Beilage zum Programm des Real-Progymnasiums zu Havelberg.

Ostern 1893. Progr. Nr. 150.

**Abhandlung vom Oberlehrer Hermann Caesar:**

# Wie bewegt sich ein materieller Punkt in einer Ebene, wenn er von einer ausserhalb liegenden konstanten Centralkraft angezogen wird?

## Einleitung.

Eine der vorliegenden verwandte Arbeit ist bereits als Dissertation behandelt worden (Edler, Halle 1882). Während aber dort das Anziehungscentrum sich in der Bewegungsebene selbst befindet, liegt es nach unserem Thema ausserhalb der Ebene. Mithin ist jene Abhandlung als ein Spezialfall von unserer aufzufassen. Vom Verfasser, Herrn Oberlehrer Dr. Edler zu Halle, ist durch numerische Berechnung mehrerer auf einander folgender Werte nachgewiesen, dass sich ein von ihm $\Omega$ genannter Winkel (dem in unserer Arbeit der Winkel $\Psi$ entspricht cf. § 8) einem bestimmten Grenzwerte nähert. Die Berechnung dieses Grenzwertes fehlt in jener Arbeit und ist meines Wissens auch in ähnlichen Thematen wie z. B. beim sphärischen Pendel, bei der Bewegung eines materiellen Punktes auf einem Rotationsparaboloid, Cylinder u. a. nicht ausgeführt worden. Wir werden nachweisen, dass sich der Grenzwert $\Psi_2$ (§ 11) darstellt als eine Funktion der Neigung des Radiusvektor gegen die Ebene, dass mithin in unserer Arbeit unendlich viele Grenzwerte möglich sind. In der Edlerschen Abhandlung dagegen ist die Neigung des Radiusvektor konstant = Null und daher (wie sich zeigen lässt) nur ein oberer Grenzwert vorhanden, der das Maximum unserer Grenzwerte ist. Anwendung werden diese Grenzwerte finden im § 12 bei der Betrachtnng geschlossener Curvenformen. Während in unserer Arbeit, wie wir zeigen werden, bestimmte geschlossene Curven nur bei bestimmter Minimalneigung des Radiusvektor möglich sind, fällt in dem Spezialfalle, wo das Anziehungscentrum in der Bewegungsebene selbst liegt, diese Beschränkung fort. — Die Grenzbetrachtungen hinsichtlich der Möglichkeit geschlossener Curvenformen sind (§ 13) ausgedehnt auf das bekannte Problem vom sphärischen Pendel.

Die Rechnung ist von mir in den Jacobi'schen $\vartheta$- und $\zeta$-Funktionen durchgeführt worden, weil sich gewisse Ausdrücke in eleganter und leicht übersichtlicher Form durch sie darstellen lassen, und weil diese Funktionen auch für die numerische Berechnung sehr geeignet sind.



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 1.

## Die Bewegungsgleichungen.

Wir wählen das Kraftcentrum O zum Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems und nehmen den materiellen Punkt P innerhalb einer in der Entfernung p zur $+x =$ Axe senkrechten Ebene E an. (Figur 1)

Den Radiusvektor O P bezeichnen wir mit r, seine Projektion auf E mit R und den zwischen ihnen liegenden Winkel mit n.

Ferner denken wir die konstante Centralkraft $\frac{\mu}{2}$ in die drei den Axen parallelen Komponenten X Y Z zerlegt. Um die Bedingung zu erfüllen, dass der Punkt die Ebene E nicht verlassen darf, fügen wir eine der Komponente X das Gleichgewicht haltende Normalkraft N hinzu.

Da die Wirkung der Centralkraft eine anziehende ist, erhalten wir folgende Bewegungs-Gleichungen:

$$N + X = \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{\mu}{2} \cdot \frac{p}{r} + N = 0 \quad (1)$$

$$Y = \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{\mu}{2} \cdot \frac{y}{r} \quad (2)$$

$$Z = \frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{\mu}{2} \cdot \frac{z}{r} \quad (3)$$

Die Normalkraft $N = \frac{\mu}{2} \cdot \frac{p}{r}$ bedeutet den Druck, welchen die Ebene bei der Beweguug des Punktes erleidet. Da sich also der Druck proportional dem Sinus des Neigungswinkels des Radiusvektors r gegen die Ebene E ändert, so herrscht auf allen Punkten eines um L mit beliebigem Radius R beschriebenen Kreises derselbe Druck.

Am stärksten ist der Druck im Punkte L.

Aus (2) und (3) ergiebt sich nach Multiplikation mit $\frac{dy}{dt}$ resp. $\frac{dz}{dt}$ und Addition:

$$(4) \quad 2\,\frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{2dz}{dt} \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{\mu}{r}\left(y\,\frac{dy}{dt} + z\,\frac{dz}{dt}\right).$$

Beachten wir, dass:

$y^2 + z^2 + p^2 = r^2$

$y\,\frac{dy}{dt} + z\,\frac{dz}{dt} = rdt$ ist, so folgt aus (4) durch Integration:

$$(5) \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = -\mu r + c_1 \text{ als Gleichung der lebendigen Kraft.}$$

Aus (2) und (3) ergiebt sich ferner nach Multiplikation mit z resp. y und Subtraktion:

$$z\,\frac{d^2 y}{dt^2} - y\,\frac{d^2 z}{dt^2} = 0 \text{ oder integriert:}$$

$$(6) \quad z\,\frac{dy}{dt} - y\,\frac{dz}{dt} = 2\,c_2 \text{ (Flächenprinzip).}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Als neue Variable führen wir den Winkel $\phi$ ein, den eine durch r und p ($\perp$ E) gelegte Ebene mit einer durch die Anfangslage von P und die Punkte L und O gelegten Ebene bildet.

Dann ist:

$$y = r \,.\, \cos n \,.\, \sin \phi = R \,.\, \sin \phi$$
$$z = r \,.\, \cos n \,.\, \cos \phi = R \,.\, \cos \phi.$$

Die Gleichungen (5) und (6) lauten durch die Variablen R und $\phi$ ausgedrückt:

$$\text{(5a)} \quad R^2\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = -\mu\sqrt{R^2+p^2} + c_1$$

$$\text{(6a)} \quad R^2\frac{d\phi}{dt} = 2\,c_2.$$

Ist $v_0 = \sqrt{R_0^2\left(\frac{d\phi}{dt}\right)_0^2 + \left(\frac{dR}{dt}\right)_0^2}$ die Anfangsgeschwindigkeit und $\alpha_0$ der Winkel, den ihre Richtung mit $R_0$ bildet, so ist:

$$\text{(5b)} \quad c_1 = v_0^{\,2} + \mu\sqrt{R_0^2 + p^2} = v_0^{\,2} + \mu\, r_0$$

$$\text{(6b)} \quad c_2 = \frac{R_0\, v_0 \sin \alpha_0}{2}.$$

Die Konstante $c_2$ bedeutet den Inbalt des in der Zeiteinheit von R beschriebenen Sectors. Die Geschwindigkeit $v_0$ ist zerlegt in die beiden Komponenten:

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)_0 = v_0 \cos \alpha_0$$

$\left(R\frac{d\phi}{dt}\right)_0 = v_0 \sin \phi_0 \sin \alpha_0$, von denen die eine in die Richtung von $R_0$ fällt, die andere darauf senkrecht steht. Je nachdem man nun aus (5a) mit Hilfe von (6a) $\frac{d\phi}{dt}$ oder $dt$ eliminiert, bekommt man die Differentialgleichungen:

$$\text{(7)} \quad \left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = -\mu\sqrt{R^2+p^2} + c_1 - \frac{4\,c_2^{\,2}}{R^2} \text{ und}$$

$$\text{(8)} \quad \left(\frac{dR}{d\phi}\right)^2 = -\mu\frac{R^4\sqrt{R^2+p^2}}{4\,c_2^{\,2}} + \frac{R^4\,c_1}{4\,c_2^{\,2}} - R^2$$

Führt man, um die Wurzeln fortzuschaffen, wieder den Radiusvektor r statt seiner Projektion R ein, so bekommt man:

$$\text{(9)} \quad \int_{r_0}^{r} \frac{r\,dr}{\pm\sqrt{\mu\, r(r^2-p^2) + c_1(r^2-p^2) - 4\,c_2^{\,2}}} = \int_{t_0}^{t} dt$$

$$\text{(10)} \quad \int_{r_0}^{r} \frac{2\,c_2\, r\,dr}{\pm(r^2-p^2)\sqrt{-\mu\, r(r^2-p^2) + c_1(r^2-p^2) - 4\,c_2^{\,2}}} = \int_{\phi_0=0}^{\phi} d\phi$$

Oder, wenn man unter der Wurzel den Faktor $\mu$ heraussetzt und den damit multiplizierten Ausdruck dritten Grades kurz mit $\varphi$ (r) bezeichnet:



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$(9a)\quad \int_{r_0}^{r} \frac{r\,dr}{\pm\sqrt{-\mu\,\varphi(r)}} = \int_{t_0}^{t} dt$$

$$(10a)\quad \int_{r_0}^{r} \frac{2\,c_2\,r\,d\,r}{\pm(r^2-p^2)\sqrt{-\mu\,\varphi(r)}} = \int_{0}^{\phi} d\phi$$

Hier gilt das +Zeichen, wenn mit wachsender Zeit r und $\phi$ wachsen, das —Zeichen, wenn r abnimmt, während $\phi$ wächst.

§ 2.

## Ueber die Funktion $\varphi$ (r).

Wir schreiben die Gleichung (7) in der Form:

$$\frac{dR}{dt} = \frac{1}{R}\sqrt{-\mu\,R^2\sqrt{R^2+p^2} + \frac{c_1\,\mu\,R^2}{\mu} - \frac{4\,c_2^2\,\mu}{\mu}},$$

$\frac{dR}{dt}$ ist nun die in die Richtung von R fallende Geschwindigkeitskomponente, welche mithin an allen Stellen, wo der materielle Punkt seine grösste oder kleinste Entfernung vom Centrum erreicht hat, verschwinden muss.

Der Ausdruck rechts würde verschwinden, wenn der Ausdruck unter der Wurzel für $R = \infty$ einen endlichen Wert behielte. Nun zeigt sich aber, dass:

$$\frac{dR}{dt} = \sqrt{\frac{-\mu\,(A\,R^3 + B\,R^2 + C\,R + D)}{R^2}}$$

für $R = \infty$ imaginär wird.

Also kann im Allgemeinen (für endliche Werte der Konstanten) der materielle Punkt sich nicht unendlich weit von dem Punkte L (Fusspunkt des Lotes p) entfernen.

Wir führen nun unter der Wurzel r für R ein durch die Beziehung $\sqrt{r^2 - p^2} = R$ und setzen:

$$(11)\quad \varphi(r) = r^3 - \frac{c_1}{\mu}\,r^2 - p^2 r + \frac{c_1 p^2 + 4c_2^2}{\mu},$$

so erhalten wir für

$\frac{dR}{dt} = \frac{1}{R}\sqrt{-\mu\,\varphi(r)}$ nur dann reelle Werte, wenn $\varphi$ (r) negativ wird. Nun ist:

$$\varphi(r) = r^3 - \frac{c_1}{\mu}\,r^2 - p^2 r + \frac{c_1 p^2 + 4c_2^2}{\mu} = \left(r - \frac{c_1}{\mu}\right)\left(r^2 - p^2\right) + \frac{4\,c_2^2}{\mu}$$

$$4c_2^2 = (r_0^2 - p^2)\,v_0^2 \sin^2\alpha_0 \qquad (6\,b)$$

$$c_1 = v_0^2 + \mu\,r_0 \qquad (5\,b)$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Setzen wir dies ein, so wird:

$$\frac{\mu r - v_0^2 - \mu r_0}{\mu} \cdot (r^2 - p^2) + \frac{(r_0^2 - p^2)\, v_0^2 \sin^2\alpha_0}{\mu}$$

für $r = r_0$

$$(r_0^2 - p^2)\,(-v_0^2 + v_0^2 \sin^2\alpha_0) \text{ negativ.}$$

$\varphi(r)$ wird also für positive Werte von r negativ, und nur für diese bekommt $\frac{dR}{dt}$ reelle Werte.

Wenn wir also $\varphi(r) = 0$ geometrisch als eine Curve auffassen, so sehen wir, dass diese mit der $+r$-Axe zwei reelle Schnittpunkte haben muss.

Denn für $r = p$ ist $\varphi(r)$ pos. $= \frac{4c_2^2}{\mu}$

„ $r = r_0 > p$ „ $\varphi(r)$ neg.

„ $r = \infty$ „ $\varphi(r)$ wieder pos. $\infty$.

Die Werte, für die $\varphi(r)$ verschwindet, seien $r_2$ und $r_1$ ($r_1 > r_2$), und nur die zwischen $r_1$ und $r_2$ liegenden Werte von r haben Bedeutung für die Bewegung des Punktes.

Algebraisch betrachtet ist $\varphi(r) = 0$ eine Gleichung dritten Grades, von der $r_1$ und $r_2$ die beiden positiven Wurzeln sind.

[Weil das absolute Glied positiv ist, muss die dritte Wurzel negativ sein].

Die Bewegung des Punktes findet also im Allgemeinen auf einem Ringe statt, der begrenzt wird von Kreisen mit den Radien $\sqrt{r_1^2 - p^2}$ und $\sqrt{r_2^2 - p^2}$.

$r_1$ und $r_2$ lassen sich aber ausdrücken durch die für den Anfangszustand des Punktes gegebenen Constanten $r_0$, $v_0$, $\alpha_0$, indem man zunächst die beiden positiven Wurzeln der Gleichung $\varphi(r) = 0$ berechnet. [Die dritte (neg.) Wurzel sei $r_3$]

Die Gleichung:

$$\varphi(r) = r^3 - \frac{c_1}{\mu} r^2 - p^2 r + \frac{c_1 p^2 + 4c_2^2}{\mu} = 0$$

lautet reduciert:

$$\rho^3 - \rho\left(\frac{c_1^2}{3\mu^2} + p^2\right) + \frac{2c_1 p^2}{3\mu} + \frac{4c_2^2}{\mu} - \frac{2c_1^3}{27\mu^3} = 0$$

oder:

$$\rho^3 - m\rho + n = 0; \quad m = \frac{c_1^2}{3\mu^2} + p^2, \quad n = \frac{2c_1}{3\mu}\left(p^2 - \frac{c_1^2}{9\mu^2}\right) + \frac{4c_2^2}{\mu}.$$

Durch die Substitution: $\rho = \rho' \cos\chi$ bekommen wir:

$$\cos^3\chi - \frac{m}{\rho'^2} + \frac{n}{\rho'^3} = 0$$

$$\cos^3\chi - \frac{3}{4}\cos\chi - \frac{1}{4}\cos^3\chi = 0 \text{ (Goniometrie).}$$

Also ist: $\rho' = 2\sqrt{\frac{m}{3}}$

$$\cos^3\chi = -\frac{3n\sqrt{3}}{2m\sqrt{m}} = -\cos\omega.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die drei Wurzeln ergeben sich nun aus:

$$\rho = -2\sqrt{\frac{m}{3}}\cos\frac{\omega + 2\nu\pi}{3};\ \nu = 0, 1, 2 \ldots$$

Da aber: $\cos\frac{\omega + 2\pi}{3} = -\cos\frac{\pi - \omega}{3}$ und $\cos\frac{\omega + 4\pi}{3} = -\cos\frac{\pi + \omega}{3}$ ist, so folgt:

$$\rho_1 = 2\sqrt{\frac{m}{3}}\cos\frac{\pi - \omega}{3};$$

$$\rho_2 = 2\sqrt{\frac{m}{3}}\cos\frac{\pi + \omega}{3};\ \frac{\pi}{2} > \omega > 0$$

$$\rho_3 = -2\sqrt{\frac{m}{3}}\cos\frac{\omega}{3};$$

mithin:

$$r_1 = \frac{c_1}{3\mu} + 2\sqrt{\frac{p^2}{3} + \frac{c_1^2}{9\mu^2}}\cos\frac{\pi - \omega}{3} \qquad (12)$$

$$r_2 = \frac{c_1}{3\mu} + 2\sqrt{\frac{p^2}{3} + \frac{c_1^2}{9\mu^2}}\cos\frac{\pi + \omega}{3} \qquad (13)$$

$$r_3 = \frac{c_1}{3\mu} - 2\sqrt{\frac{p^2}{3} + \frac{c_1^2}{9\mu^2}}\cos\frac{\omega}{3} \qquad (14)$$

$$\cos\omega = \frac{3n\sqrt{3}}{2m\sqrt{m}} = \frac{\frac{2c_1p^2}{3\mu} + \frac{4c_2^2}{\mu} - \frac{2c_1^3}{27\mu^3}}{2\sqrt{\frac{p^2}{3} + \frac{c_1^2}{9\mu^2}}^{\,3}} \qquad (15)$$

Hier ist $c_1 = v_0^2 + \mu r_0$

$4c_2^2 = (r_0^2 - p^2)v_0^2\sin^2\alpha_0$.

Wir können also aus gegebenen Werten von $r_0$, $v_0$ und $\alpha_0$ die Grösse der Grenzkreise und die Breite des Kreisringes bestimmen, innerhalb dessen die Bewegung des Punktes erfolgt.

Die Formeln eignen sich nun zwar zur Berechnung von $r_1$ und $r_2$ bei einem speciell gewählten Anfangsstadium, aber nicht zur Discussion der Veränderungen, welche der Spielraum des Punktes als Funktion der zwei Grössen $r_0$ und $v_0$ erfährt. Wir haben sie aber zu benutzen, wenn wir sehen wollen, in welcher Weise die Radien der Grenzkreise von der Richtung $\alpha_0$ der Anfangsgeschwindigkeit abhängen. Am wichtigsten ist der Einfluss der Anfangsgeschwindigkeit, und wir wollen daher diese durch die Radiivektores ausdrücken, indem wir für $r_3$ seinen absoluten Betrag $[r_3] = r_{,,,}$ nehmen.

$$r_{,,,} = 2\sqrt{\frac{p^2}{3} + \frac{c_1^2}{9\mu^2}}\cos\frac{\omega}{3} - \frac{c_1}{3\mu} \qquad (14a)$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 3.

## Einfluss der Anfangsgeschwindigkeit auf den Kreisring, innerhalb dessen die Bewegung des Punktes stattfindet.

### Geradlinige und kreisförmige Bahn.

Aus der Gleichung:

$$\varphi(r) = r^3 - \frac{c_1}{\mu} r^2 - p^2 r + \frac{c_1 p^2 + 4 c_2^{\,2}}{\mu} = 0 \text{ folgt:}$$

$$(16) \quad \frac{c_1}{\mu} = (r_1 + r_2 - r_{,,,})$$

$$(17) \quad -p^2 = r_1 r_2 - r_2 r_{,,,} - r_1 r_{,,,}.$$

Nach (5a) ist aber:

$$v^2 = -\mu r + c_1 \text{ also auch:}$$

$$v^2 = \mu (r_1 + r_2 - r_{,,,} - r) \quad (18)$$

$$v_1^{\,2} = \mu (r_2 - r_{,,,}); \; r = r_1 \quad (19)$$

$$v_2^{\,2} = \mu (r_1 - r_{,,,}); \; r = r_2 \quad (20)$$

Hier bedeuten $v_1$ und $v_2$ die Geschwindigkeiten, die der Punkt auf den beiden Grenzkreisen annimmt.

Aus (19) $v_1 = \sqrt{\mu (r_2 - r_{,,,})}$ geht hervor, dass die negative Wurzel der Gleichung $\varphi(r) = 0$ ihrem absoluten Werte nach die kleinste der drei Wurzeln ist. $r_1 > r_2 > r_{,,,}$; $r_1 > r > r_2$.

Aus (18) (19) (20) ergiebt sich ferner, dass die Geschwindigkeit des Punktes auf dem inneren Grenzkreise ihr Maximum hat uud dann abnimmt, bis sie auf dem äusseren Grenzkreise ihr Minimum erreicht.

$$v_2 > v > v_1.$$

Wir bemerken noch, dass auf den Grenzkreisen der Winkel zwischen der Richtung der Geschwindigkeit und der Projektion des Radiusvektors 90° beträgt.

Da nämlich für $r = r_1$ und $r = r_2$:

$$\frac{dR}{dt} = \frac{1}{R} \sqrt{-\mu (r - r_1)(r - r_2)(r + r_{,,,})} = 0 \text{ und}$$

$$\frac{dR}{dt} = v \cos \alpha \text{ ist, so folgt: } \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Wir lassen nun den Punkt von dem als fest angenommenen äusseren Grenzkreise ausgehen.

$$r_0 = r_1; \; v_0 = v_1; \; \alpha_0 = \alpha_1 = \frac{\pi}{2}.$$

I. Ist $v_0 = 0$, so ergeben die Gleichungen (19) und (17), dass $r_2 = r_{,,,} = p$ ist.

Der innere Grenzkreis ist also in einen Punkt, den Fusspunkt des Lotes p, zusammengeschrumpft.

Der Punkt P gelangt dann in das Centrum des äusseren Grenzkreises mit einer Geschwindigkeit

$$v_2 = \sqrt{\mu (r_0 - p)}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Gleichungen (6b) und (6) ergeben ($v_0 = 0$):

$$R_0 v_0 \sin \alpha_0 = 2c_2 = 0$$

$$z\frac{dy}{dt} - y\frac{dz}{dt} = 0.$$

Durch Integration erhalten wir $y = az$ als Bahngleichung eine durch den Fusspunkt L gehende gerade Linie.

Die Constante a ist davon abhängig, an welcher Stelle des äusseren Grenzkreises P die Bewegung beginnt. Der Punkt P bewegt sich also auf dem durch den Anfangspunkt der Bewegung gelegten Diameter.

II. Lassen wir die Geschwindigkeit $v_0$ von 0 an wachsen, so entsteht ein innerer Grenzkreis, dessen Radius gleichzeitig mit $v_0$ wächst.

Betrachten wir in der Gleichung:
$v_0^2 = \mu(r_2 - r_{,,,})$ $v_0$, $r_2$ und $r_{,,,}$ als variabel, so haben wir:

$$2v_0\frac{dv_0}{dr_2} = \mu - \mu\frac{dr_{,,,}}{dr_2} \quad (21).$$

Der Differentialquotient $\frac{dr_{,,,}}{dr_2}$ ergiebt sich aus:
$-p^2 = r_1 r_2 - r_2 r_{,,,} - r_1 r_{,,,}$ (17) (wo $r_1$ und p konstant sind)
$\frac{dr_{,,,}}{dr_2} = \frac{r_1 - r_{,,,}}{r_1 + r_2}$ als ein positiver echter Bruch. ($r_2$ und $r_{,,,}$ wachsen also gleichzeitig.)

Dadurch wird (21):

$$2v_0\frac{dv_0}{dr_2} = \mu\left\{1 - \frac{r_1 - r_{,,,}}{r_1 + r_2}\right\} \text{ positiv.}$$

Mithin muss $r_2$ mit $v_0$ wachsen, bis der innere Grenzkreis sein Maximum, den äusseren Grenzkreis, erreicht hat.

Der Wert von $r_{,,,}$, wenn $r_2 = r_1 = r_0$ geworden ist, sei $r'_{,,,}$ und der von $v_0$ $V_0$.

Der Punkt ist für $r_2 = r_1 = r_0$ gezwungen, auf der Kreisperipherie zu bleiben. $r'_{,,,}$ ergiebt sich aus:

$$(17) \quad -p^2 = r_1 r_2 - r_2 r_{,,,} - r_1 r_{,,,} \text{ (wenn } r_1 = r_2 = r_0) \quad r'_{,,,} = \frac{r_0^2 + p^2}{2r_0}.$$

$$\text{Daher: } V_0 = \sqrt{\frac{\mu}{2}\left(\frac{r_0^2 - p^2}{r_0}\right)}. \quad (22)$$

Diese Gleichung drückt in der Form (22a) $\frac{V_0^2}{\sqrt{r_0^2 - p^2}} = \frac{\mu}{2}\left(\frac{\sqrt{r_0^2 - p^2}}{r_0}\right)$ aus, dass zur Hervorrufung der Kreisbewegung die Centrifugalkraft gleich der in die Ebene fallenden Kraftkomponente ist.

III. Wir halten jetzt den inneren Grenzkreis $r_2 = r_0$ fest und lassen von diesem den Punkt mit einer Geschwindigkeit $v_2 = v_0 > V_0$ ausgehen. Betrachten wir in:
$-p^2 = r_1 r_2 - r_2 r_{,,,} - r_1 r_{,,,}$ $r_2$ und p als konstant, so zeigt der Differentialquotient:

$$(23) \quad \frac{dr_{,,,}}{dr_1} = \frac{r_2 - r_{,,,}}{r_1 + r_2}, \text{ dass } r_1 \text{ und } r_{,,,} \text{ gleichzeitig wachsen.}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wenn also:

$v_2 = v_0 = V_0 = \sqrt{\mu (r_1 - r_{,,,})}$ von $V_0$ bis $\infty$ zunimmt, so wächst der Radius des äusseren Grenzkreises von $r_1 = r_2$ bis $\infty$. An dieser Grenze erreicht aber auch $r_{,,,}$ sein Maximum $r_2$, denn $r_1$ und $r_{,,,}$ wachsen gleichzeitig, und dadurch nähert sich

$$v_1 = \sqrt{\mu (r_2 - r_{,,,})} = \sqrt{\mu (r_0 - r_{,,,})} \text{ der Null.}$$

Nun haben wir aber in I gesehen, dass für $v_1 = 0$ geradlinige Bewegung erfolgt, also können wir schliessen:

Bei einer von $V_0 = \sqrt{\frac{\mu}{2}\left(\frac{r_0^2 - p^2}{r_0}\right)}$ an zunehmenden Anfangsgeschwindigkeit wird die zuerst kreisförmige Bahn immer gestreckter, sie nähert sich mehr und mehr der geradlinigen und erreicht sie für $v_0 = \infty$.

Wir bemerken noch, dass die Geschwindigkeit auf dem äusseren Grenzkreise $v_1 = \sqrt{\mu (r_2 - r_{,,,})}$ nur Werte annehmen kann, die zwischen 0 und $V_0 = \sqrt{\frac{\mu}{2}\left(\frac{r_0^2 - p^2}{r_0}\right)}$ liegen. Auf dem inneren Grenzkreise dagegen kann $v_2 = \sqrt{\mu (r_1 - r_{,,,})}$ nur Werte durchlaufen zwischen $V_0 = \sqrt{\frac{\mu}{2}\left(\frac{r_0^2 - p^2}{r_0}\right)}$ und $\infty$.

§ 4.

## Abhängigkeit der Grenzkreise von der Richtung der Anfangsgeschwindigkeit.

Im vorigen § hatten wir $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ festgehalten und wollen jetzt $v_0$ und $r_0$ als konstant ansehn, mithin $r_1$ und $r_2$ nur als Funktion von $\alpha_0$ betrachten. Die zwischen $\alpha_0$, $r_1$ und $r_2$ bestehenden Relationen werden ausgedrückt durch die Wurzeln der Gleichung $\varphi(r) = 0$. (cf. 12 bis 15.)

Da $\alpha_0$ nur in $c_2$ vorkommt, können wir abkürzend schreiben:

$$r_1 = a + b \cos \frac{\pi - \omega}{3}; \quad r_2 = a + b \cos \frac{\pi + \omega}{3}; \quad \cos \omega = a_1 + b_1 \sin^2 \alpha_0.$$

Durch Differentiation folgt:

$$\frac{d r_1}{d \omega} = \frac{b}{3} \sin \frac{\pi - \omega}{3}; \quad \frac{d r_2}{d \omega} = -\frac{b}{3} \sin \frac{\pi + \omega}{3}; \quad \frac{d \omega}{d \alpha_0} = -2 b_1 \frac{\sin \alpha_0 \cos \alpha_0}{\sin \omega}.$$

Daraus können wir nun folgende Schlüsse ziehen:

1) $\sin \alpha_0 . \cos \alpha_0$ ist positiv, wenn

$$0 < \alpha_0 < \frac{\pi}{2} \text{ oder: } \pi < \alpha_0 < \frac{3\pi}{2} \text{ ist.}$$

$$\frac{d r_1}{d \alpha_0} = -\frac{2 b b_1}{3} \sin \frac{\pi - \omega}{3} . \frac{\sin \alpha_0 \cos \alpha_0}{\sin \omega}; \quad \frac{d r_2}{d \alpha_0} = +\frac{2 b b_1}{3} \sin \frac{\pi + \omega}{3} . \frac{\sin \alpha_0 \cos \alpha_0}{\sin \omega}.$$

Mit wachsendem $\alpha_0$ wird der Radiusvektor des äusseren Grenzkreises kleiner, der des inneren grösser.



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2) $\sin \alpha_0 . \cos \alpha_0$ ist negativ, wenn:

$$\frac{\pi}{2} < \alpha_0 < \pi \text{ oder: } \frac{3\pi}{2} < \alpha_0 < 2\pi.$$

$$\frac{d r_1}{d \alpha_0} = + \frac{2 b b_1}{3} \sin \frac{\pi - \omega}{3} . \frac{\sin \alpha_0 \cos \alpha_0}{\sin \omega}; \quad \frac{d r_2}{d \alpha_0} = - \frac{2 b b_1}{3} \sin \frac{\pi + \omega}{3} . \frac{\sin \alpha_0 \cos \alpha_0}{\sin \omega}$$

Mit wachsendem $\alpha_0$ wächst der äussere Grenzkreis, der innere wird kleiner.

3) $\sin \alpha_0 . \cos \alpha_0$ verschwindet, wenn:

$$\text{I. } \alpha_0 = 0 \text{ oder} = \pi \text{ ferner: II. } \alpha_0 = \frac{\pi}{2} \text{ oder} = \frac{3\pi}{2} \text{ ist.}$$

I. hat zur Folge $c_2 = 0$; wir bekommen nach § 3 geradlinige Bewegung. $r_2$ erreicht sein Minimum p und $r_1$ sein Maximum.

II. ist $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ oder $= \frac{3\pi}{2}$, so haben wir das Maximum von $r_2$ und das Minimum von $r_1$. Der Punkt beginnt seine Bewegung je nach der Grösse von $v_0$ entweder auf dem äusseren oder inneren Grenzkreise.

Beide Kreise fallen zusammen, wenn $v_0 = \sqrt{\mu \left(\frac{r_0^2 - p^2}{2 r_0}\right)}$ gewählt war (cf. § 3).

§ 5.

## Die Integrationsgrenzen.

Wir haben bis jetzt die beiden speziellen Fälle der geradlinigen und kreisförmigen Bewegung des Punktes betrachtet und gesehen, dass er seine Bahn innerhalb eines Kreisringes beschreibt.

Auf den beiden Grenzkreisen hat die Constante $c_2$ den einfachen Wert $\frac{\sqrt{(r_1^2 - p^2)}\ v_1^2}{2}$; denn $\alpha_1$ ist $= \frac{\pi}{2}$. Da der Punkt den inneren und den äusseren Grenzkreis bei seiner Bewegung erreicht, so ist es zunächst gleichgültig, von welchem Kreise aus wir die Bahn des Punktes verfolgen.

Nun liegt aber die Geschwindigkeit auf dem äusseren Grenzkreise (wie wir gesehen haben) zwischen 0 und $\sqrt{\mu \left(\frac{r_1^2 - p^2}{2 r_1}\right)}$, hat also immer einen endlichen Wert, während auf dem inneren Grenzkreise die Geschwindigkeit von $\sqrt{\mu \left(\frac{r_2^2 - p^2}{2 r_2}\right)}$ bis $\infty$ wachsen kann.

Deshalb wollen wir die Bewegung des Punktes von dem Augenblicke an betrachten, wo er zum ersten Male den äusseren Grenzkreis verlässt und zwar mit einer Geschwindigkeit $v_1 = \sqrt{\mu (r_2 - r_{,,,})}$ senkrecht zum Radiusvektor.

Die unteren Integrationsgrenzen sind dann: $t_1$, $r_1$ und $\phi_1$, und zwar nimmt mit wachsender Zeit r ab, während $\phi$ wächst.

Danach bestimmen sich auch die Vorzeichen, welche wir unter dem $\int$ der Wurzel zu geben haben.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Also lauten die am Ende von § 1 aufgestellten Integrale folgendermassen:

$$(24) \qquad \int_{r_1}^{r} \frac{r\,dr}{\sqrt{-\mu(r-r_1)(r-r_2)(r+r_{,,,})}} = -\int_{t_1}^{t} dt.$$

$$\int_{r_1}^{r} \frac{2c_2 r\,dr}{(r^2-p^2)\sqrt{-\mu(r-r_1)(r-r_2)(r+r_{,,,})}} = -\int_{\phi_1}^{\phi} d\phi.$$

Das letzte Integral zerlegen wir nach der identischen Gleichung:

$$\frac{r}{r^2-p^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(r+p)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(r-p)} \text{ in:}$$

$$\int_{r_1}^{r} \frac{c_2\,dr}{(r+p)\sqrt{-\mu(r-r_1)(r-r_2)(r+r_{,,,})}} + \int_{r_1}^{r} \frac{c_2\,dr}{(r-p)\sqrt{-\mu(r-r_1)(r-r_2)(r+r_{,,,})}}$$

$$= -\int_{\phi_1}^{\phi} d\phi \cdot (24).$$

§ 6.

## Zusammenhang zwischen Zeit und Radiusvektor. Zurückführung des Integrals auf die Legendre'schen Normalformen I. und II. Gattung. Discussion der gefundenen Werte.

Die Reduktion von:

$$\int_{r_1}^{r} \frac{r\,dr}{\sqrt{-\mu(r-r_1)(r-r_2)(r_1+r_{,,,})}} = -\int_{t_1}^{t} dt \text{ auf die Formen:}$$

$$\int_{0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = F(\varphi) \text{ und } \int_{0}^{\varphi} \Delta\varphi\, d\varphi = E(\varphi)$$

verlangt eine Aenderung der Integrationsgrenzen.

Durch die Substitution:

$$r = r_1 \cos\varphi_1; \quad r_2 = r_1 \cos\beta; \quad r_3 = r_1 \cos\gamma \qquad (25)$$



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

würden wir ein Integral mit den Grenzen 0 und $\varphi_1$ bekommen; und dies führt uns auf die Form: $A \,.\, E(\varphi) + B \,.\, F(\varphi)$, wenn wir setzen:

$$(26) \quad \sin^2\varphi = \frac{1-\cos\varphi_1}{1-\cos\beta}\,;\; k^2 = \frac{1-\cos\beta}{1+\cos\gamma} \quad (26\,a)$$

$$(27) \quad \cos^2\varphi = \frac{\cos\varphi_1 - \cos\beta}{1-\cos\beta}\,;\; \triangle^2\varphi = \frac{\cos\varphi_1 + \cos\gamma}{1+\cos\gamma} \quad (27\,a)$$

$$\frac{d\varphi}{\triangle\varphi} = \frac{d\varphi_1 \,.\, \sin\varphi_1}{2(1-\cos\beta)}\sqrt{\frac{(1-\cos\varphi_1)(1+\cos\gamma)}{(\cos\varphi_1-\cos\beta)(\cos\varphi_1+\cos\gamma)}}$$

$$\triangle\varphi\, d\varphi = \frac{d\varphi_1 \,.\, \sin\varphi_1}{2(1-\cos\beta)}\sqrt{\frac{(1-\cos\varphi_1)(\cos\varphi_1+\cos\gamma)}{(\cos\varphi_1-\cos\beta)(1+\cos\gamma)}}$$

Entsprechende Werte sind:

$$\varphi = 0\,; \quad \varphi_1 = 0\,; \quad \varphi = \frac{\pi}{2}\,; \quad \varphi_1 = \beta \quad (28)$$

Setzen wir nun wieder r statt $\varphi_1$, so erhalten wir (da $dr = -\, r_1 \sin\varphi_1\, d\varphi_1$):

$$F(\varphi) = -\frac{1}{2}\int_{r_1}^{r} \frac{\sqrt{\mu(r_1+r_{,,,})}\, dr}{\sqrt{\mu(r_1-r)(r-r_2)(r+r_{,,,})}}$$

$$(29)$$

$$E(\varphi) = -\frac{1}{2}\int_{r_1}^{r} \frac{(r+r_{,,,})\, dr}{\sqrt{\mu(r_1-r)(r-r_2)(r+r_{,,,})}} \cdot \frac{\sqrt{\mu(r_1+r_{,,,})}}{(r_1+r_{,,,})}\,.$$

Also wird:

$$t - t_1 = \frac{2\,(r_1+r_{,,,})}{\sqrt{\mu(r_1+r_{,,,})}}\, E(\varphi) - \frac{2\, r_{,,,}}{\sqrt{\mu(r_1+r_{,,,})}}\, F(\varphi). \quad (30)$$

Statt $\varphi$ führen wir jetzt die Grösse x ein durch die Gleichung:

$$x = \frac{\pi}{2K}\, F(\varphi) \quad (31)$$ und für den Modul k die Grösse:

$$q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}\,.$$

$$K = F^1 = F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,, \quad K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}}\,;\; k^2 + k'^2 = 1.$$

Wir schicken noch voraus die Bezeichnungen:

$$\vartheta(x) = 1 - 2\,q\cos 2\,x + 2\,q^4\cos 4\,x - \ldots;\quad \zeta(x) = \frac{d\{\log\vartheta(x)\}}{d\,x} = \frac{\vartheta'(x)}{\vartheta(x)}$$

$$E\left(\frac{\pi}{2}\right) = E;\; F(\varphi) = u \text{ und bemerken, dass:}$$

$$\zeta\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\,\frac{2\,q\sin 2\,x - 4\,q^4\sin 4\,x + 6\,q^9\sin 6\,x - \ldots}{1 - 2\,q\cos 2\,x + 2\,q^4\cos 4\,x - 2\,q^9\cos x + \ldots}$$

$$\left(x = \frac{\pi}{2}\right)$$

verschwindet.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Entsprechende Werte sind nach Gleichung (31)

$$x = \frac{\pi}{2}; \quad \varphi = \frac{\pi}{2}; \quad x = 0; \quad \varphi = 0.$$

Weil $E(\varphi) = \frac{\pi}{2K}\zeta(x) + \frac{E}{K} \cdot \frac{2Kx}{\pi}$ ist, so wird die Gleichung (30) zu:

$$t - t_1 = C\left\{\frac{\pi}{2K}\zeta(x) + E\frac{2x}{\pi}\right\} - D \cdot \frac{2Kx}{\pi} \qquad (32)$$

$$\text{wo: } C = 2\sqrt{\frac{r_1 + r_{,,,}}{\mu}}; \; D = \frac{2r_{,,,}}{\sqrt{\mu(r_1 + r_{,,,})}}; \qquad (33)$$

Der Punkt möge nun, um vom äusseren zum inneren Kreise zu gelangen, die Zeit T gebrauchen. Aus den Gleichungen (25) und (26) folgt dann für $r = r_2$, dass $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist.

Dann bekommen wir:

(34) $T = C.E - D.K$, und es wird folglich (32) zu:

$$(35) \quad t - t_1 = C\frac{\pi}{2K}\zeta(x) + \frac{2x}{\pi}T.$$

Hierzu nehmen wir noch die aus (25) (26) (27) folgende Relation:

$$(36) \quad r = r_1 \cos^2 \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} + r_2 \sin^2 \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}; \; \varphi = \operatorname{am} u = \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}.$$

Daraus ergeben sich folgende Resultate für die Bewegung des Punktes:

1) Der Radiusvektor nimmt immer denselben Wert an, wenn wir x um ganze Vielfache von $\pi$ vermehren.

Fügen wir in (35) ebenfalls zu x ganze Vielfache von $\pi$ hinzu und bemerken, dass $\zeta(x + n\pi) = \zeta(x)$ ist, so sehen wir, dass dadurch die Zeit um ganze Vielfache von 2 T wächst.

Der materielle Punkt war aber nach der Zeit T vom äusseren zum inneren Grenzkreise gekommen und ist (wie eben gezeigt) innerhalb 2 T wieder zum Ausgangskreise zurückgelangt.

Da sich dies stets wiederholt, so haben wir den Satz:

Die Teile der Bahn, welche zwischen je zwei aufeinander folgenden Kulminationen liegen, werden in derselben Zeit durchlaufen.

2) Die Grösse des Radiusvektor ändert sich auch nicht, wenn wir x mit $-x$ vertauschen. Die Funktion $\zeta$ ist aber eine ungerade, also: $\zeta(-x) = -\zeta(x)$.

Für den Uebergang von $+x$ in $-x$ wird daher nach (35) $t - t_1$ negativ. Es sei nun $t'_1$ irgend ein Wert von $t - t_1$ zwischen 0 und T, so hat also r dieselbe Grösse zu den Zeiten:

$$t'_1; \; -t'_1; \; 2T - t'_1; \; 2T + t'_1 \; \ldots \; 2nT \pm t'_1$$

In Worten:

Der materielle Punkt braucht genau soviel Zeit, um von einer beliebigen Stelle seiner Bahn den nächsten Grenzkreis zu erreichen wie, um von diesem Grenzkreise nach einem Orte zu gelangen, der mit der Ausgangsstelle denselben Radiusvektor hat.

Oder:

Die zwischen zwei (den Kulminationskreisen concentrischen) Kreisen liegenden Bahnstrecken werden in derselben Zeit durchlaufen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 7.

## Berechnung von T.
## Ausführung eines Zahlenbeispiels für geradlinige Bewegung.
## Berechnung von r.

Die Grösse von T lässt sich nun folgendermassen aus $r_1$, $r_2$ und $r_{,,,}$ berechnen. Es ist:

$$(34)\quad T = C\,.\,E - D\,.\,K;\quad \begin{matrix} C = 2\sqrt{\dfrac{r_1 + r_{,,,}}{\mu}}; \\ D = \dfrac{2 r_{,,,}}{\sqrt{\mu\,(r_1 + r_{,,,})}} \end{matrix} \quad (33)$$

Durch $\vartheta$-Funktionen ausgedrückt ist:

$$(37)\quad K = \frac{\pi}{2}\,\vartheta^2_3(0) = \frac{\pi}{2}\,(1 + 2q + 2q^4 + \ldots 2q^{n^2} + \ldots)$$

$$\vartheta_3(x) = 1 + 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x + \ldots 2q^{n^2}\cos 2nx + \ldots).$$

Die Grösse q kann man aus dem Modul k finden mit Hilfe der Gleichung (Jacob. fund. pag. 148.):

$$(38)\quad q = \frac{k^2}{16k'}\left\{k^{(2)'}\right\}^{3/2}\left\{k^{(4)'}\right\}^{3/4}\left\{k^{(8)'}\right\}^{3/8}\ldots$$

$$\text{wo } k^{(2)'} = \frac{\sqrt{k'}}{\frac{1+k'}{2}} = \frac{2k'}{1+k'};\quad k^{(4)'} = \frac{2\sqrt{k^{(2)'}}}{1+k^{(2)'}}\ldots$$

Aus den Gleichungen (25) und (26a) folgt: $k^2 = \dfrac{r_1 - r_2}{r_1 + r_{,,,}}$; $k'^2 = 1 - k^2 = \dfrac{r_2 + r_{,,,}}{r_1 + r_{,,,}}$ (39)

Zwischen E und K ferner besteht die Relation: $\zeta'(0) = \left(\dfrac{2}{\pi}\right)^2 K\,(K - E)$ (40), also: $E = K - \dfrac{\pi^2}{4K}\,\zeta'(0)$ (41); $\zeta(x) = 2\,\dfrac{2q\sin 2x - 4q^4\sin 4x + \ldots}{1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - \ldots}$ oder in der zur Differentiation geeigneteren Form:

$$\zeta(x) = 2\left(\frac{2q}{1-q^2}\sin 2x + \frac{2q^2}{1-q^4}\sin 4x + \ldots\right) \quad (42)$$

$$\zeta'(0) = 8\left(\frac{q}{1-q^2} + \frac{2q^2}{1-q^4} + \frac{3q^3}{1-q^6} + \ldots\right) \quad (43)$$

Mithin ist E und K aus $r_1$, $r_2$ und $r_3$, also auch aus $r_0$, $v_0$ und $\alpha_0$ berechenbar.

Um die halbe Schwingungsdauer $T_0$ für die geradlinige Bewegung des Punktes zu bestimmen (wo also der Radius des inneren Grenzkreises = 0 ist), haben wir in den Ausdrücken C, D und $k^2$; $r_2 = r_{,,,} = p$ zu setzen, wie sich dies aus § 3 ergab als Bedingung der geradlinigen Bewegung.

Wir wollen indessen noch einmal zurückgehen auf:

$$(24)\quad \int_{r_1}^{r} \frac{r\,dr}{\sqrt{-\mu\,\varphi(r)}} = +\int_{t_1}^{t} dt.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es vereinfacht sich $\varphi(r)$, wenn wir die Geschwindigkeit $v_1 = 0$ (oder, was dasselbe ist, $\alpha_0 = 0$) setzen.

$$4c_2^2 = (r_1^2 - p^2)v_1^2 = 0; \quad c_1 = v_1^2 + \mu r_1 = \mu r_1; \quad \varphi(r) = (r+p)(r-p)(r-r_1).$$

$$\int_{r_1}^{r} \frac{r\,dr}{\sqrt{\mu(r_1 - r)(r+p)(r-p)}} = -\int_{t_1}^{t} dt \qquad (24a)$$

ist also ein elliptisches Integral geblieben, und der Punkt gebraucht, um von der Peripherie des Grenzkreises in das Centrum zu gelangen, die Zeit:

$$(34a) \quad T_0 = C_0E_0 - D_0K_0;\ C_0 = 2\sqrt{\frac{r_1+p}{\mu}}; \qquad D_0 = \frac{2p}{\sqrt{\mu(r_1+p)}}.$$

$E_0$ und $K_0$ entsprechen dem Werte: $k_0^2 = \frac{r_1 - p}{r_1 + p}$.

Es zeigt sich also hier ein Unterschied von dem in (Edler dissert. Halle 1882) behandelten Spezialfalle, wo das Centrum der Anziehung in der Bewegungsebene selbst liegt.

Dort ergab sich: $T' = \sqrt{\frac{4R_1}{\mu}}$, wo also nach unserer Bezeichnungsweise $R_1$ den Radius des Grenzkreises bedeutet und $\frac{\mu}{2}$ die Centralkraft.

Wir kommen zu demselben Resultate, wenn wir in (24a) $p = 0$ setzen.

$$\int_{r_1}^{r} \frac{r\,dr}{\sqrt{\mu(r_1 - r)(r+p)(r-p)}} \text{ hört dann auf,}$$

ein elliptisches Integral zu sein, und wir bekommen:

$$\int_{r_1}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\mu(r_1 - r)}} = -\int_{t_2}^{t} dt.$$

Die Integration ergiebt:

$$\underset{(p=0)}{T'} = 2\sqrt{\frac{r_1}{\mu}} \text{ oder} = 2\sqrt{\frac{R_1}{\mu}}; \text{ denn}$$

für $p = 0$ ist $R_1 = r_1$.

Es ist nun interessant, zu sehen, in welchem Verhältnisse $T_0$ und $T'$ zu einander stehen, d. h. wie sich die Schwingungsdauer ändert, wenn die Centralkraft das eine Mal ausserhalb der Ebene, das andere Mal in der Ebene (bei derselben Intensität) ihren Sitz hat. Zu diesem Zwecke wollen wir ein einfaches Zahlenbeispiel wählen, um zugleich auch die Formeln (33 bis 43) anzuwenden.

Wir setzen $r_2 = r_{,,,} = p = 1$; $r_1 = 2$; $\frac{\mu}{2} = 1$, so ist $R_1 = \sqrt{r_1^2 - p^2} = \sqrt{3}$, und wir bekommen:

$$\text{I.} \quad T'^2 = 2\sqrt{3}_{(p=0)}$$

$$\text{II.} \quad T_0^2 = \left(\sqrt{6}\,.\,E_0 - \frac{2}{\sqrt{6}}\,.\,K_0\right)^2_{(p=1)}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Das Material zur Berechnung der Grösse $E_0$ und $K_0$ liefern uns die Gleichungen (37 bis 43)

$$k_0^2 = \frac{r_1 - p}{r_1 + p}; \; q_0 = \frac{k_0}{16 k'_0} \left\{ k_0^{(2)'} \right\}^{3/2} \cdot \left\{ k_0^{(4)'} \right\}^{3/4} \cdot \ldots; \; k_0^{(2)'} = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}.$$

$$K_0 = \frac{\pi}{2} \vartheta^2_3(0)_0 = \frac{\pi}{4}(1 + 2 q_0 - 2 q_0^4 + \ldots)^2; \quad E_0 = K_0 - \frac{\pi^2}{4 K_0} \zeta'(0)_0.$$

$$\zeta'(0, q_0) = 8 \left( \frac{q_0}{1 - q_0^2} + \frac{2 q_0^2}{1 - q_0^4} + \frac{3 q_0^3}{1 - q_0^6} \right).$$

Aus $k_0 = \sqrt{\frac{1}{3}}$ folgt: $q_0 = 0{,}0253025$ $q_0^2 = 0{,}0006402$; $q_0^3 = 0{,}00001619$. $q_0^4$ vernachlässigen wir also.

Ferner haben wir: $\log K_0 = 0{,}2389951$; $K_0 = 1{,}7337845$; $\zeta'(0) = 0{,}2131808$; $\log \zeta'(_0) = 9{,}3287465 - 10$ $E_0 = 1{,}4297022$; $\log E_0 = 0{,}1552455$.

Setzen wir nun die so erhaltenen Werte in II ein, so wird:

$$T_0 = \frac{1}{\sqrt{6}} \left\{ 6 E_0 - 2 K_0) \right\} = 2{,}08641,$$

ferner:

$$T' = \sqrt[4]{12} = 1{,}86121.$$

$$\frac{T_0}{T'} = 1{,}1210; \quad T_0 - T' = 0{,}2252.$$

Durch ganze Zahlen ausgedrückt stehen mithin $T_0$ und $T'$ in dem Verhältniss 28 : 25.

Wenn wir nun, um für $T_0$ und $T'$ grössere Zahlen zu bekommen, $r_1 = 20$ und $p = 10$ annehmen, so bleiben $k_0$, $K_0$ und $E_0$ ungeändert; denn: $k_0^2 = \frac{20 - 10}{20 + 10} = \frac{1}{3}$ etc.

Dann wird:

$$T_0 = \frac{1}{\sqrt{60}} (60 E_0 - 20 K_0) = 22{,}6501.$$

$T' = \sqrt[4]{1200} = 5{,}88566.$

$$\frac{T_0}{T'} = 3{,}84835 = \frac{481}{125} \text{ also ca. } \frac{4}{1}.$$

$$T_0 - T' = 16{,}7645.$$

Geht also der materielle Punkt ohne Anfangsgeschwindigkeit unter dem Einflusse einer konstanten in der Bewegungsebene (im Punkte L) liegenden Centralkraft (1) den Weg 17,3205 (1,732) bis L, so kommt er um 16,7645 (0,2252) Zeiteinheiten früher an, als wenn dieselbe Kraft in der Entfernung 10 (1) senkrecht über L sich befände.

Es erübrigt nun noch, anzugeben, wie sich der Radiusvektor berechnen lässt, wenn eine beliebige Zeit $t < t_1 + T$ gegeben ist.

Wir benutzen die Gleichungen:

$$(34) \quad T = C E - D . K; \; C = 2 \sqrt{\frac{r_1 + r_{,,,}}{\mu}}, \quad D = \frac{2 r_{,,,}}{\sqrt{\mu (r_1 + r_{,,,})}}, \qquad (33)$$

$$(35) \quad t - t_1 = C \frac{\pi}{2K} \zeta(x) + \frac{2x}{\pi} T,$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$(42)\quad \zeta(x) = 4\left\{\frac{q}{1-q_2}\sin 2x + \frac{q^2}{1-q^4}\sin 4x + \ldots\right\}$$

$$0 < x < \frac{\pi}{2}$$

und die aus (36) folgende:

$$(36a)\quad r = r_1 - (r_1 - r_2)\sin^2 \operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}.$$

Da in (35) $t - t_1$ gegeben, ferner $r_1$, $r_2$ und $r_{,,,}$ als Wurzeln der Gleichung $\varphi(r) = 0$ aus $r_0\, v_0\, \alpha_0$, die Grössen q, E, K, T aus $r_1\, r_2\, r_{,,,}$ auf die vorhin angegebene Weise gefunden werden können, so hat man nur noch sin 2x etc. in Reihen zu entwickeln, um x finden zu können.

$$\sin 2x = 2x - \frac{8x^3}{3!} + \ldots$$

$$\sin 4x = 4x - \frac{64x^3}{3!} + \ldots$$

Den erhaltenen Wert von x hat man dann in (36a) einzusetzen, wo $\sin^2 \operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}$ bestimmt ist durch die Reihe:

$$\sin^2 \operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)} = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{2\sqrt[4]{q}\sin x - 2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x + \ldots}{1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - \ldots}$$

Mit r haben wir aber nur den Parallelkreis gefunden, auf dem sich der Punkt zur Zeit $t - t_1$ befindet, oder seine Breite, wenn wir L (das Zentrum des Kreises) als Pol betrachten. Wir haben also noch den Zusammenhang des Längenwinkels $\phi$ mit der Zeit zu bestimmen.

§ 8.

## Zusammenhang zwischen der Zeit und dem Längenwinkel $\phi$. Reduktion des Integrals auf die Legendre'sche und Jacobi'sche Normalform. Diskussion von $\Psi$.

Wir hatten am Ende von § 5 (24):

$$\int_{r_1}^{r}\frac{c_2\,dr}{(r+p)\sqrt{-\mu\varphi(r)}} + \int_{r_1}^{r}\frac{c_2\,dr}{(r-p)\sqrt{-\mu\varphi(r)}} = -\int_{\phi_1}^{\phi} d\phi.$$

Ausserdem ist nach (29) § 6:

$$\frac{c_2\,dr}{\sqrt{-\mu\varphi(r)}} = -\frac{2c_2}{\sqrt{\mu(r_1 + r_{,,,})}}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}\quad (43)$$

und (36a) $r = r_1 - (r_1 - r_2)\sin^2\varphi$.

Also ist:

$$\begin{aligned} r + p &= r_1 - (r_1 - r_2)\sin^2\varphi + p \\ r - p &= r_1 - (r_1 - r_2)\sin^2\varphi - p \end{aligned}\quad (36\,b)$$

daher wird:

$$\frac{c_2\,dr}{(r+p)\sqrt{-\mu\varphi(r)}} = -\frac{2c_2\,d\varphi}{\sqrt{\mu(r_1 + r_{,,,})}\left\{(r_1 + p) - (r_1 - r_2)\sin^2\varphi\right\}\Delta\varphi}.$$



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Führen wir nun (nach Durège) bei der Legendre'schen Normalform das Zeichen $\Pi_1$ ein zum Unterschied von der Jacobi'schen, setzen also:

$$\Pi^1(\varphi,n) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\,\Delta\varphi}, \text{ so bekommnn wir:}$$

$$\int_{r_1}^{r} \frac{c_2\,dr}{(r+p)\sqrt{-\mu\varphi(r)}} + \int_{r_1}^{r} \frac{c_2\,dr}{(r-p)\sqrt{-\mu\varphi(r)}} = -\int_{\psi_1}^{\psi} d\psi =$$

$$-\frac{2c_2}{\sqrt{\mu\,(r_1+r_{,,,})}}\left[\frac{1}{(r_1+p)}\,\Pi_1(\varphi,n_1) + \frac{1}{(r_1-p)}\,\Pi_1(\varphi,n_2)\right] \quad (44)$$

Hier ist: $n_1 = -\frac{r_1-r_2}{r_1+p}$; $n_2 = -\frac{r_1-r_2}{r_1-p}$; $n_1$ und $n_2$ sind echte Brüche und zwar: $n_2 < n_1$.

Ferner ist $n_1 = -\frac{r_1-r_2}{r_2+p} < -\frac{r_1-r_2}{r_1+r_{,,,}}$, weil $r_{,,,} > p$ ist.

Da aber der letzte Bruch $= -k^2$ ist, folglich $n_1$ und $n_2$ zwischen den Grenzen $-1$ und $-k^2$ liegen, so setzen wir: $\frac{-n_1}{k^2} = \sin^2 \operatorname{am} b'$, wo $b'$ den Jacobi'schen Parameter bedeutet, der hier in der Form $i\,b_1 + K$ auftritt. $0 < b_1 < K'$. Da nämlich: $\sin \operatorname{am}(iK'+K) = \frac{1}{k}$ und $\sin \operatorname{am} K = 1$ ist, so entspricht dies den Grenzbedingungen für $n_1$.

Verfahren wir bei $n_2$ auf dieselbe Weise, so erhalten wir:

$$(45)\quad -n_1 = k^2 \sin^2 \operatorname{am}(i\,b_1 + K) = k^2 \sin^2 \operatorname{coam} i\,b_1$$
$$-n_2 = k^2 \sin^2 \operatorname{am}(i\,b_2 + K) = k^2 \sin^2 \operatorname{coam} i\,b_2.$$
$$-1 < n_1 < -k^2;\quad -1 < n_2 < -k^2;\quad 0 < b_1 < K';\quad 0 < b_2 < K'.$$

Berücksichtigen wir die zwischen den beiden Normalformen geltende Relation:

$$\Pi_1(\varphi,n) = F(\varphi) + \frac{\operatorname{tg}\beta}{\Delta\beta}\,\Pi(\varphi,\beta), \text{ wo } n = -k^2\sin^2\beta \text{ und}$$

$$\Pi(\varphi,\beta) = \int_0^{\varphi} \frac{k^2 \sin\beta\cos\beta\,\Delta\beta\,\sin^2\varphi\,d\varphi}{(1-k^2\sin^2\beta\sin^2\varphi)\,\Delta\varphi} \text{ ist, so geht (44) über in (46):}$$

$$\psi - \psi_1 = \frac{2c_2}{\sqrt{\mu(r_1+r_{,,,})}}\left[\frac{F(\varphi)}{r_1+p} + \frac{\operatorname{tg}\alpha_1 \,.\, \Pi(\varphi,\alpha_1)}{\Delta\alpha_1\,(r_1+p)} + \frac{F(\varphi)}{r_1-p} + \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 \,.\, \Pi(\varphi,\alpha_2)}{\Delta\alpha_2\,(r_1-p)}\right].$$

Hier ist: $F(\varphi) = \frac{2Kx}{\pi}$; $\varphi = \operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}$.

$$\alpha_1 = \operatorname{am} b' = \operatorname{am}\frac{2K}{\pi}\,a' = \operatorname{am}(i\,b_1 + K) = \operatorname{am}\frac{2K}{\pi}\left(\frac{iK'}{K}\,a_1 + \frac{\pi}{2}\right).$$

Daher ist $b_1 = \frac{2K'}{\pi}\,a_1$. $\quad 0 < b_1 < K'$, $\quad 0 < a_1 < \frac{\pi}{2}$, ebenso:

$$\alpha_2 = \operatorname{am} b'' = \operatorname{am}\frac{2K}{\pi}\,a'' = \operatorname{am}(i\,b_2 + K) = \operatorname{am}\frac{2K}{\pi}\left(i\,\frac{K'}{K}\,a_2 + \frac{\pi}{2}\right).$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$b_2 = \frac{2K'}{\pi} a_2 \qquad \begin{matrix} 0 > b_2 > K' \\ 0 > a_2 > \frac{\pi}{2} \end{matrix}.$$

Für $\alpha_2$ stellt sich die Rechnung ebenso wie für $\alpha_1$, nur haben wir überall statt $+p$ $-p$ zu setzen und umgekehrt; denn $n_1 = -\frac{r_1 - r_2}{r_1 + p}$ und $n_2 = -\frac{r_1 - r_2}{r_1 - p}$.

Wir behandeln daher nur den mit $\Pi(\varphi, \alpha_1)$ multiplizierten Ausdruck und setzen:

$$\frac{2c_2}{\sqrt{\mu(r_1 + r_{,,,})}} \cdot \frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\Delta\alpha_1 (r_1 + p)} = S_1 \quad (48).$$

Wir bemerken, dass nach (45): $\sin^2 \operatorname{am}(i b_1 + K) = \sin^2\alpha_1 = -\frac{n_1}{k^2}$ ist.

$$\text{Daher: } \sin\alpha_1 = \sqrt{\frac{r_1 + r_{,,,}}{r_1 + p}}; \quad k^2 = \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_{,,,}} \quad n_1 = -\frac{r_1 - r_2}{r_1 + p}$$

$$\cos\alpha_1 = \sqrt{\frac{p_1 - r_{,,,}}{r_1 + p}}. \quad (49)$$

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \sqrt{\frac{r_1 + r_{,,,}}{p - r_{,,,}}}.$$

$$\Delta\alpha_1 = \sqrt{1 - k^2 \sin^2\alpha_1} = \sqrt{\frac{r_2 + p}{r_1 + p}},$$

$$\text{folglich: } \frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\Delta\alpha_1} = \sqrt{\frac{(r_1 + r_{,,,})(r_1 + p)}{(p - r_{,,,})(r_2 + p)}}$$

$$= i\sqrt{\frac{(r_1 + r_{,,,})(r_1 + p)}{(r_2 + p)(r_{,,,} - p)}}$$

$$\text{und } S_1 = i \cdot \frac{2c_2}{\sqrt{\mu(r_1 + p)(r_2 + p)(r_{,,,} - p)}} \quad (50)$$

$$\text{ebenso } S_2 = i \cdot \frac{2c_2}{\sqrt{\mu(r_1 - p)(r_2 - p)(r_{,,,} + p)}} \quad (51).$$

Setzen wir ferner in dem Ausdruck: $\varphi(r) = (r - r_1)(r - r_2)(r + r_{,,,}) = (r^2 - p^2)\left(\frac{c_1}{\mu} - r\right) + \frac{4c_2^2}{\mu}$; $r = +p$ und dann $r = -p$, so wird, da $r_1 > r_2 > r_{,,,} > p$ ist:

$$\begin{aligned} (r_1 - p)(r_2 - p)(r_{,,,} + p) &= \frac{4c_2^2}{\mu} \\ (r_1 + p)(r_2 + p)(r_{,,,} - p) &= \frac{4c_2^2}{\mu} \end{aligned} \quad (52)$$

und daher: $S_1 = S_2 = i$. (53)

Ferner ist:

$$(49a) \quad \sin\operatorname{am}(b_1, k') = -\frac{i \operatorname{cotg}(i b_1 + K)}{k'} = -i\frac{\operatorname{cotg}\alpha_1}{k'}$$



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\cos \operatorname{am}(b_1, k') = \frac{\Delta \alpha_1}{k' \sin \alpha_1} = \sqrt{\frac{r_2 + p}{r_2 + r_{,,,}}} \quad (\text{cf. } 49)$$

$$\Delta \operatorname{am}(b_1, k') = \frac{1}{\sin \alpha_1}; \quad k'^2 = \frac{r_2 + r_{,,,}}{r_1 + r_{,,,}}$$

Mit Berücksichtigung von (49) wird, wenn wir $\operatorname{am}(b_1, k') = \alpha'$ setzen:

$$\sin \alpha' \,.\, \cos \alpha' \,.\, \underset{\text{mod. } k'}{\Delta \alpha'} = \sqrt{\frac{(r_1 + p)(r_2 + p)(r_{,,,} - p)}{(r_1 + r_{,,,})(r_2 + r_{,,,})(r_2 + r_{,,,})}}$$

und ebenso: $\sin \alpha'' \,.\, \cos \alpha'' \,.\, \underset{\text{mod. } k'}{\Delta \alpha''} = \sqrt{\frac{(r_1 - p)(r_2 - p)(r_{,,,} + p)}{(r_1 + r_{,,,})(r_2 + r_{,,,})(r_2 + r_{,,,})}}$.

Wenden wir auf diese Gleichungen ebenfalls (52) an, so folgt:

$$\sin \alpha' \cos \alpha' \Delta \alpha' = \sin \alpha'' \cos \alpha'' \underset{\text{mod. } k'}{\Delta \alpha''} \quad (54).$$

Da nach (53) $S_1 = S_2 = i$ ist, so haben wir:

$$(55)\ \phi - \phi_1 = \frac{4 c_2 r_1 F(\varphi)}{(r_1^2 - p^2) \sqrt{\mu (r_1 + r_{,,,})}} + i \left\{ \Pi(\varphi, \alpha_1) + \Pi(\varphi, \alpha_2) \right\}$$

Es ist nun:

$$\Pi(\varphi, \alpha) = x \,.\, \zeta(a) + \tfrac{1}{2} \log \frac{\vartheta(x - a)}{\vartheta(x + a)}.$$

Wir hatten (46):

$$\alpha_1 = \operatorname{am}(i b_1 + K) = \operatorname{am} \frac{2K}{\pi} \left( \frac{iK'}{K} a_1 + \frac{\pi}{2} \right).$$

Entsprechende Werte sind also:

$$b_1 = 0 \quad a_1 = 0 \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$b_1 = K' \quad a_1 = \frac{\pi}{2} \quad \alpha_1 = \arcsin \frac{1}{k}.$$

Mithin erhalten wir:

$$(56) \quad \phi - \phi_1 = \frac{2 r_1}{(r_1^2 - p^2)} \cdot \frac{2 c_2 \,.\, 2 K x}{\pi \sqrt{\mu (r_1 + r_{,,,})}}$$

$$+ i x \left\{ \zeta \left( \frac{iK'}{K} a_1 + \frac{\pi}{2} \right) + \zeta \left( \frac{iK'}{K} a_2 + \frac{\pi}{2} \right) \right\}$$

$$+ \frac{i}{2} \log \frac{\vartheta \left( \frac{iK'}{K} a_1 + \frac{\pi}{2} - x \right) \,.\, \vartheta \left( \frac{iK'}{K} a_2 + \frac{\pi}{2} - x \right)}{\vartheta \left( \frac{iK'}{K} a_1 + \frac{\pi}{2} + x \right) \,.\, \vartheta \left( \frac{iK'}{K} a_2 + \frac{\pi}{2} + x \right)}$$

Zur Abkürzung setzen wir:

$$N = \frac{4 r_1 c_2 K}{(r_1^2 - p^2) \sqrt{\mu (r_1 + r_{,,,})}} \quad (57);$$

$$M = i \left\{ \zeta \left( \frac{iK'}{K} a_1 + \frac{\pi}{2} \right) + \zeta \left( \frac{iK'}{K} a_2 + \frac{\pi}{2} \right) \right\};$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$f(x) = \frac{i}{2} \log \frac{\vartheta\left(i\frac{K'}{K}a_1 + \frac{\pi}{2} - x\right) . \vartheta\left(\frac{iK'}{K}a_2 + \frac{\pi}{2} - x\right)}{\vartheta\left(\frac{iK'}{K}a_1 + \frac{\pi}{2} + x\right) . \vartheta\left(\frac{iK'}{K}a_2 + \frac{\pi}{2} + x\right)}.$$

Dann ist:

$$(58) \quad \phi - \phi_1 = \frac{2x}{\pi} N + xM + f(x);$$

$$f(n\frac{\pi}{2}) = 0; \; n = 0 \ldots \infty, \; f(-x) = -f(x).$$

Dazu kommt:

$$(35) \quad t - t_1 = C\frac{\pi}{2K}\zeta(x) + \frac{2x}{\pi}T.$$

Nennen wir den Wert von $\phi - \phi_1$, der dem Werte $T\left(x = \frac{\pi}{2}\right)$ entspricht, $\Psi$, so ist dies der Längenwinkel des Punktes von der ersten bis zur zweiten Culmination oder der Winkel, den die Projektionen der beiden Radiivektores $r_1$ und $r_2$ mit einander bilden.

1) Setzen wir $x = \frac{\pi}{2}$, so wird:

$$(59) \quad \Psi = N + \frac{\pi}{2}M.$$

Vermehren wir nun x um beliebige Vielfache von $\frac{\pi}{2}$, so geht $\phi - \phi_1$ nach einander über in:

$$2\Psi \; 3\Psi \ldots . \; n\Psi.$$

Da ausserdem den Werten von $x = \frac{n\pi}{2}; n = 1 \ldots . \infty$ die Zeiten T, 2 T, 3 T . . . entsprechen, so haben wir folgendes Schema zusammengehöriger Werte:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $t = t_1$ | $T + t_1$ | $2T + t_1$ | . . . . | $nT + t_1$ |
| $x = 0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | . . . . . | $n\frac{\pi}{2}$ |
| $r = r_1$ | $r_2$ | $r_1$ | . . . . | $\begin{cases} r_1, \text{ wenn n gerade,} \\ r_2, \ldots . \text{ n ungerade} \end{cases}$ |
| $\phi = \phi_1$ | $\Psi + \phi_1$ | $2\Psi + \phi_1$ | . . . . | $n\Psi + \phi_1$. |

2) Wir wählen irgend einen zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegenden Wert von x, bezeichnen ihn mit x' und den dazu gehörigen Wert von $\phi - \phi_1$ mit $\phi_1'$.

Lassen wir x in $-x'$ übergehen, so wird (58) $\phi - \phi_1$ zu $-\phi_1'$ und nach (35) $t_1'$ zu $-t_1'$, während $r = r_1'$ nach (36) ungeändert bleibt.

Dadurch erweitert sich das Schema um:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $t - t_1 = t_1'$ | $-t_1'$ | $2T + t_1'$ | $2T - t_1'$ . . . . | $2nT \pm t_1'$ |
| $x = x'$ | $-x'$ | $\pi + x'$ | $\pi - x'$ . . . | $n\pi \pm x'$ |
| $r = r_1'$ | $r_1'$ | $r_1'$ | $r_1'$ . . . . | $r_1'$ |
| $\phi - \phi_1 = \phi_1'$ | $-\phi_1'$ | $2\Psi + \phi_1'$ | $2\Psi - \phi_1'$ . . . | $2n\Psi \pm \phi_1'$. |

Diese Zusammenstellung drückt folgenden Satz aus:

Gelangt der materielle Punkt von einer beliebigen Stelle a zur Culmination b und von dort aus zu einer Stelle c, die mit a in derselben Entfernung vom Centrum des Cul-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

minationskreises liegt, so wird der von der Meridianebene beschriebene Winkel durch die den Culminationspunkt enthaltende Meridianebene halbiert.

§ 9.

## Darstellung des Winkels $\Psi$ in reeller Form.

Da wir im folgenden § an dem Winkel $\Psi$ eine Differentiation vorzunehmen haben und in einem Zahlenbeispiel seine Berechnung durchführen wollen, haben wir $\Psi = N + \frac{\pi}{2} M$ (59) zunächst in reeller Form darzustellen.

$$N = \frac{4\, r_1\, c_2\, K}{(r_1^2 - p^2)\sqrt{\mu\,(r_1 + r_{,,,})}}; \quad (57)$$

$$M = i\left\{\zeta\left(\frac{i\,K'}{K}\,a_1 + \frac{\pi}{2}\right) + \zeta\left(\frac{i\,K'}{K}\,a_2 + \frac{\pi}{2}\right)\right\}.$$

Wir benutzen die Formel (Jacobi fund. pag. 165):

$$i\,Z(i\,b_1 + K) = \frac{\pi\,b_1}{2\,K\,K'} + Z\,(b_1 + K', k').$$

Setzt man $b_1 = \frac{2\,K'}{\pi}\,a_1$, so ist:

$$i\,Z\left(\frac{2\,i\,K'}{\pi}\,a_1 + K\right) = \frac{a_1}{K} + Z\left(\frac{2\,K'}{\pi}\,a_1 + K', k'\right)$$

oder:

$$i\,Z\left(\frac{2\,K}{\pi}\left\{\frac{i\,K'}{K}\,a_1 + \frac{\pi}{2}\right\}\right) = \frac{a_1}{K} + Z\left(\frac{2\,K'}{\pi}\left\{a_1 + \frac{\pi}{2}\right\}, k'\right).$$

Den Uebergang von Z zu $\zeta$ liefert die Relation:

$$Z\left(\frac{2\,K'}{\pi}\,y, k'\right) = \frac{\pi}{2\,K'}\,\zeta\,(y, q').$$

Ferner ist $\log q' = -\frac{\pi\,K}{K'}$; $\log q = -\frac{\pi K'}{K}$. $\frac{i K'}{K}\,a_1 = -\frac{i\,a_1}{\pi}\log q$. Daher:

$$i\,\zeta\left(\frac{i\,K'}{K}\,a_1 + \frac{\pi}{2}\right) = i\,\zeta\left(\frac{\pi}{2} - \frac{i\,a_1}{\pi}\log q\right)$$

$$i\,\zeta\left(\frac{\pi}{2} - \frac{i\,a_1}{\pi}\log q\right) = \frac{2\,a_1}{\pi} - \frac{1}{\pi}\log q'\,\zeta\left(a_1 + \frac{\pi}{2}, q'\right).$$

Ebenso ist:

$$i\,\zeta\left(\frac{\pi}{2} - \frac{i\,a_2}{\pi}\log q\right) = \frac{2\,a_2}{\pi} - \frac{1}{\pi}\log q'\,\zeta\left(a_2 + \frac{\pi}{2}, q'\right).$$

Wir machen noch Gebrauch von der Formel:

$$2\,\zeta\,(a) + \zeta\,(x - a) - \zeta\,(x + a) = \frac{2\,.\,\frac{2\,K}{\pi}\sin\alpha\,.\,\cos\alpha\,.\,\Delta\,\alpha\,k^2\sin^2\varphi}{1 - k^2\sin^2\alpha\,\sin^2\varphi}$$

Wird $\varphi = \frac{\pi}{2}$, so wird x auch $= \frac{\pi}{2}$.

Für K und k führen wir K' und k' ein und beachten, dass:

$$\zeta\left(a - \frac{\pi}{2}\right) = \zeta\left(a + \frac{\pi}{2}\right);\ \zeta\,(-a) = -\zeta\,(a) \text{ ist.}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dann wird: $\zeta(a_1, q') - \zeta\left(a_1 + \frac{\pi}{2}, q'\right) = \frac{2K'}{\pi} \cdot \frac{\sin\alpha\cos\alpha\, k'^2}{\Delta\alpha}$,

und wir haben:

$$M = i\,\zeta\left(\frac{\pi}{2} - \frac{i\,a_1}{\pi}\log q\right) + i\,\zeta\left(\frac{\pi}{2} - \frac{i\,a_2}{\pi}\log q\right)$$

$$= \frac{2a_1}{\pi} - \frac{1}{\pi}\log q' . \zeta(a_1, q') - \frac{2K}{\pi} \cdot \frac{\sin\alpha'\cos\alpha'\, k'^2}{\Delta\alpha'}$$

$$+ \frac{2a_2}{\pi} - \frac{1}{\pi}\log q' . \zeta(a_2, q') - \frac{2K}{\pi} \cdot \sin\alpha''\cos\alpha''\, k'^2$$

$$\alpha' = \mathrm{am}\left(\frac{2K'}{\pi}a_1, k'\right);\ \alpha'' = \mathrm{am}\left(\frac{2K'}{\pi}a_2, k'\right).$$

Wir wollen nun noch zeigen, dass in $\Psi = N + \frac{\pi}{2}M$ die Grösse N gegen den mit $k'^2$ multiplicierten Teil von $\frac{\pi}{2}M$ verschwindet.

Es soll also sein:

$$N = \frac{4\,r_1\,c_2\,K}{(r_1^2 - p^2)\sqrt{\mu(r_1 + r_{,,,})}} = \frac{K\sin\alpha'\cos\alpha'\,\Delta\alpha'\,k'^2}{\Delta^2\alpha'} + \frac{K\sin\alpha''\cos\alpha''\,\Delta\alpha''\,k'^2}{\Delta^2\alpha'}.$$

Wir beachten, dass nach Gleichung (54) $\sin\alpha' . \cos\alpha' . \Delta\alpha' = \sin\alpha'' . \cos\alpha''\,\Delta\alpha''$

$$= \frac{2c^2}{\sqrt{\mu(r_1 + r_{,,,})}}\,\frac{1}{(r_2 + r_{,,,})} \text{ ist.}$$

Daher:

$$\frac{2r_1}{r_1^2 - p^2} = \frac{1}{(r_2 + r_{,,,})}\left[\frac{k'^2}{\Delta^2\alpha'} + \frac{k'^2}{\Delta^2\alpha''}\right];$$

$$\Delta\alpha' = \sqrt{\frac{r_1 + p}{r_1 + r_{,,,}}};\ \Delta\alpha'' = \sqrt{\frac{r_1 - p}{r_1 + r_{,,,}}};\ k' = \sqrt{\frac{r_2 + r_{,,,}}{r_1 + r_{,,,}}}.$$

Denkt man diese Werte eingesetzt, so erhält man die identische Gleichung:

$$\frac{2r_1}{r_1^2 - p^2} = \frac{1}{r_1 - p} + \frac{1}{r_1 + p}.$$

N fällt also weg, und wir haben den reellen Ausdruck:

$$(60)\quad \Psi = (a_1 + a_2) - \frac{1}{2}\log q' \{\zeta(a_1, q') + \zeta(a_2, q')\}.$$

§ 10.

## Abhängigkeit des Winkels $\Psi$ von der Grösse der Radiivektores der Grenzkreise.

Um Grenzwerte von $\Psi$ zu finden, ist es von grosser Wichtigkeit, zu wissen, wie sich dieser Winkel ändert, wenn die Radiivektores der Grenzkreise wachsen oder ab-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

nehmen. Zu diesem Zwecke wollen wir den Radiusvektor des inneren Grenzkreises als konstant betrachten und den des äusseren als variabel. Wir haben also den Ausdruck:

(60) $\Psi = (a_1 + a_2) - \frac{1}{2} \log q' \left\{ \zeta(a_1, q') + \zeta(a_2, q') \right\}$ vollständig nach $r_1$ zu differentiieren.

Dazu bedarf es einiger Umformungen.

Den Uebergang von der Funktion $\zeta$ zu Z liefern die Formeln:

$$\zeta(y, q') = \frac{2K'}{\pi} Z\left(\frac{2K'}{\pi} y, k'\right); \log q' = -\frac{\pi K}{K'}.$$

Man erhält: $\Psi = a_1 + a_2 + K \left\{ Z\left(\frac{2K'}{\pi} a_1, k'\right) + Z\left(\frac{2K'}{\pi} a_2, k'\right) \right\}.$

Ferner benutzen wir die Formeln:

$$Z\left(\frac{2K'}{\pi} a_1, k'\right) = E\left(\frac{2K'}{\pi} a_1, k'\right) - \frac{E'}{K'} \cdot \frac{2K'}{\pi} a_1 = E\left(\frac{2K'}{\pi} a_1\right) - \frac{2E'}{\pi} a_1.$$

Dann wird:

$$\Psi = a_1 + KE\left(\frac{2K'}{\pi} a_1\right) - \frac{2KE'}{\pi} a_1 + a_2 + KE\left(\frac{2K'}{\pi} a_2\right) - \frac{2KE'}{\pi} a_2.$$

Da die Rechnung für $a_2$ sich ebenso gestaltet wie für $a_1$, so können wir jenes vorläufig ausser Betracht lassen.

$$\frac{\pi}{2} \cdot \Psi = \frac{\pi}{2} a_1 - KE' a_1 + \frac{\pi}{2} K \cdot E\left(\frac{2K'}{\pi} a_1\right) + \ldots$$

Aus der Relation: $K'E + KE' - KK' = \frac{\pi}{2}$ ergiebt sich: $a_1\left(\frac{\pi}{2} - KE'\right) = a_1 K'(E - K)$,

mithin: $\Psi = \frac{2K'}{\pi} a_1 (E - K) + \underset{\text{mod. } k'}{KE}\left(\frac{2K'}{\pi} a_1\right) + \ldots$

Wir führen ein (nach 49a):

$$\alpha' = \operatorname{am}\left(\frac{2K'}{\pi} a_1\right) = \arccos \sqrt{\frac{r_2 + p}{r_2 + r_{,,,}}}.$$

$$\alpha'' = \operatorname{am}\left(\frac{2K'}{\pi} a_2\right) = \arccos \sqrt{\frac{r_2 - p}{r_2 + r_{,,,}}}.$$

Also haben wir mit Legendre'schen Bezeichnungen:

$$\Psi = (E - K) F(\alpha', k') + K E_1(\alpha', k') + (E - K) F(\alpha'', k') + K E_1(\alpha'', k').$$

Hier bedeutet $E_1$ das Legendre'sche Funktionszeichen E zum Unterschied von dem Jacobi'schen.

Da die Variable $r_1$ in $\alpha'$ und $\alpha''$ nicht vorkommt, haben wir folgenden Differentialquotienten zu bilden:

$$\frac{d\Psi}{d r_1} = \frac{\partial \Psi}{\partial (k'^2)} \cdot \frac{d(k'^2)}{d r_1}.$$

Es ist:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial (k'^2)} = (E - K) \frac{\partial F(\alpha', k')}{\partial (k'^2)} \quad 1.)$$

$$+ F(\alpha', k') \frac{d(E - K)}{d(k'^2)} \quad 2.)$$

$$+ K \frac{\partial E_1(\alpha', k')}{\partial (k'^2)} \quad 3.)$$

$$+ E(\alpha', k') \frac{dK}{d(k'^2)} \quad 4.) \quad + \ldots$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$1.) \quad = (E - K) \left\{ \frac{E_1(\alpha')}{2 k^2 k'^2} - \frac{F(\alpha')}{2 k'^2} - \frac{\sin \alpha' \cos \alpha'}{2 k^2 \Delta \alpha'} \right\}$$

$$2.) \quad = F(\alpha') \left\{ \frac{K}{2 k'^2} - \frac{K - E}{2 k'^2} \right\}$$

$$3.) \quad = K . \frac{E_1(\alpha') - F(\alpha')}{2 k'^2}$$

$$4.) \quad = E_1(\alpha') \left\{ \frac{K - E}{2 k^2 k'^2} - \frac{K}{2 k'^2} \right\} + \ldots$$

Durch Addition dieser 4 Ausdrücke erhalten wir:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial (k'^2)} = (K - E) \frac{\sin \alpha' \cos \alpha' \Delta \alpha'}{2 k^2 (\Delta \alpha')^2} + (K - E) \frac{\sin \alpha'' \cos \alpha'' \Delta \alpha''}{2 k^2 (\Delta \alpha'')^2}$$

Da nun (54) $\sin \alpha' \cos \alpha' \Delta \alpha' = \sin \alpha'' \cos \alpha'' \Delta \alpha''$ ist, so haben wir als vollständigen Wert von $\frac{\partial \Psi}{\partial (k'^2)}$: $(K - E) \frac{\sin \alpha' \cos \alpha' \Delta \alpha'}{2 k^2} \left( \frac{1}{(\Delta \alpha')^2} + \frac{1}{(\Delta \alpha'')^2} \right)$.

Nun ist $(K - E)$ eine positive Grösse, die für $k = 0$ den Wert 0 annimmt: $\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 0$;

Der Differentialquotient $\frac{d(K - E)}{d k^2} = \frac{E}{2 k'^2}$ zeigt, dass mit wachsendem k auch $(K - E)$ zunimmt.

Es ist noch zu bilden: $\frac{d(k'^2)}{d r_1} = - \frac{r_2 + r_{,,,}}{(r_1 + r_{,,,})^2}$, denn: $k'^2 = \frac{r_2 + r_{,,,}}{r_1 + r_{,,,}}$.

Da dieser Ausdruck negativ ist, so folgt:

$$\frac{d\Psi}{d r_1} = - \frac{r_2 + r_{,,,}}{(r_1 + r_{,,,})^2} (K - E) \frac{\sin \alpha' \cos \alpha' \Delta \alpha'}{2 k^2} \left\{ \frac{1}{(\Delta \alpha')^2} + \frac{1}{(\Delta \alpha'')^2} \right\} \quad (62)$$

Hieraus ergiebt sich, dass der Winkel $\Psi$ mit abnehmendem $r_1$ wächst und für den kleinsten Wert von $r_1$ ein Maximum erreichen muss.

Der kleinste Wert, den $r_1$ annehmen kann, ist $r_2$; d. i. der Radiusvektor des inneren Grenzkreises (wenn also der materielle Punkt eine kreisförmige Bewegung ausführt).

Die Radiivektores der beiden Grenzkreise hängen zusammen durch die Gleichung:

$$r_1 r_{,,,} + r_2 r_{,,,} = r_1 r_2 + p^2 \quad (17).$$

Also ist: $r_{,,,} \frac{d r_1}{d r_2} + r_{,,,} = r_1 + r_2 \frac{d r_1}{d r_2}$.

Der Ausdruck: $\frac{d r_1}{d r_2} = - \frac{r_1 - r_{,,,}}{r_2 - r_{,,,}}$ ist negativ, d. h. mit wachsendem $r_1$ nimmt $r_2$ ab. Mithin müssen $\Psi$ und $r_2$ gleichzeitig abnehmen.

Der kleinste Wert, den $r_2$ annehmen kann, ist p; für diesen Wert muss $\Psi$ das Minimum erreichen. Es handelt sich nur um ein Minimum; denn p repräsentiert einen festen Wert.

Da $r_1 = r_2$ (wo für $\Psi$ ein Maximalwert eintritt) alle möglichen Werte zwischen p und $\infty$ annehmen kann, so muss man beliebig viele Maximalwerte für $\Psi$ erhalten. Das äusserste Maximum wird erreicht für $r_1 = r_2 = \infty$.



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

## § 11.

## Grenzwerte von $\Psi$.

Wir haben nun zu sehen, welche Werte $\Psi$ für $r_2 = p$ und für $r_1 = r_2$ annimmt.

I. Wenn $r_2 = p$ ist, so ist der innere Grenzkreis ausgeartet zu einem Punkte, dem Fusspunkte des Lotes p. In diesem Falle erhielten wir geradlinige Bewegung (cf. § 3).

Daher ist: $2\Psi_1 = \pi$. $\Psi_1 = \frac{\pi}{2}$ ist also das Minimum von $\Psi$. $\left(\begin{matrix} v_1 = 0 \\ \text{oder } \alpha_1 = 0 \end{matrix}\right)$.

II. Wenn $r_2 = r_1$ wird, so sind die beiden Grenzkreise zusammengefallen, der Punkt muss sich also auf diesem Kreise bewegen. Die Bedingung dieser Bewegung ist (nach § 3)

$$v_1 = V_0 = \sqrt{\frac{\mu}{2}\left(\frac{r_1^2 - p^2}{r_1}\right)}.$$

Wir nehmen noch hinzu die Gleichungen: $-p^2 = r_1 r_2 - r_2 r_{,,,} - r_1 r_{,,,}$

$$(17) \quad = r_1^2 - 2 r_1 r_{,,,}; \; (r_, = r_2)$$

$$2 c_2 = R^2 \frac{d\psi}{dt}. \; (6a \; \S \; 1).$$

$$T = C.E - D.K; \quad C = 2\sqrt{\frac{r_1 + r_{,,,}}{\mu}}; \quad (33)$$

$$(34 \; \S \; 6) \quad D = \frac{2 r_{,,,}}{\sqrt{\mu(r_1 + r_{,,,})}};$$

$$k^2 = \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_{,,,}}.$$

Die Gleichung: $2 c_2 = R^2 \frac{d\psi}{dt}$ geht, weil die Projektion R des Radiusvektors r konstant (nämlich $= R_1$) ist, über in: $2 c_2 = R_1^2 \frac{d\psi}{dt} = \sqrt{r_1^2 - p^2} \; \frac{d\psi}{dt}$ oder in: $\frac{d\psi}{dt} = \frac{2 c_2}{r_1^2 - p^2}$.

Daraus folgt durch Integration: $\psi - \psi_0 = \frac{2 c_2}{r_1^2 - p^2}(t - t_0)$.

Oder, weil $\psi_0 = 0$ und $t_0 = 0$ ist:

$$\psi = \frac{2 c_2}{r_1^2 - p^2} t = \frac{\sqrt{r_1^2 - p^2} v_1}{r_1^2 - p^2} t \quad (63);$$

$$2 c_2 = \sqrt{r_0^2 - p^2} v_0 \sin \alpha_0 = \sqrt{r_1^2 - p^2} v_1;$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{\mu}{2}\left(\frac{r_1^2 - p^2}{r_1}\right)}. \text{ Dadurch wird:}$$

$$\psi = \sqrt{\frac{\mu}{2 r_1}} . t. \; (64).$$

Der Ausdruck (34) $T = C.E - DK$ lautet im vorliegenden Spezialfalle $(r_1 = r_2)$:

$$T_2 = \left\{ \sqrt{\frac{r_1 + r_{,,,}}{\mu}} - \frac{r_{,,,}}{\sqrt{\mu(r_1 + r_{,,,})}} \right\} \pi;$$

Denn es ist: $k^2 = \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_{,,,}} = 0$, also $E = K = \frac{\pi}{2}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$C = 2\sqrt{\frac{r_1 + r_{,,,}}{\mu}};\ D = \frac{2 r_{,,,}}{\sqrt{\mu(r_1 + r_{,,,})}};\quad (65)\ T_2 = \frac{\pi r_1}{\sqrt{\mu(r_1 + r_{,,,})}}.$$

Setzen wir nun in (64) $t = T_2$, so wird: $\dot{\varphi} = \Psi_2 = \sqrt{\frac{r_1}{2(r_1 + r_{,,,})}} \cdot \pi.$

Ferner folgt aus: $-p^2 = r_1^2 - 2 r_1 r_{,,,}$ (17) $r_1 + r_{,,,} = \frac{3 r_1^2 + p^2}{2 r_1}$ und, wenn wir diesen Wert in $\Psi_2$ einführen, haben wir als obere Grenze des Winkels $\Psi$ gefunden:

$$\Psi_2 = \pi \sqrt{\frac{r_1^2}{3 r_1^2 + p^2}}\ .\ (66).$$

$\frac{p^2}{r_1^2}$ ist aber $= \sin^2 n_1$, wenn wir unter $n_1$ den Neigungswinkel des Radiusvektors $r_1$ gegen die Ebene verstehen.

Von der Grösse dieses Winkels ist also $\Psi_2$ abhängig. Wenn wir für den Anfang der Bewegung einen bestimmten Wert von $r_1$ wählen, so folgt daraus ein bestimmter Grenzwert von $\Psi_2$, und wir können also den Satz aussprechen, dass der materielle Punkt innerhalb eines Kreises vom Radius $R_1 = \sqrt{r_1^2 - p^2}$ nur solche Bewegungen ausführen kann, bei denen $\Psi < \pi \sqrt{\frac{1}{3 + \sin^2 n_1}}$ ist.

Es ist dies besonders wichtig für die Betrachtung (im § 12), bei welcher Minimalneigung des Radiusvektors r der Punkt am frühesten eine geschlossene Curve durchläuft.

Der Radiusvektor erreicht seine Minimalneigung für den Wert $r = r_1$.

Der Wert von $r_1$ lässt sich aber stets als Wurzel der Gleichung: $\varphi(r) = 0$ (§ 2) durch Angaben über den Anfangszustand des Punktes ausdrücken.

In dem Ausdrucke: $\Psi_2 = \pi \sqrt{\frac{1}{3 + \sin^2 n_1}}$ verschwindet $\sin^2 n_1 = \frac{p^2}{r_1^2}$ erstens, wenn wir $r_1 = \infty$ setzen; zweitens, wenn wir $p = 0$ annehmen.

1.) $r_1 = \infty$. Für sehr grosse Werte von $r_1$ beim Übergang zur Kreisbewegung nähert sich also $\Psi$ dem Werte $\pi \sqrt{1/3}$.

2.) $p = 0$. Das Kraftcentrum befindet sich in der Bewegungsebene selbst. Dies ist der in der Edler'schen Dissertation behandelte Spezialfall. Die vom Verfasser berechneten Näherungswerte schliessen ab mit: $\Psi' = 1{,}813072$ resp. $= 103^\circ\, 52'\, 52{,}9''$. Dies ist aber noch nicht der wirkliche Grenzwert. Dieser ergiebt sich aus $\Psi_2$, wenn wir $p = 0$ setzen.

Es ist: $\Psi_2' = \pi \sqrt{1/3}$ oder $= 1{,}8138 = 103^\circ\, 55'\, 22{,}8''$. Diese Werte wären mithin noch als Schlussglieder in die betreffende Tabelle einzufügen.

Ferner wird in: $\Psi_2 = \pi \sqrt{\frac{1}{3 + \sin^2 n_1}}$; $\sin n_1 = 1$, wenn $r_1 = r_2 = p$.

$$\Psi_2 = \frac{\pi}{2};\ \Psi_1 = \frac{\pi}{2};\ v_1 = 0.$$



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Beide Grenzkreise sind in den Fusspunkt von p ausgeartet, die obere und die untere Grenze von $\Psi$ sind zusammengefallen. Der Punkt führt (wie dies ja auch selbstverständlich ist) keine Bewegung aus.

Bei endlichen Werten von $r_1$ und p (also $0 < \sin n_1 < 1$) kann sich $\Psi$ niemals (auch nicht im Grenzfalle) dem absoluten Maximum $\frac{\pi}{\sqrt{3}} = \Psi'_2$ beliebig nähern.

Es existieren vielmehr unendlich viele Grenzwerte je nach der Grösse von $\sin n_1$, die sich bei gegebenen Werten von $r_1$ und p aus $\Psi_2 = \pi \sqrt{\frac{1}{3 + \sin^2 n_1}}$; $\sin n_1 = \frac{p}{r_1}$ berechnen lassen.

(Für $p = 0$ ist dagegen, wie schon erwähnt, nur ein Grenzwert $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ möglich).

Sei z. B. $r_1 = r_2 = 20$ und $p = 10$ vorausgesetzt, so wird:

$$\Psi_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{13}} = 99^\circ\, 50'\, 46{,}6'';$$

$r_1 = r_2 = 30$ und $p = 10$:

$$\Psi_2 = \frac{3\pi}{2\sqrt{7}} = 102^\circ\, 3'\, 1{,}44''.$$

Wir halten nun den Wert von $r_1 = 30$ und $p = 10$ fest und lassen $r_2$ alle Werte von 10 bis 30 durchlaufen. Dann wird, weil $\Psi$ zugleich mit $r_2$ wächst, dieser Winkel alle Werte von 45° aus annehmen und (für $r_2$ nahe 30) sich wenig von: 102° 3′ 1,44″ unterscheiden.

Da aber in Folge der Gleichung (§ 3) (19) $v_1 = \sqrt{\mu (r_2 - r_{,,,})}$ das Wachsen von $r_2$ auch ein Wachsen der Geschwindigkeit auf dem äusseren Grenzkreise bewirkt, so können wir folgenden Satz aussprechen:

Verlässt der materielle Punkt den äusseren Grenzkreis mit einer von Null an zunehmenden Geschwindigkeit $v_1$, so schreiten die Kulminationspunkte in der Richtung der Geschwindigkeit fort.

Da ferner im Allgemeinen $\Psi > \frac{\pi}{2}$ oder $4\Psi > 2\pi$, $\Psi < \sqrt{1/3}$ oder $3\Psi < \pi\sqrt{3} < 2\pi$ ist und sich $4\Psi$ und 4 T, $3\Psi$ und 3 T entsprechen, so haben wir eine Schleifenbildung; und zwar wird der Punkt zuerst seine Bahn durchschneiden zu einer Zeit $\tau$, die zwischen 3 T und 4 T liegt. Der Punkt muss also erst dreimal kulminiert haben, ehe er seine Bahn durchschneidet.

§ 12.

## Die Bahn des Punktes. Geschlossene Curven.

Ziehen wir das Resultat aus den vorigen §§, so können wir sagen: Die Bewegungskurve besteht aus lauter congruenten, schleifenförmigen Ästen, die abwechselnd (in gleichen Zeitabschnitten) den inneren und äusseren Kreis erreichen (cf. Figur 2). Anders ausgedrückt: Die Kurve ist eine Reihe congruenter Schleifen, welche einen Kreis von innen und einen andern von aussen begrenzen. Die Knoten, welche jede einzelne Schlinge und

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

die Schlingen wieder mit einander bilden, liegen entsprechend auf concentrischen Kreisen. Wächst die Geschwindigkeit auf dem äusseren Kreise von Null bis $\sqrt{\frac{\mu}{2}\left(\frac{r_1^2 - p^2}{r_1}\right)}$, so rücken die Knoten vom Centrum bis in die Peripherie des Kreises. Bei noch grösserer Geschwindigkeit wird dieser Kreis von aussen begrenzt und ein anderer diesem concentrischer von innen. Die Schleifen haben eine andere Gestalt, sie werden immer gestreckter und gehen endlich bei einer bis ins Unendliche wachsenden Anfangsgeschwindigkeit allmählich in eine gerade Linie über. (Figur 3.)

Über die Figuren ist noch zu bemerken, dass Figur 3 als Fortsetzung von Figur 2 zu betrachten ist, sodass sich die Ausgangspunkte A und $A$, ferner die Radien der Grenzkreise $R_1$ und $R_1$, $R_3$ und $R_3$ entsprechen.

Wir haben noch die Frage zu beantworten, wann der Punkt geschlossene Bahnen durchläuft, d. h. zu seinem Ausgangspunkte zurückkehrt.

Dies wird offenbar dann eintreten, wenn ein ganzes Vielfaches von $2\,\Psi$ gleich einem ganzen Vielfachen von $2\,\pi$ ist.

$$2\,\nu\,\Psi = 2\,n\,\pi.$$

Da n und $\nu$ ganze Zahlen bedeuten und $\nu > n$ (denn $\Psi < \pi$) ist, so haben wir auch $\Psi = \lambda\pi$, wo also $\lambda = \frac{n}{\nu}$ ein echter Bruch ist. Dazu kommt noch als Grenzbedingung:

$$\frac{\pi}{2} < \Psi < \pi\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Setzen wir den Wert von $r_1$, für den der Radiusvektor seine Minimalneigung gegen die Bewegungsebene erreicht, als bekannt voraus oder berechnen ihn als grösste positive Wurzel der Gleichung $\varphi(r) = 0$ (cf. § 2), so haben wir die noch engeren Grenzen:

$$\frac{\pi}{2} < \Psi < \frac{\pi}{\sqrt{3 + \frac{p^2}{r_1^2}}}.$$

Wir wollen berechnen, nach wieviel Kulminationen der Punkt überhaupt erst zu seiner Ausgangsstelle auf dem äusseren Grenzkreise (von dem aus wie bisher wir seine Bewegung verfolgen wollen) zurückgelangen kann; zweitens, wie gross $\Psi$ und $\Psi_2$ sind, und daraus drittens, bei welcher Minimalneigung des Radiusvektors die einfachste Form der geschlossenen Curve eintreten kann.

Wir hatten: $\Psi = \lambda\pi$; $\lambda = \frac{n}{\nu}$ ist ein echter Bruch.

$$\frac{\pi}{2} < \Psi < \Psi_2;\ \Psi_2 = \frac{\pi}{\sqrt{3 + \frac{p^2}{r_1^2}}};\ \text{oder}\ \frac{\pi}{2} < \Psi < \Psi_2';\ \Psi_2' = \frac{\pi}{\sqrt{3}},$$

$$\text{also: } 0{,}50\ldots < \lambda < 0{,}57735\ldots \qquad \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}57735\ldots$$

Da $\nu$ die Anzahl der (inneren oder äusseren) Kulminationen bedeutet. haben wir $\lambda$ so zu wählen, dass der Nenner $\nu$ eine möglichst kleine ganze Zahl wird. Dieser Bedingung genügt $\lambda = {}^4/_7 = 0{,}571428\ldots$; $0{,}50\ldots < 0{,}571\ldots < 0{,}577\ldots$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Mithin haben wir:

$$\Psi = \lambda\pi = 0{,}571\ldots\pi = 102{,}857142^\circ = 102^\circ\,51'\,25{,}711''$$
$$n = 4;\quad \nu = 7.$$

n bedeutet die Anzahl der Umkreisungen des Kreiscentrums, 2n also die Anzahl der Durchgänge des Punktes durch die Meridianebene seines Anfangsortes, wenn wir unter Meridianebene die durch das Lot p und den Anfangsort auf dem äusseren Kreise gelegte Ebene verstehn. Der Punkt befindet sich also von dem äusseren Kreise aus gerechnet 4 mal in Opposition und 3 mal in Conjunktion mit dem Kreiscentrum und kehrt nach der vierten Opposition zur Anfangsstelle auf dem äusseren Kreise zurück. $2\nu$ zeigt an, wie oft der Punkt kulminiert, $\frac{\nu}{2}$, wieviele congruente Schleifen die Bahn hat, da jede Schleife vier Kulminationen repräsentiert. Der Punkt kulminiert also siebenmal auf dem inneren nnd siebenmal auf dem äusseren Kreise, die Kulminationspunkte bilden die Ecken von zwei regulären Siebenecken. Der Winkel $\Psi = 102^\circ\,51'\,25{,}711''$ ist doppelt so gross als der Centriwinkel des Bestimmungsdreiecks vom regulären Siebeneck.

Diese einfachste Form der geschlossenen Curve kann aber nur bis zu einer ganz bestimmten Minimalneigung des Radiusvektor eintreten. Wir haben die Grenzbedingung: $\Psi_2 > \Psi$, also: $\Psi_2 > {}^4/_7\,\pi$.

Da aber: $\Psi_2 = \frac{\pi}{\sqrt{3+\sin^2 n_1}}$ ist, so muss $\frac{1}{3+\sin^2 n_1} > \frac{16}{49}$ sein oder $\sin^2 n_1 < \frac{1}{16}$; $\sin n_1 < \frac{1}{4}$, d. h. Winkel $n_1 < 14^\circ\,28'\,30{,}904''$.

Ferner ist $\frac{p}{r_1} < \frac{1}{4}$; $r_1^2 - p^2 = R_1^2 > 15\,p^2$; $R_1 > p\sqrt{15}$ unabhängig von der Grösse der Anziehungskraft $\frac{\mu}{2}$.

Es darf also der Radius des äusseren Grenzkreises den Wert $p\sqrt{15}$ nicht erreichen, sondern muss grösser sein als $p\sqrt{15}$, wenn auf den Grenzkreisen reguläre Siebenecke entstehen sollen (cf. Figur 4). [Ist $p = 0$, so fällt diese Beschränkung fort, d. h. es können in beliebiger Entfernung vom Centrum auf den Grenzkreisen die Eckpunkte regulärer Siebenecke entstehen.] Unmöglich ist die Bildung regulärer Dreiecke, Vierecke, Fünfecke, Sechsecke, Achtecke, Zehnecke, Zwölfecke, Vierzehnecke etc. Denn die Werte:

$$\Psi_{(3)} = \frac{2}{3}\pi;\ \Psi_{(4)} = \frac{3}{4}\pi;\ \Psi_{(5)} = \frac{3}{5}\pi;\ \Psi_{(6)} = \frac{4}{6}\pi = \frac{2}{3}\pi;\ \Psi_{(8)} = \frac{5}{8}\pi;\ \Psi_{(10)} = \frac{6}{10}\pi = \frac{3}{5}\pi;$$

$\Psi_{(12)} = \frac{7}{12}\pi$; sind grösser als $\pi\sqrt{1/3}$.

$\Psi_{(14)} = \frac{8}{14}\pi = \frac{4}{7}\pi$ giebt ein reguläres Siebeneck; $\Psi_{(14)} = \frac{9}{14}\pi$ ist $> \pi\sqrt{1/3}$ etc.

Möglich dagegen ist die Bildung des regulären: Neunecks, Elfecks, Dreizehnecks, Fünfzehnecks, Sechzehnecks etc. Und zwar ist das letztere das erste mit gerader Seitenzahl, welches entstehen kann.

Die Werte: $\Psi_{(9} = \frac{5}{9}\pi$; $\Psi_{(11)} = \frac{6}{11}\pi$; $\Psi_{(13)} = \frac{7}{13}\pi$; $\Psi_{(15)} = \frac{8}{15}\pi$; $\Psi_{(16)} = \frac{9}{16}\pi$ sind $> \frac{\pi}{2}$ und $< \frac{\pi}{\sqrt{3}}$. Das reguläre 23-Eck kann nach 12 und nach 13 Umkreisungen des Kreis-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

centrums entstehen, aber bei verschiedenen Minimalneigungen des Radiusvektors; denn beide Werte:

$\Psi_{(\frac{11}{23})} = \frac{12}{23}\pi$ und $\Psi_{(\frac{12}{23})} = \frac{13}{23}\pi$ entsprechen den Grenzbedingungen.

Ferner haben wir bei 12 Umkreisungen: $\frac{1}{3 + \sin^2 n_{(\frac{11}{23})}} > \frac{12^2}{23^2}$; $\sin^2 n_{(\frac{11}{23})} < \frac{97}{144}$;

$\sin n_{(\frac{11}{23})} < \sqrt{\frac{97}{144}}$; Winkel $n_{(\frac{11}{23})} < 55^\circ\, 9'\, 32''$ als Minimalneigung des Radiusvektors.

Bei 13 Umkreisungen dagegen ist: $\sin^2 n_{(\frac{12}{23})} < \frac{22}{144}$, Winkel $n_{(\frac{12}{23})} < 23^\circ\, 0'\, 31''$ die Minimalneigung des Radiusvektors.

§ 13.

## Anwendung der Grenzbedingungen auf geschlossene Curvenformen beim sphärischen Pendel.

Es lassen sich diese Grenzbetrachtungen für Gewinnung geschlossener Curven auch ausdehnen auf das bekannte Problem der Bewegung des sphärischen Pendels. Anwendung findet dieses Problem in der Praxis beim Schleudern eines durch eine Schnur pendelartig aufgehängten Ringes und bei der Luftkegelbahn. Hierbei müssten allerdings noch Luft- und Reibungswiderstand in Betracht kommen. Es sei also ein der Schwere g unterworfener materieller Punkt gezwungen, sich auf der Oberfläche einer Kugel zu bewegen.

Wir wählen die positive x-Axe in der Richtung der Schwere, als Horizontalebene durch den Mittelpunkt der Kugel (Radius r) die yz-Ebene, nennen $\varphi$ den Winkel, welchen der nach dem Punkte gezogene Kugelradius mit der + x-Axe und $\psi$ den Winkel, welchen die durch die Schenkel von $\varphi$ gelegte Ebene mit der xz-Ebene bildet. Es erfolgt dann bekanntlich die Bewegung (ähnlich der von uns behandelten) auf der Oberfläche einer Kugelzone, deren Grenzradien $r \sin \varphi_1$ und $r \sin \varphi_2$ sind ($\varphi_1 > \varphi_2$). Der zwischen zwei auf einander folgenden Kulminationen gelegene Winkel sei $\Psi$, die dazu gehörige Zeit T. Es lässt sich zeigen, dass (bei festgehaltenem $\varphi_1$) $\varphi_2$ und $\Psi$ gleichzeitig wachsen, dass mithin bei Kreisbewegung ($\varphi_1 = \varphi_2$) das betreffende Maximum für $\Psi$ eintritt. Da eine Kreisbewegung nur auf der unteren Halbkugel erfolgen kann, so wollen wir hier nur den Fall betrachten $0 < \varphi_1 < \frac{\pi}{2}$. [Die Grenzbetrachtungen lassen sich auch auf den Fall ausdehnen, dass der Punkt die oberen Kulminationen in der oberen Halbkugel erreicht. $0 < \varphi_2 < \frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2} < \varphi_1 < \pi$. Die Horizentalprojektion wird ein Kreis, wenn $\varphi_2 = \pi - \varphi_1$ ist.]

Wir haben also den Grenzwert $\Psi_2$ von $\Psi$ bei festgehaltenem $\varphi_1$ zu berechnen. Bei der Kreisbewegung ist $\varphi_1 = \varphi = \varphi_2 = \text{const.}$, mithin $\frac{d\varphi_1}{dt} = 0$. Es bleibt also nur die horizontale Componente der Geschwindigkeit $v_1 = r \sin \varphi_1 \frac{d\psi}{dt}$; man bekommt ferner als Bedingung der Kreisbewegung: $v_1^2 = \frac{rg \sin^2 \varphi_1}{\cos \varphi_1}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Durch Gleichsetzung folgt:

$$\frac{d\phi}{dt} = \sqrt{\frac{g}{r\cos\varphi_1}}.$$

die Integration ergiebt:

$$\phi - \phi_0 = \sqrt{\frac{g}{r\cos\varphi_1}}\,(t - t_0)$$

oder (weil für $t_0 = 0$ auch $\phi_0 = 0$ ist):

$$\phi = \sqrt{\frac{g}{r\cos\varphi_1}}\,t.$$

$\phi$ geht in $\Psi_2$ über, wenn $T = T_2$ ist, d. h. wenn wir in dem Ausdrucke für T; $\varphi_1 = \varphi_2$ setzen und beachten, dass $k = 0$ und $K = \frac{\pi}{2}$ wird. Wir bekommen:

$$T_2 = \pi\sqrt{\frac{r\cos\varphi_1}{g\,(1 + 3\cos^2\varphi_1)}}$$

Also wird schliesslich:

$$\Psi_2^2 = \pi\sqrt{\frac{1}{1 + 3\cos^2\varphi_1}} \qquad (67)$$

Es zeigt sich also, dass $\Psi_2$ zwischen $\frac{\pi}{2}$ und $\pi$ liegt, während bei der von uns behandelten Aufgabe die Grenzen enger sind, nämlich $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$. Damit ändern sich auch die Bedingungen, unter denen geschlossene Curven möglich sind. Wir nehmen an, in der Entfernung von 10 m vom Erdboden sei an einem 10 m langem Faden von constanter Länge eine Bleikugel befestigt. Können wir das Gewicht des Fadens gegen das der Kugel vernachlässigen, so haben wir nahezu ein mathematisches Pendel. Von Luft- und Reibungswiderständen sehen wir ab. Nach wieviel Umkreisungen der Vertikalen kehrt die Kugel zum ersten Male zum Ausgangspunkte zurück? Wieviel muss mindestens ihre Maximalentfernung $h_1$ vom Erdboden betragen?

Aus: $\Psi < \pi\sqrt{\frac{1}{1 + 3\cos^2\varphi_1}}$ ergiebt sich: $\cos^2\varphi_1 < \frac{\pi^2 - \Psi^2}{3\Psi^2}$ (67 a).

Bei der geschlossenen Curve muss sein: $\nu\Psi = n\pi$, wo n und $\nu$ ganze Zahlen sind. Es ist: $\cos^2\varphi_1 < \frac{\nu^2 - n^2}{3n^2}$.

Da $\cos\varphi_1 = \frac{x_1}{r}$ und $h_1 = r - x_1$ ist, können wir auch schreiben:

$$(68) \quad h_1 > r\left(1 - \frac{1}{3n}\sqrt{(\nu^2 - n^2)\,3}\right)$$

Nun ist: $\Psi = \frac{2}{3}\pi < \pi$, also kann die Kugel schon nach 2maligem Umkreisen der Vertikalen zum Ausgangspunkte zurückkehren, indem sie auf dem oberen und unteren Grenzkreise durch die Ecken eines regulären Dreiecks geht (Fig. 5). (Einmalige Umkreisuug

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

würde den Kreis ergeben.) Um zu erfahren, welche Höhe h vom Erdboden die Kugel überschreiten muss, um diese einfachste geschlossene Curvenform zu durchlaufen, haben wir in $h_1 > r\left(1 - \frac{1}{3n}\sqrt{(\nu^2 - n^2)3}\right)$ einzusetzen: $r = 10$ m; $n = 2$; $\nu = 3$.

Dann ist: $h_{(\frac{3}{2})} > 10\left(1 - \frac{\sqrt{15}}{6}\right)$ m, also $h_{(\frac{3}{2})} > 10(1 - 0{,}64549)$ m $> 3{,}545$ m.

Der Index $(\frac{3}{2})$ bei h bedeutet, dass die Kugel bei 2 maligem Umkreisen auf dem oberen Grenzkreise durch die Eckpunkte eines regulären Dreiecks gehen soll.

Die Werte $\Psi = \frac{3}{4}\pi;\ \frac{3}{5}\pi;\ \frac{4}{5}\pi;\ \frac{5}{6}\pi;\ \frac{4}{7}\pi;\ \frac{5}{7}\pi;\ \frac{6}{7}\pi$ etc. entsprechen sämmtlich den Grenzbedingungen.

Hieraus folgt, dass bei der Bewegung des sphärischen Pendels auf dem oberen Grenzkreise gebildet werden können die Ecken eines:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | regulären | 4-Ecks | bei | 3maligem | Umkreisen | der | Vertikalen. | |
| „ | 5 | „ | „ | 3 u. 4 | „ | „ | „ | „ |
| „ | 6 | „ | „ | 5maligem | | „ | „ | „ |
| „ | 7 | „ | „ | 4, 5 u. 6 | „ | „ | „ | „ u. s. w |

In dem von uns behandelten Thema der Bewegung eines Punktes in der Ebene war (cf. § 12) die einfachste geschlossene Curvenform diejenige, wo auf den Grenzkreisen die Ecken regulärer Siebenecke markiert wurden und zwar nur bei 4maliger Umkreisung des Kreiscentrums. Beim sphärischen Pendel entstehen auf den Grenzkreisen die Ecken von Siebenecken bei 4, 5 und 6maligem Umkreisen der Vertikalen. Wir wollen berechnen, wie hoch sich in diesen drei Fällen mindestens das Pendel erheben muss d. h. die Werte von $h_{(\frac{7}{4})}$; $h_{(\frac{7}{5})}$; $h_{(\frac{7}{6})}$,

Wir setzen also in der allgemeinen Formel (68): $h_1 > r\left(1 - \frac{\sqrt{3(\nu^2 - n^2)}}{3n}\right)$

nach einander: $n = 4$ und $\nu = 7$; $n = 5$ und $\nu = 7$; $n = 6$ und $\nu = 7$, dann ist, wenn r wieder 10 m bedeutet:

$$h_{(\frac{7}{4})} > 10\left(1 - \frac{\sqrt{99}}{12}\right)\text{m};\ h_{(\frac{7}{5})} > 10\left(1 - \frac{\sqrt{72}}{15}\right)\text{m};\ h_{(\frac{7}{6})} > 10\left(1 - \frac{\sqrt{13}}{18}\right)\text{ m oder:}$$

$$h_{(\frac{7}{4})} > 1{,}708\text{ m};\ h_{(\frac{7}{5})} > 4{,}343\text{ m};\ h_{(\frac{7}{6})} > 7{,}997\text{ m}.$$

Hier bedeutet also der Index $(\frac{7}{6})$, dass die Kugel nach 6maligem Umkreisen auf dem oberen (und unteren) Grenzkreise durch die Eckpunkte eines regulären Siebenecks gehen soll. $h_{(\frac{7}{6})}$ muss also den Wert 7,997 m überschreiten, bis es, da wir nur die Pendelbewegung auf der unteren Halbkugel betrachten wollen, seinen Maximalwert 10 m erreicht.

Dieses Wachsen des oberen Grenzkreises bedingt aber ein Abnehmen des unteren Grenzkreises, wie sich durch Differentiation nachweisen lässt, und die Kugel erreicht für $h_{(\frac{7}{6})} = 10$ m bei der unteren Kulmination den kleinsten Wert von $h'_{(\frac{7}{6})}$.

[Unter h' verstehen wir die Entfernung des unteren Grenzkreises vom Erdboden.]

Bei der Lösung der Aufgabe von der Bewegung des sphärischen Pendels bekommt man unter dem $\int$ im Nenner eine Wurzel aus einem Ausdrucke dritten Grades, welcher lautet: $f(\cos\varphi) = \cos^3\varphi + (c_2 - c_1)\cos^2\varphi - \cos\varphi + c_1$, wo $c_1$ und $c_2$ durch den Anfangszustand des Pendels bestimmbare Constanten und $\varphi$ die Neigung des Pendels gegen die Vertikale bedeuten.



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die beiden positiven Wurzeln $\cos\varphi_1$ und $\cos\varphi_2$ der Gleichung $f(\cos\varphi) = 0$ geben an die Maximal- und Minimalneigung des Pendels gegen die Vertikale. Die dritte (neg.) Wurzel $\cos\varphi_3$ habe als absoluten Wert $\cos\varphi'''$.

Dann ist: $\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \cos\varphi''' \cos\varphi_1 - \cos\varphi''' \cos\varphi_2 = -1$. Betrachten wir Maximal- und Minimalneigung als variabel und differentiieren, so ist:

$$-\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \frac{d\varphi_1}{d\varphi_2} + \cos\varphi''' \sin\varphi_1 \frac{d\varphi_1}{d\varphi_2} + \cos\varphi''' \sin\varphi_2 = 0 \text{ oder:}$$

$$\frac{d\varphi_1}{d\varphi_2} = \frac{\sin\varphi_2 (\cos\varphi_1 - \cos\varphi''')}{\sin\varphi_1 (\cos\varphi''' - \cos\varphi_2)}.$$

Führt man hier den sich aus der ersten Gleichung ergebenden Wert von $\cos\varphi''' = \frac{1 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2}{\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2}$ ein, so wird: $\frac{d\varphi_1}{d\varphi_2} = -\frac{\sin\varphi_2 \sin^2\varphi_1}{\sin\varphi_1 \sin^2\varphi_2} = -\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2}$ negativ, d. h. bei wachsender Maximalneigung nimmt die Minimalneigung ab und umgekehrt.

Die Werte von $h_1$ und $h_2$ für die Maximal- und Minimalentfernung der Kugel vom Erdboden ergeben sich aus den Wurzeln $\cos\varphi_1$ und $\cos\varphi_2$ der Gleichung $f(\cos\varphi) = 0$ in Folge der Relationen: $h_1 = r(1 - \cos\varphi_1)$;

$$h_2 = r(1 - \cos\varphi_2).$$

## § 14.

## Berechnung von $\phi$ und $\Psi$.

## Ausführung eines Zahlenbeispiels zur Berechnung von $\Psi$.

Wir kehren zurück zu unserer Aufgabe der Bewegung des materiellen Punktes auf der Ebene. Wir fanden § 8 als Bahngleichung:

$$(69) \quad \begin{cases} \phi - \phi_1 = N\frac{2x}{\pi} + xM + f(x) & (58) \\ r = r_1 - (r_1 - r_2)\sin^2 \mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi} & (36\,a). \end{cases}$$

Führen wir ein den Winkel:

$$(59) \quad \Psi = N + \frac{\pi}{2} \text{ so wird:}$$

$$(70) \quad \begin{cases} \phi - \phi_1 = \frac{2x}{\pi}\Psi + f(x) \\ r = r_1 - (r_1 - r_2)\sin^2 \mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}. \end{cases}$$

Der Winkel $\Psi$ ist aber schon (im § 9) in reeller Form dargestellt, nämlich:

$$(60) \quad \Psi = (a_1 + a_2) - \frac{1}{2}\log q' \left\{ \zeta(a_1, q') + \zeta(a_2, q') \right\}$$

mithin ist in dem Ausdrucke für $\phi - \phi_1$ nur noch $f(x)$ imaginär.

$$f(x) = \frac{i}{2}\log \frac{\vartheta\left(i\frac{K'}{K}a_1 + \frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \vartheta\left(i\frac{K'}{K}a_2 + \frac{\pi}{2} - x\right)}{\vartheta\left(i\frac{K'}{K}a_1 + \frac{\pi}{2} + x\right) \cdot \vartheta\left(\frac{iK'}{K}a_2 + \frac{\pi}{2} + x\right)}.$$

Wir behandeln nur den Teil, der $a_1$ enthält, da sich für $a_2$ die Rechnung ganz ebenso stellt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)=\frac{i}{2}\log\frac{\vartheta\left(\frac{iK'}{K}a_1+\frac{\pi}{2}-x\right)}{\vartheta\left(\frac{iK'}{K}a_1+\frac{\pi}{2}+x\right)}+\frac{i}{2}\log\frac{\vartheta\left(i\frac{K'}{K}a_2+\frac{\pi}{2}-x\right)}{\vartheta\left(\frac{iK'}{K}a_2+\frac{\pi}{2}+x\right)}.$$

Statt $\vartheta(x)$ führen wir ein $\vartheta_3(x)$ durch die Gleichung: $\vartheta\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\vartheta_3(x)$ und setzen

$$\frac{K'}{K}a_1=\xi_1,\text{ so ist: } f_1(x)=\frac{i}{2}\log\frac{\vartheta_3(i\,\xi_1-x)}{\vartheta_3(i\,\xi_1+x)}$$

$$=\frac{i}{2}\log\left(\frac{1+2q\cos 2(\xi_1 i-x)+2q^4\cos 4(\xi_1 i-x)+\ldots}{1+2q\cos 2(\xi_1 i+x)+2q^4\cos 4(\xi_1 i+x)+\ldots}\right).$$

Der Logarithmand lässt sich durch Reihenentwicklung des cos in der Form $\frac{a-bi}{a+bi}$ darstellen, und es ist ferner: $\operatorname{arctg}\frac{b}{a}=\frac{i}{2}\log\frac{a-bi}{a+bi}$. Also ist:

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)=\operatorname{arctg}\frac{b'}{a'}+\operatorname{arctg}\frac{b''}{a''}\text{ berechenbar.}$$

$f(x)$ ist ein periodisches Glied und hat die reelle Form: $\operatorname{arctg}.F(x,a_1)+\operatorname{arctg}.F(x,a_2)\pm 2n\pi$. Die Eigenschaften der Function $f(x)$ sind schon (§ 8) erörtert worden.

Wenn eine beliebige Zeit $(t<T+t_1)$ gegeben ist, so kann man (wie dies in § 7 ausgeführt ist) die Grösse $x<\frac{\pi}{2}$ bestimmen und durch Einsetzen in $\phi-\phi_1=\frac{2x}{\pi}\Psi+f(x)$ $\phi-\phi_1\,(<\Psi)$ finden ausgedrückt durch die Grössen $a_1$, $a_2$, $q'$. $\Psi$ ist zu berechnen aus den Grössen: $a_1$ $a_2$ und $q'$.

$$\sin\operatorname{am}\left(\frac{2K'}{\pi}a_1,k'\right)=\sqrt{\frac{r_{,,,}-p}{r_2+r_{,,,}}};\quad \sin\operatorname{am}\left(\frac{2K'}{\pi}a_2,k'\right)=\sqrt{\frac{r_{,,,}+p}{r_2+r_{,,,}}}.$$

$$q'=\frac{k'^2}{16k}[k^{(2)}]^{\frac{3}{2}}[k^{(4)}]^{\frac{3}{4}}[k^{(8)}]^{\frac{3}{8}}\ldots$$

$$k^{(2)}=\frac{2\sqrt{k}}{1+k};\ k^{(4)}=\frac{2\sqrt{k^{(2)}}}{1+k^{(2)}}\ldots;\quad k^2=\frac{r_1-r_2}{r_1+r_{,,,}};\quad k'^2=\frac{r_2+r_{,,,}}{r_1+r_{,,,}};$$

$r_1$, $r_2$, $r_3=-r_{,,,}$ sind die Wurzeln der Gleichung $\varphi(r)=0$.

Um die Berechnung von $\Psi$ an einem Beispiel durchzuführen, nehmen wir an, das Anziehungscentrum befinde sich in der Entfernung $p=10$ von der Ebene.

Der Radius des äusseren Grenzkreises habe den Wert $R_1=20\sqrt{2}$, der des inneren $R_2=10\sqrt{3}$, so hat man: $r_1=\sqrt{R_1^2+p^2}=30$; $r_2=\sqrt{R_2^2+p^2}=20$. $r_{,,,}$ ergiebt sich aus der Beziehuug: $-p^2=r_1r_2-r_1r_{,,,}-r_2r_{,,,}$; $r_{,,,}=14$.

Die Geschwindigkeiten auf den beiden Kreisen sind (nach § 3): $v_1=\sqrt{\mu(r_2-r_{,,,})}=\sqrt{6\mu}$; $v_2=\sqrt{\mu(r_1-r_{,,,})}=\sqrt{16\mu}$, wo $\frac{\mu}{2}$ die konstante Anziehungskraft bedeutet.

$$k'=\sqrt{\frac{r_2+r_{,,,}}{r_1+r_{,,,}}}=\sqrt{\frac{17}{22}};\ k=\sqrt{\frac{r_1-r_2}{r_1+r_{,,,}}}=\sqrt{\frac{5}{22}}.$$

$$\sin\operatorname{am}\left(\frac{2K'}{\pi}a_1,\ k'\right)=\sin\alpha'=\sqrt{\frac{r_{,,,}-p}{r_2+r_{,,,}}}=\sqrt{\frac{2}{17}};$$

$$\sin\operatorname{am}\left(\frac{2K'}{\pi}a_2,\ k'\right)=\sin\alpha''=\sqrt{\frac{r_{,,,}+p}{r_2+r_{,,,}}}=\sqrt{\frac{12}{17}}.$$



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\alpha' = 20^\circ\ 3'\ 34{,}05''; \qquad \alpha'' = 57^\circ\ 9'\ 28{,}3'';$$

$$q' = \frac{k'^2}{16k}\,[k^{(2)}]^{\frac{1}{2}}\,[k^{(4)}]^{\frac{1}{4}}\ \ldots = 0{,}0915688.$$

Daraus findet man:

$$\frac{K}{K'} = \frac{\log q'}{-M\pi} = \frac{1{,}0382526}{1{,}3643762}.$$

M ist der Modulus der gemeinen Logarithmen.

$$\log \frac{K}{K'} = 9{,}8813687 - 10.$$

Weil k' nahe an 1 liegt, bedient man sich zur Berechnung des Arguments aus der Amplitude der Formel:

$$F(\alpha', k') = \frac{2K}{\pi}\,\mathrm{Log\,tg}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\,\alpha'_{(n)}). \quad \mathrm{Log} = \log.\ \mathrm{nat.}$$

$\alpha'_{(n)}$ ist zu berechnen mittelst der Gleichungen:

$$\sin\,(2\alpha'_{(1)} - \alpha') = k' \sin \alpha'; \quad \sin\,(2\alpha'_{(2)} - \alpha'_{(1)}) = k'_{(1)} \sin \alpha'_{(1)} \ldots$$

$$k'_{(1)} = \frac{2\sqrt{k'}}{1 + k'}.$$

Die Rechnung ist fortzusetzen, bis $k'_{(n)}$ sehr nahe an 1 liegt. Das Argument $a_1$ hängt mit dem Argument $u_1 = F(\alpha', k')$ zusammen durch die Gleichung: $u_1 = \frac{2K'}{\pi}\,a_1$, also ist: $a_1 = \frac{K}{K'}\,\mathrm{Log\,tg}\left(45^\circ + \frac{1}{2}\alpha'_{(n)}\right)$.

Man findet: $\frac{\alpha'_{(n)}}{2} = 9^\circ\ 28'\ 30{,}54''$, $a_1 = 0{,}2564606$ oder $= 14^\circ\ 41'\ 27{,}6''$, ebenso: $a_2 = 0{,}8179407$ oder $= 46^\circ\ 51'\ 52{,}56''$.

Schliesslich hat man noch:

$$\zeta\,(a_1, q') = 2\left\{\frac{2q'}{1-q'^2}\sin 2a_1 + \frac{2q'^2}{1-q'^4}\sin 4a_1 + \frac{2q'^3}{1-q'^6}\sin 6a_1 + \ldots\right\}.$$

$q'^4$ kann man vernachlässigen.

Die Berechnung ergiebt: $\log \left\{\zeta\,(a_1, q') + \zeta\,(a_2, q')\right\} = 9{,}7719648 - 10$ und endlich:

$$\Psi = a_1 + a_2 + \frac{\pi K}{2K'}\left\{\zeta\,(a_1, q') + \zeta\,(a_2, q')\right\} = a_1 + a_2 - \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,q'\left\{\zeta\,(a_1, q') + \zeta\,(a_2, q')\right\}$$

$$= 1{,}0744013 + 0{,}7070553 = 1{,}78145668 \text{ oder } = 102^\circ\ 3'\ 0{,}768''.$$

Es liegt also dieser Wert zwischen den beiden Grenzen:

$$90^\circ \text{ und } 103^\circ\ 55'\ 22{,}8'' \text{ oder: } \frac{\pi}{2} \text{ und } \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

8,3″;

588.

Daraus findet man

M ist der Modulus

Weil k′ nahe an 1 ung des Arguments aus der Amplitude der Formel:

F (α′, k′ = log. nat.

$\alpha'_{(n)}$ ist zu berechnen mi

sin (2 $\alpha'_{(1)}$ — $k'_{(1)}$ sin $\alpha'_{(1)}$ . . .

Die Rechnung ist 1 liegt. Das Argument $a_1$ hängt mit dem Argum die Gleichung: $u_1 = \frac{2K'}{\pi} a_1$, also ist: $a_1 = \frac{K}{K'}$ Log tg

Man findet: $\frac{\alpha'_{(n)}}{2}$ = = 14° 41′ 27,6″, ebenso: $a_2$ = 0,8179407 oder = 46° 5

Schliesslich hat m

$\zeta(a_1, q') = 2 \left\{ \frac{}{1} \right.$ $_6$ sin 6 $a_1$ + . . . $\left. \right\}$.

q″ kann man vernachläs

Die Berechnung e ,7719648 — 10 und endlich:

$\Psi = a_1 + a_2 + \frac{\pi}{2K}$ Log q′ $\{\zeta(a_1, q') + \zeta(a_2, q')\}$

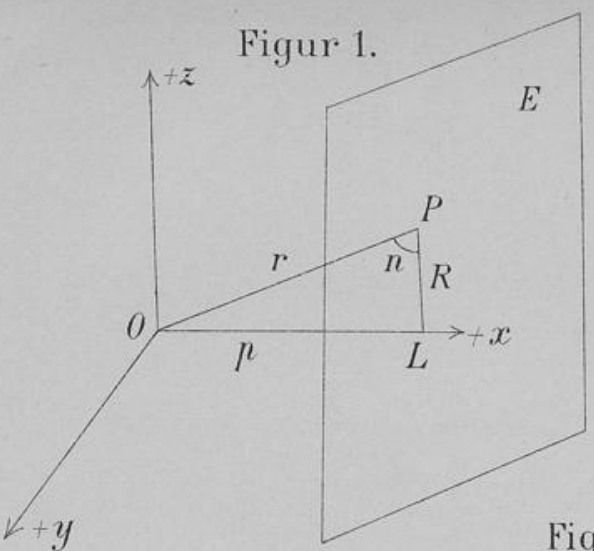
= 1,0744 102° 3′ 0,768″.

Es liegt also dies n:

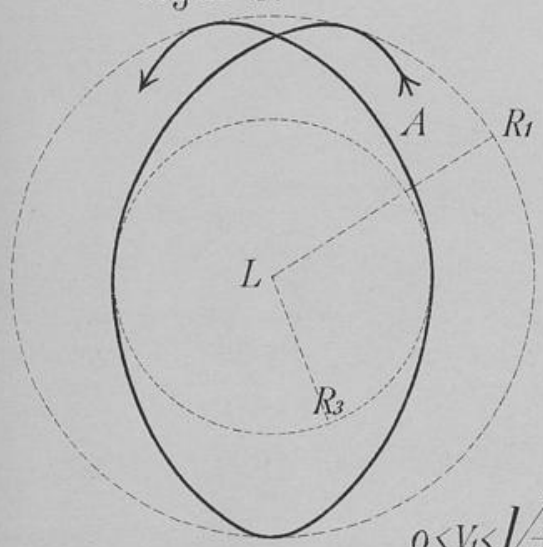
$\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Figur 1.

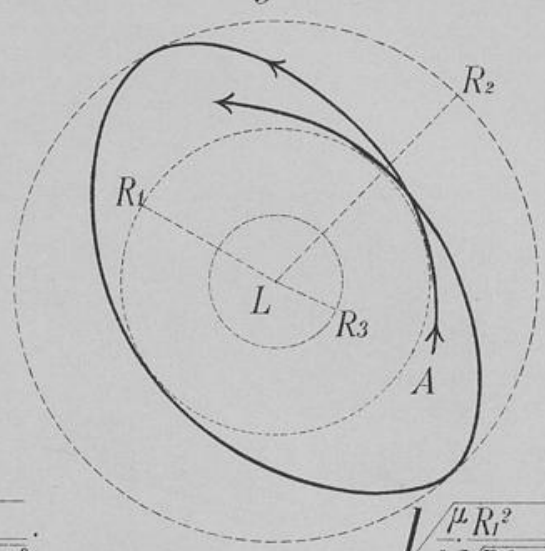



Figur 2.



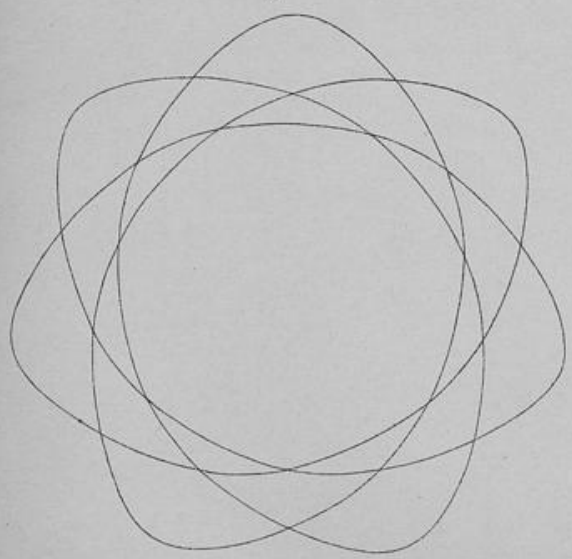

$$0 < V_1 < \sqrt{\frac{\mu R_1^2}{2\sqrt{R_1^2+p^2}}}.$$

Figur 3.

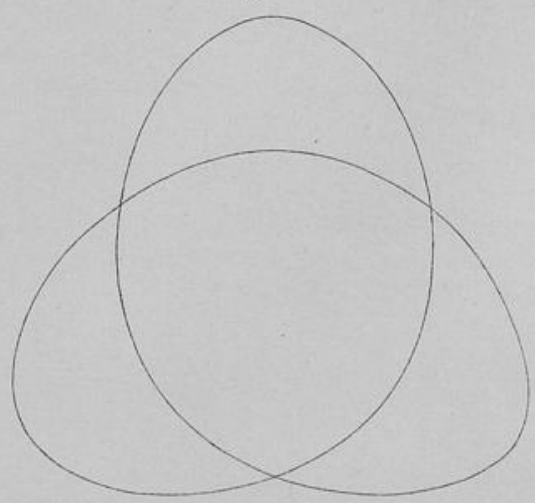



$$\sqrt{\frac{\mu R_1^2}{2\sqrt{R_1^2+p^2}}} < V_1 < \infty.$$

Figur 4.



Figur 5.



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf