Gring

REALGYMNASIUM DÜSSELDORF BIBLIOTHEK

Die wichtigsten Sätze der Planimetrie.

von Schlundt und Ludwig.

§ 1. Einleitung.

Die Mathematik ist die Lehre von den Gröſsen. Sie zerfällt in zwei Hauptteile, nämlich in:

I. die **Arithmetik** oder die Lehre von den Zahlengröſsen,

II. die **Geometrie** oder die Lehre von den Raumgröſsen.

Es giebt 3 Arten von Raumgröſsen: Körper, Flächen, Linien. Ein mathematischer **Körper** ist ein allseitig begrenzter Teil des Raumes, eine **Fläche** die Grenze eines Körpers, eine **Linie** die Grenze einer Fläche.

Die Linie kann entstanden gedacht werden durch Fortbewegung eines Punktes, die Fläche durch Fortbewegung einer Linie, der Körper durch Bewegung einer Flächenfigur. Die Linie hat nur **eine** Ausdehnung oder Dimension, die Länge, die Fläche noch eine zweite, die Breite, der Körper noch eine dritte, die Dicke oder die Höhe.

Die Linien zerfallen in gerade und krumme.

Die **Gerade** ist die kürzeste Verbindung zweier Punkte. Die **krumme Linie** (Kurve) ist in keinem ihrer kleinsten Teile gerade.

Die Flächen zerfallen in ebene und krumme Flächen. Eine Fläche heiſst **eben** oder eine **Ebene**, wenn die Verbindungslinie zweier beliebigen Punkte derselben ganz in sie hinein fällt. Eine Fläche heiſst **krumm**, wenn keiner ihrer kleinsten Teile eben ist.

Die Geometrie zerfällt in die ebene Geometrie oder **Planimetrie** und die körperliche Geometrie oder **Stereometrie.** Die Planimetrie beschäftigt sich mit den Raumgröſsen, welche in einer und derselben Ebene liegen, die Stereometrie mit solchen Raumgröſsen, welche nicht in einer Ebene liegen.

Ein **Grundsatz** (Axiom) ist eine an sich einleuchtende Wahrheit, die keines Beweises bedarf. Ein **Lehrsatz** (Theorem) ist ein Ausspruch, welcher bewiesen werden muſs.

1886. Progr.-No. 648.

995
8 (1886)

503,116

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

UNIVERSITÄTS- UND LANDESBIBLIOTHEK DÜSSELDORF

§ 2. Allgemeine mathematische Grundsätze.

I. $a = a$

Jede Grösse ist sich selbst gleich.

II. $\frac{\begin{array}{c} a = c \\ b = c \end{array}}{a = b}$

Sind zwei Gröſsen einer dritten gleich, so sind sie auch unter sich gleich.

III. $\frac{\begin{array}{c} a = b \\ c = d \end{array}}{a + c = b + d}$

Gleiches zu Gleichem addiert giebt Gleiches.

IV. $\frac{\begin{array}{c} a = b \\ c = d \end{array}}{a - c = b - d}$

Gleiches von Gleichem subtrahiert giebt Gleiches.

V. $\frac{\begin{array}{c} a = b \\ c = d \end{array}}{a\,c = b\,d}$

Gleiches mit Gleichem multipliziert giebt Gleiches.

VI. $\frac{\begin{array}{c} a = b \\ c = d \end{array}}{a : c = b : d}$

Gleiches durch Gleiches dividiert giebt Gleiches.

Grundsatz über die gerade Linie.

§ 3. Durch zwei Punkte ist nur **eine** Gerade möglich.

Von den Winkeln.

§ 4. Erklärung. Der Richtungsunterschied zweier von einem Punkt ausgehenden Geraden heiſst **Winkel.** Die beiden Geraden heiſsen seine **Schenkel,** ihr Schnittpunkt **Scheitel.** Ein **gestreckter** Winkel ist ein solcher, dessen Schenkel eine Gerade bilden. Die Hälfte eines gestreckten Winkels heiſst ein **rechter Winkel** oder ein **Rechter** (R). Ein Winkel, der kleiner als ein rechter ist, heiſst **spitz;** ein Winkel, der gröſser als ein rechter, aber kleiner als ein gestreckter ist, **stumpf;** ein Winkel, der gröſser als ein gestreckter ist, **überstumpf.** — Zwei Linien, welche einen Rechten bilden, heiſsen **senkrecht** zu einander.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

§ 5. Erklärung. **Nebenwinkel** sind solche Winkel, welche den Scheitel und einen Schenkel gemeinsam haben und deren beide anderen Schenkel eine Gerade bilden.

§ 6. Lehrsatz. Die Summe zweier Nebenwinkel ist gleich zwei Rechten.

§ 7. Lehrsatz. Gleiche Winkel haben gleiche Nebenwinkel.

§ 8. Lehrsatz. Die Summe der Winkel um einen Punkt herum ist gleich vier Rechten.

§ 9. Erklärung. **Scheitelwinkel** heifsen zwei Winkel, wenn die Schenkel des einen die Verlängerungen der Schenkel des anderen sind.

§ 10. Lehrsatz. Scheitelwinkel sind gleich.

Von den parallelen Linien.

§ 11. Erklärung. Werden zwei Gerade von einer dritten geschnitten, so unterscheidet man drei Arten von Winkelpaaren.

Korrespondierende Winkel sind solche, welche an derselben Seite der Schneidenden liegen und von denen der eine ein äufserer, der andere ein innerer Winkel ist.

Wechselwinkel sind solche, welche an verschiedenen Seiten der Schneidenden liegen und welche je zwei äufsere oder je zwei innere sind.

Gegenwinkel sind solche, welche an derselben Seite der Schneidenden liegen und welche je zwei äufsere oder je zwei innere sind.

§ 12. Erklärung. Zwei Gerade in einer Ebene heifsen **parallel** (||), wenn sie, beliebig weit verlängert, sich nicht schneiden.

§ 13. Grundsätze. 1. Durch einen Punkt aufserhalb einer Geraden läfst sich nur **eine** Parallele zu derselben ziehen.
2. An Parallelen sind die korrespondierenden Winkel gleich.

§ 14. Lehrsatz. Wechselwinkel an Parallelen sind einander gleich.

§ 15. Lehrsatz. Die Summe zweier Gegenwinkel an Parallelen ist gleich zwei Rechten.

§ 16. Lehrsatz (Umkehrung von Grundsatz 2). Werden zwei Gerade von einer dritten so geschnitten, dafs zwei korrespondierende Winkel einander gleich sind, so sind die geschnittenen Linien parallel.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 17. Lehrsatz (Umkehrung von § 14). Werden zwei Gerade von einer dritten so geschnitten, daſs zwei Wechselwinkel einander gleich sind, so sind die geschnittenen Linien parallel.

§ 18. Lehrsatz (Umkehrung von § 15). Werden zwei Gerade von einer dritten so geschnitten, daſs die Summe zweier Gegenwinkel gleich zwei Rechten ist, so sind die geschnittenen Linien parallel.

Von den geradlinigen Figuren.

§ 19. Die geradlinigen Figuren (Vielecke oder Polygone) werden nach der Zahl der Ecken eingeteilt in: Dreiecke, Vierecke u. s. w.

§ 20. Erklärung. Ein **Dreieck** ist eine von drei Geraden begrenzte Fläche.

Vom Dreieck.

§ 21. Lehrsatz. In jedem Dreieck ist die Summe der drei Winkel gleich zwei Rechten.

§ 22. Lehrsatz. Jeder Auſsenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden Dreieckswinkel, welche nicht seine Nebenwinkel sind.

§ 23. **Einteilung der Dreiecke.** Die Dreiecke werden eingeteilt:

1. **nach ihren Seiten:** in gleichseitige, gleichschenklige und ungleichseitige;
2. **nach ihren Winkeln:** in rechtwinklige, stumpfwinklige und spitzwinklige.

Ein Dreieck heiſst **gleichseitig**, wenn die drei Seiten einander gleich sind; **gleichschenklig**, wenn zwei Seiten einander gleich sind — die beiden gleichen Seiten heiſsen **Schenkel**, die dritte Seite heiſst **Grundlinie (Basis)** —; es heiſst **ungleichseitig**, wenn keine Seite einer anderen gleich ist.

Ein **rechtwinkliges** Dreieck enthält einen rechten und zwei spitze Winkel — die dem Rechten gegenüberliegende Seite heiſst **Hypotenuse**, die ihn einschlieſsenden Seiten heiſsen **Katheten** — ein **stumpfwinkliges** enthält einen stumpfen und zwei spitze, ein **spitzwinkliges** drei spitze Winkel.

§ 24. Erklärung. Zwei Dreiecke heiſsen **kongruent** (≅), wenn sie sich so aufeinander legen lassen, daſs sie sich decken.

§ 25. Kongruenzsatz (sws). Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn in ihnen zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel bezüglich gleich sind.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 26. Lehrsatz. Im gleichschenkligen Dreieck sind die Winkel an der Grundlinie gleich.

§ 27. Kongruenzsatz (sss). Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn in ihnen die drei Seiten bezüglich gleich sind.

§ 28. Kongruenzsatz (wsw; sww). Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn in ihnen eine Seite und zwei Winkel bezüglich gleich sind.

§ 29. Lehrsatz (Umkehrung von § 26). Sind in einem Dreieck zwei Winkel gleich, so ist dasselbe gleichschenklig.

§ 30. Kongruenzsatz (ssW). Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn in ihnen zwei Seiten und der Gegenwinkel der gröſseren Seite bezüglich gleich sind.

§ 31. Lehrsatz. Halbiert man den Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks, so steht die Halbierungslinie senkrecht auf der Grundlinie und halbiert dieselbe.

§ 32. Lehrsatz. Verbindet man den Halbierungspunkt der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Spitze, so steht die Verbindungslinie senkrecht auf der Grundlinie und halbiert den Winkel an der Spitze.

§ 33. Lehrsatz. Fällt man von der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks auf die Grundlinie die Senkrechte, so halbiert diese die Grundlinie und den Winkel an der Spitze.

§ 34. Lehrsatz. Errichtet man auf der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks die Mittelsenkrechte, so geht diese durch die Spitze und halbiert den Winkel an der Spitze.

§ 35. Lehrsatz. In jedem Dreieck liegt der gröſseren von zwei Seiten der gröſsere Winkel gegenüber.

§ 36. Lehrsatz (Umkehrung von § 35). In jedem Dreieck liegt dem gröſseren von zwei Winkeln die gröſsere Seite gegenüber.

§ 37. Lehrsatz. In jedem Dreieck ist die Summe zweier Seiten gröſser als die dritte Seite.

§ 38. Lehrsatz. In jedem Dreieck ist die Differenz zweier Seiten kleiner als die dritte Seite.

§ 39. **Fundamentalaufgaben.**

1. Einen gegebenen Winkel an eine Gerade in einem gegebenen Punkt anzutragen.
2. Durch einen gegebenen Punkt zu einer gegebenen Geraden die Parallele zu ziehen.
3. Einen gegebenen Winkel zu halbieren.
4. Einen rechten Winkel in drei gleiche Teile zu teilen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

5. Eine gegebene Strecke zu halbieren.
6. In einem gegebenen Punkt auf einer Geraden das Lot zu errichten.
7. Von einem gegebenen Punkt auf eine Gerade das Lot zu fällen.
8. Ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel.
9. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln.
10. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, einem anliegenden und dem gegenüberliegenden Winkel.
11. Ein Dreieck zu konstruieren aus den drei Seiten.
12. Ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Seiten und dem Gegenwinkel der gröſseren Seite.
13. Ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Seiten und dem Gegenwinkel der kleineren Seite.

Vom Viereck.

§ 40. Erklärung. Ein **Viereck** ist eine von vier Geraden begrenzte Fläche.

§ 41. Lehrsatz. In jedem Viereck ist die Summe der Winkel gleich vier Rechten.

§ 42. **Einteilung der Vierecke.** Die Vierecke werden eingeteilt in:

1. Parallelogramme,
2. Paralleltrapeze,
3. Trapeze.

Ein **Parallelogramm** ist ein Viereck, in dem die Gegenseiten parallel sind.

Ein **Paralleltrapez** ist ein Viereck, in dem nur zwei Gegenseiten parallel sind.

Ein **Trapez** ist ein Viereck, in dem keine Seite einer anderen parallel ist.

Vom Parallelogramm.

Allgemeine Sätze über das Parallelogramm.

§ 43. Lehrsatz. In jedem Parallelogramm sind die Gegenseiten einander gleich.

Zusatz. Parallele zwischen Parallelen sind gleich.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 44. Lehrsatz (Umkehrung I von § 43). Sind in einem Viereck die Gegenseiten gleich, so ist dasselbe ein Parallelogramm.

§ 45. Lehrsatz (Umkehrung II von § 43). Sind in einem Viereck zwei Gegenseiten gleich und parallel, so ist dasselbe ein Parallelogramm.

§ 46. Lehrsatz. In jedem Parallelogramm sind die gegenüberliegenden Winkel gleich.

§ 47. Lehrsatz (Umkehrung von § 46). Sind in einem Viereck die gegenüberliegenden Winkel gleich, so ist dasselbe ein Parallelogramm.

§ 48. Lehrsatz. In jedem Parallelogramm halbieren die Diagonalen einander.

§ 49. Lehrsatz (Umkehrung von § 48). Halbieren in einem Viereck die Diagonalen einander, so ist dasselbe ein Parallelogramm.

Besondere Sätze über das Parallelogramm.

§ 50. Lehrsatz. Ist in einem Parallelogramm ein Winkel ein Rechter, so sind alle Winkel Rechte.

§ 51. Lehrsatz. Sind in einem Parallelogramm zwei anstofsende Seiten gleich, so sind alle Seiten gleich.

§ 52. **Einteilung der Parallelogramme.** Man teilt die Parallelogramme ein:

1. **nach ihren Seiten:** in ungleichseitige und gleichseitige,
2. **nach ihren Winkeln:** in schiefwinklige und rechtwinklige.

Es giebt demnach vier Arten von Parallelogrammen:

1. das ungleichseitig schiefwinklige (**Rhomboid**),
2. das ungleichseitig rechtwinklige (**Rechteck**),
3. das gleichseitig schiefwinklige (**Rhombus**),
4. das gleichseitig rechtwinklige (**Quadrat**).

§ 53. Lehrsatz. In jedem gleichseitigen Parallelogramm stehen die Diagonalen senkrecht auf einander.

§. 54. Lehrsatz. In jedem rechtwinkligen Parallelogramm sind die Diagonalen einander gleich.

Vom Paralleltrapez.

§ 55. Hilfssatz. Zieht man durch den Halbierungspunkt einer Seite eines Dreiecks zu einer anderen Seite die Parallele, so halbiert diese die dritte Seite und ist halb so grofs als die parallele Seite.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 56. Lehrsatz. Zieht man durch den Halbierungspunkt einer der nicht parallelen Seiten eines Paralleltrapezes zu den parallelen Seiten die Parallele, so wird auch die andere nicht parallele Seite halbiert.

Zusatz. Die Mittellinie ist gleich der halben Summe der parallelen Seiten (das arithmetische Mittel derselben).

Vom Antiparallelogramm.

§ 57. Erklärung. Ein Paralleltrapez, in welchem die nicht parallelen Seiten gleich sind, heifst **Antiparallelogramm.**

§ 58. Lehrsatz. In jedem Antiparallelogramm sind die den parallelen Seiten anliegenden Winkel gleich.

§ 59. Lehrsatz. In jedem Antiparallelogramm sind die Diagonalen einander gleich.

Vom Kreise.

§ 60. Erklärung. Ein **Kreis** ist eine geschlossene krumme Linie, deren Punkte von einem gegebenen Punkt, dem **Mittelpunkt** (**Centrum**), gleichweit entfernt sind. Der Kreisumfang heifst **Peripherie**, jeder Teil der Peripherie **Bogen.** Die Verbindungslinie des Mittelpunktes mit einem Punkt der Peripherie heifst **Halbmesser** (**Radius**). Die Verbindungslinie zweier Punkte der Peripherie heifst **Sehne.** Eine durch den Mittelpunkt gehende Sehne heifst **Durchmesser.** Eine Gerade, welche den Kreis schneidet, heifst **Sekante.** Eine Gerade, welche nur einen Punkt (zwei unendlich nahe Punkte) mit der Peripherie gemeinsam hat, heifst **Tangente**, der gemeinschaftliche Punkt der Berührungspunkt. Ein Winkel, dessen Scheitel im Mittelpunkt liegt und dessen Schenkel Radien sind, heifst **Centriwinkel.** Ein Winkel, dessen Scheitel auf der Peripherie liegt und dessen Schenkel Sehnen sind, heifst **Peripheriewinkel.** Ein Stück der Kreisfläche, welches von einem Bogen und einer Sehne begrenzt wird, heifst **Kreisabschnitt** (**Segment**). Ein Stück der Kreisfläche, welches von einem Bogen und zwei Radien begrenzt wird, heifst **Kreisausschnitt** (**Sektor**).

Von der Sehne.

§ 61. Lehrsatz. Fällt man vom Mittelpunkt eines Kreises auf eine Sehne das Lot, so halbiert dieses die Sehne.

§ 62. Lehrsatz. Errichtet man auf einer Sehne die Mittelsenkrechte, so geht diese durch den Mittelpunkt des Kreises.

§ 63. Lehrsatz. Gleiche Sehnen haben gleichen Abstand vom Mittelpunkt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 64. Lehrsatz (Umkehrung von § 63). Sehnen mit gleichem Abstand vom Mittelpunkt sind gleich.

Von der Tangente.

§ 65. Lehrsatz. Das im Endpunkte eines Radius auf demselben errichtete Lot ist Tangente.

§ 66. Lehrsatz (Umkehrung von § 65). Errichtet man auf einer Tangente in ihrem Berührungspunkt die Senkrechte, so geht diese durch den Mittelpunkt.

Von den Winkeln im und am Kreise.

§ 67. Lehrsatz. Zu gleichen Centriwinkeln eines Kreises gehören gleiche Bogen und Sehnen.

§ 68. Lehrsatz. Der Centriwinkel ist doppelt so grofs als jeder Peripheriewinkel auf demselben Bogen.

§ 69. Lehrsatz. Alle Peripheriewinkel auf gleichen Bogen sind gleich.

§ 70. Lehrsatz. Jeder Peripheriewinkel im Halbkreis ist ein Rechter. (Satz des Thales. Thales von Milet, ein griechischer Philosoph um 600 v. Chr.)

§ 71. Aufgabe. An einen Kreis von einem Punkt aufserhalb eine Tangente zu ziehen.

§ 72. Lehrsatz. Der von einer Sehne und einer Tangente im Berührungspunkt gebildete Winkel ist gleich dem zur Sehne gehörigen Peripheriewinkel im abgewandten Kreisbogen.

§ 73. Aufgabe. Über einer gegebenen Linie einen Bogen zu schlagen, der einen gegebenen Winkel fafst.

Von den eingeschriebenen und umgeschriebenen Vielecken.

§ 74. Aufgaben. 1. Für ein gegebenes Dreieck den Umkreis zu konstruieren.

2. Für ein gegebenes Dreieck den Inkreis zu konstruieren.

§ 75. Lehrsatz. Im Sehnenviereck ist die Summe zweier gegenüberliegenden Winkel gleich zwei Rechten.

§ 76. Lehrsatz (Umkehrung von § 75). Wenn in einem Viereck die Summe zweier gegenüberliegenden Winkel gleich zwei Rechten ist, so läfst sich um dasselbe ein Kreis beschreiben.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 77. Lehrsatz. Im Tangentenviereck sind die Summen der gegenüberliegenden Seiten gleich.

§ 78. Lehrsatz (Umkehrung von § 77). Wenn in einem Viereck die Summen der gegenüberliegenden Seiten gleich sind, so läſst sich in dasselbe ein Kreis beschreiben.

§ 79. Lehrsatz. Um jedes und in jedes regelmäſsige Vieleck läſst sich ein Kreis beschreiben. Die Mittelpunkte beider Kreise fallen zusammen.

§ 80. Lehrsatz. Der Centriwinkel eines regelmäſsigen Vielecks ist gleich vier Rechten, dividiert durch die Anzahl der Seiten.

Von der gegenseitigen Lage zweier Kreise.

§ 81. Lehrsatz. Ist die Centrale zweier Kreise gleich der Summe der beiden Radien, so berühren sich die Kreise von auſsen.

§ 82. Lehrsatz. Ist die Centrale zweier Kreise gleich der Differenz der beiden Radien, so berühren sich die Kreise von innen.

§ 83. Lehrsatz. Ist die Centrale zweier Kreise gröſser als die Summe der beiden Radien, so liegen die Kreise auſser einander.

§ 84. Lehrsatz. Ist die Centrale zweier Kreise kleiner als die Differenz der beiden Radien, so liegen die Kreise in einander.

§ 85. Lehrsatz. Ist die Centrale zweier Kreise kleiner als die Summe, aber gröſser als die Differenz der beiden Radien, so schneiden sich die Kreise in zwei Punkten, welche nicht auf der Centrale liegen.

Von der Gleichheit der Figuren.

§ 86. Erklärung. Zwei Figuren heiſsen **gleich** (=), wenn sie gleiche Flächenräume haben.

§ 87. Lehrsatz. Parallelogramme mit gleichen Höhen lassen sich zwischen parallele Linien legen.

§ 88. Lehrsatz. Parallelogramme mit gleichen Grundlinien und gleichen Höhen sind gleich.

§ 89. Lehrsatz. Ein Dreiek ist gleich der Hälfte eines jeden Parallelogrammes, welches mit ihm gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat.

§ 90. Lehrsatz. Dreiecke mit gleichen Grundlinien und gleichen Höhen sind gleich.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 91. Lehrsatz (Umkehrung I von § 90). Dreiecke von gleichem Inhalt und gleichen Grundlinien haben gleiche Höhen.

§ 92. Lehrsatz (Umkehrung II von § 90). Dreiecke von gleichem Inhalt und gleichen Höhen haben gleiche Grundlinien.

§ 93. Erklärung. Zieht man im Parallelogramm durch einen Punkt einer Diagonale Parallelen zu den Seiten, so heifsen die von der Diagonale nicht durchschnittenen Parallelogramme **Ergänzungen um die Diagonale.**

§ 94. Lehrsatz. Die Ergänzungen um die Diagonale eines Parallelogrammes sind gleich und gleichwinklig.

§ 95. Lehrsatz. $(AB + BC)^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2\,AB.\,BC.$ Das Quadrat über der Summe zweier Linien ist gleich der Summe der Quadrate über den einzelnen Linien, vermehrt um das doppelte Rechteck aus denselben.

§ 96. Lehrsatz. $(AB - BC)^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,AB.\,BC.$ Das Quadrat über der Differenz zweier Linien ist gleich der Summe der Quadrate über den einzelnen Linien, vermindert um das doppelte Rechteck aus denselben.

§ 97. Lehrsatz. $\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 = (AB + BC)\,(AB - BC).$ Die Differenz zweier Quadrate ist gleich dem Rechteck aus der Summe und der Differenz ihrer Seiten.

§ 98. Lehrsatz. Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten. (Pythagoreischer Lehrsatz. Pythagoras von Samos, um 550 v. Chr.)

§ 99. Lehrsatz. Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über jeder Kathete gleich dem Quadrat über der Hypotenuse, vermindert um das Quadrat über der anderen Kathete.

§ 100. Lehrsatz (Umkehrung von § 98). Wenn in einem Dreieck das Quadrat über einer Seite gleich ist der Summe der Quadrate über den beiden anderen Seiten, so ist der Gegenwinkel der ersten Seite ein Rechter.

§ 101. Erklärung. Unter der **Projektion** einer Strecke auf eine Linie versteht man die Entfernung der Fufspunkte der beiden Lote, welche von den Endpunkten der gegebenen Strecke auf die Linie gefällt werden können.

§ 102. Der allgemeine Pythagoreische Lehrsatz.

In jedem stumpfwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Gegenseite des stumpfen Winkels gleich der Summe der Quadrate über den beiden anderen Seiten, vermehrt um das doppelte Rechteck aus einer dieser Seiten und der Projektion der anderen auf sie.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

In jedem Dreieck ist das Quadrat über der Gegenseite eines spitzen Winkels gleich der Summe der Quadrate über den beiden anderen Seiten, vermindert um das doppelte Rechteck aus einer dieser Seiten und der Projektion der anderen auf sie.

§ 103. Lehrsatz. In jedem Dreieck ist die Summe der Quadrate über zwei Seiten gleich dem halben Quadrat über der dritten Seite, vermehrt um das doppelte Quadrat über der zugehörigen Mittellinie.

Von der Proportionalität der Linien.

§ 104. Lehrsatz. Zieht man in einem Dreieck zu einer Seite eine Parallele, so verhalten sich die oberen Abschnitte der geteilten Seiten wie die unteren.

§ 105. Lehrsatz. Zieht man in einem Dreieck zu einer Seite eine Parallele, so verhalten sich die oberen Abschnitte der geteilten Seiten wie die ganzen Seiten.

§ 106. Lehrsatz. Zieht man in einem Dreieck zu einer Seite eine Parallele, so verhalten sich die unteren Abschnitte der geteilten Seiten wie die ganzen Seiten.

§ 107. Lehrsatz. Zieht man in einem Dreieck zu einer Seite eine Parallele, so verhält sich die Parallele zur parallelen Seite wie ein oberer Abschnitt zu seiner Seite.

§ 108. Lehrsatz (Umkehrung von § 104, 105 und 106). Teilt eine Gerade zwei Seiten eines Dreiecks in demselben Verhältnis, so ist dieselbe der dritten Seite parallel.

§ 109. Lehrsatz. Die Halbierungslinie jedes Dreieckswinkels (Aufsenwinkels) teilt die Gegenseite so, dafs die Abschnitte sich verhalten wie die ihnen anliegenden Seiten.

Von der Ähnlichkeit der Dreiecke.

§ 110. Erklärung. Zwei Figuren heifsen **ähnlich** ($\sim$), wenn sie der Reihe nach gleiche Winkel haben und die entsprechenden Seiten in gleichem Verhältnis stehen.

§ 111. Lehrsatz. Zieht man in einem Dreieck zu einer Seite eine Parallele, so ist das abgeschnittene Dreieck dem ganzen ähnlich.

§ 112. Ähnlichkeitssatz ($\sim$ w w). Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Winkel des einen denen des anderen gleich sind.

§ 113. Ähnlichkeitssatz ($\sim$ s w s). Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Paar Seiten in gleichem Verhältnis stehen und die von ihnen eingeschlossenen Winkel gleich sind.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 114. Ähnlichkeitssatz (∾ ss W). Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Paar Seiten in gleichem Verhältnis stehen und die Gegenwinkel der gröſseren Seiten gleich sind.

§ 115. Ähnlichkeitssatz (∾ sss). Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn die drei Paar Seiten in gleichem Verhältnis stehen.

§ 116. Lehrsatz. In jedem Dreieck verhalten sich die Höhen umgekehrt wie die zugehörigen Seiten.

§ 117. Lehrsatz. Ähnliche Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate zweier entsprechenden Seiten.

§ 118. Lehrsatz. Im rechtwinkligen Dreieck ist die Höhe die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten der Hypotenuse.

§ 119. Lehrsatz. Im rechtwinkligen Dreieck ist jede Kathete die mittlere Proportionale zwischen dem ihr anliegenden Abschnitt der Hypotenuse und der ganzen Hypotenuse.

§ 120. Aufgaben.

1. Eine Strecke innerlich nach gegebenem Verhältnis zu teilen.
2. Eine Strecke äuſserlich nach gegebenem Verhältnis zu teilen.
3. Eine Strecke nach gegebenem Verhältnis harmonisch zu teilen.
4. Zu drei gegebenen Strecken die vierte Proportionale zu konstruieren.
5. Zu zwei gegebenen Strecken die dritte Proportionale zu konstruieren.
6. Zu zwei gegebenen Strecken die mittlere Proportionale zu konstruieren.

Von der Proportionalität der Linien im und am Kreise.

§ 121. Lehrsatz. Schneiden sich in einem Kreise zwei Sehnen, so ist das Rechteck aus den Abschnitten der einen Sehne gleich dem Rechteck aus den Abschnitten der anderen. (Sehnensatz.)

§ 122. Lehrsatz. Schneiden sich auſserhalb eines Kreises zwei Sekanten, so ist das Rechteck aus der einen Sekante und ihrem äuſseren Abschnitt gleich dem Rechteck aus der anderen Sekante und ihrem äuſseren Abschnitt. (Sekantensatz.)

§ 123. Lehrsatz. Schneiden sich an einem Kreise eine Tangente und eine Sekante, so ist das Quadrat der Tangente gleich dem Rechteck aus der ganzen Sekante und ihrem äuſseren Abschnitt. (Tangentensatz.)

Anmerkung. Die drei letzten Sätze lassen eine Umkehrung zu.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 124. Erklärung. Eine Strecke heifst durch einen Punkt **stetig** oder nach dem **goldenen Schnitt** geteilt, wenn der gröfsere Abschnitt die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Linie und dem kleineren Abschnitt ist.

§ 125. Aufgabe. Eine gegebene Strecke stetig zu teilen.

§ 126. Aufgabe. In einen Kreis ein regelmäfsiges Zehneck zu konstruieren.

§ 127. Aufgabe. In einen Kreis ein regelmäfsiges Fünfzehneck zu konstruieren.

§ 128. Lehrsatz. In jedem Sehnenviereck ist das Rechteck aus den beiden Diagonalen gleich der Summe der Rechtecke aus je zwei gegenüberliegenden Seiten. (Ptolemäischer Lehrsatz. Claudius Ptolemäus, ein bedeutender Mathematiker und Astronom im 2ten Jahrh. n. Chr.)

Von den Transversalen.

§ 129. Lehrsatz. Schneiden sich drei Ecktransversalen eines Dreiecks in einem Punkt, so sind die Produkte aus je drei nicht anstofsenden Seitenabschnitten gleich. (Satz des Ceva. Von Johann Ceva aus Mailand 1678 gefunden.)

§ 130. Lehrsatz (Umkehrung von § 129). Schneiden drei Ecktransversalen die Seiten eines Dreiecks entweder selbst oder zwei derselben die Verlängerungen der Seiten und die dritte die Seite selbst so, dafs die Produkte aus je drei nicht anstofsenden Seitenabschnitten gleich sind, so gehen die Transversalen durch einen Punkt.

§ 131. Lehrsatz. Die drei Mittellinien eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt. (Schwerpunkt.)

§ 132. Lehrsatz. Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.

§ 133. Lehrsatz. Die drei Winkelhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt. (Mittelpunkt des Inkreises.)

§ 134. Lehrsatz. Die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt. (Mittelpunkt des Umkreises.)

§ 135. Lehrsatz. Die Höhen eines Dreiecks halbieren die Winkel bezüglich die Aufsenwinkel des Fufspunktendreiecks, je nachdem die Höhen innerhalb oder aufserhalb des Dreiecks liegen.

§ 136. Lehrsatz. Der obere Abschnitt jeder Höhe eines Dreiecks ist doppelt so grofs als die zu derselben Seite gehörende Mittelsenkrechte.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 137. Lehrsatz. In jedem Dreieck liegen der Höhendurchschnitt, der Schwerpunkt und der Mittelpunkt des Umkreises auf einer Geraden und zwar ist der Schwerpunkt vom Höhendurchschnitt doppelt so weit entfernt als vom Mittelpunkt des Umkreises. (Satz des Euler. Leonhard Euler, ein hervorragender Mathematiker des vor. Jahrh.)

§ 138. Lehrsatz. Der Kreis, welcher durch die Fufspunkte der drei Höhen eines Dreiecks geht, halbiert die Seiten des Dreiecks und die oberen Abschnitte der Höhen. (Feuerbachscher Kreis, Kreis der neun Punkte. Die Eigenschaften dieses Kreises wies zuerst Feuerbach 1822 nach.)

§ 139. Lehrsatz. Der Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises liegt in der Mitte der Geraden, welche den Höhendurchschnitt mit dem Mittelpunkt des Umkreises verbindet und sein Halbmesser ist halb so grofs als der des Umkreises.

§ 140. Lehrsatz. Schneidet eine Transversale die drei Seiten eines Dreiecks oder ihre Verlängerungen, so sind die Produkte aus je drei nicht anstofsenden Seitenabschnitten gleich. (Satz des Menelaus. Der Satz findet sich zuerst in der Sphärik des Menelaus von Alexandria, um 98 n. Chr.)

§ 141. Lehrsatz (Umkehrung von § 140). Ist auf zwei Seiten eines Dreiecks und der Verlängerung der dritten oder auf den Verlängerungen der drei Seiten je ein Punkt so bestimmt, dafs die Produkte aus je drei nicht anstofsenden Seitenabschnitten gleich sind, so liegen die drei Punkte auf einer Geraden.

§ 142. Lehrsatz. Im Sehnensechseck liegen die drei Durchschnittspunkte je zweier Gegenseiten auf einer Geraden. (Satz des Pascal. Der franz. Mathematiker Pascal fand, 16 Jahre alt, diesen Lehrsatz 1640.)

Von der harmonischen Teilung.

§ 143. Erklärung. Eine Strecke (AB) heifst **harmonisch geteilt**, wenn sie durch einen inneren (C) und einen äufseren Punkt (D) nach demselben Verhältnis geteilt ist. $AC : BC = AD : BD$. Sind drei Gröfsen a, x, b so bestimmt, dafs sich verhält $a - x : x - b = a : b$, d. h. die Differenz der ersten und zweiten Gröfse zur Differenz der zweiten und dritten wie die erste zur dritten, so heifst x das **harmonische Mittel** zu a und b. $x = \frac{2ab}{a+b}$

§ 144. Lehrsatz. Zieht man zwischen zwei zugeordneten Strahlen eines harmonischen Büschels eine Parallele zu dem aufserhalb liegenden vierten Strahl, so wird die Parallele durch den dem letzteren zugeordneten inneren Strahl halbiert.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 145. Lehrsatz (Umkehrung I von § 144). Werden durch drei Strahlen eines Büschels auf einer Geraden gleiche Stücke abgeschnitten und ist der vierte Strahl der Geraden parallel, so ist der Büschel ein harmonischer.

§ 146. Lehrsatz (Umkehrung II von § 144). Werden durch drei Strahlen eines harmonischen Büschels auf einer Geraden gleiche Stücke abgeschnitten, so ist die Gerade dem vierten Strahl parallel.

§ 147. Lehrsatz. Jede durch einen harmonischen Büschel gelegte Gerade wird durch denselben harmonisch geteilt.

§ 148. Lehrsatz. Die Halbierungslinien zweier Nebenwinkel bilden mit den Schenkeln derselben einen harmonischen Büschel.

§ 149. Lehrsatz. Der Kreis über dem Abstand zweier zugeordneten Punkte als Durchmesser ist der geometrische Ort für alle Punkte, deren Entfernungen von den beiden zugeordneten Punkten dasselbe Verhältnis haben, nämlich das Verhältnis der beiden zwischen den letzten Punkten liegenden Strecken. (Satz des Appollonius. Appollonius aus Perga lehrte 250—220 v. Chr. zu Alexandrien und Pergamos Geometrie.)

§ 150. Lehrsatz. In jedem vollständigen Vierseit wird jede Diagonale durch die beiden anderen harmonisch geteilt.

Von den Ähnlichkeitspunkten der Kreise.

§ 151. Lehrsatz. Zieht man in zwei Kreisen mehrere Paare paralleler Radien so, dafs jedes Paar auf derselben Seite der Centrale liegt, so gehen die Verbindungslinien der Endpunkte aller Paare durch denselben Punkt der verlängerten Centrale. (Äufserer Ähnlichkeitspunkt.)

§ 152. Lehrsatz. Zieht man in zwei Kreisen mehrere Paare paralleler Radien so, dafs die Radien jeden Paares auf verschiedenen Seiten der Centrale liegen, so gehen die Verbindungslinien der Endpunkte aller Paare durch denselben Punkt der Centrale. (Innerer Ähnlichkeitspunkt.)

§ 153. Lehrsatz. Die verlängerte Centrale zweier Kreise wird durch die beiden Ähnlichkeitspunkte harmonisch geteilt.

§ 154. Lehrsatz. Berührt ein Kreis zwei andere gleichartig, so liegen die Berührungspunkte mit dem äufseren Ähnlichkeitspunkt der berührten Kreise auf einer Geraden.

§ 155. Lehrsatz. Berührt ein Kreis zwei andere ungleichartig, so liegen die Berührungspunkte mit dem inneren Ähnlichkeitspunkt der berührten Kreise auf einer Geraden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 156. Lehrsatz. Von den sechs Ähnlichkeitspunkten, die zu drei ungleichen Kreisen gehören, liegen sowohl die drei äufseren als auch je zwei innere und ein äufserer auf einer Geraden. (Satz des Monge. Monge, ein französischer Mathematiker, lebte 1745—1818.)

Inhaltsbestimmungen.

§ 157. Erklärung. Das **Flächenmafs** oder die **Flächeneinheit** ist ein Quadrat, dessen Seite gleich der Längeneinheit ist. Den Inhalt einer Figur messen heifst: angeben, wie oft das Flächenmafs in ihr enthalten ist.

§ 158. 1. **Rechteck:** $F = a\,b$

Der Inhalt eines Rechtecks ist gleich dem Produkt aus zwei anstofsenden Seiten.

2. **Quadrat:** $F = a^2$; $F = \frac{1}{2} d^2$

Der Inhalt eines Quadrats ist gleich dem Quadrat einer Seite oder gleich dem halben Quadrat einer Diagonale.

3. **Parallelogramm:** $F = g\,h$

Der Inhalt eines Parallelogrammes ist gleich dem Produkt aus Grundlinie und Höhe.

4. **Dreieck:** $F = \frac{1}{2} g\,h$

Der Inhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkt aus Grundlinie und Höhe.

5. **Paralleltrapez:** $F = \frac{1}{2} h\,(a + b)$

Der Inhalt eines Paralleltrapezes ist gleich dem halben Produkt aus der Höhe und der Summe der parallelen Seiten.

6. **Regelmäfsiges Vieleck:** $F = \frac{1}{2} u\,\varrho$

Der Inhalt eines regelmäfsigen Vielecks ist gleich dem halben Produkt aus dem Umfang und dem kleinsten Radius.

§ 159. Den Inhalt eines Dreiecks aus den drei Seiten zu berechnen.

$$F = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}$$

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

§ 160. Den Inhalt eines gleichseitigen Dreiecks aus der Seite zu berechnen.

$$F = \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 161. Den Inhalt eines gleichschenkligen Dreiecks aus der Basis (a) und dem Schenkel (b) zu berechnen.

$$F = \frac{a}{2} \sqrt{(b + \frac{a}{2})(b - \frac{a}{2})}$$

$$F = \frac{a}{4} \sqrt{(2b + a)(2b - a)}$$

§ 162. Die Höhen eines Dreiecks aus den drei Seiten zu berechnen.

$$h_a = \frac{2}{a} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

§ 163. Die Seiten eines Dreiecks aus den drei Höhen zu berechnen.

$$a = \frac{2\, h_a\, h_b^2\, h_c^2}{\sqrt{(h_a h_b + h_a h_c + h_b h_c)(h_a h_c + h_b h_c - h_a h_b)(h_a h_b + h_b h_c - h_a h_c)(h_a h_b + h_a h_c - h_b h_c)}}$$

§ 164. Den Inhalt eines Dreiecks aus den drei Höhen zu berechnen.

$$F = \frac{h_a^2\, h_b^2\, h_c^2}{\sqrt{(h_a h_b + h_a h_c + h_b h_c)(h_a h_c + h_b h_c - h_a h_b)(h_a h_b + h_b h_c - h_a h_c)(h_a h_b + h_a h_c - h_b h_c)}}$$

§ 165. Den Inhalt eines Dreiecks aus zwei Seiten und der Mittellinie zur dritten zu berechnen.

$$F = \frac{1}{4} \sqrt{(a + b + 2t_c)(b + 2t_c - a)(a + 2t_c - b)(a + b - 2t_c)}$$

§ 166. Den Inhalt eines Dreiecks aus den drei Mittellinien zu berechnen.

$$F = \frac{1}{3} \sqrt{(t_a + t_b + t_c)(t_b + t_c - t_a)(t_a + t_c - t_b)(t_a + t_b - t_c)}$$

§ 167. Die Radien der Berührungskreise eines Dreiecks aus den drei Seiten zu berechnen.

$$\varrho = \frac{F}{s} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

$$\varrho_a = \frac{F}{s-a} = \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}$$

§ 168. Den Inhalt eines Kreises aus den Radien der Berührungskreise zu berechnen.

$$F = \sqrt{\varrho\, \varrho_a\, \varrho_b\, \varrho_c}$$

§ 169. Den Radius des Umkreises eines Dreiecks aus den drei Seiten zu berechnen.

$$r = \frac{a\,b\,c}{4F} = \frac{a\,b\,c}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Von der Quadratur und Rektifikation des Kreises.

§ 170. Erklärung. Die Berechnung des Inhaltes des Kreises, wenn der Radius gegeben ist, nennt man die **Quadratur des Kreises,** die Messung der Peripherie die **Rektifikation des Kreises.**

§ 171. Lehrsatz. $E_n : E_{2n} = E_{2n} : U_n$

Der Inhalt des eingeschriebenen regelmäfsigen 2n Ecks ist das geometrische Mittel zwischen den Inhalten des eingeschriebenen und umgeschriebenen regelmäfsigen n Ecks.

§ 172. Lehrsatz. $U_{2n} = \frac{2 U_n E_{2n}}{U_n + E_{2n}}$

Der Inhalt des umgeschriebenen regelmäfsigen 2n Ecks ist das harmonische Mittel zwischen den Inhalten des umgeschriebenen regelmäfsigen n Ecks und des eingeschriebenen regelmäfsigen 2n Ecks.

§ 173. Mit Hülfe der beiden letzten Sätze ergiebt sich folgende Tabelle.

Inhalt

der eingeschriebenen Vielecke.	der umgeschriebenen Vielecke.
4eck = 2,0000000. r^2	4eck = 4,0000000. r^2
8 „ = 2,8284271. r^2	8 „ = 3,3137085. r^2
16 „ = 3,0614674. r^2	16 „ = 3,1825979. r^2
32 „ = 3,1214451. r^2	32 „ = 3,1517249. r^2
64 „ = 3,1365485. r^2	64 „ = 3,1441184. r^2
128 „ = 3,1403311. r^2	128 „ = 3,1422236. r^2
256 „ = 3,1412772. r^2	256 „ = 3,1417504. r^2
512 „ = 3,1413138. r^2	512 „ = 3,1416321. r^2
1024 „ = 3,1415729. r^2	1024 „ = 3,1416025. r^2
2048 „ = 3,1415877. r^2	2048 „ = 3,1415951. r^2
4096 „ = 3,1415914. r^2	4096 „ = 3,1415933. r^2
8192 „ = 3,1415923. r^2	8192 „ = 3,1415928. r^2
16384 „ = 3,1415925. r^2	16348 „ = 3,1415927. r^2
32768 „ = 3,1415926. r^2	32768 „ = 3,1415926. r^2

Da die Fläche des Kreises gröfser ist als die des regelmäfsigen E_{32768} und kleiner als die des regelmäfsigen U_{32768}, so ist der Inhalt des Kreises, auf 7 Dezimalstellen berechnet, = 3,1415926 . . . r^2.

Die Zahl 3,1415926... bezeichnet man mit π (Ludolfsche Zahl). Archimedes fand für π den Näherungswert $\frac{22}{7}$, Adrian Metius (1550) $\frac{355}{113}$.

Der Inhalt des Kreises mit dem Radius r ist also

$$F = r^2\pi = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

Der Inhalt des Halbkreises

$$F = \frac{r^2\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 174. Lehrsatz. Der Inhalt des zwischen zwei konzentrischen Kreisen gelegenen Ringes ist

$$F = \pi (R^2 - r^2) = \pi (R + r) (R - r)$$

§ 175. Lehrsatz. Die Peripherie des Kreises mit dem Radius r ist gleich $2 r \pi$.

§ 176. Lehrsatz. Beschreibt man um ein rechtwinkliges Dreieck den Kreis und über seinen Katheten nach aufsen hin Halbkreise, so ist das Dreieck gleich der Summe der mondförmigen Flächenstücke. (Lunulae Hippokratis. Hippokrates von Chios, ein Mathematiker um 400 v. Chr.)

§ 177. Geometrische Rektifikation. Die Peripherie eines Kreises ist näherungsweise gleich dem dreifachen Durchmesser, vermehrt um den fünften Teil der Sehne des Quadranten.

Druck von Löffler & Co. in Greiz.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 17 ... schen zwei konzentrischen ...

§ 17 ... Kreises mit dem Radius r ...

§ 17 ... um ein rechtwinkliges Dre... heten nach aufsen hin Halb... Summe der mondförmigen ... Hippokrates von Chios, ei...

§ 17 ... ion. Die Peripherie ei... dreifachen Durchmesser, ... e des Quadranten.

© The Tiffen Company, 2007
TIFFEN Gray Scale
R G B W G K C Y M
A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf