Ueber die Bewegung der Electricität in Körpern, welche eine constante oder mit der Richtung veränderliche Leitungsfähigkeit besitzen.

§. 1. Ohm's Differentialgleichungen für die Bewegung der Electricität in linearen Leitern.

Ohm hat in seinem Werke „die galvanische Kette" zuerst den Versuch gemacht, eine Theorie der electrischen Erscheinungen, welche in linearen Leitern durch galvanische Kräfte hervorgerufen werden, zu entwickeln. Drei Annahmen bilden die Grundlage seiner Untersuchungen. Sie setzen erstens voraus, dass die Electricität von einem Körperelemente nur dem zunächst liegenden auf unmittelbare Weise mitgetheilt werde, und dass die Menge derselben bei unveränderlicher Entfernung der Elemente in einer sehr kurzen Zeit dem Unterschied ihrer elektroscopischen Kräfte, (Dichtigkeit, Spannung) dem Producte ihrer Volumina und der Zeitdauer proportional sei. In Bezug auf die Electricität, welche von einem linearen Leiter sich in die Luft zerstreut, hat Ohm das von Coulomb für ruhende Electricität ermittelte Gesetz, nach welchem der Verlust an Electricität während einer sehr kurzen Zeit ihrer Dichtigkeit und einem von der Beschaffenheit der Luft abhängigen Coefficienten proportionhl ist, beibehalten, zugleich aber bemerkt, dass dieser Verlust bei galvanischen Erscheinungen im Allgemeinen vernachlässigt werden könne. Fügt man diesen Annahmen noch die dritte durch die Erfahrung hinreichend bestätigte hinzu, dass verschiedenartige Körper an ihren Berührungsstellen fortwährend denselben Unterschied ihrer electroscopischen Kräfte behaupten, so ist das Fundament gewonnen, auf welches Ohm seine Lehre von der Bewegung der Electricität in einem linearen Leiter gründete.

Bezeichnen m und m' zwei Elemente, deren Volumina zugleich durch m und m' ausgedrückt werden, u und u' ihre electroscopischen Kräfte, so ist nach der ersten Annahme die von m' nach m in der Zeit ∂t übergeführte Electricitätsmenge $\Gamma\partial t = \alpha m m'(u'-u)\partial t$. Blieben die Kräfte u' und u während der Zeiteinheit dieselben, und wäre ihr Unterschied gleich der Krafteinheit, so würde sich vorstehender Ausdruck auf $\alpha m m'$ reduciren. Das Product der unter dieser Vorraussetzung übergeführten Electricitätsmenge in die Entfernung s beider Elemente definirt Ohm als die Leitungsfähigkeit des Körpers. Durch Substitution derselben (k') in den Werth von $\Gamma\partial t$, erhält man $\Gamma\partial t = \frac{k'(u'-u)\partial t}{s}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

So ausgerüstet untersucht Ohm die Electricitätsbewegung in einem prismatischen Stabe, in welchem alle Puncte eines auf der Axe senkrechten Schnittes zu gleicher Zeit dieselbe electroscopische Kraft haben. Bezeichnen M_1, M, M' solche Schnitte in den Entfernungen $x-\partial x$, x, $x+\partial x$ vom Coordinatenanfange, u_1, u, u' die electroscopischen Kräfte in denselben, so ist die Summe der von M_1 und M' an M abgegebenen Electricitätsmengen gleich $\frac{k'(u'+u_1-2u)\partial t}{\partial x}$, oder gleich $k\omega\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\partial x\partial t$, wenn man u' und u_1 nach Taylor's Lehrsatz entwickelt und berücksichtigt, dass k' dem Querschnitte ω des Prisma proportional, also gleich $k\omega$ gesetzt werden kann. Da nun die Aenderungen der Electricitätsmenge in dem Querschnitte M während der Zeit ∂t auch durch $\omega\frac{\partial u}{\partial t}\partial x\partial t$ ausgedrückt wird, so erhält man die Fundamentalgleichung $\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. (1)

Die electroscopischen Kräfte werden aber in einem geschlossenen Strome bald nach Entstehen desselben von der Zeit unabhängig. In diesem Falle, auf welchen Ohm seine Untersuchung fast immer beschränkt, geht Gleichung (1) in die einfachere $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$ über.

Aus der zweiten Fundamentalannahme findet man leicht, dass, wenn die in die Luft sich zerstreuende Electricität in Rechnung gezogen werden soll, und c den Umfang des Prisma, b einen constanten Factor ausdrückt, der rechten Seite der Gleichung (1) das Glied $-\frac{bc}{\omega}u$ hinzuzufügen ist.

Nach dem Obigen sind die von M_1 und M' in der Zeit ∂t nach M übergeführten Electricitätsmengen: $\frac{k\omega(u'-u)\partial t}{\partial x}$ und $\frac{k\omega(u_1-u)}{\partial x}\partial t$, oder beide gleich $k\omega\frac{\partial u}{\partial x}\partial t$. Denkt man sich dieses Strömen der Electricität in unveränderter Stärke auf die Zeiteinheit bezogen, so erhält man den Ausdruck für die Intensität des Stromes $S=k\omega\frac{\partial u}{\partial x}$. (2)

Bezeichnen endlich u_1 und u_2 die electroscopischen Kräfte an der Berührungsfläche zweier verschiedenartiger Körper mit den Leitungsfähigkeiten k_1 und k_2, so hat man nach der dritten Annahme $u_1-u_2=a$, (3) und da der electrische Strom in beiden Leitern an der Berührungsfläche gleiche Grösse und Richtung haben muss, $k_1\omega\frac{\partial u_1}{\partial x}=k_2\omega\frac{\partial u_2}{\partial x}$. (4)

Aus diesen vier Gleichungen hat Ohm die bekannten Gesetze über die electroscopischen Eigenschaften und die Intensität des galvanischen Stromes unter der Voraussetzung, dass ein beharrlicher Zustand bereits eingetreten ist, abgeleitet.

§. 2. Kirchhof's*) und Smaasen's**) Untersuchungen über das dynamische Gleichgewicht der Electricität in homogenen körperlichen Leitern.

Von denselben Annahmen ausgehend haben Kirchhof und Smaasen die Differentialgleichungen für die Bewegung der Electricität in einer Ebene und in einem Körper von constanter Leitungsfähigkeit unter der Voraussetzung, dass der Strom ein stationärer geworden, die electrische Spannung

*) Pogg. Ann. Bd. 64 und 75.
**) Pogg. Ann. Bd. 69 und 72.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

jedes Punctes von der Zeit unabhängig ist, entwickelt. Kirchhof denkt sich in einem Körper zwei unendlich nahe liegende Flächen gleicher Spannung, in der einen ein Flächenelement $\partial\omega$, über demselben nach der anderen Fläche hin einen geraden Cylinder errichtet, in welchem alle Puncte eines auf seiner Axe senkrechten Querschnittes dieselbe Spannung haben werden. Nennt man u die Spannung in $\partial\omega$, n die Normale von $\partial\omega$ nach der zweiten Fläche hin, so fliesst nach Ohm's Principien durch jeden dem Element $\partial\omega$ parallelen Querschnitt in der Richtung von n während der Zeiteinheit die Electricitätsmenge $-k\partial\omega\frac{\partial u}{\partial n}$. Dieselbe Menge strömt durch jeden Querschnitt $\partial\omega'$ des Cylinders. Bezeichnet n' ein Stück der auf $\partial\omega'$ errichteten Normale, so ist $\frac{\partial u}{\partial n'} = \frac{\partial u}{\partial n}\cos(n, n')$, $\partial\omega = \partial\omega'\cos(n, n')$, folglich die durch das Element $\partial\omega'$ nach der Seite, nach welcher n' errichtet ist, fliessende Electricitätsmenge gleich $-k\partial\omega'\frac{\partial u}{\partial n'}$. Dieser Ausdruck gilt für jedes Flächenelement des Körpers. Wenn nun der Strom ein beharrlicher ist, so muss die durch die Oberfläche eines beliebigen Stückes des Körpers strömende Electricitätsmenge gleich Null sein. Nennt man $\partial\omega$ das Element dieser Oberfläche, n die nach Innen errichtete Normale, so ist also die durch die Oberfläche in der Zeiteinheit fliessende Electricitätsmenge gleich $-k\iint\frac{\partial u}{\partial n}\partial\omega$, wenn die Integration über die Oberfläche ausgedehnt wird. Nach einem bekannten Satze ist aber dieses Integral gleich $-k\iiint\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\partial x\partial y\partial z$, wo x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten eines Punctes bezeichnen, und die Integration sich über den von der Oberfläche eingeschlossenen Raum erstreckt. Dieses Integral kann offenbar, da es über einen beliebigen Theil des Körpers ausgedehnt gleich Null sein soll, nur verschwinden, wenn für jeden Punct desselben die Gleichung

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

besteht. Durch ein Element der Oberfläche kann Electricität weder zu- noch abfliessen, woraus folgt, dass für sie (2) $\frac{\partial u}{\partial n}=0$ sein muss. Gehört $\partial\omega$ der Berührungsfläche zweier Körper an, so muss durch $\partial\omega$ dieselbe Electricitätsmenge in den einen Körper hineinströmen, welche aus dem andern herausströmt. Bezeichnen also u_1, n_1 und k_1 die entsprechenden Werthe für einen zweiten Körper, so muss (3) $k\frac{\partial u}{\partial n}+k_1\frac{\partial u}{\partial n_1}=0$, und wenn die beiden Körper electromotorisch verschieden sind und die constante Spannungsdifferenz U haben, nach Ohm's dritter Fundamentalannahme (4) $u-u_1=U$ sein. Durch diese vier Bedingungen für die Stromvertheilung in einem System von leitenden Körpern sind, wie Kirchhof bewiesen hat, die Strömungen oder Differentialquotienten der electrischen Spannung in jedem Puncte nach jeder Richtung eindeutig bestimmt, während der Ausdruck für die Spannung die Hinzufügung einer Constanten gestattet.

Kirchhof hat mit Benutzung der aufgestellten Gleichungen die Vertheilung der Electricität in einer unbegrenzten Ebene und in einer unendlich dünnen kreisförmigen Scheibe untersucht, wenn ihr durch n Electroden A_1, $A_2 \ldots A_n$, in der Zeiteinheit die Electricitätsmengen E_1, $E_2 \ldots E_n$ zugeführt werden. Dann ist nach dem Obigen die durch eine beliebige geschlossene Curve strömende Electricitätsmenge, wenn δ die Dicke der Scheibe ausdrückt, $-k\delta\int\frac{\partial u}{\partial n}\partial s=0$, ausgenommen wenn die Curve einen Einströmungspunct umschliesst. In diesem Falle wird der vorstehende Ausdruck gleich E. Für

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

die Grenze der Scheibe bleibt die Bedingung $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ bestehen. Ist die Scheibe unbegrenzt, so muss die Spannung in der Unendlichkeit gleich einer constanten endlichen Grösse M sein. Bezeichnen r_1, $r_2 \ldots r_n$ die Entfernungen eines Punctes der Ebene von den n Electroden, so beweist Kirchhof, dass für eine unbegrenzte Ebene allen Bedingungen durch die Gleichung

$$u = M - \frac{1}{2\pi k\delta}\{E_1 \log r_1 + E_2 \log r_2 + \ldots E_n \log r_n\}$$

genügt werde. Für eine begrenzte Scheibe ist die Spannung des betrachteten Punctes

$$u = M - \frac{1}{2\pi k\delta}\{E_1 \log(r_1 . r') + E_2 \log(r_1 . r_2') + \ldots E_n \log(r_n . r_n')\},$$

wobei r_1', $r_2' \ldots r_n'$ die Entfernungen desselben von den reciproken Puncten der Electroden ausdrücken.

Smaasen hat die Vertheilung der Electricität in einem unbegrenzten Raume, wenn dieselbe aus der Oberfläche einer Kugel in denselben strömt, bestimmt. Es ist zunächst klar, dass die Electricität sich auf eine symmetrische Weise um den Mittelpunct der kugelförmigen Electrode verbreiten, also u eine Function von r, der Entfernung eines Punctes von jenem Mittelpuncte, sein wird. Nennt man ϱ den Radius der kugelförmigen Electrode, μ die Spannung auf ihrer Oberfläche, x, y, z die Coordinaten des betrachteten Punctes, so ist

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{x^2}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{x^2}{r^3}\frac{\partial u}{\partial r},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{y^2}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{y^2}{r^3}\frac{\partial u}{\partial r},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{z^2}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{z^2}{r^3}\frac{\partial u}{\partial r},$$

folglich

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = 0,$$

woraus sich $u = -\frac{\alpha}{r} + \alpha'$ ergiebt.

Hierauf betrachtet Smaasen den Fall, dass die Electricität aus der Oberfläche zweier kugelförmigen Electroden, deren Abstand $2a$ sei, sich in den unbegrenzten Raum verbreite. Nimmt man die Centrale der beiden Kugeln zur X-Axe, den Halbirungspunct derselben zum Coordinatenanfang, nennt u_1, u_2 die Spannungen des Punctes (x, y, z), wenn sie durch die Wirkungen der einzelnen Electroden hervorgerufen werden, r_1, r_2 seine Entfernungen von den Mittelpuncten der Electroden, dann ist nach einem von Smaasen zuerst bewiesenen Satze u eine lineare Function von u_1 und u_2, also $u = \frac{\beta_1}{r_1} + \frac{\beta_2}{r_2} + \beta$. Die Constanten bestimmt man durch die Bedingungen

$$u = 0, \quad (r_1 \text{ und } r_2 = \infty)\ \varrho \text{ sehr klein gegen } 2a, \quad u = \mu, \quad (\varrho = r_1) \quad u = -\mu, \quad (\varrho = r_2),$$

so dass $u = \varrho\mu\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$ wird. Hieraus leitet Smaasen die Gleichung der Flächen der electrischen Ströme ab, das heisst derjenigen, welche auf den Flächen gleicher Spannung senkrecht stehen, und findet

$$\frac{x+a}{r_1} = \frac{x-a}{r_2} + 1 + \cos\vartheta,$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wenn ϑ den Winkel, welchen die Richtung des Stromes da, wo er die Oberfläche der Electrode berührt, mit der X-Axe bildet. Zugleich bemerkt er, dass, wenn der Körper durch eine Oberfläche, deren Gleichung die vorstehende ist, begrenzt wird, noch immer der obige Ausdruck für u die Spannung der Electricität in einem beliebigen Puncte (x, y, z) ausdrücke, weil in diesem Falle die Flächen gleicher Spannung auf den Flächen der Ströme, also auch auf der Oberfläche, senkrecht stehen.

Schliesslich hat Smaasen die Analyse auf die Bestimmung des Widerstandes, welchen der Raum und insbesondere die Erde der in ihm sich bewegenden Electricität entgegenstellt, angewendet und Resultate gewonnen, die nach Poggendorfs Bemerkung mit den gleichzeitig von Ridolfi gefundenen im Wesentlichen übereinstimmen.

§. 3. Kirchhof's*) Beweis für die Ohm'schen Gesetze.

Die Entwickelung der Differentialgleichungen für die Bewegung der electrischen Massen in Leitern beruht auf Annahmen, welche von den electrischen Grundgesetzen unabhängig, mit den Voraussetzungen, durch welche die electrostatischen Erscheinungen erklärt werden, nicht in Uebereinstimmung sind. Ein wirkliches Grundgesetz muss, wie Weber**) bemerkt, die Stromintensität an irgend einer Stelle nur von den daselbst wirkenden electromotorischen Kräften und dem vorhandenen Widerstande abhängig machen. Ohm hat, um zu einem solchen Gesetze zu gelangen, die Verschiedenheit der electrischen Ladung in Betracht gezogen. Die Wirkung dieser Vertheilung auf die Bewegung der Electricität betrachtet er bloss nach der Analogie mit der Wirkung der Temperaturvertheilung auf die Bewegung der Wärme. Die Wirkung der freien Electricität ist aber durch das Grundgesetz der Electricitätslehre schon gegeben und kann daraus für jede Vertheilung im Leiter berechnet werden, woraus sich die Unzulässigkeit willkührlicher Annahmen nach blosser Analogie mit der Wirkung der Temperaturvertheilung auf die Bewegung der Wärme nachweisen lässt.

Kirchhof hat für den Fall, dass ein beharrlicher Strom einen Körper durchfliesst, und jeder Punct eine constante Spannung angenommen hat, wo also die electromotorische Kraft nur von der freien Electricität im ganzen Körper, nicht von der Induction, herrührt, die Ohm'schen Gesetze aus dem electrostatischen Grundgesetze abgeleitet, und dabei nur Annahmen zu Hilfe genommen, die den in der Theorie der Electrostatik gemachten Voraussetzungen nicht widersprechen. Seine Entwickelung ist folgende:

In einem Leiter befindet sich die Electricität in Gleichgewicht, wenn die Potentialfunction der ganzen freien Electricität in Bezug auf einen inneren Punct constant, woraus gefolgert wird, dass die freie Electricität in gewisser Weise auf der Oberfläche verbreitet ist. Werden zwei electromotorisch wirksame Leiter mit einander in Berührung gebracht, so wird der eine positiv, der andere negativ electrisch. Die an der Berührungsfläche erregte Electricität nimmt bald eine Gleichgewichtslage an, bei welcher die freie Electricität nur an der Oberfläche, theils an der Berührungsfläche, theils an der freien Oberfläche gelagert sein kann. Die Potentialfunction der freien Electricität in Bezug auf alle Puncte eines jeden Leiters ist constant, aber für beide Leiter verschieden, weil sonst überhaupt keine freie Electricität vorhanden sein könnte. Kirchhof nimmt an, dass der Unterschied der Werthe der

*) Pogg. Ann. Bd. 78.

**) Electrodynamische Maassbestimmungen pag. 271 bis 273.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Potentialfunction in beiden Leitern von ihrer Gestalt unabhängig, die Grösse ist, welche die electrische Differenz beider Körper heisst. Nennt man die Potentialfunction aller freien Electricität in Bezug auf einen Punct des einen Leiters u_1, in Bezug auf einen Punct des zweiten Leiters u_2, U die electrische Differenz derselben, so ist $u_1 - u_2 = U$.

Befindet sich die Electricität in einem Systeme von Leitern nicht in Gleichgewicht, so ist die Potentialfunction der freien Electricität in Bezug auf einen inneren Punct nicht constant, sondern eine Function der Coordinaten, daher werden sich die Kräfte, welche von der freien Electricität auf ein Electricitätstheilchen ausgeübt werden, nicht das Gleichgewicht halten, sondern eine bestimmte Resultante (R) liefern. Das neutrale electrische Fluidum in einem Elemente v wird zerlegt, die positive Electricität in der einen Richtung von R, die gleiche Menge negativer in entgegengesetzter Richtung fortgeführt. Kirchhof nimmt an, dass die Menge jeder Flüssigkeit, welche in der Zeiteinheit durch den auf der Richtung von R senkrechten Querschnitt $\partial\omega$ von v bewegt wird, gleich $kR\partial\omega$ sei, wo k die Leitungsfähigkeit des Leiters bezeichnet, und dass diese Gleichung bestehen bleibe, wenn in v bereits freie Electricität vorhanden war. Nennt man n die Normale von $\partial\omega$, welche die Richtung von R hat, so ist $R = -\frac{\partial u}{\partial n}$, also die in der Zeiteinheit durch $\partial\omega$ strömende positive oder negative Electricitätsmenge gleich $-k\frac{\partial u}{\partial n}\partial\omega$. Hieraus folgt, wie früher, für jeden Punct im Innern die Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$, für jeden Punct der freien Oberfläche $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$, für jeden Punct der Berührungsfläche $k\frac{\partial u}{\partial n} + k_1\frac{\partial u}{\partial n_1} = 0$. Auch schliesst Kirchhof aus dieser Betrachtung, dass in dem Falle des dynamischen Gleichgewichts freie Electricität sich nicht im Innern des Leiters befinden könne.

§. 4. Umformung des electrodynamischen Problems von Helmholtz *) und Lipschitz **).

Helmholtz hat die Lösung der Aufgabe von der Vertheilung der Electricität in einem Leiter, welcher von einem beharrlichen Strome durchflossen wird, von der Bestimmung einer electrischen Doppelschicht abhängig gemacht. Durch diese neue Betrachtung der electrodynamischen Aufgabe ist es ihm gelungen, die Vertheilung der Electricität in einer Kugel, welcher durch zwei lineare Electroden an ihrer Oberfläche Electricität zuströmt, wenn ein beharrlicher Zustand eingetreten ist, mit Leichtigkeit zu lösen. Lipschitz ist auf dem von Helmholtz angebahnten Wege fortgeschritten und hat die Lösung der Aufgabe von dem dynamischen Gleichgewichte der Electricität in einem körperlichen gleichmässig leitenden Körper auf die eines Fundamentalproblems zurückgeführt und dieses für ein Rotationsellipsoid und einen Kreis ausführlich behandelt. Wenn auch der dieser Arbeit zugemessene Raum in die Details dieser Untersuchungen tiefer einzugehen verbietet, so können doch die ihnen zu Grunde liegenden Betrachtungen nicht ganz übergangen werden.

Bevor Helmholtz die angedeutete Umformung der Aufgabe von dem dynamischen Gleichgewichte der Electricität in einem körperlichen Leiter entwickelt, beweist er folgende Sätze:

1) Den von der Superposition der electrischen Ströme, dass, wenn in einem beliebigen Sy-

*) Pogg. Ann. 89.
**) Crelle's Journal. Bd. 58.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

steme von Leitern electromotorische Kräfte an verschiedenen Stellen vorkommen, die electrische Spannung und Stromcomponenten in jedem Puncte gleich der algebraischen Summe derjenigen Spannungen und Stromcomponenten sind, welche jede einzelne der electromotorischen Kräfte unabhängig von den anderen hervorbringen würde.

2) Den Satz von der electromotorischen Oberfläche, nach welchem für jeden Leiter, in dessen Inneren electromotorische Kräfte beliebig vertheilt sind, eine von Helmholtz näher bestimmte Vertheilung electromotorischer Kräfte in seiner Oberfläche sich angeben lässt, die in jedem angelegten Leiter dieselben abgeleiteten Ströme, wie die inneren Kräfte des ersten Leiters, hervorbringen.

3) Die Spannungen und Stromcomponenten im Innern eines abgeleiteten Leiters während der Ableitung sind gleich der Summe der ohne Ableitung in ihm stattfindenden Spannungen und Stromcomponenten und derer, welche die electromotorische Oberfläche hervorbringt.

4) Verschiedene Vertheilungsweisen electromotorischer Kräfte in der Oberfläche eines Leiters, welche dieselben abgeleiteten Ströme, wie seine inneren Kräfte, geben, können sich nur um eine für alle Puncte der Oberfläche constante Differenz unterscheiden.

5) Wenn körperliche Leiter durch lineare Leiter Electricität empfangen, so können die Einströmungspuncte als electrische Massenpuncte betrachtet werden. Die Grösse dieser hypothetischen Massen lässt sich folgendermassen bestimmen.

Bezeichnet r die Entfernung der electrischen Masse A von einem Puncte des körperlichen Leiters, $\frac{A}{r}$ ihre Potentialfunction, V den Theil der Potentialfunction, welcher von anderen Massen daselbst hervorgebracht wird, also die ganze Potentialfunction $\frac{A}{r}+V$, so ist für eine beliebige Oberfläche, welche nur die electrische Masse A einschliesst, nach einem Satze von Gauss

$$\iint \frac{\partial\left(V+\frac{A}{r}\right)}{\partial n}\partial\omega = 4\pi A,$$

wo $\partial\omega$ das Oberflächenelement, n die nach Innen gerichtete Normale bedeutet. Die in der Zeiteinheit durch $\partial\omega$ strömende Electricitätsmenge ist aber gleich $k\frac{\partial\left(V+\frac{A}{r}\right)}{\partial n}\partial\omega$, also die durch die Oberfläche strömende gleich $4\pi Ak$. Da diese zugleich die bekannte Stromintensität des linearen Leiters ausdrückt, so kann A berechnet werden.

Man denke sich nun eine Fläche S, in den unendlich kleinen Entfernungen $+\varepsilon$ und $-\varepsilon$ von derselben zwei Schichten positiver und negativer Electricität, deren Dichtigkeiten $+k$ und $-k$ seien, so ist die Potentialfunction dieser Doppelschicht in Bezug auf einen Punct A:

$$\iint 2\varepsilon k\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\partial\omega = \iint N\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\partial\omega,$$

wo N, das electrische Moment der Flächeneinheit, den Werth, in welchen $2\varepsilon k$ bei abnehmendem ε übergeht, ausdrückt. Helmholtz beweisst, dass, wenn der Punct A auf beiden Seiten in unendlich kleinen Entfernungen von der Fläche liegt, und die Werthe der Potentialfunction U für beide Lagen des Punctes U_1 und U_2 sind, $U_1 - U_2 = 4\pi N$ ist, dass also die Potentialfunction U bei dem

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Durchgange des Punctes A durch die Fläche einen Sprung mache, während ihre nach der Flächennormale genommenen Differentialquotienten auf beiden Seiten gleich sind.

Lipschitz fügt diesem Satze noch zwei andere über die electrische Doppelschicht hinzu. Ist nämlich für eine Fläche S eine endliche Function N gegeben, so existirt nur eine Function U, die im Innern des Leiters gleich einer Potentialfunction U_i, in dem umgebenden Raume gleich einer in unendlicher Enfernung von S verschwindenden Potentialfunction U_a ist, welche Potentialfunctionen die Bedingung erfüllen, dass bei Annäherung an denselben Punct der Fläche $U_a - U_i = 4\pi N$, $\frac{\partial U_a}{\partial n} = \frac{\partial U_i}{\partial n}$ wird, und diese Function U ist die Potentialfunction der Doppelbelegung von S. Ferner gilt für zwei Doppelbelegungen, deren Momente v und N, deren Potentialfunctionen u und U sind, die Gleichung $\iint v \frac{\partial U}{\partial n} \partial\omega = \iint N \frac{\partial u}{\partial n} \partial\omega$, in welcher die Integrationen sich auf die Fläche S erstrecken.

Durch diese Betrachtungen über die electrische Doppelschicht geleitet, zeigt Helmholtz mit Benutzung der Sätze (2) und (3), dass die Bestimmung der Stromvertheilung in einem körperlichen Leiter, dem durch lineare Leiter Electricität zuströmt, im Falle des dynamischen Gleichgewichts von der Aufsuchung einer electrischen Doppelschicht abhängig ist, die nach Aussen dieselbe Potentialfunction giebt, welche die inneren nach Satz (5) bestimmten electrischen Massen hervorbringen. Die Spannung für jeden Punct ist dann gleich der Differenz der Potentialfunction der inneren electrischen Massen und der inneren Potentialfunction der bezeichneten Doppelschicht. Die Brauchbarkeit dieses Satzes bewährt Helmholtz, indem er die Stromvertheilung in einer Kugel mit dem Radius R bestimmt, in welche durch zwei Puncte ($\vartheta = \alpha_1$, $\varphi = 0$; $\vartheta = \alpha_2$, $\varphi = 0$) constante Electricitätsmengen von der Dichtigkeit $+A$ und $-A$ fliessen. Dann sind die Entfernungen dieser Puncte von einem Puncte ϱ, ϑ, φ:

$$\sqrt{\varrho^2 + R^2 - 2R\varrho\cos\gamma_1} \quad \text{und} \quad \sqrt{\varrho^2 + R^2 - 2R\varrho\cos\gamma_2},$$

$$\cos\gamma_1 = \cos\vartheta\cos\alpha_1 + \sin\vartheta\sin\alpha_1\cos\varphi; \qquad \cos\gamma_2 = \cos\vartheta\cos\alpha_2 + \sin\vartheta\sin\alpha_2\cos\varphi.$$

Hieraus ergiebt sich die Potentialfunction der inneren electrischen Massen in Bezug auf den Punct (ϱ, ϑ, φ) gleich

$$\frac{A}{\sqrt{\varrho^2 + R^2 - 2R\varrho\cos\gamma_1}} - \frac{A}{\sqrt{\varrho^2 + R^2 - 2R\varrho\cos\gamma_2}}.$$

Zwischen den Potentialfunctionen V_a und V_i einer auf der Oberfläche einer Kugel mit dem Radius R verbreiteten electrischen Schicht in Bezug auf einen Punct (ϱ, ϑ, φ) besteht die Relation, dass, wenn $V = \frac{1}{\varrho} F(\vartheta, \varphi, u)$, $\left(u = \frac{R}{\varrho}\right)$ ist, $V_i = \frac{1}{R} F(\vartheta, \varphi, v)$, $\left(v = \frac{\varrho}{R}\right)$ gesetzt werden kann. Berücksichtigt man $V = \iint \frac{k}{r} \partial\omega$, so wird der obige Ausdruck für die Potentialfunction der electrischen Doppelschicht, wenn man $\varepsilon = \Delta R$ setzt,

$$U = \iint 2\varepsilon k \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \partial\omega = 2\Delta R \frac{\partial V}{\partial R},$$

also

$$U_a = \frac{2}{\varrho^2} \frac{\partial F(\vartheta, \varphi, u)}{\partial u} \Delta R, \quad U_i = -\frac{2}{\varrho^2}\left(F(\vartheta, \varphi, v) + \frac{\varrho}{R} \frac{\partial F(\vartheta, \varphi, v)}{\partial v}\right) \Delta R.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Da aber nach Helmholtz die electrischen Massen nach Aussen dieselben Spannungen hervorbringen, als die äussere Potentialfunction der electrischen Doppelschicht, so erhält man

$$\frac{2}{\varrho^2}\frac{\partial F(\vartheta, \varphi, u)}{\partial u}\Delta R = \frac{A}{\sqrt{\varrho^2+R^2-2R\varrho\cos\gamma_1}} - \frac{A}{\sqrt{\varrho^2+R^2-2R\varrho\cos\gamma_2}},$$

daher

$$F(\vartheta, \varphi, u) = \frac{\Delta R}{2\Delta R}\log\frac{1-u\cos\gamma_2+\sqrt{1+u^2-2u\cos\gamma_2}}{1-u\cos\gamma_1+\sqrt{1+u^2-2u\cos\gamma_1}} + C.$$

Durch diese Gleichung ist $F(\vartheta, \varphi, v)$, also auch U_i gegeben. Nach dem oben ausgesprochenen Satze von Helmholz findet man nun die electrische Spannung in dem Puncte $(\varrho, \vartheta, \varphi)$, indem man U_i von der Potentialfunction der inneren electrischen Massen abzieht, also gleich

$$\frac{A}{R}\log\frac{R-\varrho\cos\gamma_2+\sqrt{R^2+\varrho^2-2R\varrho\cos\gamma_2}}{R-\varrho\cos\gamma_1+\sqrt{R^2+\varrho^2-2R\varrho\cos\gamma_1}} + \frac{2A}{\sqrt{R^2+\varrho^2-2R\varrho\cos\gamma_1}} - \frac{2A}{\sqrt{R^2+\varrho^2-2R\varrho\cos\gamma_2}} + C.$$

Helmholtz hat, wie aus dem Vorangehenden hervorgeht, die Potentialfunction der inneren electrischen Massen als gegeben angenommen. Lipschitz betrachtet nur den Werth des Differentialquotienten ihrer Potentialfunction für die Oberfläche des körperlichen Leiters als gegeben und sucht eine Potentialfunction, deren Differentialquotient nach der Normale der Oberfläche an jeder Stelle gleich dem ebenso genommenen Differentialquotienten der Potentialfunction der inneren electrischen Massen ist. Dann wird wiederum die Spannung eines Punctes gefunden, indem man von der Potentialfunction der inneren electrischen Massen jene Potentialfunction abzieht. Nachdem er gezeigt hat, dass die Lösung der bezeichneten Aufgabe von der Aufsuchung einer Doppelbelegung der Fläche S abhängt, deren Potentialfunction U in jedem Puncte der Fläche die Gleichung $\frac{\partial U}{\partial n} = g$ befriedigt, wo g die für jeden Punct der Fläche gegebene Function ausdrückt, beweist er, dass stets eine solche Doppelbelegung existirt, und dass diese Aufgabe sich immer lösen und für jede Gestalt der Fläche auf eine von der Function g unabhängige Fundamentalaufgabe zurückführen lässt.

§. 5. Ausdruck des verallgemeinerten Ohm'schen Fundamentalgesetzes für krystallinische Substanzen.

Alle bis jetzt angestellten Untersuchungen über die Bewegung der Electricität in körperlichen Leitern setzen die Leitungsfähigkeit derselben nach allen Richtungen constant voraus. Sie finden daher auf krystallinische Gefüge, in welchen die Leitungsfähigkeit für eine gegebene Richtung zwar constant, aber im Allgemeinen mit der Richtung veränderlich angenommen werden muss, keine Anwendung. Ich will versuchen, die Differentialgleichungen für die Bewegung der Electricität in solchen Körpern, wenn sie von beharrlichen Strömen durchflossen werden, aufzustellen.

Befindet sich die Electricität in einem krystallinischen Leiter nicht in Ruhe, so muss freie Electricität vorhanden und zu einer bestimmten Zeit in gewisser Weise vertheilt sein. Die Potentialfunction derselben in Bezug auf einen Punct des Leiters ist nicht constant, die Kräfte, welche von ihr auf das daselbst befindliche electrische Fluidum ausgeübt werden, heben sich nicht auf, sondern

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

zerlegen dasselbe, die positive und negative Electricität werden nach entgegengesetzten Richtungen in Bewegung gesetzt. Sei $\partial\omega$ ein Flächenelement, dessen Normale mit den rechtwinkligen Coordinatenaxen die Winkel λ, μ, ν einschliesse, u die Potentialfunction der freien Electricität in Bezug auf jeden Punct dieses Elements, so dass $-\frac{\partial u}{\partial x}$, $-\frac{\partial u}{\partial y}$, $-\frac{\partial u}{\partial z}$ die Componenten der beschleunigenden Kräfte, welche von der freien Electricität auf die Einheit positiver Electricität ausgeübt werden, ausdrücken. Ebenso gross ist die Kraft, welche auf die Einheit negativer Electricität in entgegengesetzter Richtung wirkt, daher bezeichnen $-2\frac{\partial u}{\partial x}$, $-2\frac{\partial u}{\partial y}$, $-2\frac{\partial u}{\partial z}$ die Componenten der auf die Einheit positiver und negativer Electricität bezogenen in dem betrachteten Puncte wirksamen electromotorischen Kraft, welche von der freien Electricität herrührt. Die Bewegung des electrischen Fluidums wird offenbar dadurch hervorgerufen, dass die geschiedenen Electricitäten des Flächenelements sich mit den entgegengesetzten Electricitäten aller benachbarten Puncte auszugleichen suchen. Es wird also von jedem Puncte des Flächenelements aus eine Strömung der Electricität nach allen möglichen Richtungen angeregt, eine Bewegung der positiven Electricität auf der einen, eine Bewegung der negativen auf der andern Seite des Elements. Die Stärke dieser Strömung wird nach verschiedenen Richtungen eine verschiedene sein. Ich mache die Annahme, dass die Menge positiver Electricität, welche in einer Richtung, die mit den Axen die Winkel α, β, γ bildet, das Element $\partial\omega$ in der Zeiteinheit durchströmt, gleich der Componenten der electromotorischen Kraft nach dieser Richtung ist, multiplicirt in die Projection von $\partial\omega$ auf eine zu dieser Richtung senkrechte Ebene und in eine Grösse, welche von der Leitungsfähigkeit des Körpers abhängt, für Körper mit gleichmässiger Leitungsfähigkeit constant, für krystallinische Gefüge eine Function von α, β, γ ist. Die Annahme also, welche Kirchof nur in Bezug auf die Richtung der Resultante aller electromotorischen Kräfte gemacht hat, nehme ich für jede beliebige Richtung in Anspruch.

Ich prüfe diese Annahme, indem ich zunächst eine constante Leitungsfähigkeit voraussetze. Nennt man ε den Winkel, welchen die durch (α, β, γ) und (λ, μ, ν) bestimmten Richtungen mit einander bilden, und beachtet, dass die Componente der electromotorischen Kraft nach der durch α, β, γ bezeichneten Richtung gleich $-2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)$, die Projection von $\partial\omega$ auf die zu dieser Richtung senkrechte Ebene $\cos\varepsilon\,\partial\omega$ ist, so ergiebt sich für die in der Richtung (α, β, γ) das Element $\partial\omega$ durchströmende Menge positiver Electricität der Ausdruck

$$-2l\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\cos\varepsilon.\partial\omega.$$

Um die ganze durch das Element $\partial\omega$ in der Zeiteinheit fliessende Menge positiver Electricität $(\Gamma\partial\omega)$ zu erhalten, beschreibe man um einen Punct des Flächenelements mit einem der Einheit gleichen Radius eine Kugel, führe für α, β, γ Polarcoordinaten ein, setze also

$$\cos\alpha = \cos\vartheta, \qquad \cos\beta = \sin\vartheta\cos\varphi, \qquad \cos\gamma = \sin\vartheta\sin\varphi,$$

$$\cos\varepsilon = \cos\lambda\cos\vartheta + \cos\mu\sin\vartheta\cos\varphi + \cos\nu\sin\vartheta\sin\varphi,$$

multiplicire obigen Ausdruck mit dem Flächenelemente der Kugel $\sin\vartheta\,\partial\vartheta\,\partial\varphi$ und integrire ihn in Bezug auf alle Werthe von ϑ und φ, welche mit der Normale einen spitzen Winkel bilden. Es ist aber gestattet, da obiger Ausdruck unverändert bleibt, wenn für α, β, γ ihre Supplemente gesetzt

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

werden, die Integration nach ϑ von 0 bis π, nach φ von 0 bis 2π auszudehnen, wenn man von dem erhaltenen Integrale die Hälfte nimmt. Hiernach ergiebt sich

$$\Gamma\partial\omega = -l\partial\omega \int_0^\pi\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\vartheta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\vartheta\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial z}\sin\vartheta\sin\varphi\right)$$
$$\times(\cos\lambda\cos\vartheta + \cos\mu\sin\vartheta\cos\varphi + \cos\nu\sin\vartheta\sin\varphi)\sin\vartheta\partial\vartheta\partial\varphi.$$

Es ist aber

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \cos^2\vartheta\sin\vartheta\partial\vartheta\partial\varphi = \int_0^\pi\int_0^{2\pi} \sin^3\vartheta\cos^2\varphi\partial\vartheta\partial\varphi = \int_0^\pi\int_0^{2\pi} \sin^3\vartheta\sin^2\varphi\partial\vartheta\partial\varphi = \frac{4\pi}{3},$$

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \sin^2\vartheta\cos\vartheta\cos\varphi\partial\vartheta\partial\varphi = \int_0^\pi\int_0^{2\pi} \sin^2\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi\partial\vartheta\partial\varphi = \int_0^\pi\int_0^{2\pi} \sin^3\vartheta\sin\varphi\cos\varphi\partial\vartheta\partial\varphi = 0,$$

daher

$$\Gamma\partial\omega = -\frac{4l\pi}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\lambda + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\mu + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\nu\right)\partial\omega,$$

oder wenn man $\frac{4l\pi}{3} = k$ setzt,

$$\Gamma\partial\omega = -k\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\lambda + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\mu + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\nu\right)\partial\omega = -k\frac{\partial u}{\partial n}\partial\omega. \quad (1)$$

Man gelangt daher bei meiner Vorstellung von der Bewegung der Electricität für Körper mit constanter Leitungsfähigkeit zu einer Gleichung, welche mit der §. 3. abgeleiteten vollkommen übereinstimmt.

Für einen krystallinischen Körper ist, wie ich früher bemerkt habe, die Leitungsfähigkeit eine Function von α, β, γ, die mit $f(\alpha, \beta, \gamma)$ bezeichnet werde und nur der Bedingung genügt, dass sie denselben Werth behält, wenn α, β, γ in ihre Supplemente übergehen. Der Ausdruck für die das Flächenelement $\partial\omega$ während der Zeiteinheit in der Richtung (α, β, γ) durchströmende Electricitätsmenge geht daher in folgenden über:

$$-2f(\alpha, \beta, \gamma).\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\cos\varepsilon\partial\omega.$$

Bildet man wieder die Summe aller das Element $\partial\omega$ in der Zeiteinheit durchströmenden Mengen positiver Electricität und berücksichtigt, dass auch der vorstehende Ausdruck unverändert bleibt, wenn für α, β, γ ihre Supplemente gesetzt werden, dass es also gestattet ist, wenn man Polarcoordinaten einführt, die Integration nach ϑ von 0 bis π, nach φ von 0 bis 2π auszudehnen, vorausgesetzt, dass man von dem erhaltenen Integrale die Hälfte nimmt, so resultirt

$$\Gamma\partial\omega = -\partial\omega\int_0^\pi\int_0^{2\pi} f(\vartheta, \varphi)(\cos\lambda\cos\vartheta + \cos\mu\sin\vartheta\cos\varphi + \cos\nu\sin\vartheta\sin\varphi)$$
$$\times\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\vartheta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\vartheta\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial z}\sin\vartheta\sin\varphi\right)\sin\vartheta\partial\vartheta\partial\varphi,$$

oder

(2)

$$\Gamma\partial\omega = -\partial w\left[\frac{\partial u}{\partial x}(l\cos\lambda + p\cos\mu + q\cos\nu) + \frac{\partial u}{\partial y}(p\cos\lambda + m\cos\mu + r\cos\nu) + \frac{\partial u}{\partial z}(q\cos\lambda + r\cos\mu + n\cos\nu)\right],$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

worin

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi} f(\vartheta,\varphi)\cos^2\vartheta\sin\vartheta\,\partial\vartheta\,\partial\varphi = l,\quad \int_0^\pi\int_0^{2\pi} f(\vartheta,\varphi)\sin^3\vartheta\cos^2\varphi\,\partial\vartheta\,\partial\psi = m,$$

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi} f(\vartheta,\varphi)\sin^3\vartheta\sin^2\varphi\,\partial\vartheta\,\partial\varphi = n,\quad \int_0^\pi\int_0^{2\pi} f(\vartheta,\varphi)\sin^3\vartheta\cos\vartheta\cos\varphi\,\partial\vartheta\,\partial\varphi = p,$$

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi} f(\vartheta,\varphi)\cos\vartheta\sin^2\vartheta\sin\varphi\,\partial\vartheta\,\partial\varphi = q,\quad \int_0^\pi\int_0^{2\pi} f(\vartheta,\varphi)\sin^3\vartheta\sin\varphi\cos\varphi\,\partial\vartheta\,\partial\varphi = r$$

gesetzt ist. Es werde nun das Element $\partial\omega$ successive den Coordinatenebenen, also die Normale des Elements den Axen parallel vorausgesetzt, dann sind die in diesen drei Fällen in der Zeiteinheit durch das Element $\partial\omega$ fliessenden Mengen positiver Electricität bezüglich gleich

$$\left.\begin{aligned} &-\left(l\frac{\partial u}{\partial x}+p\frac{\partial u}{\partial y}+q\frac{\partial u}{\partial z}\right)\partial\omega,\\ &-\left(p\frac{\partial u}{\partial x}+m\frac{\partial u}{\partial y}+r\frac{\partial u}{\partial z}\right)\partial\omega,\\ &-\left(q\frac{\partial u}{\partial x}+r\frac{\partial u}{\partial y}+n\frac{\partial u}{\partial z}\right)\partial\omega. \end{aligned}\right\}\quad (3)$$

Setzt man den Ausdruck für $\Gamma\partial\omega$ (2) gleich dem für $\Gamma\partial\omega$ (1) und vergleicht die Coefficienten der entsprechenden Differentialquotienten der Potentialfunction mit einander, so wird man auf das bekannte System von Gleichungen

$$\begin{aligned} (l-k)\cos\lambda + p\cos\mu + q\cos\nu &= 0,\\ p\cos\lambda + (m-k)\cos\mu + r\cos\nu &= 0,\\ q\cos\lambda + r\cos\mu + (n-k)\cos\nu &= 0 \end{aligned}$$

geführt, dessen Determinante

$$(l-k)(m-k)(n-k) - [r^2(l-k) + q^2(m-k) + p^2(n-k)] + 2pqr = 0$$

sein muss. Hieraus folgt

$$k^3 - k^2(l+m+n) + k(lm+ln+mn-p^2-q^2-r^2) - (lmn+2pq-np^2-mq^2-lr^2) = 0.$$

Von dieser mehrfach untersuchten Gleichung ist bewiesen, dass sie stets drei reelle Wurzeln k_1, k_2, k_3 hat, und es lassen sich die Werthe, welche $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ für k_1, k_2, k_3 annehmen, bestimmen. Die durch diese neun Winkel angedeuteten Richtungen bilden ein System dreier auf einander senkrechter Geraden, welches, wenn die drei Wurzeln k_1, k_2, k_3 verschieden sind, vollkommen bestimmt ist. In jedem Falle kann man die drei Coordinatenaxen mit diesen Richtungen zusammenfallen lassen. Dann werden p, q, r gleich Null und die Werthe von k_1, k_2, k_3 bezüglich gleich l, m, n. Lässt man die Normale des Elements $\partial\omega$ successive mit diesen Axen zusammenfallen, so sind nach (3) die durch das Element $\partial\omega$ in der Zeiteinheit sich bewegenden Mengen positiver Electricität bezüglich

$$-l\frac{\partial u}{\partial x}\partial\omega,\quad -m\frac{\partial u}{\partial y}\partial\omega,\quad -n\frac{\partial u}{\partial z}\partial\omega,$$

und die Gleichung (2) geht in folgende über:

$$\Gamma\partial\omega = -\left(l\frac{\partial u}{\partial x}\cos\lambda + m\frac{\partial u}{\partial y}\cos\mu + n\frac{\partial u}{\partial z}\cos\nu\right)\partial\omega.\quad (4)$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es ergiebt sich also aus der vorangehenden Betrachtung, dass, wie auch die Vertheilung der Electricität im Leiter sei, stets drei Richtungen von solcher Beschaffenheit existiren, dass, wenn die Normale eines Elements $\partial\omega$ diesen Richtungen successive parallel ist, die durch dasselbe in der Zeiteinheit strömenden Electricitätsmengen dieselben sind, als wenn die Leitungsfähigkeit im ganzen Leiter constant und zwar bezüglich gleich l, m, n wäre. Die durch ein beliebiges Flächenelement $\partial\omega$ in der Zeiteinheit fliessende Menge positiver oder negativer Electricität wird dann, wenn man die bezeichneten Richtungen zu Coordinatenaxen wählt, durch Gleichung (4) ausgedrückt. Dieselbe kann daher als der Ausdruck des für krystallinische Leiter verallgemeinerten Ohm'schen Fundamentalgesetzes aufgefasst werden.

§. 6. Differentialgleichungen für das dynamische Gleichgewicht der Electricität in krystallinischen Leitern.

Aus Gleichung (4) §. 5. kann man nach bekannter Methode die Differentialgleichungen für das dynamische Gleichgewicht der Electricität in einem krystallinischen Leiter ableiten. Dazu bestimme man die Mengen positiver Electricität, welche während der Zeiteinheit durch ein rechtwinkliges Parallelepipedon $\partial x\,\partial y\,\partial z$, dessen Kanten den im vorigen Paragraphen bestimmten Axen parallel sind, strömen. Wie man leicht übersieht, ist die durch das Element $\partial y.\partial z$ eintretende Electricitätsmenge gleich $-l\frac{\partial u}{\partial x}\partial y\,\partial z$, die, welche durch die gegenüberliegende Seitenfläche ausströmt, gleich

$$-l\frac{\partial}{\partial x}\left(u+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\partial y\,\partial z,$$

folglich die Differenz der durch beide Flächenelemente ein- und austretenden positiven Electricität gleich $l\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\partial x\,\partial y\,\partial z$. Analog findet man für die parallel der XZ und YZ Ebene durch das Parallelepipedon strömenden Electricitätsmengen die Differenzen der ein- und austretenden gleich

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\partial x\,\partial y\,\partial z \quad \text{und} \quad n\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\partial x\,\partial y\,\partial z.$$

Die Summe dieser Differenzen giebt die Verminderung der im Elemente $\partial x\,\partial y\,\partial z$ enthaltenen freien positiven Electricität an. Damit die Electricität sich im dynamischen Gleichgewichte befinde, muss diese Summe gleich Null sein, also

$$l\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+m\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+n\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0. \quad (1)$$

Für den freien Theil der Oberfläche eines Leiters, das heisst denjenigen, welcher nur mit der Luft in Berührung ist, muss, wenn man annimmt, dass keine Electricität in die Luft entweicht, durch eine Gleichung ausgedrückt werden, dass durch ein Element der Oberfläche keine Electricität sich bewege. Dieser Bedingung wird mit Berücksichtigung von Gleichung (4) §. 5. durch folgende genügt:

$$l\frac{\partial u}{\partial x}\cos\lambda+m\frac{\partial u}{\partial y}\cos\mu+n\frac{\partial u}{\partial z}\cos\nu=0. \quad (2)$$

Durch den Theil der Oberfläche des Leiters, in welchem dieselbe die Oberfläche eines zweiten be-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

rührt, müssen für den Fall des dynamischen Gleichgewichts gleiche Electricitätsmengen ein- und ausströmen, oder es muss die algebraische Summe der durch ein Element der Berührungsfläche strömenden Mengen positiver Electricität gleich Null sein. Bezeichnen l', m', n'; λ', μ', ν'; u' die entsprechenden Grössen für den zweiten Leiter, so ist unter der Voraussetzung, dass die §. 5. angedeuteten Richtungen in beiden Leitern parallel sind,

$$(3) \qquad l\frac{\partial u}{\partial x}\cos\lambda + m\frac{\partial u}{\partial y}\cos\mu + n\frac{\partial u}{\partial z}\cos\nu + l'\frac{\partial u'}{\partial x}\cos\lambda' + m'\frac{\partial u'}{\partial y}\cos\mu' + n'\frac{\partial u'}{\partial z}\cos\nu' = 0.$$

Endlich besteht noch eine Relation zwischen u und u' an der Berührungsstelle electromotorisch verschiedener Substanzen. Es ist bereits oben für Leiter mit constanter Leitungsfähigkeit gezeigt worden, dass, sobald die an der Berührungsfläche zweier Leiter geschiedenen Electricitäten eine Gleichgewichtslage angenommen haben, die Potentialfunction aller freien Electricität für beide Leiter constant sei, aber verschiedene Werthe habe, und dass die Differenz der verschiedenen Werthe der Potentialfunction von der Gestalt der Leiter nicht abhänge, die Grösse ausdrücke, welche man als die electrische Differenz beider Körper bezeichnet. Wie schon die Spannungsreihe zeigt, steht die Grösse der electromotorischen Kraft, welche das electrische Fluidum an der Berührungsfläche verschiedener Körper scheidet, in keinem nachweisbaren Zusammenhange mit der Leitungsfähigkeit derselben. Auch ein Draht, dessen eine Hälfte gehärtet ist, zeigt an seinen Enden keine electrische Differenz. Anders ist es, wenn die Berührungsstelle des härteren und weicheren Theiles erwärmt wird. Dann treten thermoelectrische Erscheinungen hervor, von denen nicht hat bewiesen werden können, dass ihr Entstehen in denselben Ursachen zu suchen sei, welche die Scheidung der Electricität an der Berührungsfläche verschiedener Leiter von gleicher Temperatur bedingen. Die Versuche von Magnus über die Richtung und Intensität thermoelectrischer Ströme in Stücken desselben Stoffes, und die von Svanberg über die thermoelectrischen Erscheinungen an Stäben, welche aus krystallinischem Wismuth gesägt waren, geben keine Entscheidung über die Frage, ob Kirchhof's Annahme auch für krystallinische Gefüge Geltung habe. Es wäre wünschenswerth, experimentell zu untersuchen, ob verschiedene electrische Differenzen entstehen, wenn verschiedene Flächen desselben leitenden Krystalles mit demselben Leiter in Berührung gebracht werden. Macht man die Annahme, die allerdings noch einer experimentellen Bestätigung bedarf, dass auch in zwei sich berührenden krystallinischen Leitern die Differenz der verschieden Werthe der Potentialfunction von ihrer Gestalt nicht abhänge und eine Constante ausdrücke, welche mit der electrischen Differenz derselben identisch ist, und setzt daher $u - u' = c$, (4) so lässt sich ähnlich, wie es von Kirchhof für Körper mit constanter Leitungsfähigkeit bewiesen ist, zeigen, dass die Gleichungen (1) bis (4) die Strömungen der Electricität in einem Systeme krystallinischer Leiter von homologer Lage eindeutig bestimmen. Dazu mache ich darauf aufmerksam, dass der Green'sche Satz bestehen bleibt, wenn man die entsprechenden Glieder unter den Integralzeichen bezüglich mit l, m, n multiplicirt. Sind also u und v zwei stetige Functionen der Coordinaten x, y, z, deren erste Differentialquotienten im Innern eines geschlossenen Raumes nirgends unendlich werden, und $\partial\omega$ ein Element der Oberfläche dieses Raumes, λ, μ, ν die Winkel, welche eine auf $\partial\omega$ nach Innen errichtete Normale mit den Axen bildet, so hat man

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \iiint v\left(l\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + m\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + n\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\partial x\,\partial y\,\partial z &= \iint v\left(l\frac{\partial u}{\partial x}\cos\lambda + m\frac{\partial u}{\partial y}\cos\mu + n\frac{\partial u}{\partial z}\cos\nu\right)\partial\omega \\ &\quad - \iiint\left(l\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + m\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} + n\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}\right)\partial x\,\partial y\,\partial z\,; \end{aligned} \right.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wo die dreifachen Integrale über den ganzen Raum, das zweifache über seine Oberfläche auszudehnen ist.

Dies folgt unmittelbar daraus, dass der Green'sche Satz für die entsprechenden Glieder der drei Integrale Geltung hat. Es ist

$$\iiint v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\partial x\partial y\partial z=\iint v\frac{\partial u}{\partial x}\cos\lambda\partial\omega-\iiint\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\partial x\partial y\partial z,$$

$$\iiint v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\partial x\partial y\partial z=\iint v\frac{\partial u}{\partial y}\cos\mu\partial\omega-\iiint\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\partial x\partial y\partial z,$$

$$\iiint v\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\partial x\partial y\partial z=\iint v\frac{\partial u}{\partial z}\cos\nu\partial\omega-\iiint\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}\partial x\partial y\partial z.$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen bezüglich mit l, m, n und addirt sie, so erhält man die Gleichung (5). Für $v=1$ nimmt dieselbe folgende Gestalt an:

$$(6)\qquad \iiint\left(l\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+m\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+n\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\partial x\partial y\partial z=\iint\left(l\frac{\partial u}{\partial x}\cos\lambda+m\frac{\partial u}{\partial y}\cos\mu+n\frac{\partial u}{\partial z}\cos\nu\right)\partial\omega,$$

für $u=v$:

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned}\iiint u\left(l\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+m\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+n\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\partial x\partial y\partial z&=\iint u\left(l\frac{\partial u}{\partial x}\cos\lambda+m\frac{\partial u}{\partial y}\cos\mu+n\frac{\partial u}{\partial z}\cos\nu\right)\partial\omega\\&-\iiint\left(l\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+m\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+n\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right)\partial x\partial y\partial z.\end{aligned}\right.$$

Es werde nun der Einfachheit wegen ein System von zwei ähnlich liegenden krystallinischen Leitern A_1, A_2, die sich in einer Fläche berühren, betrachtet. Ich deute, indem ich alle früheren Bezeichnungen beibehalte, die entsprechenden Grössen in beiden Leitern durch verschiedene Indices an. Dann ist für den Leiter A_1:

$$(a)\qquad l_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+m_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}+n_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}=0,$$

$$(b)\qquad l_1\frac{\partial u_1}{\partial x}\cos\lambda_1+m_1\frac{\partial u_1}{\partial y}\cos\mu_1+n_1\frac{\partial u_1}{\partial z}\cos\nu_1=0,$$

für den Leiter A_2:

$$(c)\qquad l_2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+m_2\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}+n_2\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}=0,$$

$$(d)\qquad l_2\frac{\partial u_2}{\partial x}\cos\lambda_2+m_2\frac{\partial u_2}{\partial y}\cos\mu_2+n_2\frac{\partial n_2}{\partial z}\cos\mu_2=0,$$

für die Berührungsfläche beider Körper:

$$(e)\qquad l_1\frac{\partial u_1}{\partial x}\cos\lambda_1+m_1\frac{\partial u_1}{\partial y}\cos\mu_1+n_1\frac{\partial u_1}{\partial z}\cos\nu_1+l_2\frac{\partial u_2}{\partial x}\cos\lambda_2+m_2\frac{\partial u_2}{\partial y}\cos\mu_2+n_2\frac{\partial u_2}{\partial z}=0,$$

$$(f)\qquad u_1-u_2=c.$$

Angenommen es gebe noch eine zweite Vertheilungsart der Electricität, welche den eben aufgestellten Gleichungen genüge, u'_1, u'_2 seien die entsprechenden Potentialwerthe unter dieser Annahme, so ist auch $u'_1-u'_2=c$, also $u_1-u_2-(u'_1-u'_2)=0$, oder wenn $u_1-u'_1=v_1$, $u_2-u'_2=v_2$ gesetzt wird, $v_1=v_2$. Man übersieht nun, dass, da u_1 und u'_1 einerseits, u_2, u'_2 andererseits denselben Gleichun-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

gen genügen, auch v_1 und v_2, für u_1 und u_2 in obige Gleichungen gesetzt, dieselben befriedigen müssen. Da also

$$l_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + m_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + n_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} = 0,$$

$$l_2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + m_2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} + n_2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2} = 0$$

ist, so erhält man durch Gleichung (7):

$$(g)$$

$$\iiint \left[l_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)^2 + m_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)^2 + n_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial z}\right)^2 \right] \partial x \partial y \partial z + \iiint \left[l_2 \left(\frac{\partial v_2}{\partial x}\right)^2 + m_2 \left(\frac{\partial v_2}{\partial y}\right)^2 + n_2 \left(\frac{\partial v_2}{\partial z}\right)^2 \right] \partial x \partial y \partial z$$

$$= \iint v_1 \left(l_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} \cos \lambda_1 + m_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} \cos \mu_1 + n_1 \frac{\partial v_1}{\partial z} \cos \nu_1 \right) \partial \omega_1 + \iint v_2 \left(l_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} \cos \lambda_2 + m_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} \cos \mu_2 + n_2 \frac{\partial v_2}{\partial z} \cos \nu_2 \right) \partial \omega_2,$$

worin die Integrale der linken Seite sich über die Räume der beiden Leiter, die der rechten Seite sich über ihre Oberflächen erstrecken. Für den freien Theil der Oberflächen verschwinden, da v_1 und v_2 bezüglich den Gleichungen (*b*) und (*d*) genügen, die in v_1 und v_2 multiplicirten Factoren der rechten Seite. Es ist daher gestattet, die Integration der rechten Seite nur auf die Berührungsfläche beider Leiter auszudehnen. Auch die Summe dieser Integrale muss, da $v_1 = v_2$ ist, nach Gleichung (*e*) verschwinden, so dass die rechte Seite der Gleichung (*g*), also auch die linke Seite gleich Null wird. Hieraus folgert man, dass die partiellen Differentialquotienten von v_1 und v_2 einzeln verschwinden, also v_1 und v_2 constante Grössen sein müssen. Da nun $v_1 = u_1 - u'_1$, $v_2 = u_2 - u'_2$ war, so sind die entsprechenden Differentiale von u_1 und u'_1 ebenso wie die von u_2 und u'_2 einander gleich, also die Strömungen der Electricität, welche nur von ihnen abhängen, für beide Vertheilungsarten der Electricität identisch.

§. 7. Differentialgleichungen der Bewegung der Electricität in krystallinischen Substanzen mit Berücksichtigung der Induction.

Im Vorangehenden sind die Differentialgleichungen für die Bewegung der Electricität in einem krystallinischen Leiter unter der Voraussetzung, dass ein beharrlicher Zustand in der Vertheilung der Electricität bereits eingetreten ist, aufgestellt. Sie umfassen daher nicht alle Bewegungen der Electricität; diejenigen sind ausgeschlossen, welche sie macht, bevor ein beharrlicher Strom zu Stande kommt, und die entstehen, wenn an irgend einer Stelle die Intensität sich ändert.

Kirchhof*) und Weber**) haben gleichzeitig die Differentialgleichungen, welche zur Bestimmung aller Bewegungen der Electricität in Leitern mit constanter Leitungsfähigkeit nothwendig sind, aufgestellt und aus ihnen eine allgemeine Theorie der Bewegung der Electricität in einem unendlich dünnen Drahte abgeleit. Ich will die Entwickelung der Differentialgleichungen nach Kirchhof so umgestalten, dass sie zugleich für krystallinische Gefüge Geltung habe, indem ich mich dabei möglichst der von Weber gegebenen Darstellung anschliesse.

*) Pogg. Ann. Bd. 100 und 102.

**) Electrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über electrische Schwingungen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ich denke mir in dem krystallinischen Leiter ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Axen X, Y, Z die §. 5. angedeutete Lage haben, nenne jetzt $A\cos\alpha$, $A\cos\beta$, $A\cos\gamma$ die Componenten der Resultante aller electromotorischen Kräfte, welche auf jede Einheit der in einem Würfel $\partial x\partial y\partial z$ enthaltenen Electricität wirken, dann sind nach §. 6. die Mengen positiver Electricität, welche durch die den drei Coordinatenebenen parallelen Seitenflächen des Würfels in der Zeiteinheit strömen, vorausgesetzt, dass die Electricität sich bereits im dynamischen Gleichgewichte befinde, bezüglich gleich

$$lA\cos\alpha\partial y\partial z, \qquad mA\cos\beta\partial x\partial z, \qquad nA\cos\gamma\partial x\partial y.$$

Setzt man diese Seitenflächen gleich der Flächeneinheit, so erhält man die Componenten der Stromdichtigkeit

$$u = lA\cos\alpha, \qquad v = mA\cos\beta, \qquad w = nA\cos\gamma.$$

Ich mache ebenso wie Kirchhof*) die Annahme, dass diese Gleichungen auch bestehen, wenn der Strom kein stationärer ist. Drücken nun u', v', w' die entsprechenden Grössen für ein Element $\partial x'$, $\partial y'$, $\partial z'$ aus, so ergiebt sich nach der Entwickelung der Gleichung (1) §. 6., wenn man u', v', w' für $-l\frac{\partial u}{\partial x}$, $-m\frac{\partial u}{\partial y}$, $-n\frac{\partial u}{\partial z}$ setzt, die Verminderung der in dem Elemente enthaltenen freien positiven Electricität während der Zeit ∂t gleich $\left(\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial z}\right)\partial x'\partial y'\partial z'\partial t$. Da dieselbe Verminderung durch die entgegengesetzt gleiche Bewegung der negativen Electricität hervorgebracht wird, so bezeichnet vorstehender Ausdruck die Hälfte der ganzen Verminderung der in dem Elemente $\partial x'\partial y'\partial z'$ enthaltenen freien Electricität in der Zeit ∂t. Nennt man diese $\varepsilon'\partial x'\partial y'\partial z'$, so ist jene Verminderung auch gleich $-\frac{\partial\varepsilon'}{\partial t}\partial x'\partial y'\partial z'\partial t$, also ergiebt sich die Gleichung

$$(1) \qquad \frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial z} = -\tfrac{1}{2}\frac{\partial\varepsilon'}{\partial t}.$$

Nach §. 5. Gleichung (4) ist die durch ein Oberflächenelement $\partial\omega'$ nach Innen strömende Menge positiver Electricität, wenn λ', μ', ν' die Winkel bezeichnen, welche die nach Innen errichtete Normale mit den Axen bildet, gleich $(u'\cos\lambda'+v'\cos\mu'+w'\cos\nu')\partial\omega'$. Da eine gleiche Menge negativer Electricität von dem Innern nach dem Flächenelemente hinströmt, so ergiebt sich, wenn man $e'\partial\omega'$ die in dem Elemente $\partial\omega'$ enthaltene freie Electricität nennt, ähnlich wie vorher, die Gleichung

$$(2) \qquad u'\cos\lambda'+v'\cos\mu'+w'\cos\nu' = -\tfrac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial t}.$$

Die electromotorische Kraft in dem Elemente, dessen Coordinaten x, y, z und dessen Stromdichtigkeiten u, v, w sind, rührt theils von der im Körper vertheilten freien Electricität, theils von der Induction her, die in Folge der Aenderung der Stromstärke in allen Theilen des Leiters wirkt. Die von Weber und Kirchhof aufgestellten Ausdrücke für die Componenten dieser von den ponderabelen Theilen des Leiters unabhängigen electromotorischen Kraft werden durch die über die Leitungsfähigkeit gemachten Voraussetzungen nicht modificirt. Nennt man x', y', z' die Coordinaten eines einwirkenden Elements, r seine Entfernung von dem Puncte (x, y, z), Ω den Werth der Potentialfunction der freien Electricität in Bezug auf diesen Punct, wo also

*) Pogg. Ann. Bd. 100 p. 199.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$(3)\quad \Omega = \iiint \frac{\partial x' \partial y' \partial z'}{r} \varepsilon' + \iint \frac{\partial \omega'}{r} e',$$

ist, so sind $-\frac{\partial \Omega}{\partial x}$, $-\frac{\partial \Omega}{\partial y}$, $-\frac{\partial \Omega}{\partial z}$ die Componenten der Kraft, mit welcher die freie Electricität die Einheit positiver Electricität in dem Puncte (x, y, z) zu bewegen sucht. Ebenso gross ist die Kraft, welche auf die Einheit negativer Electricität in entgegengesetzter Richtung wirkt, daher bezeichnen $-2\frac{\partial \Omega}{\partial x}$, $-2\frac{\partial \Omega}{\partial y}$, $-2\frac{\partial \Omega}{\partial z}$ die Componenten der auf die Einheit positiver und negativer Electricität bezogenen, in dem betrachteten Puncte wirksamen electromotorischen Kraft, welche von der freien Electricität herrührt.

Die Componenten des zweiten Theiles der electromotorischen Kraft sind, wenn c die constante Geschwindigkeit bedeutet, mit welcher zwei Electricitätstheilchen gegen einander bewegt werden müssen, damit sie keine Kraft aufeinander ausüben, nach dem Weber'schen Inductionsgesetze

$$-\frac{8}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t}, \quad -\frac{8}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}, \quad -\frac{8}{c^2}\frac{\partial W}{\partial t},$$

wo

$$(4)\quad U = \iiint \frac{\partial x' \partial y' \partial z'}{r^3}(x - x')\{u'(x - x') + v'(y - y') + w'(z - z')\},$$

$$(5)\quad V = \iiint \frac{\partial x' \partial y' \partial z'}{r^3}(y - y')\{u'(x - x') + v'(y - y') + w'(z - z')\},$$

$$(6)\quad W = \iiint \frac{\partial x' \partial y' \partial z'}{r^3}(z - z')\{u'(x - x') + v'(y - y') + w'(z - z')$$

ist, und die Integrationen sich über den ganzen Körper erstrecken. Setzt man die Summen der entsprechenden Componenten der electromotorischen Kraft gleich $A\cos\alpha$, $A\cos\beta$, $A\cos\gamma$, so ergeben sich folgende Gleichungen:

$$(7)\quad u = -2l\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{4}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t}\right),$$

$$(8)\quad v = -2m\left(\frac{\partial \Omega}{\partial y} + \frac{4}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right),$$

$$(9)\quad w = -2n\left(\frac{\partial \Omega}{\partial z} + \frac{4}{c^2}\frac{\partial W}{\partial t}\right).$$

§. 7. Theorie der Bewegung der Electricität in linearen Leitern von Kirchhof und Weber.

Kirchhof und Weber haben aus den von ihnen aufgestellten Gleichungen eine allgemeine Theorie der Bewegung der Electricität in einem unendlich dünnen Drahte abgeleitet. Um die Vertheilung der freien Electricität und die Intensität des Stromes für jeden Punct des Leiters in jedem Augenblicke zu bestimmen, berücksichtigt Kirchhof nur die electromotorischen Kräfte, welche von der freien Electricität und den electrischen Bewegungen eines kleinen als Cylinder zu betrachtenden Stückes des Leitungsdrahtes, in dessen mittlerem Querschnitte der betrachtete Punct liegt, auf den-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

selben ausgeübt werden, und findet, indem er zugleich die Vertheilung der Electricität und die electrischen Bewegungen in diesem Cylinder symmetrisch gegen die Cylinderaxe annimmt,

$$i = 4\pi\alpha^2 k \log\frac{l}{\alpha}\left(\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{4}{c^2}\frac{\partial i}{\partial t}\right), \quad \frac{\partial i}{\partial x} = -\tfrac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial t},$$

aus welchen, wenn man E oder i eliminirt, die Gleichungen

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{c^2}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{c^2}{16\pi\alpha^2 k \log\frac{l}{\alpha}}\frac{\partial E}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} - \frac{c^2}{2}\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} + \frac{c^2}{16\pi\alpha^2 k \log\frac{l}{\alpha}}\frac{\partial i}{\partial t} = 0$$

folgen. Hierbei bezeichnen i die Menge der positiven Electricität, welche in der Zeiteinheit durch den Querschnitt des Leitungsdrahtes fliesst, $E\partial x$ die Menge der freien Electricität in dem Leiterelemente ∂x, l die Länge des oben erwähnten kleinen Cylinders, α seinen Halbmesser, welcher jedoch so klein vorausgesetzt wird, dass $\log\frac{l}{\alpha}$ eine sehr grosse Zahl darstellt, k die Leitungsfähigkeit, c die schon früher definirte Webersche Constante. Weber entwickelt allgemein die electromotorischen Kräfte, welche auf einen Punct s im Leitungsdrahte von der freien Electricität und den electrischen Bewegungen aller Theile des Leitungsdrahtes, auch derer, die nicht dem erwähnten kleinen Cylinder angehören, ausgeübt werden, und gelangt so zu einer Gleichung, welche zur Bestimmung der Electricität in einem Drahte wirklich dienen kann.

Dazu drückt er alle auf die in einem Elemente ∂s befindliche Menge positiver Electricität ($\mathfrak{E}\partial s$) wirkenden Kräfte, nämlich die aus der Nähe wirkenden schon von Kirchhof bestimmten, die aus der Ferne herrührenden und die von den ponderablen Leitertheilchen ausgeübten Kräfte, nach mechanischem Maasse aus und setzt die Summe derselben gleich dem Producte aus der Beschleunigung $\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2}$ (wo σ die Verschiebung eines Electricitätstheilchens zur Zeit t bedeutet) in die Masse der in dem Elemente ∂s enthaltenen Electricität. Indem er annimmt, dass r electrostatische Einheiten in einem Milligramme enthalten sind, also im Leiterelemente die Masse $\frac{1}{r}\mathfrak{E}\partial s$, gelangt er zu der Gleichung

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2} = \frac{c^2}{2(1+\lambda)}\frac{\partial^2\sigma}{\partial s^2} + \frac{c^2}{16\pi\alpha^2 k \log\frac{l}{\alpha}(1+\lambda)}\frac{\partial\sigma}{\partial t} = \frac{c^2}{16\mathfrak{E}\lg\frac{l}{\alpha}(1+\lambda)}S,$$

wo $\lambda = \frac{c^2}{8\lg\frac{l}{\alpha}\cdot r\mathfrak{E}}$, S alle aus der Ferne wirkenden Kräfte bezeichnet, die übrigen Grössen, die oben angegebene Bedeutung haben.

Zur weiteren Bestimmung der durch S ausgedrückten Kräfte, sowohl derer, die von ferneren Theilen des Drahtes, als auch derer, die von Aussen ausgeübt und mit S' bezeichnet werden mögen, werden die Grössen E', E, i' und i, welche die freien Electricitäten und Intensitäten in dem influencirenden und influencirten Querschnitte bezeichnen, ebenso wie S' im Falle eines geschlossenen Drahtes von der Länge a in Sinus- und Cosinusreihen entwickelt:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$E' = \Sigma\left(a_n \sin\frac{ns'}{a} + b_n \cos\frac{ns'}{a}\right),$$

$$i' = \Sigma\left(c_n \sin\frac{ns'}{a} + d_n \cos\frac{ns'}{a}\right),$$

$$S' = \Sigma\left(f_n \sin\frac{ns'}{a} + g_n \cos\frac{ns'}{a}\right),$$

worin c_n nnd d_n leicht durch a_n und b_n bestimmt werden können. Substituirt man nun die Werthe von E' und i' in die Gleichungen (3) und (4) des vorhergehenden Paragraphen, so können Ω und U, also auch die Componenten der electromotorischen Kraft, die aus der Ferne von der freien Electricität und der Induction im Leiter herrühren, durch a_n, b_n und Constante ausgedrückt werden.

Indem Weber nun wieder alle nach mechanischem Maasse bestimmten Kräfte, welche auf die positive Electricität in einem Elemente ∂s wirken, aufzählte, und deren Summe gleich dem Producte aus der Beschleunigung in die Masse der in ∂s enthaltenen Electricität setzte, erhielt er die gesuchte Gleichung für die Bewegung der Electricität in einem geschlossenen Drahte, welche sich in dem besonderen Falle eines kreisförmigen Leiters in die zwei einfacheren

$$\frac{\partial^2 a_n}{\partial t^2} + A\frac{\partial a_n}{\partial t} + Ba_n - Cg_n = 0,$$

$$\frac{\partial^2 b_n}{\partial t^2} + A\frac{\partial b_n}{\partial t} + Bb_n - Cf_n = 0$$

verwandelt, in welchen A, B, C gewisse constante Grössen sind, die nur von c, α, k, $\mathfrak{E}r$ und l abhängen.

Die Integration dieser Differentialgleichungen unter der Voraussetzung, dass alle von Aussen her stammenden Kräfte, also f_n und g_n gleich Null sind, führte nun auf die Theorie der Bewegungsgesetze der nach beliebiger Störung des Gleichgewichts sich selbst überlassenen Electricität in einem kreisförmigen Leiter, in welcher die electrischen Wellenbewegungen, ihre Geschwindigkeit, die Gesetze dieser Wellenverbreitung von Weber vollständig entwickelt sind.

Um einen Leitfaden für die Methode der Beobachtungen, durch welche die erhaltenen Gesetze bestätigt werden können, zu gewinnen, untersucht Weber die Kräfte, welche durch Rotation eines kleinen in der Nähe eines kreisförmigen Leiters befindlichen Magneten auf irgend einen Punct desselben in einem bestimmten Augenblicke ausgeübt werden, und die dadurch verursachten electrischen Schwingungen. Der Nachweis des Satzes, dass die electrischen Schwingungen in allen Theilen eines Leiters gleiche Phase und Amplitude haben, auch wenn die von dem rotirenden Magneten ausgeübten electrischen Kräfte an verschiedenen Theilen des Leiters sehr ungleich sind, und das Gesetz der Abhängigkeit der Schwingungsamplitude von der Rotationsgeschwindigkeit des Magneten bilden das wesentlichste Resultat dieser Untersuchung. Nachdem nun Weber gezeigt hatte, wie die electrische Schwingung, welche in einem geschlossenen Leiter durch einen mit bekannter Geschwindigkeit rotirenden Magnet hervorgebracht wird, besonders ihre Amplitude und ihr Phasenunterschied, an zwei Stellen durch das Electrodynamometer beobachtet und bestimmt werden kann, wurden durch höchst sorgfältige Versuchsreihen die beiden erwähnten Gesetze bestätigt. Einen dritten für eine Prüfung der electrischen Schwingungsgesetze geeigneten Gegenstand, nämlich die Abhängigkeit der Schwingungsamplitude von der Gestalt des Leiters hat Weber einer künftigen Untersuchung vorbehalten, doch weist er schon in der vorliegenden Arbeit nach, wie die Beobachtungen derselben zur Ermittelung der

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Grösse $r\mathfrak{E}$, welche in den Differentialgleichungen für die Bewegung der Electricität in Drähten enthalten ist, und in der Theorie derselben eine besondere Wichtigkeit hat, führen kann. Da $\mathfrak{E}$ die in der Längeneinheit des Drahtes enthaltene positive Electricität nach electrostatischem Maasse, r die Zahl der electrostatischen Maasseinheiten, welche in einem Milligramme positiver Electricität enthalten sind, ausdrückt, so bezeichnet $\mathfrak{E}r$ die Kraft, welche die in der Längeneinheit enthaltene positive Electricität, wenn sie in einem Puncte concentrirt wäre, auf ein Milligramme positiver Electricität ausübt. Es stellt auch $\mathfrak{E}^2$ die Kraft dar, welche von $\mathfrak{E}$ auf eine ihr gleiche in der Einheit der Entfernung befindliche Electricitätsmenge ausgeübt wird, daher kann auch $\mathfrak{E}r = \mathfrak{E}^2 : \frac{1}{r}\mathfrak{E}$ als das Verhältniss der aus electrostatischer Wechselwirkung gleicher Electricitätsmengen herrührenden Kraft zu ihrer Masse aufgefasst werden.

Ich würde die mir gesteckten Grenzen weit überschritten haben, wenn ich eine ausführliche Darstellung von Weber's Untersuchungen zu geben versucht hätte, für den Zweck dieser Arbeit genügte es, den bedeutenden Fortschritt, welchen die Theorie der Electricität durch die klassischen Forschungen Webers genommen, und die Methode, welche zu diesen wichtigen Resultaten geführt hat, anzudeuten.

§. 8. Differentialgleichung für die Bewegung der Electricität in einer unendlichen Ebene unter einer besonderen Annahme.

Aus den Gleichungen (1) bis (9) des §. 6. lassen sich die Differentialgleichungen für die Vertheilung und Strömungen der Electricität in einer unendlich dünnen, unendlich grossen homogenen Scheibe ableiten, wenn man nur die electromotorischen Kräfte, welche von der freien Electricität und den electrischen Bewegungen eines um den betrachteten Punct als Centrum beschriebenen sehr kleinen Kreises auf ihn ausgeübt werden, berücksichtigt, vorausgesetzt, dass der Halbmesser des Kreises gegen die Entfernungen des Centrums von den Einströmungspuncten der Electricität verschwindend klein ist.

Sei A der Einfachheit wegen der einzige Punct, durch welchen Electricität in die Scheibe strömt, a, b seine Coordinaten in Bezug auf den Coordinatenanfang O. Man beschreibe um einen Punct $P(x, y, z)$, dessen Entfernung von A gleich ϱ sei, mit dem Radius s einen Kreis und bestimme die von der Kreisfläche herrührende in dem Puncte P wirkende electromotorische Kraft. Nennt man $P'(x', y', z')$ einen Punct derselben, $PP' = r$, $AP' = \varrho'$, so ist, wenn φ und φ' die Winkel, welche AP und AP' mit der X-Axe bilden, ausdrücken,

$$x = a + \varrho\cos\varphi, \qquad x' = a + \varrho'\cos\varphi',$$
$$y = b + \varrho\sin\varphi, \qquad y' = b + \varrho'\sin\varphi'.$$

Bei der symmetrischen Vertheilung der Masse des Leiters um den Punct A kann die Stromdichtigkeit radial angenommen werden. Bezeichnet man dieselbe in den Puncten P und P' mit σ und σ', so ist

$$u = \sigma\cos\varphi, \qquad u' = \sigma'\cos\varphi', \qquad v = \sigma\sin\varphi, \qquad v' = \sigma'\sin\varphi'.$$

Das Flächenelement in dem Puncte P' kann, indem man $\angle P'PX = \mu$ setzt, durch $r\partial r\partial\mu$ dargestellt werden, mithin erhält man, da die Scheibe ohne Grenzen vorausgesetzt wird, nach §. 6. (3)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\Omega = \int_0^{2\pi}\int_0^{s} \varepsilon' \partial r \partial \mu .$$

Da die Dichtigkeit der freien Electricität offenbar als Function von ϱ angesehen werden kann, so ist es gestattet, wenn man $\varrho' = \varrho + \lambda$ setzt, ε' nach Potenzen von λ zu entwickeln. Bezeichnet man daher die Dichtigkeit in der Entfernung ϱ von A mit ε, so hat man

$$\varepsilon' = \varepsilon + \lambda \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varrho} + \frac{\lambda^2}{2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \varrho^2} . \left(\lambda \overset{=}{<} s\right).$$

Es ist aber

$$\varrho'^2 = \varrho^2 + r^2 + 2r\varrho \cos(\varphi - \mu), \qquad \lambda = \sqrt{r^2 + \varrho^2 + 2r\varrho\cos(\varphi-\mu)} - \varrho = r\cos(\varphi - \mu),$$

wenn man nach der oben gemachten Voraussetzung die höheren Potenzen von $\frac{r}{\varrho}$ vernachlässigt. Unterdrückt man ebenso die höheren Potenzen von λ, so resultirt

$$\Omega = \int_0^{2\pi}\int_0^{s} \partial r \partial \mu \left(2 + r\cos(\varphi - \mu)\frac{\partial \varepsilon}{\partial \varrho}\right) = 2\pi s \varepsilon . \qquad (1)$$

Es ist nach §. 7. (4)

$$U = \iint \frac{\partial x \partial y}{r^3} (x - x')\{u'(x - x') + v'(y - y')\}$$

$$x - x' = r\cos\mu, \qquad y - y' = r\sin\mu, \qquad u' = \sigma'\cos\varphi', \qquad v' = \sigma'\sin\varphi'.$$

Hierdurch verwandelt sich der vorstehende Ausdruck in folgenden:

$$U = \int_0^{2\pi}\int_0^{s} \sigma' \cos\mu \cos(\varphi' - \mu) \partial r \partial \mu .$$

Da aber $\angle PP'A = \varphi' - \mu$, also $\varrho^2 = r^2 + \varrho'^2 - 2r\varrho'\cos(\varphi' - \mu)$ ist, so ergiebt sich

$$\cos(\varphi' - \mu) = \frac{r^2 + \varrho'^2 - \varrho^2}{2r\varrho'} = \cos(\varphi - \mu) + \frac{r}{\varrho}\sin^2(\varphi - \mu).$$

Entwickelt man die Stromdichtigkeit σ', welche, wie oben bemerkt, eine Function von ϱ ist, ähnlich wie ε' nach Potenzen von λ, nennt σ die Stromdichtigkeit in der Entfernung ϱ von A und substituirt die Werthe von $\cos(\varphi' - \mu)$ und $\sigma' = \sigma + r\cos(\varphi - \mu)\frac{\partial \sigma}{\partial \varrho}$ in den Ausdruck von U, so resultirt

$$U = \int_0^{2\pi}\int_0^{s} \left(\sigma + r\cos(\varphi - \mu)\frac{\partial \sigma}{\partial \varrho}\right)\left(\cos(\varphi - \mu) + \frac{r}{\varrho}\sin^2(\varphi - \mu)\right)\cos\mu \partial r \partial u.$$

Beachtet man nun, dass

$$\int_0^{2\pi} \cos\mu \cos^2(\varphi - \mu)\partial\mu = 0, \quad \int_0^{2\pi} \cos\mu\cos(\varphi - \mu)\partial\mu = \pi\cos\varphi, \quad \int_0^{2\pi} \cos\mu\,\partial\mu = 0$$

ist, so erhält man

$$U = \pi \int_0^{s} \sigma \cos\varphi \partial r = \pi\sigma s \cos\varphi . \qquad (2)$$

Die electromotorische Kraft, welche von der freien Electricität der um P beschriebenen Kreisfläche auf diesen Punct ausgeübt wird, bestimmt man nun nach §. 7. aus dem Werthe von

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = 2\pi s \cos\varphi \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varrho}, \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial y} = 2\pi s \sin\varphi \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varrho}$$

und die electromotorische Kraft, welche von der Induction derselben Kreisfläche in dem Puncte P ausgeübt wird, aus den Werthen von

$$\frac{\partial U}{\partial t} = s\pi \cos\varphi \frac{\partial \sigma}{\partial t}, \qquad \frac{\partial V}{\partial t} = s\pi \sin\varphi \frac{\partial \sigma}{\partial t},$$

so dass man für die Stromdichtigkeiten in dem Puncte P parallel den Axen nach §. 7. (7) und (8) die Ausdrücke

$$u = -4ks\pi \cos\varphi \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \varrho} + \frac{2}{c^2}\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right),$$

$$v = -4ks\pi \sin\varphi \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \varrho} + \frac{2}{c^2}\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right)$$

erhält. Hieraus ergiebt sich die radiale Stromdichtigkeit

$$\sigma = -4sk\pi \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \varrho} + \frac{2}{c^2}\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right). \qquad (3)$$

Nach §. 7. (1) ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\tfrac{1}{2}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}.$$

Da aber $u = \sigma . \frac{x-a}{\varrho}$, $v = \sigma . \frac{y-b}{\varrho}$ gesetzt werden kann, so findet man, in dem σ als Function von ϱ behandelt wird,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \sigma}{\partial \varrho}\left(\frac{x-a}{\varrho}\right)^2 + \sigma \frac{\varrho^2 - (x-a)^2}{\varrho^3},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \sigma}{\partial \varrho}\left(\frac{y-b}{\varrho}\right)^2 + \sigma \frac{\varrho^2 - (y-b)^2}{\varrho^3},$$

folglich

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \sigma}{\partial \varrho} + \frac{\sigma}{\varrho} = -\tfrac{1}{2}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \qquad (4)$$

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \varrho\, \partial t} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \sigma}{\partial t} = -\tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2}.$$

Aus Gleichung (3) erhält man

$$\frac{\sigma}{\varrho} = -\frac{4sk\pi}{\varrho}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \varrho} + \frac{2}{c^2}\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right).$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varrho} = -4sk\pi \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \varrho^2} + \frac{2}{c^2}\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \varrho\, \partial t}\right).$$

Durch Substitution dieser Werthe in den Ausdruck von $-\frac{1}{2}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$ mit Benutzung desjenigen von $-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2}$ resultirt endlich

$$-\tfrac{1}{2}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 4sk\pi \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \varrho} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2}\right)$$

oder

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} + \frac{c^2}{8ks\pi}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = c^2\left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \varrho}\right). \qquad (5)$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Eliminirt man in ähnlicer Weise ε aus Gleichungen (4) und (5), so ergiebt sich

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2}+\frac{c^2}{8ks\pi}\frac{\partial\sigma}{\partial t}=c^2\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial\varrho^2}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\sigma}{\partial\varrho}-\frac{\sigma}{\varrho^2}\right). \qquad (6)$$

Die Gleichungen (5) und (6) bestimmen noch nicht die wirkliche Vertheilung der Electricität und ihrer Bewegungen in einer unendlichen Ebene, welcher durch eine Electrode Electricität zuströmt, denn es sind nur die electromotorischen Kräfte, welche von einer sehr kleinen um den Punct (xy) als Centrum beschriebenen Kreisfläche auf denselben ausgeübt werden, berücksichtigt. Es ist aber bemerkenswerth, dass, wenn die Vertheilung der Electricität einen beharrlichen Zustand angenommen hat, die Dichtigkeit der freien Electricität also von der Zeit unabhängig ist, die Gleichung (5) in die Gleichung $\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\varrho^2}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\varrho}=0$, oder wenn man rechtwinklige Coordinaten einführt, in die Gleichung $\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial y^2}=0$ sich verwandelt, von welcher Kirchhof und Smaasen ausgingen, um die Aufgabe von dem dynamischen Gleichgewichte in einer Scheibe zu lösen.

Um zu einer Gleichung, welche zur Bestimmung der Vertheilung der Electricität und ihrer Bewegungen in einer Scheibe wirklich dienen kann, zu gelangen, sind auch die electromotorischen Kräfte, welche von der freien Electricität und den electrischen Bewegungen in allen andern Theilen der Scheibe auf den Punct (xy) ausgeübt werden, in Betracht zu ziehen.

Die Lösung dieses noch nicht zum Abschluss gebrachten Theiles der Aufgabe in dem besonderen Falle, dass die Scheibe in zwei Puncten mit dem Leitungsdrahte eines galvanischen Stromes in Verbindung steht, bleibt ebenso wie die Entwickelung einiger Anwendungen der §. 5. und §. 6. für krystallinische Substanzen aufgestellten Gleichungen einer späteren Darstellung vorbehalten.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf