Ueber die

Laplace'sche Theorie der Ebbe und Fluth,

I. Theil.

Von

Dr. A. Meyer,
Oberlehrer bei der Realschule zu Essen.

Beilage zum Osterprogramme 1876.

Essen, 1876.
Druck von G. D. Bädeker.

1876. Progr. Nr. 380.

9es (1876)
7

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Landes- u. Stadt-
Bibliothek
Düsseldorf

S Pr. 24
z
S

05.1553.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ueber die Laplace'sche Theorie der Ebbe und Fluth.

I.

Allgemein bekannt unter dem Namen „Ebbe und Fluth" sind die regelmäßigen, periodischen Oscillationen der Meeresfläche, insofern dieselbe sich ungefähr 6 Stunden lang über ihr Niveau erhebt und während der 6 folgenden Stunden wieder auf dasselbe herabsinkt. Der Zeitraum einer solchen doppelten Oscillation beträgt aber nicht genau 24 Stunden, sondern $24^h\ 50'\ 28''$, welcher Zeitraum genau mit dem zweier aufeinander folgenden Mondesculminationen übereinstimmt. Die Höhe der Fluth, d. h. der Unterschied zwischen Niveau des Meeres zur Zeit seines höchsten und des darauf folgenden tiefsten Standes ist ebenfalls, abgesehen von zufälligen begünstigenden oder hemmenden Einflüssen, wie dem der Stürme, von den Mondphasen abhängig; sie ist am höchsten zur Zeit des Neu- oder Vollmondes, am niedrigsten während der Quadraturen. Wir dürfen deshalb die Erscheinung der Ebbe und Fluth als vorwiegend von der Einwirkung des Mondes abhängig betrachten und aus der gegenseitigen Gravitation der beiden Planeten auf einander erklären. Von zwar geringerem, wegen der größern Entfernung, aber doch nicht unerheblichem Einflusse wird auch die Einwirkung der Sonne sein, was aus der Thatsache folgt, daß die Meereserhebung ihre größte Höhe zur Zeit des Neu- oder Vollmondes erreicht, während sie bei den Quadraturen am geringsten ist; im ersteren Falle summiren sich die beiden Fluthen, die des Mondes und die der Sonne, im anderen wirken sie sich entgegen.

Die ausführliche Theorie dieses Phänomens ist von Laplace in der mécanique céleste entwickelt, dessen Darstellung wir uns im Wesentlichen anschließen wollen.

II.

Bedingungen für das Gleichgewicht flüssiger Massen.

Auf eine gegebene flüssige Masse wirken Kräfte ein, die wir nach drei fest angenommenen Coordinatenaxen decomponiren; durch Addition der entsprechenden Componenten erhalten wir dann als wirkend die Kräfte X, Y, Z. Theilt man nun die ganze Masse in kleine Parallelepipeda, deren Seiten parallel den Coordinatenebenen seien, bezeichnet man sodann die Seiten eines solchen mit dx, dy, dz, die als constant gedachte Dichtigkeit mit ρ und die Masse mit dm, so oft

$$dm = \rho dxdydz.$$

Es wirken dann auf das Parallelepiped parallel den Axen die Kräfte

$$Xdm,\ Ydm,\ Zdm.$$

Nun erleiden aber die Seiten des Parallelepiped's durch die umgebende Flüssigkeit einen Druck von Außen nach Innen, und falls dasselbe im Gleichgewicht sein soll, müssen diese Drucke den Kräften Xdm, Ydm, Zdm das Gleichgewicht halten. Sei p der Druck auf die Einheit der oberen Fläche dxdy, so ändert p mit der

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Lage dieser Fläche; an der untern Seite dxdy ist also der Druck auf die Flächeneinheit $= p + \frac{\partial p}{\partial z} dz$. Der Druck auf die ganzen Seiten ist also:

$$pdxdy \text{ und } \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} dz\right) dxdy.$$

Die Differenz dieser beiden Kräfte muß also $= Zdm$ sein, woraus sich die Gleichung ergibt:

$$\frac{\partial p}{\partial z} dzdxdy = Zdm,$$

und da bei flüssigen Körpern der Druck nach allen Seiten gleich ist, so folgt ferner:

$$\frac{\partial p}{\partial y} dydxdz = Ydm,$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} dxdydz = Xdm,$$

woraus sich dann ergibt:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho X; \frac{\partial p}{\partial y} = \rho Y; \frac{\partial p}{\partial z} = \rho Z;$$

folglich:

$$dp = \rho\left\{Xdx + Ydy + Zdz\right\}.$$

Soll es also einen Werth p geben, so muß $\rho\left\{Xdx + Ydy + Zdz\right\}$ ein totales Differential einer Funktion von x, y, z sein; und umgekehrt ist bei Erfüllung dieser Bedingung p das Integral dieser Formel.

Ist nun die Flüssigkeit in ein Gefäß eingeschlossen, so erhält man den Druck, den jeder Punkt der Wand erleidet, indem man in p die Coordinaten desselben (ξ, η, ζ) einsetzt. Dieser Druck ist aber immer durch den Widerstand der Wände gestört; da aber Nichts denselben an der freien Oberfläche zerstört, so muß dort $p = 0$ sein, und man erhält:

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0.$$

Daraus ergibt sich aber, daß die Resultante der auf die Oberfläche wirkenden Kräfte im Gleichgewichtszustande senkrecht zu derselben gerichtet sein muß.

Folgendes sind also die Bedingungen für das Gleichgewicht einer an der Oberfläche freien Flüssigkeit:

1) Es muß $Xdx + Ydy + Zdz$ ein totales Differential sein.
2) Die Resultante aller auf die freie Oberfläche wirkenden Kräfte muß perpendiculär gegen dieselbe wirken.

III.

Allgemeine Gleichungen der Bewegung flüssiger Massen.

Ein Punkt (x, y, z) der Flüssigkeit sei erregt durch Kräfte, deren Componenten X, Y, Z sind. Die Geschwindigkeit desselben nach den Axen sei u, v, w, Funktionen von x, y, z, t. Bei einer Aenderung von t in $t + dt$ ändern sich die Coordinaten des Punktes in $x + udt$, $y + vdt$, $z + wdt$. Um also die Aenderung der Größen u, v, w desselben Moleküles zu erhalten, muß man nach t, x, y, z differenziren und udt, vdt, wdt als Zuwachs der letzten Variabeln nehmen, dann erhält man:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} udt + \frac{\partial u}{\partial y} vdt + \frac{\partial u}{\partial z} wdt$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial t} dt + \frac{\partial v}{\partial x} udt + \frac{\partial v}{\partial y} vdt + \frac{\partial v}{\partial z} wdt$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial t} dt + \frac{\partial w}{\partial x} udt + \frac{\partial w}{\partial y} vdt + \frac{\partial w}{\partial z} wdt.$$

Wir theilen nun die Flüssigkeit wieder, wie vorhin, in Elemente, deren Volumen bei constanter Dichtigkeit $= \rho dxdydz$ ist. Ist nun p der Druck auf die Einheit der Oberfläche, den die umgebende Flüssigkeit ausübt, so sind ρ und p ebenso wie u, v, w unbekannte Funktionen von x, y, z, t.

Nach dem d'Alembert'schen Principe sind nun 3 Gleichungen gegeben.

Wirken die Kräfte X, Y, Z auf das Molekül, so gehen in der Zeit dt die Kräfte Xdt — du, Ydt — dv, Zdt — du verloren; denn du, dv, dw sind der Zuwachs der Geschwindigkeit in diesem Zeitmomente, und Xdt, Ydt, Zdt würden durch X, Y, Z hervorgebracht, wenn das Molekül frei wäre. Bezeichnet man nun mit X', Y', Z' die beschleunigenden Kräfte, so ergeben sich die Gleichungen:

$$X' = X - \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} u - \frac{\partial u}{\partial y} v - \frac{\partial u}{\partial z} w$$

$$Y' = Y - \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} u - \frac{\partial v}{\partial y} v - \frac{\partial v}{\partial z} w$$

$$Z' = Z - \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial w}{\partial x} u - \frac{\partial w}{\partial y} v - \frac{\partial w}{\partial z} w.$$

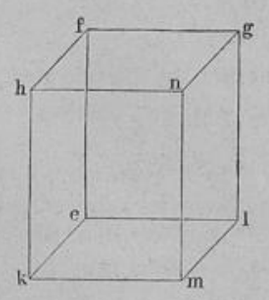
Nun würde nach dem d'Alembert'schen Principe Gleichgewicht Statt finden, wenn alle Moleküle der Flüssigkeit erregt wären durch Kräfte, die ihnen die verlorene Geschwindigkeit ertheilen könnten. Es müssen also die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen für Flüssigkeiten erfüllt sein, wenn wir X', Y', Z' als beschleunigende Kräfte ansehen, die nach den Axen auf alle Punkte eines Elementes wirken, und dann ist:

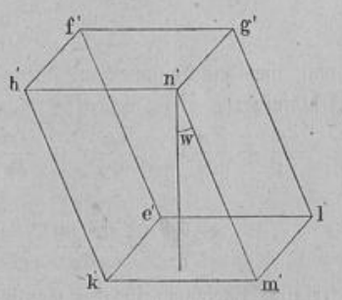
$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho X'; \frac{\partial p}{\partial y} = \rho Y'; \frac{\partial p}{\partial z} = \rho Z',$$

oder:

$$1. \quad \begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = X - \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} u - \frac{\partial u}{\partial y} v - \frac{\partial u}{\partial z} w \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = Y - \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} u - \frac{\partial v}{\partial y} v - \frac{\partial v}{\partial z} w \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = Z - \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial w}{\partial x} u - \frac{\partial w}{\partial y} v - \frac{\partial w}{\partial z} w. \end{cases}$$

Eine neue Gleichung der Bewegung ergibt sich daraus, daß das Parallelepiped mit der Zeit t + dt seine Gestalt und Dichtigkeit, aber nicht sein Volumen ändert. Berechnen wir zunächst dieses Volumen:





Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es sei mlekngfh des Parallelepiped zur Zeit t; die Coordinaten des Punktes m sind (x, y, z) aber nach der Zeit t + dt, (x + udt, y + vdt, z + wdt). Das sind also die Coordinaten von m'. Ferner sind die Coordinaten von n — x, y, z + dz; dann sind aber die von $n' - x + udt + \frac{\partial u}{\partial z} dzdt, y + vdt + \frac{\partial v}{\partial z} dzdt,$ $z + dz + wdt + \frac{\partial w}{\partial z} dzdt$; daraus folgt aber sofort für die Linie m'n'

$$m'n' = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 dz^2dt^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 dz^2dt^2 + \left(dz + \frac{\partial w}{\partial z} dzdt\right)^2}$$

und indem man die kleinen Größen dritter Ordnung vernachlässigt,

$$m'n' = dz + \frac{\partial w}{\partial z} dzdt.$$

Ebenso erhält man die Linie e'f', indem man in m und n jetzt x + dx und y + dy für x und y einsetzt; dadurch wird

$$e'f' = dz + \frac{\partial w}{\partial z} dzdt + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} dxdzdt + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y} dydzdt$$

und durch Vernachlässigung der Größen dritter Ordnung

$$e'f' = dz + \frac{\partial w}{\partial z} dzdt;$$

folglich ist m'n' = e'f' und ebenso = k'h' = g'l'. Indem man nun z mit y, w mit v vertauscht, erhält man:

$$m'l' = dy + \frac{\partial v}{\partial y} dydt$$

und dann $$m'l' = k'e' = h'f' = n'g'.$$

Vertauscht man endlich z mit x und w mit u in dem Werthe von m'k', so folgt:

$$m'k' = dx + \frac{\partial u}{\partial x} dxdt;$$

und ebenso $$m'k' = n'h' = g'f' = l'e'.$$

Die neue Form ist also wieder ein Parallelepipedon; dasselbe ist aber schiefwinkelig. Sein Volumen ist:

$$m'n' \cdot m'l' \cdot m'k' \sin \vartheta \cdot \sin \omega.$$

Im ursprünglichen Parallepipedon waren ϑ und $\omega = \frac{\pi}{2}$, und da sie sich jetzt nur durch Größen zweiter Ordnung unterscheiden, so kann man die sin = 1 setzen und erhält das Volumen $m'n' \cdot m'l' \cdot m'k' = dxdydz. \left\{1 + \frac{\partial u}{\partial x} dt + \frac{\partial v}{\partial y} dt + \frac{\partial w}{\partial z} dt\right\}$. Da auch die Dichtigkeit ρ eine Funktion von x, y, z, t ist, so wird dieselbe bei t + dt, wo x, y, z sich in x + udt, y + vdt, z + wdt ändern.

$$\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt + \frac{\partial \rho}{\partial x} udt + \frac{\partial \rho}{\partial y} vdt + \frac{\partial \rho}{\partial z} wdt.$$

Multiplicirt man nun das Volumen mit dieser Dichtigkeit und setzt das Produkt gleich der ursprünglichen Masse ρ dx dy dz, so folgt:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} u + \frac{\partial \rho}{\partial y} v + \frac{\partial \rho}{\partial z} w + \frac{\partial u}{\partial x} \rho + \frac{\partial v}{\partial y} \rho + \frac{\partial w}{\partial z} \rho = 0,$$

oder:

2) $$\frac{d\rho}{dt} + \frac{d \cdot \rho u}{dx} + \frac{d \cdot \rho v}{dy} + \frac{d \cdot \rho w}{dz} = 0.$$

Dies ist die relative Gleichung für die Continuität der Flüssigkeit.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Angenommen, es sei $udx + vdy + wdz$ ein totales Differential $= d\varphi$; dann ist

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x};\quad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y};\quad w = \frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Durch diese Substitution wird die Gleichung 2):

$$3)\qquad \frac{d\rho}{dt} + \frac{d\cdot\rho\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{dx} + \frac{d\cdot\rho\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{dy} + \frac{d\cdot\rho\frac{\partial\varphi}{\partial z}}{dz} = 0.$$

Indem man nun $udx + vdy + wdz = d\varphi$ nach t, x, y, z differenzirt, erhält man:

$$\frac{\partial u}{\partial t}dx + \frac{\partial v}{\partial t}dy + \frac{\partial w}{\partial t}dz = \frac{d\cdot d\varphi}{dt} = d\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial x}dy + \frac{\partial w}{\partial x}dz = d\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial y}dz = d\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}dx + \frac{\partial v}{\partial z}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz = d\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

Addire ich die Gleichungen 1), nachdem ich die 1. mit dx, die 2. mit dy, die 3. mit dz multiplicirt habe, so folgt:

$\frac{1}{\rho}dp = Xdx + Ydy + Zdz - d\frac{\partial\varphi}{\partial t} - u\cdot d\frac{\partial\varphi}{\partial x} - v\cdot d\frac{\partial\varphi}{\partial y} - w\cdot d\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ und indem ich für u, v, w die Werthe $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}$ substituire,

$$\frac{1}{\rho}dp = Xdx + Ydy + Zdz - d\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}d\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\}$$

Ich darf aber $Xdx + Ydy + Zdz = dV$, einem totalen Differential von V, einer Funktion von x, y, z, t nach x, y, z setzen, und erhalte dann durch Integration der obigen Gleichung:

$$4)\qquad \int\frac{dp}{\rho} = V - \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\}$$

Eigentlich müßte man noch eine unbekannte willkürliche Funktion in t zufügen; allein diese kann in der unbekannten Größe φ enthalten sein.

Da das hier in Betracht kommende Wasser eine unzusammendrückbare Flüssigkeit ist, so ist $\rho = \text{const}$; die Gleichung (4) gibt also den Werth von p, da $\int\frac{dp}{\rho} = \frac{p}{\rho}$ ist, vermittels des Werthes von φ, der aus der Gleichung (3) folgt. Diese wird in diesem Falle:

$$0 = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\rho}{\partial y}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\rho}{\partial z}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \rho\left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right\}$$

woraus, wenn $\rho = \text{const.}$ ist,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Die Voraussetzung, daß $udx + vdy + wdz$ ein totales Differential sei, ist immer statthaft, wenn es nur in einem Zeitmomente der Fall ist. Gesetzt zur Zeit $t = t'$ sei $udx + vdy + wdz = d\varphi'$, oder $u = \frac{\partial\varphi'}{\partial x}$; $v = \frac{\partial\varphi'}{\partial y}$; $w = \frac{\partial\varphi'}{\partial z}$; es sei ferner für $t = t'$: $u' = \frac{\partial u}{\partial t}$; $v' = \frac{\partial v}{\partial t}$; $w' = \frac{\partial w}{\partial t}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wächst nun t von t' bis $t'+dt'$, so wird bei Vernachlässigung des Quadrates der kleinen Größe dt

$$u = \frac{\partial\varphi'}{\partial x} + u'dt'; \; v = \frac{\partial\varphi'}{\partial y} + v'dt'; \; w = \frac{\partial\varphi'}{\partial z} + w'dt';$$

und man erhält zur Zeit $t'+dt'$

$$udx + vdy + wdz = d\varphi' + \left\{u'dx + v'dy + w'dz\right\}dt';$$

also ist $udx + vdx + wdz$ wieder ein totales Differential, sobald es $u'dx + v'dy + w'dz$ ist; dies erkennt man sofort, sobald man die Werthe von u, v, w, $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$ in die Gleichungen (1) einsetzt; diese werden dann:

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial x} = X - u' - \frac{\partial\varphi'}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x^2} - \frac{\partial\varphi'}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2\varphi'}{\partial y\partial x} - \frac{\partial\varphi'}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2\varphi'}{\partial z\partial x}$$

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial y} = Y - v' - \frac{\partial\varphi'}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x\partial y} - \frac{\partial\varphi'}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2\varphi'}{\partial y^2} - \frac{\partial\varphi'}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2\varphi'}{\partial z\partial y}$$

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial z} = Z - w' - \frac{\partial\varphi'}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x\partial z} - \frac{\partial\varphi'}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2\varphi'}{\partial y\partial z} - \frac{\partial\varphi'}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2\varphi'}{\partial z^2}.$$

Multiplicirt man die erste Gleichung mit dx, die zweite mit dy, die dritte mit dz, addirt dieselben und setzt $dV = Xdx + Ydy + Zdz$, so erhält man:

$$\frac{1}{\rho}\,dp = dV - u'dx - v'dy - w'dz - \frac{1}{2}\,d\left\{\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi'}{\partial z}\right)^2\right\}$$

woraus dann:

$$u'dx + v'dy + w'dz = \frac{dp}{\rho} - dV + \frac{1}{2}\,d\left\{\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi'}{\partial z}\right)^2\right\}.$$

Da nun ρ constant ist, folgt, daß $u'dx + v'dy + w'dz$ oder daß auch $udx + vdy + wdz$ zur Zeit $t'+dt'$ ebenfalls ein totales Differential ist.

IV.

Gleichungen für die Rotation der Flüssigkeit, die einen rotirenden Körper bedeckt.

Nachdem in III. die beiden Bewegungsgleichungen (3) und (4) gefunden sind, sei der Fall betrachtet, die Flüssigkeit bedecke einen rotirenden Körper. Es sei die x-Axe die Rotationsaxe und n die Winkelgeschwindigkeit. Ein Wassermolekül steht also unter dem Einflusse der Centrifugalkraft, und die Componenten derselben nach der y- und z-Axe sind yn^2 und zn^2. Es wird also $dV = Xdx + Ydy + Zdz$ noch vermehrt um $n^2(ydy + zdz)$ und die beiden Gleichungen werden:

$$\frac{\partial p}{\rho} = dV + n^2(ydy + zdz)$$

$$0 = dt\,\frac{\partial\rho}{\partial t} + udt\,\frac{\partial\rho}{\partial x} + vdt\,\frac{\partial\rho}{\partial y} + wdt\,\frac{\partial\rho}{\partial z}.$$

Da aber bei einer freien Oberfläche $\partial p = 0$ ist, wird die erste Gleichung in diesem Falle:

$$0 = dV + n^2(ydy + zdz).$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es sei nun am Anfange der Rotation r die Entfernung eines bestimmten Moleküles vom Mittelpunkte, $\sphericalangle \vartheta$ der Winkel zwischen r und der x-Axe, und $\sphericalangle \omega$ der Winkel zwischen der rx- und ry-Ebene. Diese Größen mögen sich nach der Zeit t geändert haben in $r + \alpha s$, $\vartheta + \alpha u$, $nt + \omega + \alpha v$, wo αs, αu, αv kleine Größen sind, deren Quadrate und Produkte vernachlässigt werden können; es ist also nach der Zeit t:

$$x = (r + \alpha s)\cos(\vartheta + \alpha u)$$
$$y = (r + \alpha s)\sin(\vartheta + \alpha u)\cos(nt + \omega + \alpha v)$$
$$z = (r + \alpha s)\sin(\vartheta + \alpha u)\sin(nt + \omega + \alpha v)$$

Substituire ich diese Werthe in die Gleichung des Gleichgewichtes $\frac{\partial p}{\rho} = Xdx + Ydy + Zdz$, worin ich hier die nach dem d'Alembert'schen Principe verlorenen Kräfte $X - \frac{d^2x}{dt^2}, Y - \frac{d^2y}{dt^2}, Z - \frac{d^2z}{dt^2}$ einzusetzen habe, also in die Gleichung:

$$\frac{\partial p}{\rho} = dV - \frac{d^2x}{dt^2}dx - \frac{d^2y}{dt^2}dy - \frac{d^2z}{dt^2}dz;$$

oder:

$$dV - \frac{\partial p}{\rho} = \frac{d^2x}{dt^2}dx - \frac{d^2y}{dt^2}dy - \frac{d^2z}{dt^2}dz;$$

so erhalte ich, indem ich die Ausrechnung ihrer großen Ausdehnung halber nicht anführe:

$$\alpha r^2 d\vartheta\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2n\sin\vartheta\cos\vartheta\frac{\partial v}{\partial t}\right\} + \alpha r^2 d\omega\left\{\sin^2\vartheta\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2n\sin\vartheta\cos\vartheta\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{2n\sin^2\vartheta}{r}\frac{\partial s}{\partial t}\right\}$$
$$+ \alpha dr\left\{\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - 2nr\frac{\partial v}{\partial t}\right\} = \frac{n^2}{2}d\left\{(r + \alpha s)\sin(\vartheta + \alpha u)\right\}^2 + dV - \frac{\partial p}{\rho}.$$

Nun ist an der Oberfläche $\partial p = 0$ und ferner im Gleichgewichtszustande $d\vartheta$, $d\omega$ und $dr = 0$; in diesem Falle also wird obige Gleichung:

$$0 = \frac{n^2}{2}d\left\{(r + \alpha s)\sin(\vartheta + \alpha u)\right\}^2 + (dV),$$

indem mit (dV) der Werth von dV für diesen Zustand bezeichnet werden soll. Es bleibt nun zu untersuchen, wodurch (dV) sich bei der Bewegung in dV ändert. Es sei $\alpha \cdot dV'$ der Theil von dV, der von der Aktion der wirkenden Kräfte herrührt. Diese suchen das Molekül zu heben, aber die Schwerkraft g, der dasselbe ebenfalls unterworfen ist, zieht es um $\alpha g \cdot dy$ herab, wenn ich mit αy die Erhebung desselben über die Gleichgewichtslage bezeichne; denn die Wirkung der Schwere ist g multiplicirt mit dem Elemente ihrer Richtung, und diese ist ungefähr im entgegengesetzten Sinne von αy gerichtet. Daraus folgt also, daß

$$dV = (dV) - \alpha g \cdot dy + \alpha \cdot dV'.$$

Tritt nun die Rotation ein, so erhebt sich das Molekül der Oberfläche über die Gleichgewichtslage, und zwar beträgt die Erhebung parallel der yz-Ebene d. h. der durch den Aequator gelegten Ebene $r \cdot \sin\vartheta \cdot n^2 \cdot dy$ und also im Sinne von r: $r \cdot \sin^2\vartheta \cdot n^2 \cdot dy$. Um diese Größe wächst also $\frac{n^2}{2}d\left\{(r + \alpha s)\sin(\vartheta + \alpha u)\right\}^2$; indessen kann man dieselbe leicht gegen $-\alpha g \cdot dy$ vernachlässigen, da das Verhältniß der Centrifugalkraft $n^2 r$ zur Schwere g ein sehr kleines $= \frac{1}{289}$ ist. Endlich kann man noch den Radius r als constant an der Meeresoberfläche ansehen, da sich diese nur sehr wenig von einer Kugelfläche unterscheidet. Setzt man also $dr = 0$, so wird die obige Gleichung für die Meeresoberfläche:

$$(5)\quad r^2 d\vartheta\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2n\cdot\sin\vartheta\cdot\cos\vartheta\frac{\partial v}{\partial t}\right\} + r^2 d\omega\left\{\sin^2\vartheta\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2n\sin\vartheta\cos\vartheta\frac{\partial u}{\partial t} + 2n\frac{\sin^2\vartheta}{r}\frac{\partial s}{\partial t}\right\} = -g\cdot dy + dV'.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Um nun die Gleichung für die Continuität zu erhalten, betrachte ich am Anfange der Bewegung ein rechtwinkeliges Parallelepiped A, dessen Höhe $= dr$, Breite $= r \cdot \sin \vartheta \, d\omega$ und Länge $= r \, d\vartheta$ ist. Es seien r', ϑ', ω' die Werthe von r, ϑ, ω nach der Zeit t. Das durch die Bewegung schiefwinkelig gewordene Parallelepiped (vergl. §. III.) sei B. Legt man durch die obern Kanten von B Ebenen, die denen von A parallel sind, so entsteht ein neues rechtwinkeliges Parallelepiped $C = B$, dessen Höhe aber gleich der Differenz von r' ist, da nur r sich ändert; diese ist also $= \frac{\partial r'}{\partial r} dr$. Die Basis dieses neuen Parallelepipeds erhalte ich, wenn ich B durch eine zur Basis von A parallele Ebene durchschneide. Für die Moleküle dieses Schnittes bleibt der Werth von r' derselbe, und es folgt

$$\frac{\partial r'}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial r'}{\partial \omega} d\omega + \frac{\partial r'}{\partial r} dr = 0.$$

Sei p die Länge und q die Breite dieses Durchschnittsparallelogramms; lege ich nun durch die Ecken von q zwei Linien parallel zur Kante $r \, d\vartheta$ von A, so erhalte ich ein neues Parallelogramm gleich dem vorigen, dessen Basis parallel zu $r \, d\vartheta$ ist. Nun wird aber diese Basis gebildet durch Moleküle der Länge, für die der Werth von r immer derselbe ist, und es ergibt sich leicht, daß die Höhe dieses Parallelogramms, d. h. die Breite von B, die Aenderung von $r \cdot \sin \vartheta \cdot d\omega$ ist, indem ich r' und ϑ' constant setze, und ich erhalte als Breite:

$$r' . \sin \vartheta' \left\{ \frac{\partial \omega'}{\partial \omega} d\omega + \frac{\partial \omega'}{\partial r} dr \right\}$$

und ferner die Gleichung:

$$(\alpha) \qquad 0 = \frac{\partial r'}{\partial \omega} d\omega + \frac{\partial r'}{\partial r} dr.$$

Die Basis dieses Parallelogramms ist gleich dem Durchschnitt desselben durch eine Linie, die parallel zu $r \cdot \sin \vartheta \cdot d\omega$ ist. Dieser Schritt ist gebildet durch Moleküle des Parallelepipeds A, für die r' und ω' constant sind, und ich erhalte also für die Länge:

$$r' \cdot \left\{ \frac{\partial \vartheta'}{\partial r} dr + \frac{\partial \vartheta'}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial \vartheta'}{\partial \omega} d\omega \right\}$$

und zugleich die beiden Gleichungen:

$$(\beta) \qquad 0 = \frac{\partial r'}{\partial r} dr + \frac{\partial r'}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial r'}{\partial \omega} d\omega$$

$$(\gamma) \qquad 0 = \frac{\partial \omega'}{\partial r} dr + \frac{\partial \omega'}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial \omega'}{\partial \omega} d\omega.$$

Ich erhalte also die Masse des Parallelepipeds durch Multiplication von Höhe, Länge, Breite und Dichtigkeit ρ. Zu diesem Zwecke eleminire ich aber zunächst dr, $d\vartheta$, $d\omega$ mit Hülfe der 3 Gleichungen (α), (β), (γ), indem ich setze:

$$\beta = \frac{\partial r'}{\partial r} \cdot \frac{\partial \vartheta'}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial \omega'}{\partial \omega} - \frac{\partial r'}{\partial r} \cdot \frac{\partial \vartheta'}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega'}{\partial \vartheta} + \frac{\partial r'}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial \vartheta'}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega'}{\partial r}$$

$$- \frac{\partial r'}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial \vartheta'}{\partial r} \cdot \frac{\partial \omega'}{\partial \omega} + \frac{\partial r'}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \vartheta'}{\partial r} \cdot \frac{\partial \omega'}{\partial \vartheta} - \frac{\partial r'}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \vartheta'}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial \omega'}{\partial r}.$$

Dadurch erhalte ich die Masse von $B = \beta \cdot r'^2 \sin \vartheta' \cdot dr \cdot d\vartheta \cdot d\omega \cdot \rho$; die Masse von A war aber: $r^2 \cdot \sin \vartheta \cdot dr \cdot d\vartheta \cdot d\omega \, (\rho)$, wenn (ρ) die ursprüngliche Dichtigkeit ist. Da aber die Masse gleich geblieben, so erhalte ich als Gleichung der Continuität:

$$\rho \cdot \beta \cdot r'^2 \sin \vartheta' = (\rho) \, r^2 \cdot \sin \vartheta.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Für den gegenwärtigen Fall ist $r' = r + \alpha s$; $\vartheta' = \vartheta + \alpha u$; $\omega' = nt + \omega + \alpha v$, und ich erhalte also durch Vernachlässigung der Größen von der Ordnung α^2

$$\beta = 1 + \alpha \frac{\partial s}{\partial r} + \alpha \frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \alpha \frac{\partial v}{\partial \omega};$$

denn nur der erste Summand von β hat den Werth $\left(1 + \alpha\frac{\partial s}{\partial r}\right) \cdot \left(1 + \alpha\frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right) \cdot \left(1 + \alpha\frac{\partial v}{\partial \omega}\right)$, während alle andern $= 0$ sind. Setzen wir nun voraus, daß die primitive Dichtigkeit (ρ) sich nach der Zeit t in $(\rho) + \alpha\rho'$ ändere, so gibt die Gleichung für die Continuität:

$$0 = \left\{(\rho) + \alpha\rho'\right\} \cdot \left(1 + \alpha\frac{\partial s}{\partial r} + \alpha\frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \alpha\frac{\partial v}{\partial \omega}\right) \cdot (r^2 + 2r\alpha s) \cdot \sin(\vartheta + \alpha u) - (\rho) r^2 \cdot \sin\vartheta$$

oder:

$$0 = \left\{(\rho)\left(1 + \alpha\frac{\partial s}{\partial r} + \alpha\frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \alpha\frac{\partial v}{\partial \omega}\right) + \alpha\rho'\right\}(r^2 + 2r\alpha s) \cdot \sin(\vartheta + \alpha u) - (\rho) r^2 \cdot \sin\vartheta$$

oder:

$$0 = \left\{(\rho) r^2 \cdot \left(1 + \alpha\frac{\partial s}{\partial r} + \alpha\frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \alpha\frac{\partial v}{\partial \omega}\right) + \alpha\rho' r^2 + 2r\alpha s(\rho)\right\}(\sin\vartheta + \alpha u\cos\vartheta)$$

da
$$\sin(\vartheta + \alpha u) = \sin\vartheta \cdot \cos\alpha u + \cos\vartheta \cdot \sin\alpha u$$

und
$$\cos\alpha u = 1 - \frac{\alpha^2 u^2}{2!} + \frac{\alpha^4 u^4}{4!} \mp \cdots = 1$$

und
$$\sin\alpha u = \alpha u - \frac{\alpha^3 u^3}{3!} \pm \cdots\cdots = \alpha u$$

$$0 = \left\{(\rho) r^2 + \alpha(\rho) r^2\left(\frac{\partial s}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \frac{\partial v}{\partial \omega}\right) + \alpha\rho' r^2 + 2r\alpha s(\rho)\right\} + \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}(\rho) r^2 \alpha u - (\rho) r^2$$

$$0 = (\rho) r^2\left(\frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \frac{\partial v}{\partial \omega} + \frac{u \cdot \cos\vartheta}{\sin\vartheta}\right) + \rho' r^2 + (\rho)\left\{r^2\frac{\partial s}{\partial r} - 2rs\right\}$$

$$0 = r^2\left\{\rho' + (\rho)\left(\frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \frac{\partial v}{\partial \omega} + \frac{u \cdot \cos\vartheta}{\sin\vartheta}\right)\right\} + (\rho)\frac{\partial \cdot r^2 s}{\partial r}.$$

Wenden wir nun diese Gleichung für die Continuität der Flüssigkeit auf die Oscillationen des Meeres an, so haben wir, da wir seine Masse als homogen betrachten, $\rho' = 0$ und die Gleichung geht über in:

$$0 = \frac{\partial \cdot r^2 s}{\partial r} + r^2\left\{\frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \frac{\partial v}{\partial \omega} + \frac{u \cdot \cos\vartheta}{\sin\vartheta}\right\}.$$

Nun darf aber auch s gegen u und v vernachlässigt werden. Angenommen, die Meerestiefe γ (wo γ eine vom Gesetze der Tiefe abhängige Funktion von ϑ und ω ist) sei sehr klein gegenüber dem Erdradius r. Integrirt man nun die obige Gleichung vom Boden des Meeres bis zu seiner Oberfläche, d. h. von $(r - \gamma)$ bis r, so erhält man:

$$r^2 s + r^2 \int \left\{\cdots\right\} dr + 2\int r\left\{\cdots\right\} dr$$

woraus

$$s = -\int_{r-\gamma}^{r}\left\{\cdots\right\} dr - \frac{2}{r^2}\int_{r-\gamma}^{r} r\left\{\cdots\right\} dr.$$

Es ist also s gleich der Summe zweier Funktionen, deren erste von r unabhängig ist. Beide sind aber äußerst klein. Die Schätzung der letzten Funktion ergibt, daß sie von der Kleinheit $\frac{\gamma}{r}$ ist; aber auch die erste ist sehr klein. Aendern sich nämlich die $\measuredangle\,\vartheta$ und ω in $\vartheta + \alpha u$ und $nt + \omega + \alpha v$, so wird die Zunahme

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

von r gegen die der Winkel, d. h. gegen αu und αv sehr klein sein. Die Ordnung dieser Kleinheit bestimmt sich leicht. Gehe ich auf einem Ellipsoide von einem Punkte zu einem benachbarten über, so ist die Zunahme des Radius von der Ordnung $d\vartheta \cdot d\omega \cdot e$ (wo e die Excentricität). Beim Kreise ist $e = 0$, folglich auch $dr = 0$. Es ist also klar, daß die Aenderung der Entfernung eines Molekülés vom Erdcentrum von der Kleinheit des Produktes $e \cdot \alpha u \cdot \alpha v$ ist. Die erste Funktion ist also von derselben Kleinheit, so daß s im Allgemeinen vernachlässigt werden darf. In Folge dessen wird die Gleichung (5).

$$(6)\quad r^2 d\vartheta \left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2n \sin\vartheta \cdot \cos\vartheta \frac{\partial v}{\partial t}\right\} + r^2 d\omega \left\{\sin^2\vartheta \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2n \sin\vartheta \cdot \cos\vartheta \frac{\partial u}{\partial t}\right\} = -gdy + \partial V'.$$

Aus der Gleichung $0 = \frac{\partial \cdot r^2 s}{\partial r} + r^2 \left\{\frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \frac{\partial v}{\partial \omega} + \frac{u \cdot \cos\vartheta}{\sin\vartheta}\right\}$ läßt sich noch eine andere Relation für die Bewegung des Meeres ableiten. Durch Integration nach r vom Meeresboden bis zur Oberfläche desselben erhält man nämlich:

$$0 = r^2 s - (r^2 s) + r^2 \gamma \left\{\frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \frac{\partial v}{\vartheta \omega} + \frac{u \,.\, \cos\vartheta}{\sin\vartheta}\right\}$$

wo $(r^2 s)$ der Werth von $r^2 s$ an der untern Integrationsgränze, d. h. am Meeresboden ist. Es ist aber die Funktion $r^2 s - (r^2 s)$ ungefähr $= r^2 \left\{ s - (s) \right\}$ plus einem Produkte, worin γ und (s) vorkommen, das aber wegen der Kleinheit dieser beiden Faktoren vernachlässigt werden darf, so daß die Gleichung besteht:

$$r^2 s - (r^2 s) = r^2 \left\{ s - (s) \right\}.$$

Nun war vorausgesetzt, daß die Meerestiefe γ eine Funktion der $\sphericalangle\, \vartheta$ und ω sei. Entspricht nun der $\sphericalangle\, \vartheta$ und $nt + \omega$ die Tiefe γ, so ist die den Winkeln $\vartheta + \alpha u$ und $nt + \omega + \alpha v$, wenn ich beide Winkel von einem festen Punkte eines bestimmten Meridians an zähle, entsprechende Tiefe $= \gamma + \alpha u \frac{\partial \gamma}{\partial \vartheta} + \alpha v \frac{\partial \gamma}{\partial \omega} + \alpha y$, wo αy die durch die Bewegung erzeugte Erhebung des Wassers über das Gleichgewichtsniveau ist. Dieselbe Tiefe kann aber auch durch $\gamma + \alpha \left\{ s - (s) \right\}$ ausgedrückt werden, so daß die Gleichung entsteht:

$$s - (s) = y + u \frac{\partial \gamma}{\partial \vartheta} + v \frac{\partial \gamma}{\partial \omega}.$$

Durch Substitution dieses Werthes in die Gleichung:

$$0 = r^2 \left\{ s - (s) \right\} + r^2 \gamma \left\{\frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \frac{\partial v}{\partial \omega} + \frac{u \cdot \cos\vartheta}{\sin\vartheta}\right\}$$

entsteht dann die Gleichung:

$$(7)\qquad y = -\frac{\partial \cdot \gamma u}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \cdot \gamma v}{\partial \omega} - \frac{\gamma \cdot u \cdot \cos\vartheta}{\sin\vartheta}.$$

V.

Ebbe und Fluth.

Die Meerestiefe sei, wie vorhin $= \gamma$, einer Funktion von ϑ und ω, wo ϑ die geographische Breite eines Molekülés dm und ω dessen Länge von einem bestimmten Meridian an ist; γ sei sehr klein im Verhältnisse zum Erdradius, der $= 1$ sei. Durch die Bewegung hatte sich dm um αy über die Gleichgewichtslage erhoben, in Folge dessen sich ϑ in $\vartheta + \alpha u$ und ω in $\omega + \alpha v$ geändert hatten. Dann bestehen also die beiden oben entwickelten Gleichungen:

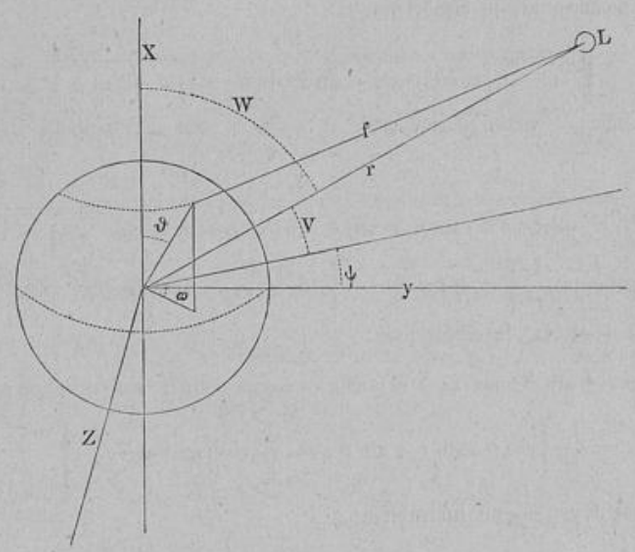
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$(1) \qquad y = -\frac{\partial \cdot \gamma u}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \cdot \gamma v}{\partial \omega} - \frac{\gamma \cdot u \cdot \cos \vartheta}{\sin \vartheta};$$

$$(2) \qquad d\vartheta \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2n \frac{\partial v}{\partial t} \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \right\} + d\omega \left\{ \sin^2 \vartheta \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2n \frac{\partial u}{\partial t} \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \right\} = - g dy + dV'.$$

dy und dV′ sind nur von ϑ und ω abhängig, und gdy beruht auf der Attraktion des Erdcentrums auf das Molekül dm, und dV′ ist zusammengesetzt, a) aus der Bewegung von dm um die Erdaxe, b) der Attraktion der es umgebenden Wasserschicht, c) der Attraktion von Sonne und Mond.

Es soll zunächst dieser letzte Theil berechnet werden. Sei r die Entfernung eines Sternes mit der Masse L vom Mittelpunkte der Erde; w der ∢ zwischen r und der Drehungsaxe und ψ die Rektascension, d. h. der ∢ zwischen der xy-Ebene und der durch r und die x-Axe gelegten Ebene:



Nun wirkt L auf den Erdmittelpunkt mit der Kraft $\frac{L}{r^2}$; diese ist decomponirt nach den 3 Axen $\frac{L}{r^2} \cos w$; $\frac{L}{r^2} \sin w \cdot \cos \psi$; $\frac{L}{r^2} \sin w \cdot \sin \psi$.

Ist f die Entfernung zwischen L und dm, so ist die Wirkung von L auf dm $\frac{L}{f^2}$ und also über die ganze Kugel $- \int \frac{L}{f^2} df = + \frac{L}{f}$. Da aber nicht nur ein Molekül dm, sondern die ganze Erde afficirt wird, muß die letztere Einwirkung von $\frac{L}{f}$ subtrahirt werden. Diese letztere erhalte ich aber, indem ich die oben gefundenen Kräfte im entgegengesetzten Sinne auf den angezogenen Punkt beziehe, d. h. negativ nehme, mit ihren Richtungselementen dx, dy, dz multiplicire, integrire und dann addire; so erhalte ich:

$$\frac{L}{r^2} \left\{ x \cdot \cos w + y \sin w \cdot \cos \psi + z \cdot \sin w \cdot \sin \psi \right\} + \text{Const.}$$

und die Gesammtwirkung von L auf dm ist also:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\frac{L}{f} - \frac{L}{r^2}\left\{x \cdot \cos w + y \cdot \sin w \cdot \cos \psi + z \cdot \sin w \cdot \sin \psi\right\} + \text{Const.}$$

Läge nun das angezogene Molekül im Erdmittelpunkte, so wäre $f = r$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$; und die ganze Wirkung wäre $= \frac{L}{r} + \text{Const.}$; da aber der Erdmittelpunkt nicht afficirt wird, ist $\frac{L}{r} + \text{Const} = 0$, also:

$$\text{Const.} = -\frac{L}{r}.$$

Sucht man nun $\frac{L}{f}$ umzuformen, so ist:

$$f = \sqrt{(r \cdot \cos w - x)^2 + (r \sin w \cdot \cos \psi - y)^2 + (r \cdot \sin w \cdot \sin \psi - z)^2}$$

Substituirt man nun für x, y, z ihre Werthe, $x = \cos \vartheta$; $y = \sin \vartheta \cdot \cos \omega$; $z = \sin \vartheta \cdot \sin \omega$, da der Erdradius als Einheit genommen ist, so ergibt sich:

$$\frac{L}{f} = \frac{L}{\sqrt{r^2 - 2r\left\{\cos \vartheta \cdot \cos w + \sin \vartheta \cdot \sin w \cdot \cos(\omega - \psi)\right\} + 1}}.$$

Nimmt man nun statt $\sphericalangle$ w den Complement $\sphericalangle$ v, d. h. den Deklinations-$\sphericalangle$, und statt ω den $\sphericalangle$ $nt + \omega$, so erhält man:

$$\frac{L}{f} = \frac{L}{\sqrt{r^2 - 2r\left\{\cos \vartheta \cdot \sin v + \sin \vartheta \cdot \cos v \cdot \cos(nt + \omega - \psi)\right\} + 1}}.$$

Substituirt man ebenso in $\frac{L}{r^2}\left\{x \cdot \cos w + \cdots\right\}$ für x, y, z ihre Werthe, führt statt $\sphericalangle$ w wieder $\sphericalangle$ v und statt $\sphericalangle$ ω wieder $nt + \omega$ ein, so erhält man:

$$\frac{L}{r^2}\left\{\cos \vartheta \cdot \sin v + \sin \vartheta \cdot \cos(nt + \omega) \cdot \cos v \cdot \cos \psi + \sin \vartheta \cdot \sin(nt + \omega) \cos v \cdot \sin \psi\right\}$$
$$= \frac{L}{r^2}\left\{\cos \vartheta \,.\, \sin v + \sin \vartheta \cdot \cos v \cdot \cos(nt + \omega - \psi)\right\}.$$

Es ist also im Ganzen von $\frac{L}{f}$ zu subtrahiren:

$$\frac{L}{r} + \frac{L}{r^2}\left\{\cos \vartheta \cdot \sin v + \sin \vartheta \cdot \cos v \cdot \cos(nt + \omega - \psi)\right\},$$

wo $\frac{L}{r}$ die Wirkung von L auf das Centrum ist.

Nun kann man aber $\frac{L}{f}$ in Kugelfunktionen nach Potenzen von r entwickeln. Setzt man

$$\cos \vartheta \cdot \sin v + \sin \vartheta \cdot \cos v \cdot \cos(nt + \omega - \psi) = \cos \omega, \text{ so ist}$$

$$\frac{L}{f} = \frac{L}{\sqrt{r^2 - 2r \cdot \cos \omega + 1}} = \frac{L}{r\sqrt{1 - 2\frac{1}{r}\cos \omega + \left(\frac{1}{r}\right)^2}}.$$

Da nun $r > 1$, ist $\frac{1}{r}$ ein ächter Bruch, und es ist:

$$\sqrt{1 - 2\frac{1}{r}\cos \omega + \left(\frac{1}{r}\right)^2} = 1 + \frac{1}{2}\left(2\frac{1}{r}\cos \omega + \left(\frac{1}{r}\right)^2\right) + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\left(2\frac{1}{r}\cos \omega + \left(\frac{1}{r}\right)^2\right)^2 + \cdots \text{ in inf.}$$
$$= 1 + \frac{1}{r}\cos \omega + \frac{1}{2r^2} + \frac{3}{2r^2}\cos^2 \omega + \cdots$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und
$$\frac{L}{f} = \frac{L}{r} + \frac{L}{r^2}\cos\omega + \frac{L}{2r^3} + \frac{3L}{2r^3}\cos^2\omega + \cdots$$

Subtrahirt man nun den obigen Werth $\frac{L}{r} + \frac{L}{r^2}\cos\omega$, so erhält man die Reihe Kugelfunktionen:

$$\frac{a}{r}Z^{(0)} + \frac{a}{r^3}Z^{(2)} + \frac{a}{r^4}Z^{(3)} + \cdots\cdots$$

Für die nächste Betrachtung sei die Erde als nicht rotirend und sphärisch, die Meerestiefe constant $= 1$ angenommen. Setzt man nun in der Gleichung (1) $\gamma = 1$ und $\cos\vartheta = \mu$, so wird dieselbe:

$$y = -1\frac{\partial u}{\partial\vartheta} - 1\frac{\partial v}{\partial\omega} - 1\frac{\mu\cdot u}{\sqrt{1-\mu^2}}$$

oder:
$$\frac{y}{l} = \frac{\partial u}{\partial\mu}\sqrt{1-\mu^2} - \frac{u\cdot\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} - \frac{\partial v}{\partial\omega}$$

oder:
$$\frac{y}{l} = \frac{\partial\cdot u\cdot\sqrt{1-\mu^2}}{\partial\mu} - \frac{\partial v}{\partial\omega};$$

ferner wird die Gleichung (2):

$$d\vartheta\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d\omega(1-\mu^2)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -g\frac{\partial y}{\partial\mu}\cdot\frac{\partial\mu}{\partial\vartheta}d\vartheta - g\cdot\frac{\partial y}{\partial\omega}d\omega + \frac{\partial V'}{\partial\mu}\cdot\frac{\partial\mu}{\partial\vartheta}d\vartheta + \frac{\partial V'}{\partial\omega}d\omega.$$

Nun ist aber $\frac{\partial\mu}{\partial\vartheta} = -\sqrt{1-\mu^2}$; die Coefficienten von $d\vartheta$ und $d\omega$ können entsprechend gleich gesetzt werden, da ϑ und ω von einander unabhängig sind; man erhält also:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = g\frac{\partial y}{\partial\mu}\sqrt{1-\mu^2} - \frac{\partial V'}{\partial\mu}\sqrt{1-\mu^2} \quad\text{und}\quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\frac{g\frac{\partial y}{\partial\omega}}{1-\mu^2} + \frac{\frac{\partial V'}{\partial\omega}}{1-\mu^2}.$$

Beide Gleichungen ergeben durch Differenziren nach μ und ω;

$$\frac{\partial\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\sqrt{1-\mu^2}}{\partial\mu} = g\frac{\partial(1-\mu^2)\frac{\partial y}{\partial\mu}}{\partial\mu} - \frac{\partial(1-\mu^2)\frac{\partial V'}{\partial\mu}}{\partial\mu}; \quad\text{und}\quad \frac{\partial\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}}{\partial\omega} = -g\frac{\frac{\partial^2 y}{\partial\omega^2}}{1-\mu^2} + \frac{\frac{\partial^2 V'}{\partial\omega^2}}{1-\mu^2}.$$

Die frühere Gleichung von $\frac{y}{l}$ wird aber:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = l\frac{\partial\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\sqrt{1-\mu^2}}{\partial\mu} - l\frac{\partial\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}}{\partial\omega}.$$

Durch Einsetzen dieser Werthe folgt dann die Gleichung:

(3)
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = lg\frac{\partial(1-\mu^2)\frac{\partial y}{\partial\mu}}{\partial\mu} + lg\frac{\frac{\partial^2 y}{\partial\omega^2}}{1-\mu^2} - l\frac{\partial(1-\mu^2)\frac{\partial V'}{\partial\mu}}{\partial\mu} - l\frac{\frac{\partial^2 V'}{\partial\omega^2}}{1-\mu^2}.$$

Zur Integration dieser Gleichung entwickele ich wieder nach Kugelfunktionen und setze:

$$y = Y^{(0)} + Y^{(1)} + Y^{(2)} + Y^{(3)} + \cdots$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wo $Y^{(i)}$ ꝛc. Funktionen von μ, $\sqrt{1-\mu^2}\cos\omega$ und $\sqrt{1-\mu^2}\sin\omega$ sind und der bekannten Differentialgleichung genügen:

$$0 = \frac{\partial(1-\mu^2)\frac{\partial Y^{(i)}}{\partial\mu}}{\partial\mu} + \frac{\frac{\partial^2 Y^{(i)}}{\partial\omega^2}}{1-\mu^2} + i(i+1)Y^{(i)}.$$

Nun erhält man den Theil des Potenzial's, der sich auf die Anziehung der Wasserschicht bezieht, indem man dm mit allen Molekülen des Wassers verbindet und über die ganze Kugel integrirt. dm ist bestimmt durch $\sphericalangle\vartheta$ und $\sphericalangle\omega$; ein anderes, in der Entfernung r' liegendes Molekül dm' durch $\sphericalangle\vartheta'$ und $\sphericalangle\omega'$; ist nun der Radius der Kugel $= 1$, so ist der gesuchte Theil von V', da $dr = y$:

$$\int\int\frac{1^2\cdot\sin\vartheta'\,d\vartheta'\,d\omega'\cdot y}{r'}.$$

Nun ist aber

$$r'^2 = (\cos\vartheta - \cos\vartheta')^2 + (\sin\vartheta\cdot\cos\omega - \sin\vartheta'\cos\omega')^2 + (\sin\vartheta\cdot\sin\omega - \sin\vartheta'\sin\omega')^2;$$

$$r' = \sqrt{2 - 2\left(\cos\vartheta\cdot\cos\vartheta' + \sin\vartheta\cdot\sin\vartheta'\cos(\omega-\omega')\right)};$$

also wird das Potenzial:

$$\int\int\frac{y\cdot\sin\vartheta'\cdot d\vartheta'\cdot d\omega'}{\sqrt{2}\sqrt{1-\left\{\cos\vartheta\cdot\cos\vartheta' + \sin\vartheta\cdot\sin\vartheta'\cdot\cos(\omega-\omega')\right\}}}.$$

Nun ist $y = Y^{(0)} + Y^{(1)} + Y^{(2)} + \ldots$

Ebenso läßt sich $\frac{1}{\sqrt{1-\left\{\cos\vartheta\cdot\cos\vartheta' + \sin\vartheta\cdot\sin\vartheta'\cdot\cos(\omega-\omega')\right\}}}$ in Kugelfunktionen entwickeln; seien dieselben $z_0 + z_1 + z_2 + \ldots$, so erhält man:

$$\int\int\left\{Y^{(0)} + Y^{(1)} + Y^{(2)} + \ldots\right\}\cdot\left\{z_0 + z_1 + z_2 + \ldots\right\}\sin\vartheta'\cdot d\vartheta'\cdot d\omega'.$$

Da aber alle Produkte, deren Faktoren nicht von derselben Ordnung sind, $= 0$ sind, so zerfällt das Integral in die Summe:

$$\int\int Y^{(0)}\cdot z_0\cdot\sin\vartheta'\cdot d\vartheta'\cdot d\omega' + \int\int Y^{(1)}\cdot z_1\cdot\sin\vartheta'\cdot d\vartheta'\cdot d\omega' + \ldots$$

Sind aber in einem Produkte von Kugelfunktionen die Faktoren von derselben Ordnung, so ist:

$$Y^{(q)} = \frac{2q+1}{4\pi}\int\int Y^{(q)}\cdot z_q\cdot\sin\vartheta'\cdot d\vartheta'\cdot d\omega'$$

und die obige Summe wird:

$$4\pi\left\{Y^{(0)} + \frac{1}{3}Y^{(1)} + \frac{1}{5}Y^{(2)} + \frac{1}{7}Y^{(3)} + \ldots\right\}$$

Der andere, schon früher gefundene Theil des Potenzials, der sich auf die Aktion des Mondes bezieht, war

$$\alpha U^{(0)} + \alpha U^{(2)} + \alpha U^{(3)} + \alpha U^{(4)} + \ldots$$

Für den nun zu betrachtenden Fall, daß die Erde eine Rotationsbewegung besitzt, erhalten die Gleichungen (1) und (2) folgende Form:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

1) $$y = \frac{\partial \cdot \gamma u \sqrt{1-\mu^2}}{\partial \mu} - \frac{\partial \cdot \gamma v}{\partial \omega}$$

2) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2n \frac{\partial v}{\partial t} \mu \sqrt{1-\mu^2} = g \frac{\partial y}{\partial \mu} \sqrt{1-\mu^2} - \frac{\partial V'}{\partial \mu} \sqrt{1-\mu^2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2n \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} = - g \frac{\frac{\partial y}{\partial \omega}}{1-\mu^2} + \frac{\frac{\partial V'}{\partial \omega}}{1-\mu^2}$$

Bei der Integration dieser Gleichungen beschränken wir uns zunächst auf den Fall, daß γ eine Funktion von μ ohne ω ist; setzt man:

$$y = a \cdot \cos(it + s\omega + \varepsilon)$$
$$u = b \cdot \cos(it + s\omega + \varepsilon)$$
$$v = c \cdot \cos(it + s\omega + \varepsilon)$$
$$y - \frac{V'}{g} = a' \cdot \cos(it + s\omega + \varepsilon)$$

wo a; b; c; a' rationale Funktionen von μ und $\sqrt{1-\mu^2}$ sind und s eine ganze Zahl ist. Durch Substitution dieser Werthe in (1) und (2) erhält man:

$$a \cdot \cos(it + s\omega + \varepsilon) = \frac{\partial \cdot \gamma \cdot b \sqrt{1-\mu^2} \cdot \cos(it + s\omega + \varepsilon)}{\partial \mu} - \frac{\partial \cdot \gamma \cdot c \sin(it + s\omega + \varepsilon)}{\partial \omega}$$
$$= \frac{\partial \cdot \gamma \cdot b \sqrt{1-\mu^2}}{\partial \mu} \cos(it + s\omega + \varepsilon) - \gamma cs \cdot \cos(it + s\omega + \varepsilon)$$

also $$a = \frac{\partial \cdot \gamma \cdot b \sqrt{1-\mu^2}}{\partial \mu} - \gamma cs$$

$$\frac{\partial^2 \cdot b \cdot \cos(it + s\omega + \varepsilon)}{\partial t^2} - 2n \frac{\partial \cdot c \sin(it + s\omega + \varepsilon)}{\partial t} \mu \cdot \sqrt{1-\mu^2} = \sqrt{1-\mu^2} \left\{ g \frac{\partial y}{\partial \mu} - \frac{\partial V'}{\partial \mu} \right\}$$
$$= \sqrt{1-\mu^2} \frac{\partial (gy - V')}{\partial \mu} = \sqrt{1-\mu^2} \cdot \frac{\partial \cdot ga' \cdot \cos(it + s\omega + \varepsilon)}{\partial \mu}$$

oder: $$-bi^2 \cdot \cos(it + s\omega + \varepsilon) - 2\,nic \cdot \cos(it + s\omega + \varepsilon)\,\mu \cdot \sqrt{1-\mu^2} = g \frac{\partial a'}{\partial \mu} \sqrt{1-\mu^2} \cdot \cos(it + s\omega + \varepsilon)$$

woraus $$bi^2 + 2nic \cdot \mu \sqrt{1-\mu^2} = - g \frac{\partial a'}{\partial \mu} \sqrt{1-\mu^2};$$

Ebenso erhält man: $$ci^2 + \frac{2nib\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} = - \frac{gsa'}{1-\mu^2}$$

worauf aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$b = \frac{- g \frac{\partial a'}{\partial \mu} \sqrt{1-\mu^2}}{i^2} - \frac{2nc\mu \cdot \sqrt{1-\mu^2}}{i}$$

also $$i^2 c = \frac{2ng \frac{\partial a'}{\partial \mu} \mu}{i} + 4n^2 \mu^2 c - \frac{gsa'}{1-\mu^2}$$

und endlich: $$c = \frac{\frac{2ng}{i} \frac{\partial a'}{\partial \mu} \mu \sqrt{1-\mu^2} - gsa'}{(i^2 - 4n^2\mu^2)(1-\mu^2)}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

auf ähnliche Weise ergibt sich dann:

$$b = \frac{-g\frac{\partial a'}{\partial \mu}(1-\mu^2) + \frac{2ngs}{i}\mu a'}{(i^2 - 4n^2\mu^2)\sqrt{1-\mu^2}}$$

und durch Substitution dieser Werthe von b und c in die Gleichung von a, indem ich $z = \frac{\gamma}{i^2 - 4n^2\mu^2}$ setze.

$$(4) \qquad a = g\frac{\partial\left\{z\left(\frac{2ns}{i}\mu a' - \frac{\partial a'}{\partial \mu}(1-\mu^2)\right)\right\}}{\partial \mu} + \frac{2ngs\mu z}{i(1-\mu^2)}\left\{\frac{2ns}{i}\mu a' - \frac{\partial a'}{\partial \mu}(1-\mu^2)\right\} + \frac{s^2 g z a'(i^2 - 4n^2\mu^2)}{i^2(1-\mu^2)}.$$

Diese Gleichung reducirt sich im vorhergehenden Falle, wo $n = 0$ und $\gamma =$ der Constanten 1 war, auf:

$$a = g\frac{\partial \cdot \frac{1}{i^2}\left(-\frac{\partial a'}{\partial \mu}(1-\mu^2)\right)}{\partial \mu} + \frac{s^2 g \cdot \frac{1}{i^2}\, i^2 a'}{i^2(1-\mu^2)} = \frac{gl}{i^2}\left\{-\frac{\partial \frac{\partial a'}{\partial \mu}(1-\mu^2)}{\partial \mu} + \frac{sa'}{1-\mu^2}\right\}$$

oder

$$(5) \qquad i^2 a = lg\left\{-\frac{\partial \frac{\partial a'}{\partial \mu}(1-\mu^2)}{\partial \mu} + \frac{sa'}{1-\mu^2}\right\}.$$

Es sei nun vorausgesetzt $Y^{(f)} = a \cdot \cos(it + s\omega)$ genüge der partiellen Differentialgleichung:

$$0 = \frac{\partial \cdot (1-\mu^2)\frac{\partial Y^{(f)}}{\partial \mu}}{\partial \mu} + \frac{\frac{\partial^2 Y^{(f)}}{\partial \omega^2}}{1-\mu^2} + f(f+1)\,Y^{(f)}.$$

Dann ist die Anziehung der Wasserschicht, deren innerer Radius $= 1$, deren äußerer $= 1 + \alpha y$ ist, nach dem Vorhergehenden:

$$-\frac{4\pi}{(2f+1)g} \cdot a \cdot \cos(it + s\omega) = -\frac{3a}{(2f+1)\rho}\cos(it + s\omega) \text{ da } g = \frac{4}{3}\pi\rho.$$

Setzt man nun in a', das sowohl die Anziehung dieser Schicht, als auch die der Sterne enthält, letztere $= 0$, so erhält man:

$$a' = \left\{1 - \frac{3}{(2f+1)\rho}\right\} a;$$

durch Substitution dieses Werthes in die obige Differentialgleichung erhält man:

$$0 = \frac{\partial(1-\mu^2)\frac{\partial a'}{\partial \mu}}{\partial \mu} - \frac{s^2 a'}{1-\mu^2} + f(f+1)\,a',$$

worin durch $\cos(it + s\omega)$ dividirt ist; daraus folgt

$$-\frac{\partial(1-\mu^2)\frac{\partial a'}{\partial \mu}}{\partial \mu} + \frac{s^2 a'}{1-\mu^2} = f(f+1)a'$$

und durch Substitution dieses Werthes in die frühere Gleichung von $i^2 a$, wird aus derselben:

$$i^2 a = lg \cdot f(f+1)a', \text{ oder:}$$

$$i^2 = lg \cdot f(f+1)\left\{1 - \frac{3}{(2f+1)\rho}\right\}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Um nun auch die Wirkung der anziehenden Sterne zu erhalten, bezeichne ich diesen Theil des Potenzial's V' mit $e \cdot \cos(it + s\omega)$, so daß dieser Term für $Y^{(f)}$ ebenfalls der Differenzialgleichung von $Y^{(f)}$ genügt. Da nun $a' = a - \frac{V'}{g}$ ist, muß auch dieser Theil noch von a' subtrahirt werden, und es bleibt:

$$a' = a\left\{1 - \frac{3}{(2f+1)\rho}\right\} - \frac{e}{g};$$

die Gleichung von $i^2 a$ gibt dann:

$$i^2 a = lgf(f+1)\left\{1 - \frac{3}{(2f+1)\rho}\right\} a - f(f+1) \cdot le$$

und daraus ergibt sich:

$$a = \frac{f(f+1)le}{f(f+1)\left\{1 - \frac{3}{(2f+1)\rho}\right\} - i^2}.$$

Die Integration der Gleichung (4) ist noch nicht geliefert für den allgemeinen Fall, daß $n \gtrless 0$ und die Meerestiefe variirt; um aber die Oscillationen des Oceans zu bestimmen, braucht man die Gleichung nicht zu integriren, sondern nur ihr zu genügen. Denn es ist klar, daß der Theil der Oscillationen, der vom ursprünglichen Zustande des Meeres abhängt, bald hat verschwinden müssen durch die Hindernisse, die das Wasser in seiner Bewegung erleidet, so daß das Meer ohne die fortwährende Einwirkung der Sonne und des Mondes sich längst im Gleichgewichte befände. Es bleiben also die von dieser Einwirkung herrührenden Oscillationen zu untersuchen.

Nenne ich die Entfernung eines Sternes L vom Mittelpunkte der Erde r, so ist seine Aktion auf ein flüssiges Molekül, entwickelt nach Potenzen von $\frac{1}{r}$ mit Vernachlässigung der 4. Potenz nach dem früheren:

$$\frac{3L}{2r^3}\left\{\left(\cos\vartheta \cdot \sin v + \sin\vartheta \cdot \cos v \cdot \cos(nt + \omega - \psi)\right)^2 - \frac{1}{3}\right\}.$$

Diese Formel läßt sich umformen; durch Quadriren ergibt sich als doppeltes Produkt:

$$\frac{3L}{r^3} \sin\vartheta \cdot \cos\vartheta \cdot \sin v \cdot \cos v \cdot \cos(nt + \omega - \psi)$$

und die drei Glieder:

$$\frac{3L}{2r^3} \cos^2\vartheta \cdot \sin^2 v + \frac{3L}{2r^3} \sin^2\vartheta \cdot \cos^2 v \cdot \cos^2(nt + \omega - \psi) - \frac{L}{2r^3}.$$

Nach der Formel $\cos^2 \alpha = \frac{\cos 2\alpha}{2} + \frac{1}{2}$ erhält man aus dem mittleren dieser 3 Glieder:

$$\frac{3L}{4r^3} \sin^2\vartheta \cdot \cos^2 v \cdot \cos 2(nt + \omega - \psi) + \frac{3L}{4r^3} \cos^2\vartheta \cdot \cos^2 v.$$

Addirt man vorläufig den zweiten Summanden zu den beiden andern, so erhält man:

$$\frac{3L}{2r^3} \cos^2\vartheta \cdot \sin^2 v + \frac{3L}{4r^3} \sin^2\vartheta \cdot \cos^2 v - \frac{L}{2r^3}.$$

Diese Summe ist aber =

$$\frac{L}{4r^3}\left\{6\cos^2\vartheta \cdot \sin^2 v + 3\sin^2\vartheta \cdot \cos^2 v - 2\right\}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dies wird, da $\cos^2\vartheta = \frac{\cos 2\vartheta}{2} + \frac{1}{2}$; $\sin^2\vartheta = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2\vartheta}{2}$; $2 = 2\sin^2 v - \cos^2 v$ ist:

$$= \frac{L}{4r^3}\left\{3\cos 2\vartheta \cdot \sin^2 v + 3\sin^2 v + \frac{3}{2}\cos^2 v - \frac{3}{2}\cos 2\vartheta \cdot \cos^2 v - 2\sin^2 v + 2\cos^2 v\right\}$$

$$= \frac{L}{4r^3}\left\{(\sin^2 v - \frac{1}{2}\cos^2 v)(1 + 3\cos 2\vartheta)\right\}.$$

Obige Formel ist also zerlegt in folgende 3 Ausdrücke:

$$\frac{L}{4r^3}\left\{\sin^2 v - \frac{1}{2}\cos^2 v\right\}\left\{1 + 3\cos 2\vartheta\right\}$$

$$+ \frac{3L}{r^3}\sin\vartheta \cdot \cos\vartheta \cdot \sin v \cdot \cos v \cdot \cos(nt + \omega - \psi)$$

$$+ \frac{3L}{4r^2}\sin^2\vartheta \cdot \cos^2 v \cdot \cos 2(nt + \omega - \psi).$$

Die Größen r, v, ψ ändern sehr langsam gegen die Rotation der Erde. Diese 3 Ausdrücke bezeichnen nun 3 verschiedene Arten von Oscillationen; die ersten sind sehr langsam und unabhängig von der Rotation, da sie den $\measuredangle$ nt nicht enthalten; sie sind nur abhängig von der Bewegung des Sternes L in seiner Bahn. Die Perioden der Oscillationen der zweiten Art hängen hauptsächlich von der Rotation der Erde nt ab, dauern also einen Tag; die der dritten Art hängen von 2 nt ab und dauern einen halben Tag.

Diese 3 Oscillationen finden nun zusammen Statt, und lassen sich, da die Gleichung (4) linear ist, einzeln behandeln.

VI.

Die Oscillationen der ersten Art.

Die Oscillationen der ersten Art, gegeben durch die Formel $\frac{L}{4r^3}\left\{\sin^2 v - \frac{1}{2}\cos^2 v\right\}\left\{1 + 3\cos 2\vartheta\right\}$, sind, da sie den $\measuredangle$ nt nicht enthalten, sehr langsam und unabhängig von der Rotation der Erde. Die Gestalt der Erde sei als ein rings vom Meere bedecktes Rotationsellipsoid angenommen, die Meerestiefe nicht mehr als überall gleich, sondern dieselbe sei

$$\gamma = l(1 - q\mu^2),$$

wo q eine noch zu bestimmende Constante ist; dann ist

$$z = \frac{l(1 - q\mu^2)}{i^2 - 4n^2\mu^2}.$$

Betrachten wir nun wieder die Gleichung:

$$a = \frac{g \cdot \partial \cdot z\left\{\frac{2ns}{i}\mu a' - \frac{\partial a'}{\partial\mu}(1-\mu^2)\right\}}{\partial\mu} + \frac{2ng\mu sz}{i(1-\mu^2)}\left\{\frac{2ns}{i}\mu a' - \frac{\partial a'}{\partial\mu}(1-\mu^2)\right\} + \frac{s^2 gza'(i^2 - 4n^2\mu^2)}{i^2(1-\mu^2)},$$

so ist klar, daß dieselbe sich bei diesen Oscillationen, die nur von μ^2 und nicht von $\measuredangle\,\omega$ abhängen, sich reducirt, wenn ich s, die Aenderung von v gleich 0 setze, auf:

$$a = -g\,\frac{\partial \cdot z\frac{\partial a'}{\partial\mu}(1-\mu^2)}{\partial\mu} = -g\,\frac{\partial\,\frac{l(1-q\mu^2)}{i^2 - 4n^2\mu^2}\,\frac{\partial a'}{\partial\mu}(1-\mu^2)}{\partial\mu}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Da also diese Oscillationen bloß von μ^2 abhängen, so entwickele ich a nach geraden Kugelfunktionen bis zu einer gewissen Ordnung, welche Reihe dann gewissermaßen eine Potenzreihe darstellt. Setzt man nun:

$$a = P^{(0)} + P^{(2)} + P^{(4)} + \cdots + P^{(2f)},$$

so ist, da $a' = \left(1 - \frac{3}{(2f+1)\rho}\right) a$ ist,

$$a' = \left(1 - \frac{3}{\rho}\right) P^{(0)} + \left(1 - \frac{3}{5\rho}\right) P^{(2)} + \cdots + \left(1 - \frac{3}{(4f+1)\rho}\right) P^{(2f)}.$$

Setzt man diese Werthe in die obige Gleichung von a ein, und vergleicht die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von μ auf beiden Seiten, so müssen diese einander gleich sein; es ergeben sich also $f + 1$ Bedingungsgleichungen. Eine weitere Bedingungsgleichung ergibt sich aus der Annahme, daß die Gleichung von a durch $i^2 - 4n^2\mu^2$ theilbar sei. Um nun diesen $f + 2$ Bedingungsgleichungen zu genügen, muß man, da die Anzahl der unbestimmten Coefficienten $f + 1$ war, über q verfügen. Nun ist aber q so zu bestimmen, daß unter Voraussetzung der Theilbarkeit, die oben angeführt war, der Coefficient der höchsten Potenz von μ, nämlich μ^{2f} auf beiden Seiten der Gleichung gleich ist. Sei Q der Coefficient von μ^{2f} in a, dann ist der von a' aber $\left(1 - \frac{3}{(4f+1)\rho}\right) Q$. Auf der rechten Seite steht aber nicht a', sondern $\frac{da'}{d\mu}$, so daß der Faktor $2f$ zu den Coefficienten tritt. Nun ist aber der Coefficient von $\frac{\frac{\partial a'}{\partial \mu}(1-\mu^2)}{i^2 - 4n^2\mu^2}$, weil Theilbarkeit vorausgesetzt ist, gleich dem Coefficienten von $\frac{\frac{\partial a'}{\partial \mu}}{4n^2}$; d. h. $= \frac{2f}{4n^2}\left(1 - \frac{3}{(4f+1)\rho}\right) Q$. Nun wäre aber die höchste Potenz von μ bloß μ^{2f-1} wegen der Differentiation, da aber noch mit dem Zähler von z, also mit $l(1 - q\mu^2)$ zu multipliciren ist, erhält man als höchste Potenz μ^{2f+1}, da nun nochmals nach μ differenzirt wird, wird die höchste Potenz die $2f^{te}$, und es tritt noch der Faktor $(2f + 1)$ zum Coefficienten. Der Coefficient der Potenz μ^{2f} ist also jetzt auf der rechten Seite

$$f(2f+1)\left\{1 - \frac{3}{(4f+1)\rho}\right\} \frac{lgqQ}{2n^2}.$$

Setzt man denselben gleich Q, dem Coefficienten auf der linken Seite, so ist q bestimmt:

$$q = \frac{2n^2}{f(2f+1)\left\{1 - \frac{3}{(4f+1)\rho}\right\} \cdot lg},$$

wobei zu berücksichtigen ist, daß f einen veränderlichen Werth hat. Denkt man nun die Entwickelung in Kugelfunktionen hinlänglich weit geführt, d. h. f groß genug genommen, so wird q beliebig klein, besonders noch, da $\frac{n^2}{q}$, das Verhältniß der Centrifugalkraft zur Schwerkraft, eine sehr kleine Größe $= \frac{1}{289}$ ist. In diesem Falle verschwindet q, die Meerestiefe wird überall constant, und die Annahme der Theilbarkeit durch $i^2 - 4n^2\mu^2$ führt zur Lösung des Problems für eine constante Meerestiefe.

Da diese Oscillationen von der Bewegung des Mondes in seiner Bahn abhängen, so werden sie auch, wie diese, periodisch sein. Die Wirkung des Mondes auf diese Oscillationen ist also periodisch nach der Deklination v des Mondes und also auch nach den periodischen Schwankungen desselben. Man wird also diese Wirkung darstellen können durch die Summe von Gliedern von der Form $k \cdot \cos(it + A)$, wo k und A Constanten sind, i aber die verschiedenen den einzelnen Perioden entsprechenden Werthe erhält. Unter diesen verschiedenen Perioden muß die der Mondknoten eine hervorragende Rolle spielen, weil das ihr entsprechende i sehr klein ist. Es kommt also vorzugsweise auf diesen Term an. Die Constante k, die in demselben ent-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

halten ist, ändert sich natürlich mit der Neigung der Mondbahn zur Ekkliptik, und zwar proportional mit der Tangente dieses $\measuredangle$; denn, wenn die Rektascension des Mondes gleich bleibt, und seine Deklination sich nur dadurch ändert, daß sich die Knoten seiner Bahn gleichförmig drehen, so ist die Aenderung der Deklination proportional der besagten Tangente.

Bis jetzt ist der Widerstand, den die Strömungen des Meeres erleiden, unberücksichtigt geblieben. Es sei derselbe proportional der Geschwindigkeit, also $= \beta \frac{\partial u}{\partial t}$ und $= \beta \frac{\partial v}{\partial t}$ nach den beiden Richtungen. Um diese muß die frühere Gleichung:

$$d\vartheta \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2n \frac{\partial v}{\partial t} \sin\vartheta \cdot \cos\vartheta \right\} + d\omega \left\{ \sin^2\vartheta \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2n \frac{\partial u}{\partial t} \sin\vartheta \cdot \cos\vartheta \right\} = -g dy + dV'$$

vermehrt werden, und man erhält dann, je nach der Richtung, die beiden Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2n \frac{\partial v}{\partial t} \mu \sqrt{1-\mu^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial y}{\partial \vartheta} + \frac{\partial V'}{\partial \vartheta'} = g \frac{\partial y}{\partial \mu} \sqrt{1-\mu^2} - \frac{\partial V'}{\partial \mu} \sqrt{1-\mu^2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{2n\mu \frac{\partial \mu}{\partial t}}{\sqrt{1-\mu^2}} + \beta \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{g \frac{\partial y}{\partial \omega}}{1-\mu^2} + \frac{\frac{\partial V'}{\partial \omega}}{1-\mu^2}.$$

Es kommen hier nur die von $\measuredangle$ it abhängigen Ausdrücke in Betracht, in denen der Coefficient i wegen der langsamen Umlaufszeit der Mondknoten sehr klein ist. Es dürfen also $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ und $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$, die mit i^2 multiplicirt sind, gegen $\beta \frac{\partial u}{\partial t}$ und $\beta \frac{\partial v}{\partial t}$, die mit i multiplicirt sind, vernachlässigt werden. Da diese Ausdrücke ferner vom $\measuredangle \omega$ unabhängig sind, gibt die letzte Gleichung, da die beiden Glieder rechts an und für sich $= 0$ sind:

$$\frac{2n\mu \frac{\partial u}{\partial t}}{\sqrt{1-\mu^2}} + \beta \frac{\partial v}{\partial t} = 0;$$

woraus folgt: $$2n\mu \frac{\partial u}{\partial t} = -\beta \sqrt{1-\mu^2} \frac{\partial v}{\partial t} \text{ und } \frac{4n^2\mu^2}{\beta} \frac{\partial u}{\partial t} = -2n\mu \sqrt{1-\mu^2} \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Durch Substitution in die erstere Gleichung ergibt sich dann:

$$\left(\frac{\beta^2 + 4n^2\mu^2}{\beta} \right) \frac{\partial u}{\partial t} = g \frac{\partial y}{\partial \mu} \sqrt{1-\mu^2} - \frac{\partial V'}{\partial \mu} \sqrt{1-\mu^2}.$$

Durch Vernachlässigung der Größen von der Ordnung i gibt diese Gleichung:

$$0 = g \frac{\partial y}{\partial \mu} - \frac{\partial V'}{\partial \mu},$$

woraus:

$$gy - V' = 0.$$

Nun ist nach dem Vorhergehenden der Theil von V', der sich auf die Wirkung des Mondes bezieht, von der Form:

$$k \left(1 + 3 \cos 2\vartheta \right) \cdot \cos \left(it + A \right) = 6k \left(\mu^2 - \frac{1}{3} \right) \cos \left(it + A \right).$$

Sei $Q \left(\mu^2 - \frac{1}{3} \right) \cos \left(it + A \right)$ der entsprechende Theil von y, dann ist der Theil von V', der sich auf die Wirkung der Wasserschicht bezieht, deren innerer Radius $= 1$, deren äußerer $= 1 + \alpha y$ ist, $= \frac{3g}{5\rho} Q \left(\mu^2 - \frac{1}{3} \right) \cos \left(it + A \right)$, und die Gleichung $gy - V' = 0$ gibt dann:

$$0 = \left(1 - \frac{3}{5\rho} \right) Q \left(\mu^2 - \frac{1}{3} \right) - \frac{6k}{g} \left(\mu^2 - \frac{1}{3} \right)$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

woraus
$$Q = \frac{6k}{g\left(1 - \frac{3}{5\rho}\right)}$$

und folglich ist:
$$\alpha y = \frac{L\left(\sin^2 v - \frac{1}{2}\cos^2 v\right)(1 + 3\cos 2\vartheta)}{4r^3 g\left(1 - \frac{3}{5\rho}\right)}.$$

Dieser Werth ist gefunden auf Grund der Gleichung $0 = gy - V'$; diese aber kann nur bestehen, wenn $\frac{\partial u}{\partial t}$ und $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$ sind, was aber wiederum bloß im Gleichgewichtszustande Statt finden kann. Man kann also diese Oscillationen so definiren, als ob sich das Fluidum unter der Aktion des anziehenden Sternes in jedem Augenblicke in's Gleichgewicht setzen wollte.

VII.

Oscillationen der zweiten Art.

Dieser Theil der Wirkung von L, der die Oscillationen zweiter Art hervorbringt, ist:
$$\frac{3L}{r^3}\sin v \cdot \cos v \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\vartheta \cdot \cos(nt + \omega - \psi).$$

Dieselben hängen also hauptsächlich von dem $\measuredangle$ nt ab, d. h. von der Axendrehung der Erde; ihre Periode ist folglich, da der cos des um 2π gewachsenen $\measuredangle$ wieder denselben Werth erhält, = der Dauer eines Tages.

Diese lassen sich, gerade wie die der ersten Art, in eine Reihe von sin und cos entwickeln, und ein Glied derselben habe die Form $\alpha k\mu\sqrt{1-\mu^2} \cdot \cos(it + \omega - A)$. Hier ist i sehr wenig von n verschieden, denn i enthält v und n, und v ändert wenig gegen n wegen der Langsamkeit der Bewegung von L gegen die Rotation. Setzt man nun in Gleichung (4) Kap. V s (den Coefficienten von ω) $= 1$ und $z = \frac{l(1 - q\mu^2)}{l^2 - 4n^2\mu^2}$, so läßt sich a, wie vorhin in eine Reihe entwickeln $P^{(0)} + P^{(2)} + P^{(4)} + \cdots P^{(2f)}$. In jeder Funktion steckt aber der Faktor $\mu\sqrt{1-\mu^2}$; zieht man denselben heraus, so werden alle Funktionen um den Grad 2 geringer, und die Reihe wird:
$$\mu\sqrt{1-\mu^2}\left\{P^{(0)} + P^{(2)} + \cdots + P^{(2f-2)}\right\}.$$

Hier ist also die Funktion $\mu\sqrt{1-\mu^2}\,P^{(0)}$ von der zweiten Ordnung. Um nun a' zu finden, gehen wir zurück auf die Gleichung:
$$a' = a\left(1 - \frac{3}{(2f+1)\rho}\right) - \frac{k}{g},$$

wenn ich die Aktion von L mit $\frac{k}{g}\mu\sqrt{1-\mu^2}$ bezeichne.

Es wird also:
$$a' = \mu\sqrt{1-\mu^2}\left\{\left(1 - \frac{3}{5\rho}\right)P^{(0)} + \left(1 - \frac{3}{9\rho}\right)P^{(2)} + \cdots + \left(1 - \frac{3}{(4f+1)\rho}\right)P^{(2f-2)} - \frac{k}{g}\right\}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

In diesen Funktionen P sind f unbestimmte Coefficienten enthalten; ich setze dieselben in Gleichung (4) ein unter der Annahme, daß $\frac{2n}{i}\mu a' - \frac{\partial a'}{\partial \mu}(1-\mu^2)$ durch $i^2 - 4n^2\mu^2$ theilbar sei. Dadurch erhält man eine Bedingungsgleichung. In diesem Falle hat aber die rechte Seite der Gleichung (4) keinen Nenner mehr; denn, setze ich $a' = F\mu\sqrt{1-\mu^2}$ und betrachte bloß die Glieder mit dem Nenner $\sqrt{1-\mu^2}$, so wird derselbe wegfallen. Zunächst wird das erste Glied:

$$g\frac{\partial\cdot z\left\{\frac{2n}{i}\mu\sqrt{1-\mu^2}\,F - \sqrt{1-\mu^2}\,(1-\mu^2)F + \mu^2\sqrt{1-\mu^2}\,F + \mu(1-\mu^2)\sqrt{1-\mu^2}\frac{\partial F}{\partial\mu}\right\}}{\partial\mu}.$$

Den zweiten und vierten Summanden brauche ich nicht zu betrachten, denn dieselben liefern beim Differenziren nicht $\sqrt{1-\mu^2}$ zum Nenner; es bleibt also nur noch:

$$g\frac{\partial\cdot\sqrt{1-\mu^2}\cdot\mu^2\left(\frac{2n}{i}+1\right)z}{\partial\mu}$$

und nach dem Differenziren nur noch:

$$-\left(\frac{2n}{i}+1\right)\frac{\mu^3 gzF}{\sqrt{1-\mu^2}}.$$

Von den 4 Faktoren des zweiten Gliedes:

$$\frac{4n^2}{i^2}\frac{\mu^3 gzF}{\sqrt{1-\mu^2}} - \frac{2n}{i}\mu gzF\sqrt{1-\mu^2} + \frac{2n}{i}\frac{\mu^3 gzF}{\sqrt{1-\mu^2}} + \frac{2n}{i}\mu^2 gzF\sqrt{1-\mu^2}$$

braucht man wiederum bloß den ersten und dritten zu betrachten, und endlich gibt das dritte Glied

$$\frac{(i^2-4n^2\mu^2)gz\mu F}{i^2\sqrt{1-\mu^2}}.$$

Die durch $\sqrt{1-\mu^2}$ dividirten Glieder sind also zusammen:

$$-\left(\frac{2n}{i}+1\right)\frac{gz\mu^3F}{\sqrt{1-\mu^2}} + \frac{2n}{i}\left(\frac{2n}{i}+1\right)\frac{gz\mu^3F}{\sqrt{1-\mu^2}} + \frac{(i^2-4n^2\mu^2)gz\mu F}{i^2\sqrt{1-\mu^2}}.$$

Dies ist aber $= gz\mu F\sqrt{1-\mu^2}$, so daß die rechte Seite der Gleichung (4) keine Nenner mehr hat. Indem ich nun beiderseits die Entwickelung für a und a′ einsetze, und die Coefficienten der verschiedenen P gleich setze, erhalte ich f fernere Bedingungen, und um diesen zu genügen, muß ich über q verfügen, damit die Anzahl der Unbestimmten der der Bedingungen gleich werde. Dazu nehme ich beiderseits den Coefficienten der höchsten Potenz von μ, also von $P^{(2f-2)}$; diese ist μ^{2f-2} und wird noch mit $\mu\sqrt{1-\mu^2}$ multiplicirt. Bezeichnet man diesen Coefficienten mit $Q\mu^{2f-1}\sqrt{1-\mu^2}$, so ist der entsprechende Coefficient in a′ aber $Q\left(1-\frac{3}{(4f+1)\rho}\right)\mu^{2f-1}\sqrt{1-\mu^2}$. Die höchste Potenz auf der linken Seite ist also μ^{2f-1}. Es ist nun zu untersuchen, welchen Coefficienten μ^{2f-1} auf der rechten Seite enthält. Da Theilbarkeit durch $i^2-4n^2\mu^2$ vorausgesetzt ist, tritt zunächst im ersten Gliede der Faktor $\frac{1}{4n^2}$ heraus, und dasselbe wird:

$$\frac{gql}{4n^2}\cdot\frac{\partial\cdot\left(\frac{2n}{i}\mu^{2f}\sqrt{1-\mu^2} + 2f\mu^{2f}\sqrt{1-\mu^2}\right)}{\partial\mu},$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

indem ich in $\frac{\partial a'}{\partial \mu}$ das erste Glied wegen kleinerer Potenz weglasse,

$$= \frac{gql}{4n^2} \frac{\partial \left(2f + \frac{2n}{i}\right) \mu^{2f} \sqrt{1-\mu^2}}{\partial \mu} = \frac{gql}{4n^2} \left(2f + \frac{2n}{i}\right) \left(2f+1\right) \mu^{2f-1} \sqrt{1-\mu^2} = gql \left\{ \frac{f^2}{n^2} + \frac{f}{in} + \frac{f}{2n^2} + \frac{1}{2in} \right\} \mu^{2f-1} \sqrt{1-\mu^2}.$$

Dazu liefert aus den folgenden Gliedern nur noch

$$-\frac{2ng\mu}{i(1-\mu^2)} \cdot \frac{l(1-q\mu^2)}{i^2-4n^2\mu^2} \cdot \frac{\partial a'}{\partial \mu} (1-\mu^2)$$

den Betrag $-\frac{f}{in}$ gql; da bei allen andern die Potenz von μ geringer ist, oder die Glieder sich aufheben. Bei dieser Ausrechnung ist der Kürze halber überall bei a' der Faktor $Q\left(1 - \frac{3}{(4f+1)\rho}\right)$ weggelassen worden. Füge ich denselben jetzt wieder zu und addire die verschiedenen Coefficienten von μ^{2f-1}, so erhalte ich den Gesammt-Coefficienten:

$$\frac{lgq}{2n^2} \left\{ 2f^2 + f + \frac{n}{i} \right\} Q \left(1 - \frac{3}{(4f+1)\rho}\right) \mu^{2f-1} \sqrt{1-\mu^2}.$$

Setze ich diesen gleich dem Coefficienten auf der linken Seite $Q\,\mu^{2f-1}\sqrt{1-\mu^2}$, so erhalte ich den Werth von q

$$q = \frac{2n^2}{lg\left(1 - \frac{3}{(4f+1)\rho}\right)\left(2f^2 + f + \frac{n}{i}\right)};$$

woraus sich der Werth für die Meerestiefe bestimmt:

$$l = \frac{2n^2\mu^2}{g\left(1 - \frac{3}{(4f+1)\rho}\right)\left(2f^2 + f + \frac{n}{i}\right)};$$

so daß ich also die Oscillationen dieser Art berechnen kann.

Dieses eben gefundene Gesetz für die Meerestiefe hängt von dem Werthe von i ab, und ist folglich nicht dasselbe für alle Terme, in die sich die Wirkung von L, wie zu Anfang von Kap. VII gezeigt wurde, entwickeln läßt. Indessen ist die Identität aller i unabweislich, um ein Gesetz für die Tiefe aufstellen zu können. Der obige Ausdruck muß also von i unabhängig gemacht werden. Dies geht aber leicht, da i von n sehr wenig verschieden ist, also $\frac{n}{i} = 1$ gesetzt werden darf. In diesem Falle wird, wenn wir nur f groß genug nehmen, um $\frac{n}{i}$ gegen $2f^2 + f$ zu vernachlässigen, dies Gesetz gleich dem für die Oscillationen der ersten Art gefundenen Tiefengesetz.

Es bleibt nun zu untersuchen, welche Form die Gleichungen unter der Annahme $n = i$ erhalten. In diesem Falle ist $z = \frac{l(1-q\mu^2)}{n^2(1-4\mu^2)}$. Setzt man nun in der Gleichung (4) $s = 1$; $n = i$; $a = Q\,\mu\sqrt{1-\mu^2}$, wo Q von μ unabhängig ist, so erhält man nach dem Früheren:

$$a' = \left\{\left(1 - \frac{3}{5\rho}\right) Q - \frac{k}{g}\right\} \mu \sqrt{1-\mu^2};$$

woraus sich dann ergibt:

$$\frac{2n}{i}\mu a' - \frac{\partial a'}{\partial \mu}\sqrt{1-\mu^2} = 2\mu^2 \left\{\ldots\right\}\sqrt{1-\mu^2} - \left\{\ldots\right\}(1-\mu^2)\sqrt{1-\mu^2} + \left\{\ldots\right\}\mu^2\sqrt{1-\mu^2}$$

$$= -\left(1-4\mu^2\right)\left\{\ldots\right\}\cdot\sqrt{1-\mu^2} = -\frac{1-4\mu^2}{\mu}a'.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ferner reducirt sich durch diese Substitution die rechte Seite der Gleichung (4) auf $\frac{2lgqa'}{n^2}$; denn setze ich den Werth von a' ein, so bleibt bloß der 1. Term aus dem Differentialquotienten, während der 2. Term sich gegen die beiden andern Glieder hebt. Der Differentialquotient liefert nämlich:

$$-g\left\{-\frac{2ql\mu\sqrt{1-\mu^2}}{n^2}-\frac{l(1-q\mu^2)}{n^2(1-\mu^2)}\mu\sqrt{1-\mu^2}\right\};$$

die beiden andern Glieder geben aber $-g\frac{l(1-q\mu^2)}{n^2(1-\mu^2)}\mu\sqrt{1-\mu^2}$, wobei in a' der Kürze halber wieder $\left\{\left(1-\frac{3}{5\rho}\right)Q-\frac{k}{g}\right\}$ weggelassen ist. Es bleibt also nur $\frac{2lgqa'}{n^2}$ übrig. Setzt man nun beide Seiten gleich und substituirt für a und a' die Werthe, so ergibt sich:

$$Q=\frac{2lgq}{n^2}\left(1-\frac{3}{5\rho}\right)Q-\frac{2lq}{n^2}k$$

oder:

$$Q=\frac{2lqk}{2lgq\left(1-\frac{3}{5\rho}\right)-n^2}.$$

Es ist nun zu Anfang dieses Kapitels bemerkt worden, daß man αy in Ausdrücke von der Form $\alpha k\cdot\sin\vartheta\cdot\cos\vartheta\cdot\cos(it+\omega-A)$ entwickeln kann. Der Theil von αy, der einem solchen Term entspricht, ist also:

$$\frac{2lq\sin\vartheta\cdot\cos\vartheta}{2lgq\left(1-\frac{3}{5\rho}\right)-n^2}\alpha k\cos(it+\omega-A).$$

Da aber die Summe dieser Terme die Entwickelung der Funktion $\frac{3L}{r^3}\sin v\cdot\cos v\cdot\cos(nt+\omega-\psi)$ ist, so erhält man den ganzen Theil von αy, der sich auf die Oscillationen der 2. Art bezieht:

$$\frac{\frac{6L}{r^3}lq\sin\vartheta\cdot\cos\vartheta\cdot\sin v\cdot\cos v\cdot\cos(nt+\omega-\psi)}{2lgq\left(1-\frac{3}{5\rho}\right)-n^2}$$

und dieser Werth findet allgemein für jedes q, d. h. für jedes Gesetz der Meerestiefe statt, vorausgesetzt, daß der vom Meere bedeckte Körper ein Rotationsellipsoid ist.

Sieht man aber die Meerestiefe als überall gleich an, so ist $q=0$, der Werth von αy, d. h. die Oscillationen der 2. Art werden für diesen Fall $=0$.

Man kann nun noch αu und αv, d. h. die Aenderung des $\sphericalangle\vartheta$ und $\sphericalangle\omega$, also der geographischen Länge und Breite eines Wassermoleküls für diese Oscillationen berechnen. Man erhält nämlich durch Substitution des Werthes von Q in a':

$$a'=\left\{\left(1-\frac{3}{5\rho}\right)\frac{2lqk}{2lqg\left(1-\frac{3}{5\rho}\right)-n^2}-\frac{k}{g}\right\}\mu\sqrt{1-\mu^2}=$$

$$\mu\sqrt{1-\mu^2}\left\{\frac{\left(1-\frac{3}{5\rho}\right)2lkq-\left(1-\frac{3}{5\rho}\right)2lqk+\frac{n^2k}{g}}{2lgq\left(1-\frac{3}{5\rho}\right)-n^2}\right\}=\frac{\frac{n^2k}{g}\mu\sqrt{1-\mu^2}}{2lgq\left(1-\frac{3}{5\rho}\right)-n^2}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dann folgen die Werthe von b und c aus den Gleichungen in Kapitel V, indem man darin $s = 1$ und $i = n$ setzt. Es ist:

$$\frac{\partial a'}{\partial \mu} = \frac{1}{2 l g q\left(1 - \frac{3}{5\rho}\right) - n^2} \left\{ \frac{n^2 k}{g} \sqrt{1-\mu^2} - \frac{n^2 k}{g} \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} \right\}.$$

Durch diese Substitution wird:

$$b = - \frac{\dfrac{n^2 k \sqrt{1-\mu^2}\,(1-\mu^2) - n^2 k \mu^2 \sqrt{1-\mu^2} + 2 g \mu \dfrac{n^2 k}{g} \mu \sqrt{1-\mu^2}}{2 l g q\left(1 - \frac{3}{5\rho}\right) - n^2}}{n^2 (1 - 4\mu^2) \sqrt{1-\mu^2}}$$

$$= - \frac{k\,(1 - 4\mu^2)}{\left\{2 l g q\left(1 - \frac{3}{5\rho}\right) - n^2\right\}(1 - 4\mu^2)} = - \frac{k}{2 l g q\left(1 - \frac{3}{5\rho}\right) - n^2}$$

und ferner:

$$c = \frac{2 n^2 k \sqrt{1-\mu^2}\,\mu\,(1-\mu^2) - 2 n^2 k \mu^3 \sqrt{1-\mu^2} - n^2 k \mu \sqrt{1-\mu^2}}{\left\{2 l g q\left(1 - \frac{3}{5\rho}\right) - n^2\right\} n^2 (1 - 4\mu^2)(1 - \mu^2)}$$

$$= \frac{\mu k}{\left\{2 l g q\left(1 - \frac{3}{5\rho}\right) - n^2\right\} \sqrt{1-\mu^2}}.$$

Daraus folgt nach dem Werthe von u und v, indem man für die Summe der Terme $k \cos(it + \omega - A)$ und $k \sin(it + \omega - A)$ die Funktion $\frac{L}{r^3} \sin v \cdot \cos v \cdot \cos(nt + \omega - \psi)$ setzt, der Theil von αu, der sich auf diese Oscillationen bezieht:

$$- \frac{\frac{3L}{r^3} \sin v \cdot \cos v \cdot \cos(nt + \omega - \psi)}{2 l q g\left(1 - \frac{3}{5\rho}\right) - n^2}$$

und der Theil von αv:

$$\frac{\frac{3L}{r^3} \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} \sin v \cdot \cos v \cdot \cos(nt + \omega - \psi)}{2 l q g\left(1 - \frac{3}{5\rho}\right) - n^2}.$$

VIII.

Oscillationen der dritten Art.

Die Wirkung der Oscillationen der dritten Art ist dargestellt durch $\frac{3L}{4r^3} \sin^2\vartheta \cdot \cos^2 v \cdot \cos 2(nt + \omega - \psi)$. Da dieselben größtentheils von $\measuredangle\, 2nt$ abhängen, so dauern sie, da nt bloß um π zu wachsen braucht, d. h. die Erde bloß eine halbe Axendrehung nöthig hat, damit $\cos 2(nt + \pi)$ wieder derselbe wird, einen halben

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Tag. Diese Funktion läßt sich ebenfalls in eine Reihe von sinus und cosinus entwickeln, deren $\measuredangle$ proportional der Zeit wachsen. Ein solches Glied sei $\alpha k \sin^2 \vartheta \cdot \cos(it + \omega - A)$, wo i sehr wenig von 2n verschieden ist. (Vergl. Kap. VII.) Betrachtet man nun wieder die Gleichung (4) und setzt $s = 2$ und $z = \frac{l(1 - q\mu^2)}{i^2 - 4n^2\mu^2}$, so erhält man wie Kap. VII.

$$a = (1 - \mu^2)\left\{P^{(0)} + P^{(2)} + P^{(4)} + \cdots + P^{(2f-2)}\right\}$$

$$a' = (1 - \mu^2)\left\{\begin{array}{l}\left(1 - \frac{3}{5\rho}P^{(0)}\right) + \left(1 - \frac{3}{9\rho}\right)P^{(2)} + \cdots + \left(1 - \frac{3}{(4f+1)\rho}P^{(2f-2)}\right) \\ - \frac{k}{g}\end{array}\right\}$$

Man erhält also wieder f unbestimmte Constanten, welche die Kugelfunktionen multipliciren. Zu deren Bestimmung sind f Bedingungsgleichungen nöthig. Die erste Bedingung erhält man, wie in VI. und VII. durch eine solche Annahme der Constanten, daß $\frac{4n}{i}\mu a' - \frac{\partial a'}{\partial \mu}(1 - \mu^2)$ durch $i^2 - 4n^2\mu^2$ theilbar sei. Dann fällt auf der rechten Seite der Gleichung (4) der Nenner fort (vergl. VII.); ferner ist dieselbe, wie die linke Seite durch $(1 - \mu^2)$ theilbar; denn setze ich $a' = (1 - \mu^2)F$, so erhalte ich, wenn ich nur die Summe derjenigen Glieder betrachte, die nicht durch $(1 - \mu^2)$ theilbar sind, folgendes: Zunächst wird das erste Glied:

$$g\frac{\partial z\left\{\frac{4n}{i}\mu(1 - \mu^2)F + (1 - \mu^2)F2\mu - (1 - \mu^2)^2\frac{\partial F}{\partial \mu}\right\}}{\partial \mu}.$$

Da der letzte Term dieses Ausdruckes auch noch nach der Differentiation den Faktor $(1 - \mu^2)$ enthält, bleibt noch:

$$g\frac{\partial \cdot z2\mu(1 - \mu^2)F\left(\frac{2n + i}{i}\right)}{\partial \mu}$$

und nach dem Differenziren noch:

$$-\left(\frac{2n + i}{i}\right)\mu^2 4gzF.$$

Das zweite Glied wird sodann:

$$\frac{4ngz\mu}{i(1 - \mu^2)}\left\{\frac{4n}{i}(1 - \mu^2)F\mu + 2\mu F(1 - \mu^2) - (1 - \mu^2)^2\frac{\partial F}{\partial \mu}\right\}$$

und da auch hier der letzte Term den Faktor $(1 - \mu^2)$ behält, so bleibt nur noch:

$$\left(\frac{2n + i}{i}\right)\mu^2\frac{8n}{i}gzF.$$

Endlich liefert noch das dritte Glied:

$$\left(\frac{i^2 - 4n^2\mu^2}{i}\right)4gzF.$$

Die ganze Summe wird also nun:

$$-\left(\frac{2n + i}{i}\right)\mu^2 4gzF + \left(\frac{2n + i}{i}\right)\mu^2\frac{8n}{i}gzF\left(\frac{i^2 - 4n^2\mu^2}{i}\right)4gzF.$$

Dies ist aber $= (1 - \mu^2)\,4gzF$, so daß also die Theilbarkeit der rechten Seite der Gleichung (4) durch $(1 - \mu^2)$ nachgewiesen ist. Setzt man nun für a und a' obige Reihen in die Gleichung (4) ein, und dividirt durch $(1 - \mu^2)$, so ergeben sich, durch Gleichstellung der Coefficienten der einzelnen Potenzen von μ, f weitere

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Bedingungen. Es muß also noch über q verfügt werden, damit die Anzahl der Unbekannten der der Bedingungen gleich sei. Um q zu erhalten, bezeichne ich den Coefficienten von $P^{(2f-2)}$, welches die höchste Potenz von μ enthält, mit $Q\mu^{(2f-2)}$; denn ist der entsprechende Ausdruck in $a'(1-\mu^2)\mu^{(2f-2)}Q\left(1-\frac{3}{(4f+1)\rho}\right)$ und ich erhalte dann den entsprechenden Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung (4) gerade wie bei den Oscillationen der zweiten Art, indem ich nur n mit dem Faktor 2 multiplicire.

$$\frac{glq}{2n^2}\left(2f^2+f+\frac{2n}{i}\right)\left(1-\frac{3}{(4f+1)\rho}\right)Q(1-\mu^2)\mu^{(2f-2)}.$$

Setze ich dieses gleich dem entsprechenden Ausdruck auf der linken Seite, also von a d. h. $= Q(1-\mu^2)\mu^{2f-2}$, so erhalte ich:

$$q=\frac{2n^2}{lg\left(1-\frac{3}{(4f+1)\rho}\right)\left(2f^2+f+\frac{2n}{i}\right)};$$

Daraus ergibt sich dann die Meerestiefe:

$$l-\frac{2n^2\mu^2}{g\left(1-\frac{3}{(4f+1)\rho}\right)\left(2f^2+f+\frac{2n}{i}\right)},$$

vermittels deren ich dann diese Oscillationen berechnen kann.

Dieser Ausdruck ändert mit den verschiedenen Werthen, die i annehmen kann; aber da ungefähr $i=2n$ ist, so darf man ohne merklichen Fehler $\frac{2n}{i}=1$ setzen, wodurch die Tiefe von i unabhängig wird, und man erhält für dieselbe dasselbe Gesetz, wie bei den Oscillationen der zweiten Art. Es ergibt sich also, daß die beiden letzten Oscillationen von einem bestimmten Gesetze für die Meerestiefe abhängen, während die ersten (s. Kap. VI.) durch den Widerstand des Wassers davon unabhängig werden. Es brauchen also blos diejenigen Gesetze berücksichtigt zu werden, aus denen man zugleich die Oscillationen der zweiten und dritten Art bestimmen kann.

Es sollen nun auch diese Oscillationen betrachtet werden unter der Kap. VII. angenommenen Hypothese, daß die Meerestiefe überall constant sei. In diesem Falle waren die Oscillationen der zweiten Art $= 0$. Hier darf man wegen der langsamen Aenderung von r, ψ und v gegen die des $\measuredangle\, 2nt$, erstere Größen ebenfalls als constant betrachten, und ferner $\frac{1}{\rho}$, das Verhältniß der Dichtigkeit des Meeres zu der mittleren Dichtigkeit der Erde, vernachlässigen, da dasselbe nach den Beobachtungen sehr klein zu sein scheint. Unter diesen Voraussetzungen sei nun $y=a\cdot\cos(2nt+2\omega-2\psi)$; dann wird, da $a'\cdot\cos(-)=y-\frac{V'}{g}$ (Kap. V., Absch. 2), also $a'=a-\frac{V'}{g\cdot\cos(-)}$ und ferner (Kap. VIII.) $V'=\frac{3L}{4r^3}(1-\mu^2)\cdot\cos^2 v\cdot\cos(2nt+2\omega-2\psi)$ ist,

$$\alpha a'=\alpha a-\frac{3L}{4r^3g}(1-\mu^2)\cos^2 v;$$

und da ferner, wenn die Meerestiefe überall dieselbe ist, $z=\frac{1}{4n^2(1-\mu^2)}$ ist, so wird durch diese Substitution die Gleichung (4):

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$a = g\,\frac{\partial \frac{1}{4n^2(1-\mu^2)}\left\{2\mu a - \frac{6L}{4r^3g}(1-\mu^2)\cos^2 v - \frac{\partial\left(a - \frac{3L}{4r^3g}(1-\mu^2)\cos^2 v\right)}{\partial\mu}(1-\mu^2)\right\}}{\partial\mu}$$

$$+ \frac{2g\mu l}{(1-\mu^2)4n^2(1-\mu^2)} \cdot \left\{2\mu a - \frac{6L}{4r^3g}(1-\mu^2)\cos^2 v - \frac{\partial\left(a - \frac{3L}{4r^3g}(1-\mu^2)\cos^2 v\right)}{\partial\mu}(1-\mu^2)\right\}$$

$$+ \frac{4gl}{4n^2(1-\mu^2)}\left\{a - \frac{3L}{4r^3g}(1-\mu^2)\cos^2 v\right\}$$

$$= \frac{2gla}{4n^2(1-\mu^2)} + \frac{2gl\mu}{4n^2(1-\mu^2)} \cdot \frac{\partial a}{\partial\mu} + \frac{4\mu^2 gla}{4n^2(1-\mu^2)^2} - \frac{lg}{4n^2}\frac{\partial^2 a}{\partial\mu^2} - \frac{6L}{4r^3g}\frac{gl(1-\mu^2)}{4n^2(1-\mu^2)}\cos^2 v$$

$$+ \frac{4gl\mu^2 a}{4n^2(1-\mu^2)^2} + \frac{6L}{4r^3g}\frac{gl2\mu^2}{4n^2(1-\mu^2)}\cos^2 v - \frac{6L}{4r^3g} \cdot \frac{gl}{4n^2(1-\mu^2)}\cos^2 v - \frac{2gl\mu}{4n^2(1-\mu^2)} \cdot \frac{\partial a}{\partial\mu}$$

$$- \frac{6L}{4r^3g} \cdot \frac{gl2\mu^2}{4n^2(1-\mu^2)}\cos^2 v + \frac{4gla}{4n^2(1-\mu^2)} - \frac{3L}{4r^3g} \cdot \frac{4gl}{4n^2}\cos^2 v$$

$$= \frac{6gla}{4n^2(1-\mu^2)^2} + \frac{2\mu^2 gla}{4n^2(1-\mu^2)} - \frac{lg}{4n^2}\frac{\partial^2 a}{\partial\mu^2} - \frac{6L}{r^3g} \cdot \frac{lg}{4n^2(1-\mu^2)}\cos^2 v.$$

Daraus folgt sodann:

$$\frac{4n^2}{lg}\alpha a(1-\mu^2)^2 = (6+2\mu^2)\alpha a - \alpha\frac{\partial^2 a}{\partial\mu^2}(1-\mu^2)^2 - \frac{6L}{r^3g}(1-\mu^2)\cos^2 v.$$

Substituirt man in dieser Gleichung $1-\mu^2 = x^2$, so wird dieselbe

$$0 = \frac{4n^2}{lg}\alpha a x^4 + \alpha\frac{\partial^2 a}{\partial\mu^2}x^4 - (8-2x)\alpha a + \frac{6L}{r^3g}x^2\cos^2 v.$$

Nun ist aber:

$$\frac{\partial^2 a}{\partial\mu^2} = \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial\mu}\right)^2 + \frac{\partial a}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial\mu^2} = \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}\frac{1-x^2}{x^2} - \frac{\partial a}{\partial x} \cdot \frac{1}{x^3},$$

also

$$\frac{\partial^2 a}{\partial\mu^2}x^4 = \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}x^2(1-x^2) - \frac{\partial a}{\partial x}x.$$

Folglich wird die Gleichung:

$$0 = x^2(1-x^2)\alpha\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - x\alpha\frac{\partial a}{\partial x} - 2\alpha a\left\{4 - x^2 - \frac{2n^2}{lg}x^4\right\} + \frac{6L}{r^3g}x^2\cos^2 v.$$

Um dieser Gleichung zu genügen, setze ich

$$\alpha a = A_1 x^2 + A_2 x^4 + A_3 x^6 + \ldots.$$

Dann wird:

$$\alpha\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} = 2A_1 + 4 \cdot 3 \cdot x^2 A_2 + 6 \cdot 5 \cdot x^4 A_3 + \ldots.$$

$$\alpha\frac{\partial a}{\partial x} = 2xA_1 + 4x^3 A_2 + 6 \cdot x^5 A_3 + \ldots.$$

Setze ich diese Werthe in die obige Differentialgleichung ein, so erhalte ich:

$$0 = x^2(1-x^2)\left\{2A_1 + 4 \cdot 3 \cdot x^2 A_2 + 6 \cdot 5 \cdot x^4 A_3 + \ldots\right\} - \left\{2A_1 x^2 + 4A_2 x^4 + 6A_3 x^6 + \ldots\right\}$$

$$- 2\left\{A_1 x^2 + A_2 x^4 + A_3 x^6 + \ldots\right\} \cdot \left\{4 - x^2 - \frac{2n^2}{lg}x^4\right\} + \frac{6L}{r^3g} \cdot x^2\cos^2 v.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zugleich erhalte ich durch Gleichstellung der Coefficienten von x^2:

$$0 = -8\,A_1 + \frac{6L}{r^3 g}\cos^2 v; \quad \text{woraus} \quad A_1 = \frac{3L}{4r^3 g}\cos^2 v.$$

Ebenso erhalte ich durch Gleichstellung der Coefficienten der andern Potenzen von x, z. B. von x^{2f+4}, wo f jede Zahl sein kann, die übrigen (A). Der Coefficient von x^{2f+4} aus dem ersten Gliede obiger Gleichung ist: $(2f+4)(2f+3)\,A_{f+2} - (2f+2)(2f+1)\,A_{f+1}$. Der aus dem zweiten Gliede: $-(2f+4)\,A_{f+2}$ und der aus dem dritten Gliede: $-8\,A_{f+2} + 2\,A_{f+1} + \frac{4n^2}{lg}\,A_f$. Indem ich dieselben vereinige, folgt:

$$0 = (2f^2+6f)\,A_{f+2} - (2f^2+3f)\,A_{f+1} + \frac{2n^2}{lg}\,A_f.$$

Bringe ich dies unter die Form:

$$\frac{A_{f+1}}{A_f} = \frac{\frac{2n^2}{lg}}{2f^2+3f-(2f^2+6f)\frac{A_{f+2}}{A_{f+1}}},$$

so folgt daraus:

$$\frac{A_{f+1}}{A_f} = \cfrac{\frac{2n^2}{lg}}{2f^2+3f-\cfrac{\frac{4n^2}{lg}(f^2+3f)}{2(f+1)^2+3(f+1)-\cfrac{\frac{4n^2}{lg}\left\{(f+1)^2+3(f+1)\right\}}{2(f+2)^2+3(f+2)-\ldots}}}$$

Aus dieser Formel lassen sich alle Coefficienten berechnen; setzt man z. B. $f = 1$, so erhält man:

$$A^2 = \cfrac{\frac{2n^2}{lg}\,A_1}{2\cdot 1^2+3\cdot 1-\cfrac{\frac{4n^2}{lg}(1+3\cdot 1)}{2\cdot 2^2+3\cdot 2-\cfrac{\frac{4n^2}{lg}(2^2+3\cdot 2)}{2\cdot 3^2+3\cdot 3-\cfrac{\frac{4n^2}{lg}(3^2+3\cdot 3)}{2\cdot 4^2+3\cdot 4-\ldots\ldots}}}}$$

Man erhält also A_2 durch A_1 ꝛc. La Place hat auf diese Werthe αa für verschiedene Werthe von $\frac{2n^2}{lg}$ berechnet.

Nachdem La Place unter der Annahme einer überall gleichen Meerestiefe diese Oscillationen berechnet hat, faßt er unter derselben Hypothese alle drei Oscillationen zusammen. Aber da, wie Kap. VII bemerkt ist, in diesem Falle die Oscillationen der zweiten Art Null sind, bleiben bloß noch die der ersten und dritten Art übrig, und diese bilden die Summe:

$$\frac{L}{4r^3 g}(1 + 3\cos 2\vartheta)(\sin^2 v - \frac{1}{2}\cos^2 v) + \alpha a\cdot\cos(2\,nt + 2\omega - 2\psi).$$

Indem er nun diese Summe für verschieden angenommene Meerestiefen numerisch berechnet hat, findet er, daß die Fluthhöhe bei wachsender Tiefe sich sehr rasch einer Grenze nähert, gerade als ob das Meer sich in jedem Augenblicke unter dem anziehenden Sterne ins Gleichgewicht setzen wollte; d. h. als ob sie, wie bei den Oscillationen der ersten Art, von der Rotation der Erde unabhängig wären. Die unter dieser Hypothese

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

erlangten Resultate stimmen aber keineswegs mit den Beobachtungen überein. Denn da man in der Gleichung (2) (s. Kap. V.) wegen der Langsamkeit der Bewegung des Sternes L und der Rotation der Erde die Größen $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, n\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, n\frac{\partial v}{\partial t}$ vernachlässigen kann, wird diese Gleichung durch Integration $\alpha y = \frac{\alpha V'}{g}$. Nun ist der Theil des Potenzials $\alpha V'$, der von der Wirkung des Sternes L abhängt (vergl. Kap. V am Schlusse):

$$\frac{L}{4r^3}(1 + 3\cos 2\vartheta)(\sin^2 v - \frac{1}{2}\cos^2 v) + \frac{3L}{r^3}\sin \cdot v \cos v \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\vartheta \cdot \cos(nt + \omega - \psi)$$
$$+ \frac{3L}{4r^3}\cos^2 v \cdot \sin^2\vartheta \cdot \cos 2\,(nt + \omega - \psi).$$

Bezeichnet man denselben mit $Y^{(2)}$, so ist der Theil von $\alpha V'$, der von der Anziehung der Wasserschicht herrührt (Kap. V.) $\frac{4\pi}{5}Y^{(2)} = \frac{3}{5\rho}gY^{(2)}$ und die Gleichung $\alpha gy = \alpha V'$ gibt:

$$\alpha y = \frac{L}{4r^3 g\left(1 - \frac{3}{5\rho}\right)}(1 + 3\cos 2\vartheta)(\sin^2 v - \tfrac{1}{2}\cos^2 v)$$
$$+ \frac{3L}{r^3 g\left(1 - \frac{3}{5\rho}\right)}\sin v \cdot \cos v \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\vartheta \cdot \cos(nt + \omega - \psi) + \frac{3L}{4r^3 g\left(1 - \frac{3}{5\rho}\right)}\cos^2 v \cdot \sin^2\vartheta \cdot \cos 2(nt + \omega - \psi).$$

Sei dies die Anziehung der Sonne, so muß ich, wenn ich zugleich die des Mondes in Betracht ziehen will, und die erstere sich zur letzteren verhält, wie 1 : e, jedes Glied der Gleichung noch mit (1 + e) multipliciren. Dann ist unter der angenommenen Hypothese, wenn Sonne und Mond mit derselben Deklination v in Conjunktion stehen, der Unterschied der Mittagsfluth, d. h. wo die Sonne im Meridian steht, also $\measuredangle\, 2nt + 2\omega - 2\psi = 0$ ist, über die folgende Ebbe, wo ω um 90^0 gewachsen ist:

$$(1 + e)\frac{3L}{r^3 g\left(1 - \frac{3}{5\rho}\right)}\sin v \cdot \cos v \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\vartheta + (1 + e)\frac{3L}{4r^3 g\left(1 - \frac{3}{5\rho}\right)}\cos^2 v \cdot \sin^2\vartheta$$

weniger $- (1 + e)\frac{3L}{4r^3 g\left(1 - \frac{3}{5\rho}\right)} \cdot \cos^2 v \cdot \sin^2\vartheta = (1 + e)\frac{3L}{2r^3 g\left(1 - \frac{3}{5\rho}\right)}\sin^2\vartheta \cdot \cos^2 v(1 - 2\operatorname{tg} v \cdot \operatorname{cotg}\vartheta)$

Dagegen wäre die Nachtsfluth über die darauf folgende Ebbe um:

$$(1 + e)\frac{3L}{4r^3 g\left(1 - \frac{3}{5\rho}\right)}\cos^2 v \cdot \sin^2\vartheta \text{ weniger}$$
$$- (1 + e)\frac{3L}{r^3 g\left(1 - \frac{3}{5\rho}\right)}\sin v \cdot \cos v \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\vartheta - (1 + e)\frac{3L}{4r^3 g\left(1 - \frac{3}{5\rho}\right)}\cos^2 v \cdot \sin^2\vartheta$$
$$= (1 + e)\frac{3L}{2r^3 g\left(1 - \frac{3}{5\rho}\right)}\sin^2\vartheta \cdot \cos^2 v\,(1 - 2\operatorname{tg} v \cdot \operatorname{cotg}\vartheta)$$

erhaben. Das Verhältniß der beiden totalen Fluthen wäre also: $(1 + 2\operatorname{tg} v \cdot \operatorname{cotg}\vartheta) : (1 - 2\operatorname{tg} v \cdot \operatorname{cotg}\vartheta)$.

Dasselbe würde also nach der Berechnung von La Place für Brest, wo $\vartheta = 46^0\,26'$ ist für eine nördliche Declination von 23^0 schon 1,7953 : 0,2047 sein, d. h. die Mittagsfluth wäre ungefähr achtmal höher als die Nachtsfluth, was den Beobachtungen widerspricht.

Daraus folgt also, daß die Rotation der Erde nicht unberücksichtigt bleiben darf.

Schluß folgt später.

Dr. Meyer.

Druck von G. D. Baedeker in Essen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

erlangten Resultate stimmen aber keineswegs mit den Beobachtungen überein. Denn da man in der Gleichung (2) (s. Kap. V.) wegen der Langsamk Rotation der Erde die Größen $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, n\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, n\frac{\partial v}{\partial t}$ vernachlässige ion $\alpha y = \frac{\alpha V'}{g}$. Nun ist der Theil des Potenzials $\alpha V'$, der vor gl. Kap. V am Schlusse):

$$\frac{L}{4r^3}(1 + 3\cos 2\vartheta)(\sin^2 v \quad s\,\vartheta \cdot \cos(nt + \omega - \psi)$$

$$+$$

Bezeichnet man denselben mit der Anziehung der Wasserschicht herrührt (Kap. V.) $\frac{4\pi}{5}Y^{(2)} = \frac{3}{5\rho}$

$$\alpha y = \frac{1}{4r^3 g\left(1 \quad v\right)}$$

$$+ \frac{3L}{r^3 g\left(1 - \frac{3}{5\rho}\right)} \sin v \cdot \cos v \cdot \sin \quad \cos^2 v \cdot \sin^2\vartheta \cdot \cos 2(nt + \omega - \psi).$$

Sei dies die Anziehung der des Mondes in Betracht ziehen will, und die erstere sich zur letzt Gleichung noch mit $(1 + e)$ multipliciren. Dann ist unter der an ond mit derselben Deklination v in Conjunktion stehen, der Unterschi n Meridian steht, also $\measuredangle\, 2nt + 2\omega - 2\psi = 0$ ist, über die fol

$$(1 + e)\frac{3L}{r^3 g\left(1 - \frac{3}{5\rho}\right)} \sin \quad \cos^2 v \cdot \sin^2\vartheta$$

$$\text{weniger} - (1 + e)\frac{3L}{4r^3 g\left(1 - \frac{3}{5\rho}\right)} \quad n^2\vartheta \cdot \cos^2 v(1 - 2\operatorname{tg} v \cdot \operatorname{cotg}\vartheta)$$

Dagegen wäre die Nachtsfluth

$$(1 + e)\frac{3L}{4r^3 g\left(1 - \frac{3}{5\rho}\right)} \cos^2 v$$

$$- (1 + e)\frac{3L}{r^3 g\left(1 - \frac{3}{5\rho}\right)} \sin v \quad \frac{3L}{1 - \frac{3}{5\rho}} \cos^2 v \cdot \sin^2\vartheta$$

$$= (1 + e) - \quad \operatorname{tg}\vartheta)$$

$$2$$

erhaben. Das Verhältniß der beide $\operatorname{cotg}\vartheta) : (1 - 2\operatorname{tg} v \cdot \operatorname{cotg}\vartheta)$.

Dasselbe würde also nach der $= 46^0\, 26'$ ist für eine nördliche Declination von 23^0 schon 1,7 wäre ungefähr achtmal höher als die Nachtsfluth, was den Beoba

Daraus folgt also, daß die N n darf.

Schluß folgt später.

Dr. Meyer.

© The Tiffen Company, 2007
TIFFEN Gray Scale
R G B W K C Y M
A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf