Die mit dem geometrischen Unterricht verbundenen häuslichen Uebungen bestehen gewöhnlich in Lehrsätzen und Aufgaben, deren Beweise und Constructionen die Schüler selbst auffinden sollen. Nicht minder zweckmässig dürfte es sein, den Schülern der oberen Klassen hin und wieder eine kurze geometrische Abhandlung, die dem Inhalt wie der Darstellung nach ihren Kräften angemessen ist, zum Privatstudium vorzulegen. Wenn sie dem Gange einer solchen Untersuchung folgen wollen, werden sie in der Schlussreihe oft die Zwischenglieder selbst hinzufügen müssen, so dass ihre Thätigkeit ebenso sehr in Anspruch genommen wird als durch die gewöhnliche Art von Uebungen. Dazu kommt noch der weitere Vortheil, dass sie zu diesem Zweck in schnellerer Aufeinanderfolge eine grössere Anzahl bekannter Sätze ins Gedächtniss zurückzurufen genöthigt sind, und dass sie manchen geometrischen Satz, der in der Untersuchung häufiger zur Anwendung kommt, erst dadurch in seiner ganzen Bedeutung erkennen. Dem befähigtern Schüler endlich wird eine derartige Abhandlung zeigen, wie er von einfachen Betrachtungen ausgehend Reihen von Sätzen selbst aufzufinden im Stande ist. Die folgenden Blätter, deren Inhalt die Eigenschaften einer gewissen Art von Transversalen im geradlinigen Dreieck bilden, sollen einen solchen Uebungsstoff für die Schüler unsrer Anstalt bieten. Es konnte bei ihrer Abfassung weder darauf ankommen, lediglich neue geometrische Beziehungen zu geben, noch auch den Stoff zu erschöpfen; doch wird man wohl weder einen gewissen Abschluss, noch neue bemerkenswerthe Eigenschaften des Dreiecks ganz vermissen.

---

§. 1.

Der eigentlichen Abhandlung mögen einige weniger bekannte Sätze vorausgehen, welche öfter gebraucht werden. Sie beziehen sich auf ein Dreieck, in welchem drei Ecktransversalen mit einem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt gezogen sind. Die Seiten dieses Dreiecks (Fig. 1.) ABC werden durch a, b, c bezeichnet, die Segmente BD und DC auf der Seite a durch a_1 und a_2, ebenso CE und AE durch b_1 und b_2, AF und CF durch c_1 und c_2; die Quotienten aus den obern und untern Abschnitten der Transversalen (Transversalquotienten) $\frac{AG}{GD}$, $\frac{BG}{GE}$, $\frac{CG}{GF}$ durch α, β, γ.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

1. Im Dreieck ADC ist

$$AG:GD = ab_2 : a_1 b_1$$

Ferner ist

$$a_2 : a_1 = b_1 c_1 : b_2 c_2$$

$$a : a_1 = b_1 c_1 + b_2 c_2 : b_2 c_2$$

$$AG:GD = b_1 b_2 c_1 + b^2{}_2 c_2 : b_1 b_2 c_2$$

also

$$\alpha = \frac{c_1}{c_2} + \frac{b_2}{b_1},$$

ebenso

$$\beta = \frac{a_1}{a_2} + \frac{c_2}{c_1}, \qquad \gamma = \frac{b_1}{b_2} + \frac{a_2}{a_1}. \qquad 1$$

Die Quotienten, deren Summe der Transversalquotient gleich ist, haben die an der Spitze der Transversale anliegenden Seitensegmente zu Zählern und die andern Segmente derselben Seiten zu Nennern.

Diese Gleichungen (1) dienen zur Bestimmung der Transversalquotienten durch die Segmente der Dreiecksseiten. Wir können sie leicht so umgestalten, dass die Verhältnisse der Seitensegmente durch die Transversalquotienten bestimmt werden. Es ist

$$\alpha + 1 = \frac{b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_1 c_2}{b_1 c_2} = \frac{a_2 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_2 + a_2 b_1 c_2}{a_2 b_1 c_2} = \frac{a_1 c_1 + a_2 c_1 + a_2 c_2}{a_2 c_2}.$$

Ferner ist

$$\beta + 1 = \frac{a_1 c_1 + a_2 c_1 + a_2 c_2}{a_2 c_1}$$

ebenso

$$\left.\begin{aligned} \alpha + 1 : \beta + 1 &= c_1 : c_2 \\ \gamma + 1 : \alpha + 1 &= b_1 : b_2 \\ \beta + 1 : \gamma + 1 &= a_1 : a_2 \end{aligned}\right\} \quad 2.$$

d. h. die Segmente einer Seite verhalten sich zu einander wie die um 1 vermehrten Quotienten derjenigen Transversalen, die an den Seitensegmenten anliegen.

Wenn wir die Fusspunkte der drei Transversalen verbinden, so werden diese bekanntlich durch die Verbindungslinien und ihren gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt harmonisch getheilt. Daher ist

$$GH : GD = AH : AD$$

$$GH : GD = AG : GD + AD,$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{GD}{GH} &= \frac{2GD}{AG} + 1 = \frac{2}{\alpha} + 1 = \alpha_1, \\ \text{ebenso} \quad \beta_1 = \frac{GE}{GK} &= \frac{2}{\beta} + 1 \quad \text{und} \quad \gamma_1 = \frac{GF}{GJ} = \frac{2}{\gamma} + 1 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Wir erhalten die Transversalquotienten des Transversalendreiecks (so mag das durch die Fusspunkte der Transversalen bestimmte Dreieck heissen), wenn wir den doppelten reciproken Werth des zugehörigen Transversalquotienten im ursprünglichen Dreieck um 1 vermehren.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Versuchen wir endlich das Verhältniss zwischen dem Inhalt des Transversalendreiecks F' und dem des ursprünglichen Dreiecks F zu bestimmen, so ergiebt sich

$$EFD : EFG = HD : HG = 2(\alpha+1) : \alpha \text{ nach §. 1. 3.}$$

$$EFG : BGC = EG.FG : BG.GC = 1 : \beta\gamma$$

$$DEF : BGC = 2(\alpha+1) : \alpha\beta\gamma$$

$$BGC : ABC = 1 : \alpha+1$$

$$F' : F = 2 : \alpha\beta\gamma$$

oder

$$F' : 2F = DG.EG.FG : AG.BG.CG \qquad 4.$$

d. h. der Inhalt des Transversalendreiecks verhält sich zu dem doppelten des ursprünglichen wie das Produkt aus den untern Abschnitten der Transversalen zu dem aus den obern.

Anm. Diese Sätze behalten ihre Gültigkeit, auch wenn der Durchschnittspunkt der Transversalen ausserhalb des Dreiecks liegt. Sie finden sich, jedoch anders hergeleitet, in einer beachtenswerthen Abhandlung: Zur Theorie der Transversalen von Dr. Druckenmüller (Progr. d. höh. Bürgerschule zu Trier 1847.).

§. 2.

Wenn man auf einer Dreiecksseite von denEndpunkten aus zwei beliebige aber gleiche Stücke abschneidet, BD und CE, von dem einen dieser Punkte D eine Transversale nach der Gegenecke, durch den andern E mit dieser eine Parallele EF zieht und bis zum Durchschnitt mit den anderen Seiten verlängert, so ist (Fig. 2.)

$$CF : b = CE : CD = c : BG$$

folglich

$$CF.BG = bc.$$

Schneidet man die gleichen Stücke auf den Verlängerungen der Seite ab, BD_1 und CE_1, zieht AD_1, mit ihr die Parallele E_1F_1, so findet man ebenso

$$CF_1.BG_1 = bc.$$

d. h. das Produkt aus den Segmenten, welche durch die Parallele auf den beiden anderen Seiten abgeschnitten werden, ist constant, und zwar gleich dem Produkt aus diesen Seiten selbst.

Anm. Solche Parallelen wie EG und E_1G_1 wollen wir die zu den Ecktransversalen AD und AD_1 gehörigen Paralleltransversalen nennen, solche, wie EG, die von einem Punkte der Seite selbst ausgehn, innere, solche wie E_1G_1 äussere.

Zus. 1. Wählt man die Punkte D und D_1 so, dass sie harmonische Gegenpunkte sind, so werden auch E und E_1 solche Punkte, also

$$CF_1 : b = CE_1 : CD_1 = CE : BE = CF : b,$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

folglich

$$CF_1 = CF \text{ und } BG_1 = BG.$$

d. h. eine innere und äussere Paralleltransversale, deren Ecktransversalen die Seite harmonisch theilen, (zusammengehörige Paralleltransversalen) schneiden auf den beiden andern Seiten gleiche Stücke nach entgegengesetzter Richtung ab.

Zus. 2. Verbindet man den Durchschnittspunkt A_1 einer beliebigen innern und äussern Paralleltransversale, die von der Seite a ausgehn, mit deren Endpunkten, so findet man leicht durch Congruenz der entstandenen Dreiecke, dass $CA_1 = c$ und $BA_1 = b$, also

$$\Delta A_1BC \cong \Delta ABC$$

ist. Alle von einer Seite auslaufenden Paralleltransversalen schneiden sich also in der Spitze des Dreiecks, welches das gegebene über der Seite a als Diagonale zum Parallelogramm ergänzt; die Paralleltransversalen im ursprünglichen werden Ecktransversalen im neuen und umgekehrt.

Zus. 3. Es ist ferner

$$EF : AD = EC : DC = AD : EG$$

und

$$E_1F_1 : AD_1 = AD_1 : E_1G_1,$$

also ist die Ecktransversale die mittlere Proportionale zwischen den Segmenten der zugehörigen Paralleltransversale von ihrem Fusspunkt aus gerechnet.

Zus. 4. Bezeichnen wir die durch die Ecktransversalen AD und AD_1 gebildeten Segmente des Winkels A, BAD und CAD, durch A_1 und A_2, die des Aussenwinkels BAD_1 und MAD_1 durch A' und A'', so ist

$$AF : AG = \sin A_1 : \sin A_2,$$
$$A_1F_1 : A_1G_1 = \sin A' : \sin A'',$$

d. h. die Segmente der beiden andern Seiten zwischen dem gemeinschaftlichen Endpunkt und der $\left\{\begin{matrix}\text{innern}\\ \text{äussern}\end{matrix}\right\}$ Paralleltransversale verhalten sich wie die Sinus der getrennten Segmente des von ihnen gebildeten $\left\{\begin{matrix}\text{Dreieckswinkels}\\ \text{Aussenwinkels}\end{matrix}\right\}$.

§. 3.

Legen wir durch einen Punkt H der innern Paralleltransversale von den Endpunkten der zugehörigen Seite zwei Transversalen CJ und BK, so ist im Dreieck AJC

$$CK.JH.c = AK.CH.BJ,$$
$$BJ : CK = c.JH : CH.AK$$

und im Dreieck BJC

$$JH : CH = BE.JG : EC.BG = JG : C,$$

da

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$BE : BG = BD : c$$

$$BJ : CK = JG : AK = BG - BJ : b - CK$$

$$BJ : CK = BG : b.$$

Da nun

$$BG : b = a_2 c : a_1 b = \sin A_2 : \sin A_1,$$

so ist

$$BJ : CK = a_2 c : a_1 b = \sin A_2 : \sin A_1. \qquad (1)$$

Legen wir die Transversalen durch einen Punkt H_1 der äussern Paralleltransversale, so finden wir

$$BJ_1 : CK_1 = a_2 c : a_1 b = \sin A_2 : \sin A_1.$$

Das Verhältniss der Segmente, welche diese Transversalen von den Endpunkten der ersten Seite auf den beiden andern abschneiden, ist constant, gleich dem Verhältniss der Produkte aus ihren Seiten und den getrennten Segmenten der ersten, oder gleich dem Verhältniss der Sinus der Winkelsegmente, die nicht an ihren Seiten anliegen.

Die Paralleltransversale ist der geometrische Ort für die Durchschnittspunkte dieser Transversalen.

Zus. Verbinden wir die Endpunkte J und K dieser Transversalen und verlängern die Linie bis zum Durchschnitt mit der Seite a, so ist im Dreieck AJK

$$JL : KL = b.BJ : c.CK = a_2 : a_1,$$

d. h. die Segmente dieser Linien, die zwischen der ersten Seite und den beiden andern liegen, stehen im Verhältniss der nicht an diesen Seiten anliegenden Segmente der ersten Seite.

§. 4.

Aus den gefundenen Sätzen erhellt leicht, wie wir uns einen bestimmten geometrischen Ort dieser Art construiren können. Sollen die Segmente BJ und CK der beiden Seiten im Verhältniss $m:n$ stehen, so ist nach §. 2.

$$CF : c = b : BG = m : n.$$

Durch diese beiden Proportionen ist die Lage der Durchschnittspunkte F und G, und somit die Lage der Paralleltransversale EG bestimmt.

Anm. Diese geometrischen Oerter lassen sich zur Auflösung mancher geometrischen Aufgaben vortheilhaft benutzen; eine von ihnen soll weiter unten angeführt werden.

§. 5.

1. Wenn wir im Dreieck ABC (Fig. 3.) 3 Transversalen AD, BE, CF so ziehen, dass sie die Seiten nach demselben Verhältniss $m:n$ theilen, also

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$a_1 : a_2 = b_1 : b_2 = c_1 : c_2 = m : n$$

und die zugehörigen Paralleltransversalen construiren, so wird

$$BF : c = n : m + n$$
$$b : CE = m + n : m$$

$$b.BF : c.CE = n : m$$
$$BF : CE = nc : mb = a_2 c : a_1 b.$$

Daraus folgt nach §. 3., dass der Durchschnittspunkt S der beiden Transversalen BE und CF auf der zur dritten gehörigen Paralleltransversale JG liegt, und ebenso R und Q auf NP und KM. Da ferner

$$ST = SU, \quad RT = RV, \quad VQ = QU$$

ist, so ergiebt sich der Satz:

Die Spitzen des von den drei Ecktransversalen gebildeten Dreiecks liegen in den Halbirungspunkten der Seiten desjenigen Dreiecks, das von den zugehörigen Paralleltransversalen gebildet wird.

2. Ferner ist

$$QR : AQ = EK : AK = EK : EC = BM : a$$
$$RD : QR = BD : BM$$

$$RD : AQ = BD : a = m : m + n.$$

Da nun auch

$$RD : SG = m : n,$$
$$RD : SG + RD = m : m + n,$$

so ist

$$AQ = SG + RD$$

ebenso

$$BR = SE + QK \text{ und } CS = QF + RN,$$

d. h. der obere Abschnitt jeder Ecktransversale ist gleich der Summe aus ihrem untern Abschnitt und dem untern der zugehörigen Paralleltransversale.

3. Wenn wir die gegenüberliegenden Ecken beider Transversalendreiecke verbinden, so ist der Durchschnittspunkt W dieser Linien der gemeinschaftliche Schwerpunkt beider Dreiecke. Ziehen wir von demselben eine Parallele WX mit zwei zusammengehörigen Transversalen, so ist

$$3WX = 2RD + GU = 2RD + SG + QR$$

und da

$$RD + SG = AQ$$
$$3WX = AD.$$

Legen wir durch den Punkt W eine Transversale von der Ecke A aus, so ist $WY : AY = 1 : 3$. Da auch jede der beiden andern Transversalen, die man von B und C aus durch W legen kann, in demselben Verhältniss getheilt wird, so folgt:

Die beiden Transversalendreiecke haben den Schwerpunkt mit dem ursprünglichen Dreieck gemeinschaftlich.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 6.

1. Construiren wir im Dreieck ABC (Fig. 4.) dagegen drei Ecktransversalen, AD, BE, CF, welche einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt Q haben, sowie die zugehörigen Paralleltransversalen GJ, KM, NP, so werden diese nach §. 2. Zus. 2. Ecktransversalen in dem umschriebenen Dreieck $A_1B_1C_1$, dessen Seiten mit denen des ursprünglichen parallel laufen.

Nun ist

$$\begin{array}{c} C_1S:B_1S=a_2:a_1 \\ A_1T:C_1T=b_2:b_1 \\ B_1U:A_1U=c_2:c_1 \\ \hline C_1S.A_1T.B_1U=B_1S.C_1T.A_1U, \end{array}$$

d. h. die drei Paralleltransversalen schneiden sich ebenfalls in einem Punkt.

2. Wenn wir nach §. 2. Zus. 1. zu den innern Paralleltransversalen die zugehörigen äussern construiren, so werden G und G_1, K und K_1, N und N_1 harmonische Gegenpunkte, also

$$\begin{array}{c} CG_1:BG_1=a_1:a_2 \\ AK_1:CK_1=b_1:b_2 \\ BN_1:AN_1=c_1:c_2 \\ \hline CG_1.AK_1.BN_1=BG_1.CK_1.AN_1, \end{array}$$

folglich liegen die Durchschnittspunkte der drei zugehörigen äussern Paralleltransversalen mit ihren Dreiecksseiten in einer geraden Linie.

§. 7.

1. Verbinden wir die Fusspunkte der im vorigen §. erwähnten Ecktransversalen, so wie die ihrer zugehörigen innern Paralleltransversalen unter einander, so wird

$$\begin{array}{c} \Delta ANK=\Delta ABC-\Delta BNC-\Delta CNK \\ CNK=ANE=BFE \\ \hline ANK=ABC-BNC-BFE \end{array}$$

Ferner ist

$$\begin{array}{c} AFE=ABC-BEC-BFE \\ \hline ANK-AFE=BEC-BNC=BQC-AFQE \end{array}$$

Auf dieselbe Weise finden wir

$$\begin{array}{c} GKC-DEC=AQB-CEQD \\ BNG-BFD=AQC-BQFD \\ \hline ANK+GKC+BNG=AFE+DEC+BFD \end{array}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

folglich $$\Delta DEF = \Delta GKN.$$

d. h. die beiden Dreiecke, die durch die Fusspunkte der Eck- und ihrer zugehörigen Paralleltransversalen bestimmt sind, haben gleichen Inhalt.

2) Wenn man sich jede Seite des Dreiecks DEF verlängert denkt, bis sie die dritte Seite des ursprünglichen Dreiecks schneidet, so ist dieser Punkt der harmonische Gegenpunkt zum Fusspunkt der nach derselben Seite gezogenen Transversale. Die drei Durchschnittspunkte sind folglich hier die harmonischen Gegenpunkte zu D, E und F. Da sich die drei nach den Punkten G, K, N gezogenen Transversalen ebenfalls in einem Punkte schneiden müssen, so gehn die verlängerten Seiten des Dreiecks GKN durch die Punkte G_1, K_1, N_1. Die Seiten des durch die $\left\{\begin{matrix}\text{Ecktransversalen}\\ \text{Paralleltransversalen}\end{matrix}\right\}$ bestimmten Dreiecks gehn durch die Fusspunkte der zugehörigen äussern $\left\{\begin{matrix}\text{Ecktransversalen}\\ \text{Paralleltransversalen}\end{matrix}\right\}$.

3. Bezeichnen α', β', γ' die Transversalquotienten von AG, BK, CN, so erhalten wir nach §. 1, 4.

$$\Delta BEF = \frac{2F}{\alpha\beta\gamma} \text{ und } \Delta GNK = \frac{2F}{\alpha'\beta'\gamma'}$$

also $$\alpha\beta\gamma = \alpha'\beta'\gamma'$$

d. h. die Producte aus den Quotienten der ursprünglichen Ecktransversalen und der nach den Fusspunkten der Paralleltransversalen gezogenen sind gleich.

Anm. Man hätte zu demselben Resultat auch auf folgendem Weg kommen können. Nach §. 1 ist

$$\alpha = \frac{b_2}{b_1} + \frac{c_1}{c_2} = \frac{b_1c_1 + b_2c_2}{b_1c_2}$$

$$\alpha' = \frac{b_1}{b_2} + \frac{c_2}{c_1} = \frac{b_1c_1 + b_2c_2}{b_2c_1}$$

$$\alpha : \alpha' = b_2c_1 : b_1c_2 = \frac{c_1}{c_2} : \frac{b_1}{b_2}$$

ebenso

$$\beta : \beta' = \frac{a_1}{a_2} : \frac{c_1}{c_2}$$

$$\gamma : \gamma' = \frac{b_1}{b_2} : \frac{a_1}{a_2}$$

$$\alpha\beta\gamma = \alpha'\beta'\gamma'$$

4. Zwischen beiden Arten von Transversalquotienten findet noch eine andre Beziehung Statt. Es ist nach §. 1. 1.

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} + \frac{b_1}{b_2} + \frac{b_2}{b_1} + \frac{c_1}{c_2} + \frac{c_2}{c_1}$$

und

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} + \frac{b_1}{b_2} + \frac{b_2}{b_1} + \frac{c_1}{c_2} + \frac{c_2}{c_1}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma'$$

also ist auch die Summe der Transversalquotienten gleich.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 8.

1. Betrachten wir $A_1B_1C_1$ als das ursprüngliche Dreieck, so sind A_1S, B_1T, C_1U Ecktransversalen, die sich in einem Punkt schneiden, die frühern Ecktransversalen AD, BE, CF dagegen Linien, die mit den erstern durch die Halbirungspunkte der Seiten parallel gezogen sind. Da nun

$$\Delta AQB \sim \Delta A_1RB_1, \text{ so ist}$$

$$AQ : A_1R = AB : A_1B_1 = 1 : 2.$$

Wenn man in einem Dreieck drei Transversalen zieht, die sich in einem Punkte schneiden, und mit ihnen Parallelen durch die Halbirungspunkte der Seiten, so schneiden sich diese in einem Punkte, und jede dieser Parallelen ist halb so gross als der obere Abschnitt der zugehörigen Ecktransversale.

2. Wie wir eben gesehen haben, ist

$$2AQ = A_1R.$$

Da nun

$$A_1R = A_1G + GR = AD + GR,$$

so ist

$$AQ = QD + GR.$$

Der in §. 5. 2. gefundene Satz behält also auch hier seine Gültigkeit.

3. Wenn wir durch den Durchschnittspunkt der Paralleltransversalen (Fig. 5.) neue Ecktransversalen legen, AA', BB', CC', so ist

$$A'R : AA' = GR : AD = AQ - QD : AD,$$

folglich

$$AR : AA' = 2QD : AD,$$

ebenso

$$BR : BB' = 2QE : BE,$$
$$CR : CC' = 2QF : CF,$$

d. h. jede der neuen Ecktransversalen verhält sich zu ihrem obern Abschnitt wie die zugehörige ursprüngliche zu ihrem doppelten untern.

Anmerk. 1. Es mögen α'', β'', γ'' die Quotienten dieser Transversalen bezeichnen. Dann ist

$$AR : RA' = 2QD : AQ - QD,$$

$$\alpha'' = \frac{2}{\alpha - 1}, \quad \beta'' = \frac{2}{\beta - 1}, \quad \gamma'' = \frac{2}{\gamma - 1}$$

und umgekehrt

$$\alpha = \frac{2}{\alpha''} + 1, \ \beta = \frac{2}{\beta''} + 1, \ \gamma = \frac{2}{\gamma''} + 1.$$

Anmerk. 2. Die in No. 2. und 3. gefundenen Sätze können benutzt werden, um die Lage des Punktes R zu bestimmen. Es ist $GR \overset{>}{\underset{<}{=}} o$, oder $AR \overset{<}{\underset{>}{=}} AA'$, je nachdem $QD \overset{<}{\underset{>}{=}} AQ$ ist. Dieselbe Beziehung findet an den andern Transversalen Statt. Der Punkt R liegt demnach innerhalb des

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dreiecks, wenn die untern Abschnitte der ursprünglichen Ecktransversalen kleiner als die obern sind; er liegt nach aussen von einer Seite, aber innerhalb der beiden andern, wenn der untre Abschnitt der zugehörigen Transversale grösser als der obere; endlich nach innen von einer und ausserhalb der beiden andern, d. h. zwischen deren Verlängerungen, wenn die untern Abschnitte ihrer Transversalen grösser als die obern sind. Diess sind alle mögliche Lagen des Punktes R, und man kann daraus schon schliessen, dass nie die drei untern Abschnitte zugleich grösser als ihre obern sein können. Diess folgt auch leicht aus §. 1. 1. Sind z. B. die untern Abschnitte auf AD und BE grösser als die obern, so ist

$$\frac{c_1}{c_2}+\frac{b_2}{b_1}<1,$$

$$\frac{b_2}{b_1}<1-\frac{c_1}{c_2},$$

$$\frac{b_1}{b_2}>\frac{c_2}{c_2-c_1},$$

Ferner ist

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{c_2}{c_1}<1,$$

$$\frac{a_2}{a_1}>\frac{c_1}{c_1-c_2},$$

$$\frac{b_1}{b_2}+\frac{a_2}{a_1}>\frac{c_2}{c_2-c_1}+\frac{c_1}{c_1-c_2},$$

$$\gamma>1,$$

d. h. der obere Abschnitt der dritten Transversale grösser als der untere.

4. Ziehen wir vom Punkte Q aus eine Parallele QS mit AA' und verbinden ihren Endpunkt mit der Gegenecke, so ist

$$QS:AA'=QD:AD=\frac{AR}{2}:AA',$$

$$QS:AR=1:2$$

und auch

$$VS:AV=QV:VR=1:2,$$

ebenso

$$VT:BV=QV:VR=1:2,$$

d. h. verbindet man den Durchschnittspunkt der Ecktransversalen mit dem der Paralleltransversalen, so geht diese Linie durch den Schwerpunkt des Dreiecks, und zwar ist dieser Punkt vom letztern Punkt noch einmal so weit entfernt als vom erstern.

Anmerk. Den Durchschnittspunkt der Paralleltransversalen wollen wir den Gegenpunkt des Punktes Q, die durch denselben gelegten Transversalen die Gegentransversalen der ursprünglichen nennen.

5. Die Linie QR, die die Schwerpunktslinie heissen mag, schneidet verlängert alle drei Seiten des Dreiecks, (nur wenn $AQ=2QD$ ist sie parallel a); wir wollen das Verhältniss bestimmen, nach welchem sie jede Seite theilt. Es ist

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$AQ:QD=b_1c_1+b_2c_2:b_1c_2$$
$$AQ-QD:QD=b_1c_1+b_2c_2-b_1c_2:b_1c_2,$$
$$GR:QD=b_1c_2+b_2c_2-b_1c_2:b_1c_2$$

folglich

$$GX:DX=b_1c_1+b_2c_2-b_1c_2:b_1c_2$$
$$GX:GD=b_1c_1+b_2c_2-b_1c_2:2b_1c_2-b_1c_1-b_2c_2$$

und da

$$GD:GC=a_2-a_1:a_1$$
$$GX:GC=(a_2-a_1)(b_1c_1+b_2c_2-b_1c_2):a_1(2b_1c_2-b_1c_1-b_2c_2).$$
$$GX:CX=(a_2-a_1)(b_1c_1+b_2c_2-b_1c_2):a(b_1c_2-b_1c_1).$$

Auf ähnliche Weise findet man

$$BX:GX=a(b_1c_2-b_2c_2):(a_2-a_1)(b_1c_1+b_2c_2-b_1c_2)$$
$$BX:CX=(b_1-b_2)c_2:b_1(c_2-c_1),$$

daher

$$AY:CY=(a_2-a_1)c_1:(c_2-c_1)a_2,$$
$$BZ:AZ=(b_1-b_2)a_1:(a_2-a_1)b_2,$$

d. h. die Segmente einer Seite verhalten sich wie die Produkte aus dem Unterschied der Segmente der getrennten und dem anliegenden Segment der andern.

§. 9.

Construiren wir das zu den drei Gegentransversalen AA', BB' und CC' gehörige Dreieck $A'B'C'$, und bezeichnen dessen Seiten mit a'', b'', c'', seine Transversalquotienten mit $\alpha_{\prime\prime}$, $\beta_{\prime\prime}$, $\gamma_{\prime\prime}$, so ist nach §. 1. 3.

$$\alpha_{\prime\prime}=\frac{2}{\alpha''}+1.$$

Ferner haben wir in §. 8. 4. Anmerk. 1. gefunden, dass

$$\alpha=\frac{2}{\alpha''}+1,$$

folglich

$$\alpha_{\prime\prime}=\alpha,\quad \beta_{\prime\prime}=\beta \quad\text{und}\quad \gamma_{\prime\prime}=\gamma. \tag{1}$$

Bezeichnen wir ferner die Segmente $B'D'$ und $D'C'$ der Seite a'' mit a''_1 und a''_2 u. s. w., so ist

$$a''_1:a''_2=\beta_{\prime\prime}+1:\gamma_{\prime\prime}+1=\beta+1:\gamma+1=a_1:a_2, \tag{2}$$

d. h. die Seiten und Transversalen des zu den Gegentransversalen gehörigen Dreiecks werden in demselben Verhältniss getheilt wie die Seiten und Transversalen des ursprünglichen Dreiecks.

Der Inhalt dieses Dreiecks ist

$$F''=\frac{2F}{\alpha''\beta''\gamma''}=\frac{(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)}{4}\cdot F. \tag{3}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 10.

Wir wollen im Folgenden noch untersuchen, wie sich die gefundenen Sätze für gewisse Arten von Transversalen gestalten. Die Transversalen, welche wir wählen, sind:

1) die durch den Schwerpunkt,
2) die durch den Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises,
3) die nach den Berührungspunkten desselben Kreises,
4) die durch den Mittelpunkt des umschriebnen Kreises gezogenen,
5) die Höhenperpendikel.

§. 11.

Die einfachste Gestalt nehmen die Sätze an, wenn die Transversalen durch den Schwerpunkt gehn. Diese Transversalen halbiren die Dreiecksseiten, die Paralleltransversalen fallen daher mit ihnen zusammen; die Segmente, die auf den beiden andern Seiten abgeschnitten werden (§. 3), sind den ganzen Seiten proportionirt; folglich laufen die Verbindungslinien (§. 3. Zus.) der Dreiecksseite parallel. Jeder Transversalquotient (§. 1.) wird $=2$, also der obere Abschnitt doppelt so gross als der untere. Die beiden Transversalendreiecke fallen in eins zusammen, und diess ist gleich dem vierten Theil des ganzen Dreiecks.

§. 12.

1. Die durch den Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises gelegten Transversalen halbiren bekanntlich die Dreieckswinkel. Dann ist

$$a_1 : a_2 = c : b,\ b_1 : b_2 = a : c,\ c_1 : c_2 = b : a \qquad 1.$$

daher nach §. 1.

$$\alpha = \frac{c}{a} + \frac{b}{a} = \frac{b+c}{a},\quad \beta = \frac{a+c}{b},\quad \gamma = \frac{a+b}{c}. \qquad 2.$$

Da $A_1 = A_2$, so wird in §. 3. $BJ = CK$, die durch einen Punkt der Paralleltransversale gelegten Eektransversalen schneiden also gleiche Stücke von den beiden andern Seiten ab. Legt man daher Transversalen durch den Gegenpunkt R, so ist

$$BA' = AB',\ OA' = AC' \text{ und } CB' = BC'$$

d. h. die durch den Gegenpunkt gelegten Transversalen theilen die Dreiecksseiten so, dass die Segmente zweier Seiten, die an der dritten liegen, einander gleich sind.

Für diese Seitensegmente ergeben sich durch einfache Rechnung die Werthe

$$BA' = AB' = \frac{a+b-c}{2},\quad CA' = AC' = \frac{a-b+c}{2},\quad BC' = CB' = \frac{-a+b+c}{2}. \qquad 3.$$

Aus diesen Werthen folgt, dass A', B', C' die Berührungspunkte der zu diesen Seiten gehörigen äussern Berührungskreise sind. Wir können also den obigen Satz auch so aussprechen:

Der Gegenpunkt vom Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises ist der

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Durchschnittspunkt der Transversalen, die nach den auf den Seiten selbst liegenden Berührungspunkten der drei äussern Berührungskreise gezogen sind.

Da $b_1 : b_2 = a : c$ so ist $b_1 - b_2 : b_1 = a - c : a$

und $c_2 : c_2 - c_1 = a : a - b$

folglich $BX : CX = a - c : a - b$ nach §. 8. 5. 4.

Die Segmente, in welche eine Dreiecksseite durch die Schwerpunktslinie getheilt wird, verhalten sich wie die Ueberschüsse derselben über die anliegenden Dreiecksseiten.

Es ist

$$\alpha'' = \frac{2}{\alpha - 1} = \frac{2a}{b + c - a}$$

also

$$\left.\begin{aligned} AR : AA' &= 2a : a + b + c \\ BR : BB' &= 2b : a + b + c \\ CR : CC' &= 2c : a + b + c \end{aligned}\right\} \quad 5.$$

die Gegentransversalen verhalten sich zu ihren obern Abschnitten wie der Umfang des Dreiecks zur doppelten zugehörigen Seite.

Daraus folgt, dass der Gegenpunkt stets innerhalb des Dreiecks liegen muss.

Wenn wir die Segmente BAA' und $A'AC$, in welche $\hat{A}$ durch die Gegentransversale getheilt wird, mit A' und A'' bezeichnen, so ist

$$\begin{aligned} \sin A' : \sin A'' &= BA' . b : CA' . c \\ &= (a + b - c)\, b : (a - b + c)\, c \\ &= b^2 \cos^2 \frac{C}{2} : c^2 \cos^2 \frac{B}{2} \end{aligned}$$

$$\sin A' : \sin A'' = \sin^2 \frac{B}{2} : \sin^2 \frac{C}{2}$$

Die Sinus dieser Segmente verhalten sich wie die Quadrate der Sinus der halben an derselben Seite liegenden Dreieckswinkel.

Fällen wir vom Gegenpunkt Senkrechte auf die Seiten b und c, p_b und p_c, so ist

$$p_c : p_b = \sin A' : \sin A'' = \sin^2 \frac{B}{2} : \sin^2 \frac{C}{2}$$

und da

$$QC : QB = \sin \frac{B}{2} : \sin \frac{C}{2}$$

$$p_c : p_b = QC^2 : QB^2$$

d. h. die Quadrate der Entfernungen des Punktes Q von zwei Ecken verhalten sich zu einander wie die Entfernungen seines Gegenpunktes von deren Gegenseiten.

2. Den Inhalt der Transversalendreiecke zu bestimmen.

Es ist nach 1.

$$\alpha\beta\gamma = \frac{(a+b)(a+c)(b+c)}{abc} = \frac{(\sin A + \sin B)(\sin A + \sin C)(\sin B + \sin C)}{\sin A \sin B . \sin C}$$

$$= \frac{\cos \frac{A-B}{2} . \cos \frac{B-C}{2} . \cos \frac{C-A}{2}}{\sin \frac{A}{2} . \sin \frac{B}{2} . \sin \frac{C}{2}}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

daher

$$F' = 2F.\frac{(a+b)(a+c)(b+c)}{abc} = 2F.\frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}.\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}}.$$

Ferner ist

$$\alpha''\beta''\gamma'' = \frac{8abc}{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} = \frac{2a(a+b+c)}{bc\sin^2 A}$$

$$= \frac{2(\sin A + \sin B + \sin C)}{\sin A.\sin B.\sin C} = \frac{1}{\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}}.$$

also

$$F'' = F.\frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4abc} = 2F.\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Oder wenn wir unter R den Radius des umschriebenen und unter r den des eingeschriebenen Kreises im Dreieck ABC verstehen, so ist

$$F = \frac{(a+b+c)r}{2} = Rr.(\sin A + \sin B + \sin C)$$

$$= 4Rr\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

also

$$F' = \frac{Rr.\sin A\sin B.\sin C}{\cos\frac{A-B}{2}.\cos\frac{B-C}{2}.\cos\frac{C-A}{2}}$$

und

$$F'' = Rr.\sin A.\sin B.\sin C.$$

3. Es soll bestimmt werden, von welchem Punkt der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises der Gegenpunkt ist.

Sehn wir den Mittelpunkt des eingeschriebnen Kreises als den Gegenpunkt an, so ist

$$\alpha'' = \frac{b+c}{a},\ \beta'' = \frac{a+c}{b},\ \gamma'' = \frac{a+b}{c}.$$

Wir wissen aber aus §. 8. 3, dass

$$\alpha'' = \frac{2}{\alpha - 1},\ \text{also}\ \alpha = \frac{2}{\alpha''} + 1$$

ist. Daher sind in diesem Fall die Quotienten der durch den Punkt Q gelegten Transversalen

$$\alpha = \frac{2a+b+c}{b+c},\ \beta = \frac{a+2b+c}{a+c},\ \gamma = \frac{a+b+2c}{a+b}$$

$$\alpha + 1 = \frac{2(a+b+c)}{b+c},\ \beta + 1 = \frac{2(a+b+c)}{a+c},\ \gamma + 1 = \frac{2(a+b+c)}{a+b}.$$

Daraus finden wir für die Seitensegmente folgende Werthe:

$$a_1 : a_2 = \beta + 1 : \gamma + 1 = a + b : a + c$$

$$b_1 : b_2 = b + c : b + a \text{ und } c_1 : c_2 = c + a : c + b$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

d. h. die Segmente einer Seite verhalten sich zu einander wie die Summen aus dieser nnd der getrennten der beiden andern und jede der Transversalen verhält sich zu ihrem untern Abschnitt wie der doppelte Umfang des Dreiecks zur Summe der beiden andern Seiten.

4. Die unter 1 angeführte Eigenschaft der Paralleltransversalen giebt eine einfache Lösung der Aufgabe:

Ein Dreieck zu construiren, wenn ein Winkel und die Summe jeder der einschliessenden und der Gegenseite gegeben sind.

Es sei in Fig. 2. ABC das durch die gegebenen Stücke unmittelbar bestimmte, und AJK das gesuchte Dreieck, also A der gegebene Winkel, $AB = AJ + JK$ und $AC = AK + JK$. Zieht man die beiden Transversalen CJ und BK, so beruht die Lösung auf der Bestimmung des Punktes H. Da nun aber $BJ = CK$ sein soll, so muss H auf der Paralleltransversale, die zu der Halbirenden des Winkels A gehört. Ferner ist

$$\begin{aligned} K\hat{B}C + B\hat{C}J &= B + C - (J\hat{B}K + J\hat{C}K) \\ &= B + C - (C\hat{J}K + B\hat{K}J) \\ &= B + C - (K\hat{B}C + J\hat{C}B) \\ \hline K\hat{B}C + B\hat{C}J &= \frac{B+C}{2}. \end{aligned}$$

Der Punkt H liegt also zugleich auf dem Bogen über BC, der den Supplementwinkel zu $\frac{B+C}{2}$ fasst, somit ist seine Lage und dadurch die der Punkte J und K bestimmt.

Anm. Die Aufgabe lässt sich auch so fassen: Wenn eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gegeben sind, ein Viereck zu zeichnen, in welchem die drei andern Seiten gleich sind.

§. 13.

1. Wenn die Transversalen nach den Berührungspunkten des eingeschriebnen Kreises gehn, so ist nach bekannten Sätzen:

$$\left.\begin{aligned} a_1 : a_2 &= a - b + c : a + b - c \\ b_1 : b_2 &= a + b - c : -a + b + c \\ c_1 : c_2 &= -a + b + c : a - b + c \end{aligned}\right\} \quad 1^a.$$

Sind nun r_a, r_b, r_c die Radien der zu den Dreiecksseiten a, b, c gehörigen äussern Berührungskreise, so ist

$$2F = (a + b + c)r = (-a + b + c)r_a = (a - b + c)r_b = (a + b - c)r_c$$

mithin auch

$$a_1 : a_2 = r_c : r_b,\ b_1 : b_2 = r_a : r_c,\ c_1 : c_2 = r_b : r_a. \qquad 1^b$$

Daraus folgt für die Segmente auf den beiden andern Seiten

$$BJ : CK = r_b . c : r_c . b$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

oder

$$=(a+b-c)c:(a-b+c)b$$
$$=(\sin A+\sin B-\sin C)\sin C:(\sin A-\sin B+\sin C)\sin B$$
$$=\cos\frac{{}^2C}{2}:\cos\frac{{}^2B}{2}$$

d. h. die Segmente der beiden Seiten verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate der Cosinus der halben anliegenden Winkel.

Ferner wird

$$\alpha=\frac{r_b+r_c}{r_a},\ \beta=\frac{r_a+r_c}{r_b},\ \gamma=\frac{r_a+r_b}{r_c} \qquad 2.$$

$$\alpha-1=\frac{-r_a+r_b+r_c}{r_a},\ \beta-1=\frac{r_a-r_b+r_c}{r_b},\ \gamma-1=\frac{r_a+r_b-r_c}{r_c}$$

mithin

$$\alpha''=\frac{2r_a}{-r_a+r_b+r_c},\ \beta''=\frac{2r_b}{r_a-r_b+r_c},\ \gamma''=\frac{2r_c}{r_a+r_b-r_c} \qquad 3.$$

$$\alpha''+1=\frac{r_a+r_b+r_c}{-r_a+r_b+r_c},\ \beta''+1=\frac{r_a+r_b+r_c}{r_a-r_b+r_c},\ \gamma''+1=\frac{r_a+r_b+r_c}{r_a+r_b-r_c}$$

Wir finden also

$$\left.\begin{aligned} BA':A'C&=r_a+r_b-r_c:r_a-r_b+r_c\\ CB':B'A&=-r_a+r_b+r_c:r_a+r_b-r_c\\ AC':C'B&=r_a-r_b+r_c:-r_a+r_b+r_c\end{aligned}\right\} \qquad 4.$$

und

$$\left.\begin{aligned} AR:AA'&=2r_a:r_a+r_b+r_c\\ BR:BB'&=2r_b:r_a+r_b+r_c\\ CR:CC'&=2r_c:r_a+r_b+r_c\end{aligned}\right\} \qquad 5.$$

Die Gegentransversalen verhalten sich also zu ihren obern Abschnitten wie die Summe der Radien der äussern Berührungskreise zum doppelten zugehörigen Radius; die dadurch gebildeten Segmente der Seite wie die Ueberschüsse der zu dieser und der getrennten Seite gehörigen Radien über den dritten.

Soll der Punkt innerhalb der Seite a liegen, so muss

$$2r_a<r_a+r_b+r_c \text{ sein}$$

$$r_a<r_b+r_c$$

Setzt man für r_a, r_b, r_c die obigen Werthe ein, so erhält man

$$\frac{2F}{-a+b+c}<\frac{2F}{a-b+c}+\frac{2F}{a+b-c}$$

$$\frac{1}{-a+b+c}<\frac{2a}{(a-b+c)(a+b-c)}$$

$$(a-b+c)(a+b-c)<2a(-a+b+c)$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\sin\frac{{}^2A}{2} < \frac{2a\cos\frac{{}^2A}{2}}{a+b+c}$$

$$\operatorname{tg}\frac{{}^2A}{2} < \frac{2a}{a+b+c}$$

Da nun

$$\frac{2a}{a+b+c} < 1,$$

so muss auch

$$\operatorname{tg}\frac{{}^2A}{2} < 1$$

$$A < 90^0$$

d. h. der Punkt liegt im spitzwinkligen Dreieck innerhalb, im stumpfwinkligen ausserhalb.

Weiter ergiebt sich aus §. 9. 5.

$$BX : CX = (r_a - r_c) r_a : r_a (r_a - r_b,$$

$$= r_a - r_c : r_a - r_b.$$

2. Den Inhalt der Transversalendreiecke zu bestimmen.

Wir erhalten

$$\alpha\beta\gamma = \frac{(r_a + r_b)(r_a + r_c)(r_b + r_c)}{r_a r_b r_c}$$

und

$$\alpha''\beta''\gamma'' = \frac{8 r_a r_b r_c}{(-r_a + r_b + r_c)(r_a - r_b + r_c)(r_a + r_b - r_c)}$$

also

$$F' = 2F \cdot \frac{r_a r_b r_c}{(r_a + r_b)(r_a + r_c)(r_b + r_c)}$$

und

$$F = F \cdot \frac{(-r_a + r_b + r_c)(r_a - r_b + r_c)(r_a + r_b - r_c)}{4 r_a r_b r_c}$$

3. Um zu entscheiden, zu welchem Punkt der Durchschnitt unsrer Transversalen als Gegenpunkt gehört, setzen wir

$$\alpha'' = \frac{r_b + r_c}{r_a},\ \beta'' = \frac{r_a + r_c}{r_b},\ \gamma'' = \frac{r_a + r_b}{r_c}.$$

Dann ist

$$\alpha = \frac{2r_a + r_b + r_c}{r_b + r_c},\quad \beta = \frac{r_a + 2r_b + r_c}{r_a + r_c},\quad \gamma = \frac{r_a + r_b + 2r_c}{r_a + r_b}$$

also

$$AD : DQ = 2(r_a + r_b + r_c) : r_b + r_c$$

und

$$a_1 : a_2 = r_a + r_b : r_a + r_c$$

Anm. Die Berechnung der Werthe in unserm Fall ist nur kurz angegeben, da sie, wie man auf den ersten Blick erkennt, ganz analog der in §. 12. fortschreitet, wenn man nur an die Stelle der Seiten die Radien der zugehörigen äussern Berührungskreise setzt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 14.

1. Legen wir die Transversalen durch den Mittelpunkt des umschriebenen Kreises, so ist

$$a_1 : AD = \sin B\hat{A}D : \sin B$$
$$AD : a_2 = \sin C : \sin CAD$$
$$a_1 : a_2 = \sin C . \sin BAD : \sin B . \sin CAD$$

Da nun $\sin BAD = \cos C$ und $\sin CAD = \cos B$

so erhalten wir

$$\left.\begin{array}{l} a_1 : a_2 = \sin C . \cos C : \sin B . \cos B = \sin 2C : \sin 2B \\ b_1 : b_2 = \sin 2A : \sin 2C \text{ und } c_1 : c_2 = \sin 2B : \sin 2A \end{array}\right\} \quad 1.$$

folglich

$$\left.\begin{array}{l} a = \dfrac{\sin 2C + \sin 2B}{\sin 2A} = \dfrac{\cos(B-C)}{\cos A} \\ \beta = \dfrac{\cos(C-A)}{\cos B}, \quad \gamma = \dfrac{\cos(A-B)}{\cos C} \end{array}\right\} \quad 2.$$

Legen wir Transversalen durch einen Punkt der Paralleltransversale, so ist

$$BJ : CK = \cos B : \cos C \qquad 3.$$

Die drei Gegentransversalen schneiden daher die Dreiecksseiten so, dass die zwei an einer Seite liegenden Segmente sich wie die Cosinus der anliegenden Winkel verhalten.

Für die Quotienten der Gegentransversalen finden wir

$$\alpha'' = \frac{2\cos A}{\cos(B-C) - \cos A} = \frac{\cos A}{\cos B \cos C}$$

$$\beta'' = \frac{\cos B}{\cos A \cos C} \text{ und } \gamma'' = \frac{\cos C}{\cos A \cos B} \qquad 4.$$

also

$$\alpha'' + 1 = \frac{\sin B \sin C}{\cos B \cos C} = \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C, \ \beta'' + 1 = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} C, \ \gamma'' + 1 = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B$$

und

$$BA' : A'C = \operatorname{tg} C : \operatorname{tg} B, \ CB' : B'A = \operatorname{tg} A : \operatorname{tg} C, \ AC' : C'B = \operatorname{tg} B : \operatorname{tg} A. \qquad 5.$$

Aus 5. folgt aber

$$BA' : A'C = c . \cos B : b . \cos C$$
$$BA' : a = c \cos B : c \cos B + b \cos C$$
$$BA' = c \cos B$$

d. h. die Transversale AA' steht senkrecht auf a und wir erhalten den Satz:

Der Durchschnittspunkt der Höhenperpendikel ist der Gegenpunkt vom Mittelpunkt des umschriebnen Kreises.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dieser Punkt liegt bekanntlich innerhalb beim spitzwinkligen Dreieck, im stumpfwinkligen zwischen den Verlängerungen der Schenkel des stumpfen Winkels. Dies folgt auch aus unsern Gleichungen. Es ist $BR:BB'=\cos B:\sin A.\sin C$; soll der Punkt ausserhalb b liegen, so muss

$$\sin A.\sin C<\cos B$$
$$\sin A.\sin C<\sin A.\sin C-\cos A.\cos C$$
$$\cos A.\cos C<0$$

sein, diess ist nur möglich, wenn A oder C ein stumpfer Winkel ist. Es sei A der stumpfe Winkel, so ist auch $\cos A.\cos B<0$, also liegt der Punkt auch ausserhalb c, mithin zwischen deren Verlängerungen.

Für die Segmente, welche die Schwerpunktslinie auf der Seite a bildet, finden wir

$$BX:CX=\sin 2A-\sin 2C:\sin 2A-\sin 2B \qquad 6.$$

Anm. Die Beziehung zwischen dem Mittelpunkt des umschriebnen Kreises und dem Höhendurchschnitt hätte sich auch auf eine andre und einfachre Weise zeigen lassen. Es stehn in diesem Fall die Linien, welche man von Q nach den Halbirungspunkten der Seiten zieht, senkrecht auf den Seiten, folglich auch die mit ihnen parallelen Gegentransversalen. — Uebrigens wird man leicht sehen, dass hier die zusammengehörigen Transversalen in ähnlicher Beziehung zu den Winkeln im Dreieck stehn, wie die in §. 12 zu den Seiten. Diese Analogie tritt noch deutlicher hervor, wenn man bedenkt, dass $AB\hat{B'}=A\hat{C}C'$, $B\hat{A}A'=B\hat{C}C'$, $C\hat{A}A'=C\hat{B}B'$ d. h. die Gegentransversalen bilden mit den Dreiecksseiten gleiche Winkel, während sie in §. 12. auf denselben gleiche Stücke abschneiden.

2. Wir finden leicht, dass

$$\alpha\beta\gamma=\frac{\cos(A-B)\cos(B-C)\cos(C-A)}{\cos A.\cos B.\cos C}$$

und

$$\alpha''\beta''\gamma''=\frac{1}{\cos A.\cos B.\cos C},$$

also

$$F'=2F.\frac{\cos A.\cos B.\cos C}{\cos(A-B).\cos(B-C).\cos(C-A)}$$

und

$$F''=2F.\cos A.\cos B.\cos C,$$

oder, wenn wir statt F seinen Werth einsetzen, durch R ausgedrückt

$$F=2R^2\sin A.\sin B.\sin C,$$

so wird

$$F'=\frac{R^2.\sin 2A.\sin 2B.\sin 2C}{\cos(A-B).\cos(B-C).\cos(C-A)}$$

und

$$F''=\frac{R^2.\sin 2A.\sin 2B.\sin 2C}{2}.$$

3. Es ist hinlänglich bekannt, dass in unserm Fall die Dreiecke $AB'C'$, $CB'A'$ und $BC'A'$ dem Dreieck ABC ähnlich sind; daher

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$a'':a=AC:b,$$

also

$$a''=a\cos A,\quad b''=b\cos B\quad \text{und}\quad c''=c\cos C.$$

Wir wissen aus §. 9. 2., dass

$$a''_1:a''_2=a_1:a_2=\sin 2C:\sin 2B=c\cos C:b\cos B,$$

daher

$$a''_1:a''_2=c'':b'',\quad b''_1:b''_2=a'':c''_2,\quad c''_1:c''_2=b'':a'',$$

d. h. der Punkt R ist für das Transversalendreieck der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises. Bezeichnen wir dessen Radius mit ϱ, so ist

$$\varrho=\frac{a''}{\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C}=\frac{a\cos A.\cos B.\cos C}{\sin A}=2R\cos A.\cos B.\cos C.$$

4. Wollen wir den Punkt bestimmen, zu welchem der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises als Gegenpunkt gehört, so setzen wir

$$\alpha''=\frac{\cos(B-C)}{\cos A},\quad \beta''=\frac{\cos(C-A)}{\cos B},\quad \gamma''=\frac{\cos(A-B)}{\cos C},$$

dann wird

$$\alpha=\frac{2\cos A+\cos(B-C)}{\cos(B-C)},\quad \beta=\frac{2\cos B+\cos(C-A)}{\cos(C-A)},\quad \gamma''=\frac{2\cos C+\cos(A-B)}{\cos(A-B)},$$

$$\alpha+1=\frac{4\sin B\sin C}{\cos(B-C)},\quad \beta+1=\frac{4\sin A\sin C}{\cos(C-A)},\quad \gamma+1=\frac{4\sin A.\sin B}{\cos(A-B)}$$

und

$$\begin{aligned}a_1:a_2&=\sin C.\cos(A-B):\sin B.\cos(C-A)\\&=\sin 2A+\sin 2B:\sin 2A+\sin 2C,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_1:b_2&=\sin 2B+\sin 2C:\sin 2B+\sin 2A,\\c_1:c_2&=\sin 2C+\sin 2A:\sin 2C+\sin 2B.\end{aligned}$$

die Segmente, in welche eine Seite durch diese Transversalen getheilt wird, verhalten sich wie die Summen der Sinus von dem doppelten gegenüberliegenden und dem doppelten anliegenden Winkel.

§. 15.

1. Sind die gegebenen Transversalen die Höhenperpendikel, so ist

$$a_1:a_2=\operatorname{tg}C:\operatorname{tg}B,\quad b_1:b_2=\operatorname{tg}A:\operatorname{tg}C,\quad c_1:c_2=\operatorname{tg}B:\operatorname{tg}A,\qquad 1.$$

ferner

$$\alpha=\frac{\cos A}{\cos B.\cos C},\quad \beta=\frac{\cos B}{\cos A.\cos C},\quad \gamma=\frac{\cos C}{\cos A.\cos B}. \qquad 2.$$

Daher finden wir für das Verhältniss der Seitensegmente

$$BJ:CK=c\,\mathrm{tg}B:b\,\mathrm{tg}C=\cos C:\cos B. \qquad 3.$$

Sind die Transversalen durch den Gegenpunkt gelegt, so verhalten sich die Segmente zweier Seiten, die an der dritten liegen, wie die Cosinus ihrer Gegenwinkel.

Aus den Werthen von α, β und γ folgt

$$\left.\begin{aligned} \alpha''&=\frac{2\cos B.\cos C}{\cos A-\cos B.\cos C}=\frac{2}{\mathrm{tg}B.\mathrm{tg}C-2}\\ \beta''&=\frac{2}{\mathrm{tg}A.\mathrm{tg}C-2},\quad \gamma''=\frac{2}{\mathrm{tg}A.\mathrm{tg}B-2}\end{aligned}\right\} \qquad 4.$$

$$\alpha''+1=\frac{\mathrm{tg}B.\mathrm{tg}C}{\mathrm{tg}B.\mathrm{tg}C-2},\quad \beta''+1=\frac{\mathrm{tg}A.\mathrm{tg}C}{\mathrm{tg}A.\mathrm{tg}C-2},\quad \gamma''+1=\frac{\mathrm{tg}A.\mathrm{tg}B}{\mathrm{tg}A.\mathrm{tg}B-2},$$

also

$$\left.\begin{aligned} BA':A'C&=\mathrm{tg}\,C(\mathrm{tg}A.\mathrm{tg}B-2):\mathrm{tg}\,B(\mathrm{t}A.\mathrm{tg}C-2)\\ &=\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}B-\mathrm{tg}C:\mathrm{tg}A-\mathrm{tg}B+\mathrm{tg}C\\ CB':B'A&=-\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}B+\mathrm{tg}C:\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}B-\mathrm{tg}C\\ AC':C'B&=\mathrm{tg}A-\mathrm{tg}B+\mathrm{tg}C:-\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}B+\mathrm{tg}C\end{aligned}\right\} \qquad 5.$$

und

$$BX:CX=\mathrm{tg}A-\mathrm{tg}C:\mathrm{tg}A-\mathrm{tg}B, \qquad 6.$$

d. h. die Segmente, in welche eine Seite durch die Gegentransversale getheilt wird, verhalten sich wie die Ueberschüsse der Tangenten des gegenüberliegenden und anliegenden Winkels über den dritten; die Segmente, welche durch die Schwerpunktslinie gebildet werden, wie die Differenzen der Tangenten des gegenüberliegenden und des getrennten Winkels.

Da $AR:AA'=2:\mathrm{tg}B.\mathrm{tg}C$, so liegt R auf der innern Seite von a, so lange $\mathrm{tg}B.\mathrm{tg}C>2$, d. h.

$$\sin B.\sin C>2\cos B.\cos C$$

$$\sin B.\sin C-\cos B\cos C>\cos B\cos C$$

$$\cos A>\cos B\cos C,$$

d. h. wenn A ein spitzer Winkel ist. Mithin liegt im spitzwinkligen Dreieck der Punkt R innerhalb; im stumpfwinkligen ausserhalb.

2. Es ist

$$\alpha''\beta''\gamma''=\frac{8}{(\mathrm{tg}A.\mathrm{tg}B-2)(\mathrm{tg}B.\mathrm{tg}C-2)(\mathrm{tg}C.\mathrm{tg}A-2)}.$$

Da nun

$$\mathrm{tg}A.\mathrm{tg}B.\mathrm{tg}C=\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}B+\mathrm{tg}C$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

so ist

$$\mathrm{tg}A\,\mathrm{tg}B-2=\frac{\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}B-\mathrm{tg}C}{\mathrm{tg}C}.$$

Entwickelt man die entsprechenden Werthe für die andern Faktoren des Nenners und setzt sie in den Werth von $\alpha''\beta''\gamma''$, so wird

$$\alpha''\beta''\gamma''=\frac{8(\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}B+\mathrm{tg}C)}{(\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}B-\mathrm{tg}C)(\mathrm{tg}A-\mathrm{tg}B+\mathrm{tg}C)(-\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}B+\mathrm{tg}C)},$$

$$F''=F\,.\,\frac{(\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}B-\mathrm{tg}C)(\mathrm{tg}A-\mathrm{tg}B+\mathrm{tg}C)(-\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}B+\mathrm{tg}C)}{4(\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}B+\mathrm{tg}C)}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf