2} x_1 + \frac{\varkappa_2 q_2}{a_2^2} x_2 + \frac{\varkappa_3 q_3}{a_3^2} x_3 = 0. \tag{22}$$

Die nähere Betrachtung dieser Geraden führt zu einer durch die eingeschriebene Parabel P vermittelten Verknüpfung der vorliegenden Kurvengruppe mit der im ersten Abschnitt untersuchten. Fragt man nach der Bedingung der Homothetie sämtlicher acht Kegelschnitte, also sowohl der den vier Dreiecken umschriebenen, als auch derjenigen, für die sie Polardreiecke sind, so genügt es, die Beziehung der Konstanten c_i und $\varkappa_i$ der beiden auf das Fundamentaldreieck bezogenen Kurven

$$c_1 x_2 x_3 + c_2 x_1 x_3 + c_3 x_1 x_2 = 0$$

und

$$\varkappa_1 x_1^2 + \varkappa_2 x_2^2 + \varkappa_3 x_3^2 = 0$$

aufzustellen. Nach (4) lautet diese Bedingung

$$\frac{\varkappa_1}{a_1^2} : \frac{\varkappa_2}{a_2^2} : \frac{\varkappa_3}{a_3^2} = \tag{23}$$

$$(-a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) : (a_1 c_1 - a_2 c_2 + a_3 c_3) : (a_1 c_1 + a_2 c_2 - a_3 c_3).$$

Nun war im ersten Abschnitt der gemeinsame Schnittpunkt der umschriebenen Kegelschnitte bestimmt durch das Koordinatenverhältnis

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{a_1 c_1}{q_1} : \frac{a_2 c_2}{q_2} : \frac{a_3 c_3}{q_3}.$$

Für die Polare dieses Punktes in bezug auf die dem Vierseit eingeschriebene Parabel

$$P \equiv q_1^2 x_1^2 + q_2^2 x_2^2 + q_3^2 x_3^2 - 2 q_2 q_3 x_2 x_3 - 2 q_1 q_3 x_1 x_3 - 2 q_1 q_2 x_1 x_2 = 0.$$

erhält man die Gleichung

$$q_1 x_1 (-a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) + q_2 x_2 (a_1 c_1 - a_2 c_2 + a_3 c_3) + q_3 x_3 (a_1 c_1 + a_2 c_2 - a_3 c_3) = 0,$$

die mit Berücksichtigung der Relation (23) in

$$\frac{\varkappa_1 q_1}{a_1^2} x_1 + \frac{\varkappa_2 q_2}{a_2^2} x_2 + \frac{\varkappa_3 q_3}{a_3^2} x_3 = 0,$$

also in die Gleichung der Geraden (22) übergeht. Das Ergebnis dieser Betrachtung ist demnach folgendes:

Die Mittelpunkte solcher vier homothetischen Kegelschnitte, für welche die Dreiecke eines Vierseits polar sind, liegen in einer Geraden. Die ihnen homothetischen, denselben Dreiecken umschriebenen Kegelschnitte gehen durch den Pol dieser Geraden in bezug auf die dem Vierseit eingeschriebene Parabel.

Zur näheren Erläuterung der letzten Resultate mögen zwei Sonderfälle dienen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

1. Sind die homothetischen Kurven Kreise, so bestätigt sich der bekannte Satz, daß die vier Kreise, für die je drei Seiten eines Vierseits ein Polardreieck bilden, durch dieselben beiden Punkte gehen. Es sind die Schnittpunkte der Mediane des Vierseits mit dem seinem Diagonaldreieck umschriebenen Kreise. Da jeder der vier Kreise der Ort der Mittelpunkte der seinem Polardreieck eingeschriebenen gleichseitigen Hyperbeln ist, so sind ihre beiden Schnittpunkte die Zentra der dem Vierseit eingeschriebenen gleichseitigen Hyperbeln. Die vier Kreismittelpunkte, d. h. die Höhenschnittpunkte der Dreiecke, liegen obigem Satz zufolge auf der Polare des Brennpunktes der Parabel P, wodurch sich gleichzeitig der Satz bestätigt:

Die Höhenschnittpunkte der vier von je drei Seiten eines Vierseits gebildeten Dreiecke liegen, zugleich mit dem Mittelpunkte des durch die Diagonalschnittpunkte gelegten Kreises, auf der Direktrix der dem Vierseit eingeschriebenen Parabel.

2. Sind die Kegelschnitte gleichseitige Hyperbeln, so liegt der Schnittpunkt der den Dreiecken umschriebenen Kurven, wie im ersten Abschnitte gezeigt, auf der Direktrix der Parabel P. Da die Polare eines Punktes der Direktrix durch den Brennpunkt geht, so gilt hier der Satz:

Die Mittelpunkte einer Gruppe von vier parallelachsigen gleichseitigen Hyperbeln, welche die Dreiecke eines Vierseits zu Polardreiecken haben, liegen in einer Geraden, die durch den Brennpunkt der dem Vierseit eingeschriebenen Parabel geht.

Die konstruktive Bestimmung der vier Hyperbelzentra auf einer beliebigen, durch den Parabelbrennpunkt gelegten Geraden geschieht durch die vier den Dreiecken umschriebenen Kreise, deren jeder der Ort der Zentra der gleichseitigen Hyperbeln ist, die das ihm eingeschriebene Dreieck zum Polardreieck haben. Jede dieser Hyperbeln ist wieder der Ort der Mittelpunkte derjenigen dem Polardreieck eingeschriebenen Kegelschnitte, deren Achsen den Asymptoten der Hyperbel parallel sind. Man kann also zusammenfassend sagen:

Legt man durch den gemeinsamen Schnittpunkt der vier den Dreiecken eines Vierseits umschriebenen Kreise eine beliebige Gerade, so sind die Kegelschnitte, welche die vier anderen Schnittpunkte der Geraden mit diesen Kreisen zu Mittelpunkten und jene vier Dreiecke zu Polardreiecken haben, parallelachsige gleichseitige Hyperbeln, die sich in denselben beiden, auf der Mediane des Vierseits liegenden Punkten schneiden. Diese Punkte sind die Zentra derjenigen beiden dem Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte, deren Achsen den Asymptoten der Hyperbeln parallel sind.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

1. Sind die homothetis der
bekannte Satz, daß die vier ier-
seits ein Polardreieck bilde nen.
Es sind die Schnittpunkte nem
Diagonaldreieck umschriebe der
Ort der Mittelpunkte der se ich-
seitigen Hyperbeln ist, so s ntra
der dem Vierseit eingeschri vier
Kreismittelpunkte, d. h. die gen
obigem Satz zufolge auf de P,
wodurch sich gleichzeitig d

Die Höhenschnit ten
eines Vierseits gebil mit
dem Mittelpunkte de kte
gelegten Kreises, auf ein-
geschriebenen Parab

2. Sind die Kegelschni liegt
der Schnittpunkt der den im
ersten Abschnitte gezeigt, die
Polare eines Punktes der , so
gilt hier der Satz:

Die Mittelpunkt lel-
achsigen gleichseitig cke
eines Vierseits zu Po ner
Geraden, die durch d ein-
geschriebenen Parab

Die konstruktive Best iner
beliebigen, durch den Para ieht
durch die vier den Dreieck der
Ort der Zentra der gleichs nge-
schriebene Dreieck zum P beln
ist wieder der Ort der Mit ein-
geschriebenen Kegelschnitt Hy-
perbel parallel sind. Man

Legt man durch der
vier den Dreiecken e eise
eine beliebige Gerad lche
die vier anderen Sc esen
Kreisen zu Mittelpun lar-
dreiecken haben, par eln,
die sich in denselbe ier-
seits liegenden Punk die
Zentra derjenigen b nen
Kegelschnitte, deren per-
beln parallel sind.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Da durch die beiden gemeinsamen Schnittpunkte, wie oben gezeigt, auch die dem Diagonaldreieck umschriebene Hyperbel von gleicher Asymptotenrichtung geht, so gilt auch der Satz:

Die Achsen eines einem Vierseit eingeschriebenen Kegelschnittes haben die Richtung der Asymptoten derjenigen gleichseitigen Hyperbel, welche durch den Mittelpunkt des Kegelschnittes und die Diagonalschnittpunkte des Vierseits geht.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf