Aufgaben

aus der

analytischen Geometrie

über

Maxima und Minima.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Vorbemerkung.

Wiederholungen aus dem Lehrgebiete der Unterprima in der Oberprima realistischer Anstalten werden in erster Linie durch häufigere Stellung von Aufgaben aus dem Gebiete des früheren Klassenpensums anzustellen sein. Um hierbei zugleich auch der eigentlichen Klassenaufgabe gerecht zu werden, empfiehlt es sich, Lehrgebiete der Unter- und Oberprima durch Aufgaben, in denen Kenntnisse aus beiden Klassenpensen vorausgesetzt sind, zu kombinieren.

So ergiebt es sich von selbst, daß an Anstalten, in denen in der Unterprima, wie es in den Lehrplänen von 1892 vorgeschrieben ist, die synthetische Behandlung der Kegelschnitte gelehrt wird, bei der analytischen Darstellung dieses Lehrstoffs, die synthetische Behandlung desselben immer wieder herangezogen wird. Hierdurch wird nicht nur das Pensum der früheren Klasse in naturgemäßer Weise wiederholt werden, sondern auch durch eine mehrseitige Behandlung derselben Probleme eine Vertiefung der Kenntnisse und Vermehrung des Interesses für diese Lehrgebiete erreicht werden. Zumal an Anstalten, an denen der Unterricht in der Ober- und Unterprima kombiniert ist, wird es sich besonders empfehlen, solche Kombinationen von Lehrgebieten beider Klassenpensen zu bewirken.

Denn bei dem Übelstande, der unbestritten durch die Kombinationen beider Klassen hervorgerufen wird, erfordert es ein gewisses Geschick, Repetitionen mit den Oberprimanern anzustellen, ohne dabei Zeit für die Unterprima zu verlieren. Wie schon vorher erwähnt ist, erscheint eine Verknüpfung des Lehrstoffs beider Klassen, als ein geeignetes Mittel, bei gleichmäßig fortschreitendem Unterricht, ohne Zeitverlust für einen Teil der Schüler, Wiederholungen anzustellen. An hiesiger Anstalt wird in einem Jahr elementare Bestimmung von Maxima und Minima, im darauf folgenden analytische Geometrie in der Prima gelehrt. Auch diese Gebiete lassen sich in Übungsaufgaben verknüpfen. Beispiele für derartige Kombinationen finden sich in den Aufgabensammlungen über Differentialrechnung, in einem Kapitel von Martus „Maxima und Minima". Ebenso in Ramchundra „A treatise on problems of Maxima and Minima, solved by algebra". Auch eine Reihe von Programmen enthalten Aufgaben aus diesem Lehrgebiete.

Im folgenden sind eine Reihe von Aufgaben, wie sie sich zum größeren Teil im Unterricht ergeben haben, zusammengestellt, ohne Angabe der Lösungsmethode. Im allgemeinen ist aber die von Schellbach angegebene elementare Lösungsmethode bevorzugt worden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aufg. 1. Den Punkt auf einer Ellipse zu finden, der von einem Endpunkt der kleinen Achse den größten Abstand hat.

Aufl. Die Ordinate des gesuchten Punktes ist $y = \frac{b^3}{e^2}$, der Abstand des gesuchten Punktes vom Endpunkt der kleinen Achse ist $\frac{a^2}{e}$ Konstruktion: Verbinde den einen Nebenscheitelpunkt mit einem Brennpunkt, errichte auf der Verbindungslinie im Nebenscheitelpunkt ein Lot. Der Abstand des Schnittpunktes dieses Lotes von dem genannten Brennpunkt ist die gesuchte Entfernung.

Bedingung $a > b\sqrt{2}$.

Aufg. 2. Diejenigen konjugierten Durchmesser einer Ellipse zu finden, welche den größten Winkel einschließen.

Aufl. Sei M die Richtungskonstante eines der konjugierten Durchmesser, so muß, wenn φ der stumpfe Winkel ist, den die beiden Durchmesser einschließen

$$\operatorname{tang} \varphi = \sqrt{\frac{b^2 + a^2 M^2}{e^2 M}}$$

ein Minimum werden.

Man erhält diejenigen konjugierten Durchmesser, welche gleiche Längen haben.

Aufg. 3. In ein Parabelsegment, dessen Sehne senkrecht zur Hauptachse steht, die größte Ellipse einzubeschreiben.

Aufl. Sei 2d die Länge der Sehne und c der Abstand derselben vom Scheitelpunkt, so ergeben sich die Halbachsen der Ellipse

$$a = \frac{4}{9} c \text{ und } b = \frac{2}{3} d.$$

Die Koordinaten des Berührungspunktes beider Kurven sind

$$x_1 = \frac{c}{3} \text{ und } y_1 = \frac{d}{3}\sqrt{3}.$$

Aufg. 4. In welcher Entfernung vom Scheitelpunkt muß eine Parabel senkrecht zur Achse durchschnitten werden, damit die größte einbeschriebene Ellipse zu einem Kreise wird?

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aufl. Der Abstand ist $\frac{9}{2}$ p, die Länge der Sehne 6p, der Radius des Kreises gleich dem Parameter 2p.

Aufg. 5. In ein senkrecht zur Achse abgeschnittenes Rotationsparaboloid das größte Rotationsellipsoid zu beschreiben.

Aufl. Sei c der Abstand der Schnittebene und d der Radius des Schnittkreises, so ergeben sich die Halbachsen des Ellipsoids

$$a = \frac{3}{8}\,c \text{ und } b = \frac{3}{4}\,d;$$

der Inhalt des Rotationsellipsoids ist $\frac{9}{32}\,c\,d^2\pi$. Der Berührungskreis hat den Radius $y_1 = \frac{d}{2}\sqrt{2}$; sein Abstand vom Scheitelpunkt ist $x_1 = \frac{c}{2}$.

Aufg. 6. In welcher Entfernung vom Scheitelpunkt muß ein Rotationsparaboloid senkrecht zur Achse durchschnitten werden, damit das größte einbeschriebene Rotationsellipsoid zu einer Kugel wird?

Aufl. Der Durchmesser des Schnittkreises ist gleich dem Abstande des letzteren vom Scheitelpunkte = 8p.

Aufg. 7. Um eine gegebene Ellipse das kleinste Parabelsegment zu beschreiben.

Aufl. Der Parameter der Parabel ist gleich dem Parameter der Ellipse. Der Abstand der beiden zunächst liegenden Scheitelpunkte ist

$$\frac{1}{4}\,a.$$

Die Länge der Parabelsehne ist 3b. Die Koordinaten der Berührungspunkte sind

$$x_1 = \frac{a}{2} \text{ und } y_1 = \frac{b}{2}\sqrt{3}.$$

Der Inhalt des Parabelsegments ist $\frac{9}{2}\,a\,b$.

Aufg. 8. Um einen Kreis das kleinste Parabelsegment zu beschreiben.

Aufl. Der Parameter der Parabel ist der Radius des Kreises. Der Inhalt des Segments

$$\frac{9}{2}\,r^2.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aufg. 9. In ein gleichseitiges Dreieck die größte Ellipse einzubeschreiben. Wie verhält sich der Inhalt der Ellipse zum Inhalt des Dreiecks?

Aufl. Resultat: $\pi : 2$. Die Halbachsen der Ellipse sind

$$a = c\sqrt{\frac{3}{8}} \text{ und } b = \frac{c}{\sqrt{8}}.$$

Der Berührungspunkt der Ellipse hat die Koordinaten $x_{,} = \frac{c}{4}\sqrt{3}$ und $y_{,} = \frac{c}{4}$.

Aufg. 10. In ein gegebenes Parabelsegment, dessen Sehne senkrecht zur Achse steht, das größte Parabelsegment einzubeschreiben, dessen Scheitelpunkt im Schnittpunkt der Sehne des ersteren mit der Hauptachse liegt.

Aufl. Sei $2p$ der Parameter der gegebenen und $2p_{,}$ der der gesuchten Parabel; die Lösung ergiebt die kubische Gleichung:

$$2p_{,}^3 + 3p_{,}^2 p - p^3 = 0.$$

Da eine Wurzel derselben, wie leicht ersichtbar ist, $p_{,} = -p$ ist, so kann dieselbe leicht auf eine quadratische Gleichung reduciert werden. Der Parameter der gesuchten Parabel ist die Hälfte von dem der gegebenen. Sei $2b$ die Länge der gegebenen Parabelsehne und a ihr Abstand vom Scheitelpunkt, so ergiebt sich als Länge der gesuchten Parabelsehne

$$\frac{2}{3}\, b\sqrt{3},$$

der Abstand derselben vom Scheitelpunkt der gegebenen Parabel ist $\frac{a}{3}$.

Aufg. 11. In ein gleichseitiges Dreieck das größte Parabelsegment zu beschreiben.

Aufl. Die Seite des Dreiecks sei c, die Höhe h. Der Parameter der gesuchten Parabel ist $2p = \frac{h}{3}$. Die Länge der durch das Dreieck abgeschnittenen Parabelsehne ist h; der Abstand des Scheitelpunkts der Parabel von der Dreieckseite, welche die Parabel schneidet, ist $\frac{3}{4}h$. Das vom Berührungspunkt auf die Höhe gefällte Lot halbiert dieselbe.

Aufg. 12. 13. In eine Ellipse das Sechseck einzuzeichnen, von dem zwei gegenüberliegende Eckpunkte die Hauptscheitelpunkte, und die beiden von diesen nicht ausgehenden Seiten der Hauptachse parallel sind, welches 1. den größten Inhalt,
2. den größten Umfang hat.

Aufl. 1. Die Koordinaten eines der vier gesuchten Eckpunkte sind

$$x = \frac{a}{2} \text{ und } y = \frac{b}{2}\sqrt{3}. \text{ Der Inhalt ist } \frac{2}{3}\, a\, b\sqrt{3}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2. Die Koordinaten des Eckpunktes sind

$$x = \frac{a^2}{a+b} \quad y = \frac{b\sqrt{b\,(2a+b)}}{a+b}$$

Aufg. 14. 15. Dieselben Aufgaben wie Nr. 12 und 13; nur sollen die beiden gegenüberliegenden Eckpunkte die Nebenscheitelpunkte und die beiden nicht anstoßenden Seiten der Nebenachse parallel sein.

Aufl. Das Resultat ergiebt sich aus dem von Nr. 12 durch Vertauschung von a und b.

Aufg. 16. Um eine Ellipse das kleinste Sechseck zu beschreiben, von dem zwei gegenüberliegende Eckpunkte auf der verlängerten Hauptachse liegen, während die beiden von diesen Eckpunkten nicht ausgehenden Seiten Tangenten in den Nebenscheitelpunkten sind.

Aufl. Die beiden auf der Hauptachse liegenden Scheitelpunkte haben vom Mittelpunkt den Abstand $\frac{2}{3}\,a\sqrt{3}$. Einer der vier anderen Eckpunkte hat die Abscisse $\frac{a}{2}\sqrt{3}$. Die Koordinaten des Berührungspunktes einer der Sechseckseiten, welche Tangenten an die Ellipse sind, hat die Koordinaten $x_, = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ und $y_, = \frac{b}{2}$. Konstruktion einfach.

Aufg. 17. Um eine Ellipse das kleinste Sechseck zu beschreiben, von dem zwei gegenüberliegende Eckpunkte auf der verlängerten Nebenachse liegen, während die beiden von diesen Eckpunkten nicht ausgehenden Seiten Teile der Scheiteltangenten sind.

Aufl. Das Resultat ergiebt sich aus dem von Nr. 14, wenn man die Halbachsen mit einander vertauscht.

Aufg. 18. Wie groß ist der Radius des Kreises, der um den Mittelpunkt einer Ellipse beschrieben ist und dieselbe unter dem größten Winkel schneidet?

Aufl. Es ergiebt sich die Tangente des Winkels, unter dem sich beide Curven schneiden,

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{x_,\, y_,\, e^2}{a^2\, b^2}$$

wenn $x_,\, y_,$ die Koordinaten des Schnittpunktes sind. Da dieser Winkel stets ein spitzer ist, so muß tang φ ein Maximum werden. Man findet

$$x_, = \frac{a}{2}\sqrt{2} \text{ und } y_, = \frac{b}{2}\sqrt{2}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Entfernung zwischen Haupt- und Nebenscheitelpunkt ist die Diagonale eines Quadrats, dessen Seite der Radius des gesuchten Kreises ist. Ist e die mittlere Proportionale zwischen a und 2b, so ist der gesuchte Winkel 45°.

Aufg. 19. Eine Hyperbel hat mit einer Ellipse mit den Halbachsen a und b den Mittelpunkt, die Richtung der Achsen, und die Länge der kleinen Halbachse b gemeinsam. Wie lang muß man die Hauptachse der Hyperbel wählen, damit der Inhalt des durch die vier Schnittpunkte beider Kurven bestimmten Rechtecks ein Maximum ist.

Aufl. Es ergiebt sich die Länge der Hyperbelhalbachse $\frac{a}{\sqrt{3}}$. Der Inhalt des gesuchten Rechtecks ist 2ab.

Aufg. 20. In den Brennpunkten einer Ellipse mit den Halbachsen a und b befinden sich zwei leuchtende Punkte mit den Intensitäten α und β. Welche Punkte der Kurve werden von beiden Lichtquellen gleich stark beleuchtet? Welche Punkte derselben sind die hellsten und dunkelsten?

Aufl. Seien die Brennstrahlen eines gesuchten Punktes r und r, und die Winkel, welche dieselben mit der Tangente in dem Punkte einschließen φ, so ist für Punkte, welche gleich stark von beiden Lichtquellen beleuchtet werden.

$$\frac{\alpha \sin \varphi}{r^2} = \frac{\beta \sin \varphi}{r,^2}$$

Sei x, die Abscisse dieses Punktes, so ergiebt sich

$$x, = \frac{a^2 (\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha})}{e (\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha})}$$

Für Punkte, welche am hellsten oder dunkelsten beleuchtet sind, ist

$$M = \frac{\alpha \sin \varphi}{r^2} + \frac{\beta \sin \varphi}{r,^2}$$

da $\sin \varphi = \frac{b^2}{r\ r,}$ ist, so ergiebt sich

$$M = \frac{\alpha\ r,^2 + \beta\ r^2}{r^3\ r,^3}$$

wo $r + r, = 2a$ ist.

Die weitere Ausführung der Rechnung ergiebt die kubische Gleichung für den Quotienten

$$\frac{r,}{r} = Z\ Z^3 - \frac{1}{3}\ Z^2 + \frac{\beta}{3\alpha}\ Z - \frac{\beta}{\alpha} = 0$$

Die Wurzeln dieser Gleichung ergeben, mit Hilfe der Gleichung $r + r, = 2a$, die gesuchten Werte.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aufg. 21. In einem Kreise mit dem Radius r ist ein Durchmesser A B gezeichnet und auf denselben ein Punkt C angenommen, der vom Mittelpunkt den Abstand a hat. In demselben ist auf dem Durchmesser ein Lot errichtet. Von C aus sind nach derselben Seite des Durchmessers zwei Gerade gezogen, welche mit dem Lote die gleichen Winkel bilden. Dieselben mögen die Peripherie des Kreises in den Punkten D und E schneiden. Unter welcher Bedingung ist das Dreieck D C E ein Maximum?

Aufl. Das gesuchte Dreieck ist im Eckpunkte C rechtwinklig.

Aufg. 22. In einen Kreis mit dem Radius r eine Sehne zu zeichnen, deren Länge vermehrt um ihren Abstand vom Mittelpunkte ein Maximum sei.

Aufl. Die Sehne hat den Abstand $\frac{r}{5}$ vom Mittelpunkte.

Aufg. 23. In einer gegebenen Ellipse soll eine Sehne parallel zur Nebenachse so gezogen werden, daß die Summe aus der Sehne und ihrem Abstand vom Mittelpunkt ein Maximum werde.

Aufl. Der Abstand der Sehne vom Mittelpunkt ist

$$x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + 4a^2}}$$

Aufg. 24. Auf der Achse einer Parabel ist ein Punkt gegeben; es soll eine Sehne senkrecht zur Achse zwischen dem Punkte und dem Scheitelpunkt so gezeichnet werden, daß die Summe aus der Sehne und ihrem Abstand vom gegebenen Punkt ein Maximum werde.

Aufl. Von allen Sehnen, welche senkrecht zur Achse stehen, hat die im Abstand des Parameter vom Scheitelpunkt gezeichnete stets die verlangte Eigenschaft für jede Lage des auf der Achse gegebenen Punktes.

Aufg. 25. In der Hauptachse einer Hyperbel ist ein Punkt gegeben; es soll zwischen dem Punkt und dem zunächst gelegenen Scheitelpunkt senkrecht zur Achse eine Sehne so gezeichnet werden, daß die Summe aus der Sehne und ihrem Abstand von dem Punkt ein Maximum werde.

Aufl. Der Abstand der Sehne vom Mittelpunkt ist

$$x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - 4b^2}}$$

Aufg. 26. In einem Punkte einer gegebenen Ellipse ist die Tangente und Normale gezeichnet. Im zweiten Schnittpunkt der Normale mit der Ellipse ist die Tangente gezeichnet. Für welchen Ellipsenpunkt ist der von beiden Tangenten eingeschlossene Winkel am größten?

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aufl. Der gesuchte Punkt hat die Koordinaten

$$x_1 = \frac{b^3}{\sqrt{a^4 + b^4}} \text{ und } y_1 = \frac{a}{b}\sqrt{\frac{a^5 + b^4 e^2}{a^4 + b^4}}$$

Aufg. 27. Es soll diejenige Parabeltangente gesucht werden, für welche das zwischen der Leitlinie und der Hauptachse liegende Stück ein Minimum werde.

Aufl. Die Koordinaten des gesuchten Punktes sind:

$$x = \frac{p}{4}; y = \frac{p}{2}\sqrt{2}$$

Aufg. 28. Für welchen Ellipsenpunkt schließt die Normale mit der Verbindungslinie des Berührungspunktes der zugehörigen Tangente mit dem Mittelpunkt der Ellipse den größten Winkel ein?

Aufl. Es ergiebt sich:

$$\text{tang } \varphi = \frac{e^2 x_1 y_1}{a^2 b^2}$$

Da φ ein spitzer Winkel sein muß, so muß auch tang φ ein Maximum werden. Die Koordinaten des Berührungspunktes sind

$$x_1 = \frac{a}{2}\sqrt{2} \text{ und } y_1 = \frac{b}{2}\sqrt{2}.$$

Aufg. 29. Ein Parabelsegment wird durch eine Sehne begrenzt, welche senkrecht zur Achse im Abstand a vom Scheitelpunkt verläuft. In dasselbe soll das Rechteck beschrieben werden, welches das Parabelsegment, das durch die der Sehne parallele Rechteckseite abgeschnitten wird, an Größe am meisten übertrifft.

Aufl. Die Differenz aus Rechteck und Segment ist:

$$D = 2\,a\,y - \frac{10}{3}\,x\,y.$$

Dieselbe hat den größten Wert für

$$x = \frac{a}{5}.$$

Aufg. 30. 31. In ein Parabelsegment, dessen Sehne im Abstand a vom Scheitelpunkt senkrecht zur Achse verläuft, soll das größte Fünfeck einbeschrieben werden,

1. von dem ein Eckpunkt in den Scheitelpunkt, und die gegenüberliegende Seite in die Parabelsehne fällt, während die an dieselbe anstoßenden Seiten der Achse parallel sind.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2. Von dem ein Eckpunkt in den Scheitelpunkt fällt, während die gegenüberliegende Seite die Parabelsehne selbst ist.

Aufl. Bezeichnet man die Koordinaten eines auf der Parabel gelegenen Eckpunktes mit x und y, so ist

1. Der Inhalt des Fünfecks

$$J = 2a\,y - x\,y,$$

derselbe hat seinen größten Wert für $x = \frac{2}{3}a$.

2. Bezeichnet man mit 2 b die Länge der Parabelsehne, so ist der Inhalt der Fünfecks:

$$J = a\,b + a\,y - b\,x.$$

Das Max. ergiebt sich für $x = \frac{a}{4}$ und $y = \frac{b}{2}$.

Aufg. 32. In ein Parabelsegment, dessen Sehne im Abstand a vom Scheitelpunkt senkrecht zur Achse steht, soll das größte Trapez einbeschrieben werden, welches die Sehne als Seite hat.

Aufl. Die Länge der Seite sei 2 b, ihr Abstand vom Scheitelpunkt a. Es ergiebt sich als Länge der parallelen Seite $\frac{2}{3}b$. Der Abstand derselben vom Scheitelpunkt ist $\frac{a}{9}$.

Aufg. 33. In ein Parabelsegment, welches durch eine Sehne begrenzt wird, welche senkrecht zur Achse im Abstand a vom Scheitelpunkt verläuft, soll dasjenige Trapez einbeschrieben werden, welches das Parabelsegment, das durch die zur gegebenen Sehne parallele Sehne abgeschnitten wird an Größe am meisten übertrifft.

Aufl. Die parallele Seite hat die Länge $\frac{2}{7}b.\,(2\sqrt{2} - 1)$, ihr Abstand vom Mittelpunkt ist $\frac{a}{49}\,(9 + 4\sqrt{2})$.

Aufg. 34. Zwischen einem in der Achse im Abstande a vom Scheitelpunkt gegebenen Punkte einer Parabel, soll eine Sehne senkrecht zur Achse gezeichnet werden, so daß das Dreieck, welches die Sehne zur Seite und den angenommenen Punkt zum Eckpunkt hat, das Parabelsegment, welches durch dasselbe abgeschnitten wird, an Größe am meisten übertrifft.

Aufl. Der Abstand der Sehne vom Scheitelpunkt ist $\frac{a}{7}$

Aufg. 35—40. In das Segment eines Rotationsparaboloids, dessen Schnittebene senkrecht zur Achse steht, soll der Cylinder

1. vom größten Inhalt einbeschrieben werden;
2. vom größten Mantel;

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3. der von der größten Oberfläche;

4. der von der größten Summe aus Mantel und einer Grundfläche:

5. der, dessen Mantelfläche die Summe der Grundflächen an Größe am meisten übertrifft;

6. derjenige, welcher das von ihm abgeschnittene Segment des Paraboloids an Größe am meisten übertrifft.

Aufl. Die Schnittebene des Segments habe den Abstand a vom Scheitelpunkt.

1. Der Cylinder hat die Höhe $\frac{a}{2}$.

2. Die Höhe des Cylinders ist $\frac{2a}{3}$.

3. Der Abstand der oberen Grundfläche des Cylinders vom Scheitelpunkt ist

$$x = \frac{4p + 3a + 2\sqrt{4p^2 + 6ap}}{9}.$$

Der Radius der Grundfläche ist:

$$y = \frac{2p + \sqrt{4p^2 + 6ap}}{3}.$$

4. Der Abstand der oberen Grundfläche vom Scheitelpunkt ist:

$$x = \frac{1}{9}\,(p + 3a + \sqrt{p^2 + 6ap.})$$

Der Radius der Grundfläche

$$y = \frac{1}{3}(p + \sqrt{p^2 + 6ap.})$$

5. Der Abstand der oberen Grundfläche vom Scheitelpunkt ist:

$$x = \frac{1}{9}\,(4p + 3a - 2\sqrt{4p^2 + 6ap.})$$

Der Radius derselben ist:

$$y = \frac{1}{3}\,(\sqrt{4p^2 + 6ap - 2p}).$$

6. Das Resultat ist dasselbe wie in No. 2.

Aufg. 41. 42. In das Segment eines Rotationsparaboloids, dessen Schnittebene senkrecht zur Achse steht, soll ein gerader Cylinder einbeschrieben werden, dessen Achse mit der des Parabelsegments zusammenfällt und dessen eine Grundfläche in der Schnittfläche des Segments liegt; über der andern Grundfläche ist ein gerader Kegel beschrieben, dessen Spitze im Scheitelpunkt des Segments liegt.

1. Unter welcher Bedingung ist die Summe der Inhalte beider Körper ein Maximum?

2. Welcher Cylinder übertrifft den Kegel an Größe am meisten?

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aufl. Sei a der Abstand der Schnittfläche vom Scheitel.

1. Die Höhe des Cylinders ist $\frac{1}{4}$ a.

2. Die Höhe desselben ist $\frac{5}{8}$ a.

Aufg. 43. Ein gleichseitiger Kegel wird durch die größte Parabel, welche sich aus demselben schneiden läßt, in zwei Teile zerlegt. Wie verhalten sich die Inhalte derselben?

Aufl. Der Radius des Grundkreises sei r; der Parameter der Parabel ist $2p = \frac{r}{2}$.

Dadurch, daß man die Schnittsehne der Parabel und des Grundkreises mit der Spitze verbindet, zerfällt der Kegelteil, welcher die Spitze des Kegels enthält, in zwei Kegelhufe, deren Inhalte $\frac{r^3 \pi \sqrt{3}}{9}$ zur Summe haben. Die Inhalte beider Kegelteile verhalten sich wie 1 : 2.

Aufg. 44. In welchem Punkte einer Ellipse muß eine Tangente an dieselbe gezeichnet werden, damit der Abstand des Berührungspunktes von dem Fußpunkte des vom Mittelpunkt derselben auf die Tangente gefällten Lotes möglichst groß sei.

Aufl. Der größte Abstand ist gleich a—b.

Aufg. 45. Von den Parabeln, welche ihren Scheitelpunkt in einem Nebenscheitelpunkt einer gegebenen Ellipse haben und deren Achsen mit der Nebenachse der Ellipse zusammenfallen wird diejenige gesucht, aus der die Ellipse das größte Segment herausschneidet.

Aufl. Der Parameter der Parabel ist $2p = \frac{a^2}{2b}$. Die Koordinaten eines Schnittpunktes sind

$$x = \frac{a}{2}\sqrt{3} \text{ und } y = -\frac{b}{2}.$$

Der Inhalt des Segments ist $ab\sqrt{3}$.

Aufg. 46. In eine Ellipse dasjenige Rechteck einzubeschreiben, welches zu einem Cylindermantel zusammengebogen den Cylinder vom größten Inhalt liefert.

Aufl. Die Koordinaten eines Eckpunktes sind:

$$x = \frac{b}{\sqrt{3}} \text{ und } y = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Aufg. 47. Für welchen Ellipsenpunkt hat die Normale den größten Abstand vom Mittelpunkte?

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aufl. Die Koordinaten des gesuchten Punktes sind

$$x = a \sqrt{\frac{a}{a+b}} \text{ und } y = b \sqrt{\frac{b}{a+b}}$$

der Abstand ist $a - b$.

Aufg. 48. 49. In das Segment eines Paraboloids, dessen Grundfläche senkrecht zur Achse steht soll der abgestumpfte Kegel

1. vom größten Inhalt
2. vom größten Mantel einbeschrieben werden.

Aufl. Sei b der Radius des Grundkreises des Segments, so ergiebt sich für den Radius der oberen Grundfläche des abgestumpften Kegels:

1. Die kubische Gleichung $4\,y^3 + 3\,b\,y^2 - b^3 = 0$.
2. Die kubische Gleichung $3\,y^3 + 5\,b\,y^2 + (b^2 + 8\,p^2)\,y - b^3 = 0$.

Aufg. 50. In ein Parabelsegment das größte Dreieck einzubeschreiben, welches die Sehne als Grundlinie hat und dessen Spitze auf dem Parabelbogen liegt.

Aufl. Die Spitze ist der Endpunkt desjenigen Parabeldurchmessers, welcher die gegebene Sehne halbiert Das Dreieck ist $\frac{3}{4}$ des gegebenen Parabelsegments.

Aufg. 51. Innerhalb eines Rotationsparaboloids ist in der Axe in der Entfernung a vom Scheitel ein Punkt gegeben. Zwischen diesem und dem Scheitel soll senkrecht zur Achse durch das Paraboloid ein Schnitt gelegt werden, als Grundkreis eines Kegels, dessen Spitze der gegebene Punkt ist. Wo muß der Schnitt geführt werden, damit der Kegel das durch den Schnitt abgetrennte Paraboloidsegment an Größe am meisten übertrifft.

Aufl. Der Abstand des Schnitts vom Scheitelpunkt ist $x = \frac{a}{5}$.

Aufg. 52. Wo muß in einem gleichschenkligen Dreieck eine Parallele zur Basis gezogen werden, damit die Parabel, welche durch die Endpunkte der Sehne hindurch geht und ihren Scheitelpunkt im Mittelpunkt der Basis hat, ein Segment bildet, welches das innerhalb derselben liegende von der Parallele abgetrennte gleichschenklige Dreieck an Größe am meisten übertrifft?

Aufl. Der Abstand der Parallelen von der Grundlinie beträgt $x = \frac{5}{7}\,h$.

Aufg. 53. In welchem Punkte einer Ellipse muß man den Krümmungskreis zeichnen, damit die der Ellipse und dem Kreise gemeinsame Sehne möglichst groß ist?

A. Schrader.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf