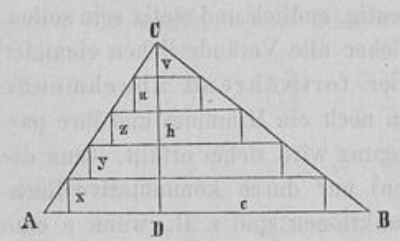
I. Maxima und Minima symmetrischer Funktionen.

Sehr viele Funktionen, von denen in geometrischen und anderen Aufgaben ein grösster oder kleinster Wert zu bestimmen ist, sind symmetrisch und müssen symmetrisch gestalteten Nebenbedingungen genügen. Solcher Art sind Produkte bei konstanter Summe der Veränderlichen, in vielen Fällen die Flächen isoperimetrischer Figuren u. s. w. Sucht man von einer solchen Funktion die extremen Werte, so erfährt man regelmässig, dass einer derselben dann erreicht wird, wenn die Veränderlichen einander gleich werden. Folgende Aufgabe diene als Beispiel.



In ein Dreieck vier über einander liegende Rechtecke so zu beschreiben, dass ihre Summe ein Maximum wird.

Bezeichnet man die Höhen der einzelnen Rechtecke mit x, y, z, u, die Grundlinie des Dreiecks mit c und eine gewisse konstante Grösse mit n (sie ist das Verhältnis der Grundlinie c zur Dreieckshöhe h), so ist die Funktion, welche zu einem Maximum werden soll,[1])

$$F = c\,(x + y + z + u) - n\,(x^2 + (x + y)\,y + (x + y + z)\,z + (x + y + z + u)\,u).$$

Hält man y, z und u fest und setzt $x + y + z + u = s$, so findet man nach der Schellbachschen Methode oder durch Differentiieren, dass F einen Kulminationswert hat, wenn $s + x = \frac{c}{n}$. Da die Funktion F symmetrisch ist, wie man durch Ausmultiplizieren der Klammern im Faktor von n findet, so erhält man für y, z und u drei entsprechende Gleichungen, aus denen sich schliesslich ergiebt

$$x = y = z = u = \frac{1}{5}\,h.$$

Das Beispiel scheint nicht hierher zu passen, da oben nur von Funktionen die Rede war, deren Veränderliche einer symmetrisch gestalteten Nebenbedingung genügen müssen, und hier keine solche vorhanden ist. Indessen besteht die Bedingung, dass die Summe der vier Rechteckshöhen kleiner als die Dreieckshöhe ist, und diese kann man leicht in Form einer Gleichung darstellen. Führt man das Stück der Höhe h, welches in keinem Rechteck liegt, als v ein, so kann man F folgendermassen schreiben:

$$(1)\quad F = ch - n\,(x^2 + (x + y)\,y + (x + y + z)\,z + (x + y + z + u)\,u + (x + y + z + u + v)\,v).$$

1) Schellbach, mathematische Lehrstunden. Aufgaben aus der Lehre vom Grössten und Kleinsten. Herausgegeben von Bode und Fischer (1860) S. 112.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Auch dieser Ausdruck ist symmetrisch und jetzt besteht die symmetrische Nebenbedingung

$$(2) \qquad x + y + z + u + v = h.$$

Nach Elimination von v erhält man ganz in derselben Weise wie vorher das Ergebnis, dass die Funktion einen extremen Wert hat, wenn die fünf Veränderlichen einander gleich sind, also jede gleich dem fünften Teil der Dreieckshöhe ist.

Vorstehend angedeutete Auflösung ist, man mag die Funktion in der ersten oder zweiten Form schreiben, in Gedankengang und Rechnung durchaus nicht verwickelt; aber sie ist im Verhältnis zur Einfachheit des Ergebnisses noch nicht einfach genug. Zudem kehrt die Gleichheit der Variablen so beständig als Ergebnis aller derartigen Aufgaben wieder, dass man mutmassen kann, es müsse sich darüber ein allgemeiner Satz aussprechen lassen. Wir wollen uns jetzt mit dieser Frage so weit beschäftigen, als es notwendig ist, um die Bestimmung einiger Maxima und Minima, welche im zweiten Teile der Arbeit gebraucht werden, einfach ausführen zu können.

Lehrsatz über den grössten oder kleinsten Wert einer symmetrischen Funktion bei Gleichheit der Variablen.

1. Es seien F und φ zwei symmetrische Funktionen der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ und zwar F diejenige Funktion, welche einen extremen Wert annehmen soll, während die Veränderlichen der Bedingungsgleichung $\varphi = 0$ genügen. Ausser dass natürlich beide Funktionen für diejenigen Werte der Variablen, welche in Frage kommen, reell, eindeutig, endlich und stetig sein sollen, setzen wir voraus, dass φ in der Umgebung der Stelle, an welcher alle Veränderlichen einander gleich werden, eine entweder fortwährend wachsende oder fortwährend abnehmende Funktion sei;[1]) sie ist also an dieser Stelle weder ein Maximum noch ein Minimum und ihre partiellen ersten Differentialquotienten sind nicht null. Diese Bedingung wird sicher erfüllt, wenn die Veränderlichen (oder Funktionen der einzelnen Veränderlichen) nur durch kommutative Rechnungsarten mit einander verknüpft sind. Hierher gehörige Funktionen sind z. B., wenn c eine konstante Grösse bedeutet, $x_1 + x_2 + \ldots + x_n - c$, $x_1 \cdot x_2 \ldots x_n - c$, $x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p - c$, $x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_2 x_3 + \ldots + x_{n-1} \cdot x_n - c$, $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} - c$, $\sin x_1 + \sin x_2 + \ldots + \sin x_n - c$, wenn im letzten Falle die einzelnen Bogen $< \frac{1}{2}\pi$ sind. Der obigen Bedingung nicht genügen würde $\varphi = (x_1 - x_2)^2$. Denn ist zunächst $x_2 < x_1$ und lassen wir x_2 wachsen, so nimmt φ ab, erreicht für $x_2 = x_1$ ein Minimum und nimmt dann wieder zu. Dagegen hat $\varphi = x_1^3 + x_2^3 - 2c\, x_1 x_2$ an der Stelle $x_1 = x_2 = c$ die verlangte Eigenschaft.

Wir stellen nun folgenden Satz auf:

Genügen n Variable der Bedingungsgleichung

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0,$$

worin φ eine symmetrische Funktion ist, welche in der Umgebung der Stelle, an welcher alle Variable einander gleich werden, nur wächst oder nur abnimmt, so ist jede symmetrische Funktion $F(x_1, x_2, \ldots x_n)$ ein Maximum oder Minimum, wenn alle Variablen einander gleich sind.

1) Die von Carl Neumann in dem Werke „Über die nach Kreis-, Kugel- und Cylinderfunktionen fortschreitenden Entwickelungen" S. 26 eingeführte Bezeichnung monoton für niemals wachsend oder niemals abnehmend können wir hier leider nicht verwenden, weil wir das Sichgleichbleiben ausschliessen müssen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es ist selbstverständlich, dass die Gleichung $\varphi = 0$ durch gemeinsame reelle Werte der Veränderlichen erfüllbar sein muss.

Beweis. Während wir $x_3 \ldots x_n$ festhalten, sollen x_1 und x_2 unendlich kleine Änderungen erfahren, nachdem sie vorher denjenigen gemeinsamen Wert b angenommen haben, welcher für sie aus der Gleichung $\varphi = 0$ bei gegebenen $x_3, \ldots x_n$ folgt. Sollte φ nicht überall die oben als notwendig erklärte Eigenschaft besitzen, so wird man für diese Überlegung von dem Zustande der Funktion ausgehen, in dem alle Variablen gleich sind. Lassen wir nun x_1 um die positive Grösse δ bis $b + \delta$ wachsen, so kann die Funktion φ infolge ihrer besonderen Eigenschaft nur konstant bleiben, wenn x_2 um eine positive Grösse ε abnimmt. Durch diese Veränderung muss F wachsen bez. abnehmen; den Fall, dass F an der Stelle konstant ist, schliessen wir aus. Lassen wir nun umgekehrt x_2 wachsen, setzen also $x_2 = b + \delta$, so ergiebt sich aus $\varphi = 0$ infolge der Symmetrie der Funktion φ für x_1 genau derselbe Wert, wie vorhin für x_2, d. h. $x_1 = b - \varepsilon$. Da nun auch F eine symmetrische Funktion ist, so hat sich ihr Wert durch Vertauschung von $x_1 = b + \delta$ und $x_2 = b - \varepsilon$ nicht geändert. Ist also F gewachsen, als wir $x_1 = b + \delta$ setzten, so ist es auch gewachsen durch Einführung von $x_1 = b - \varepsilon$; hat es erst abgenommen, so wird jetzt dasselbe der Fall sein. Die Funktion hat mithin für $x_1 = x_2 = b$ einen kleinsten bez. grössten Wert. Diese Betrachtung gilt aber für je zwei Veränderliche ebenso wie für x_1 und x_2.[1])

Die Begründung des Satzes durch Differentialrechnung gestaltet sich folgendermassen. Soll F ein Maximum oder Minimum sein, so müssen die Gleichungen bestehen

$$(1) \qquad \frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_2}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}} = \ldots\ldots = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_n}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}},$$

welche mit

$$(2) \qquad \varphi = 0$$

zusammen die gesuchten Werte der Unbekannten ergeben.

Die Gleichungen (1) werden befriedigt, wenn jeder Zähler gleich dem zugehörigen Nenner ist, oder wenn alle Zähler null sind. Diese Ausnahmefälle schliessen wir aus, wie auch vorhin bemerkt wurde. Die Gleichungen werden aber auch befriedigt, wenn $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Denn wegen der Symmetrie von F und φ ist der erste Quotient für x_1 genau so gebildet wie der zweite für x_2, so dass der eine in den anderen übergeht, wenn man x_1 und x_2 vertauscht. Jedoch würden trotzdem die Quotienten durch Gleichsetzung der Variablen nicht gleich zu sein brauchen, wenn die Nenner $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}$ null würden. Es ergiebt sich also wiederum die Bedingung, dass φ in der Umgebung der Stelle $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ nur wachsen oder nur abnehmen darf.

Eine ganz allgemeine Untersuchung darüber, ob etwa durch die Werte der höheren Differentialquotienten das Vorhandensein eines extremen Wertes verneint wird, würde jedenfalls sehr umständlich sein und ist für die im folgenden vorkommenden Fälle entbehrlich.

Der Lehrsatz gilt natürlich auch dann, wenn m von den n Variablen willkürliche, aber

1) Wir nehmen, wie es gewöhnlich geschieht, an, dass die symmetrische Funktion bei Gleichheit aller Variablen einen extremen Wert erreicht, wenn sie ihn durch Gleichsetzung je zweier Veränderlichen unter Festhaltung der übrigen erlangt. Über die Berechtigung dieses Schlusses sollen in Abschnitt 8 einige Bemerkungen folgen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

konstante Werte erhalten; die Funktion wird ein Maximum oder Minimum, wenn die $n-m$ übrigen Variablen denjenigen Wert annehmen, welcher aus $\varphi = 0$ folgt, wenn man sie alle gleich setzt.

2. Der Lehrsatz des vorigen Abschnitts spricht nur von einem Maximum oder Minimum und lässt unentschieden, was von beiden vorhanden ist. Häufig ist ja sofort zu übersehen, ob ein grösster oder ein kleinster Wert eintritt. Ist dies nicht der Fall, so kann man die Untersuchung dadurch vereinfachen, dass man $n-2$ Variable bei dem gemeinsamen Werte festhält und die Veränderung der Funktion bei Veränderung der letzten beiden Variablen beobachtet.

Ist z. B. $F = x_1 x_2 \ldots x_n$ und $\varphi = x_1 + x_2 + \ldots + x_n - na = 0$, wobei die Variablen und a nur positive Werte annehmen sollen, so wird nach unserm Satze F ein Maximum oder Minimum für $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = a$; die Funktion hat dann den Wert a^n. Dass dies ein Maximum, ist ohne weiteres ersichtlich, wenn wir irgend einer Veränderlichen den besonderen Wert null beilegen, wodurch auch F null wird. Trüge man Bedenken, diese Schlussfolgerung als schlagend anzuerkennen, weil noch ein anderer extremer Wert da sein könnte (was bei dieser Funktion nicht der Fall ist — davon im nächsten Abschnitt), so könnte man folgendermassen verfahren.

Lassen wir x_1 in $a + \delta$ übergehen (δ eine unendlich kleine Grösse), dafür x_2 in $a - \delta$, während die übrigen x ungeändert $= a$ bleiben, so erhält die Funktion den Wert $(a^2 - \delta^2)\, a^{n-2}$, ist also kleiner geworden und war mithin vorher ein Maximum.

3. Der Satz stellt nicht die Behauptung auf, dass der Funktion nur bei Gleichheit der Variablen ein extremer Wert zukomme. Z. B. ist $F = x_1^2 x_2^2$, wenn $\varphi = x_1 + x_2 - 2a = 0$, allerdings ein Maximum für $x_1 = x_2 = a$; es bestehen aber ausserdem noch zwei Minima, nämlich für $x_1 = 0$, $x_2 = 2a$ und $x_1 = 2a$, $x_2 = 0$.

Oder $F = \pi xy \left(1 - \frac{4 r^2 xy}{(r^2 + x^2 + y^2)^2}\right)$, wenn $\varphi = x + y - r = 0$, auf welche Funktion man bei einer gewissen geometrischen Aufgabe geführt wird, hat ein Minimum bei $x = y = \frac{1}{2} r$, aber auch zwei Maxima, nämlich bei $x = 0{,}3553729\, r$ und $x = 0{,}6446271\, r$.[1])

Ob solche andere extreme Werte fehlen und ob das bei Gleichheit der Variablen vorhandene Maximum oder Minimum der absolut grösste oder kleinste Wert der Funktion ist, wird oft leicht zu erkennen sein. Sehr einfach ist die Sache, wenn die Funktion, so lange wir nur zwei Variable in Betracht ziehen, von denen die eine vermittelst der Bedingungsgleichung durch die andere ausgedrückt werden kann, eine ganze quadratische ist. Wenn $F = ax^2 + bx + c$, so entsprechen einem bestimmten Werte der Funktion nicht mehr als zwei Werte von x und zwischen diesen kann nur ein extremer Wert der Funktion liegen.

Wählen wir zur Erläuterung wieder die Funktion $F = x_1 x_2 \ldots x_n$ ($x_1 + \ldots + x_n - na = 0$, alle Grössen positiv). Halten wir $x_3, x_4, \ldots x_n$ fest, so ist ihr Produkt gleich einer Konstanten C zu setzen und auch die Summe von x_1 und x_2 muss konstant sein, vielleicht $x_1 + x_2 = 2b$ Dann ist $F = x_1 x_2 \,.\, C = C \,.\, x_1 (2b - x_1)$ eine ganze Funktion zweiten Grades von x_1 und hat nur für $x_1 = x_2 = b$ einen Kulminationswert. Infolgedessen giebt es auch nur einen extremen Wert, wenn alle x veränderlich sind.

4. Als Aufgaben, in denen der Lehrsatz in (1) zur Verwendung gelangen kann, mögen folgende angeführt werden.

1) Martus, Maxima und Minima (1861). S. 118.

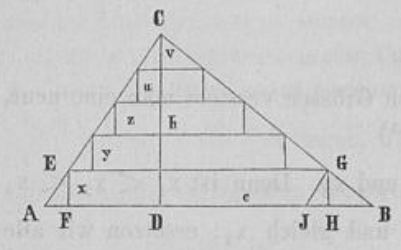
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

1) Die Fläche eines Dreiecks kann man mittels der Heronischen Formel als symmetrische Funktion der Seiten darstellen. Hat der Umfang eine konstante Grösse, so ist die Fläche ein Maximum, wenn die Seiten gleich sind.

2) Die Fläche eines Dreiecks, welches einem gegebenen Kreise eingeschrieben ist, kann als symmetrische Funktion der Winkel, deren Summe konstant ist, dargestellt werden. Das gleichwinklige Dreieck hat die grösste Fläche.

3) Die Fläche eines in einen Kreis zu beschreibenden Vielecks ist offenbar eine symmetrische Funktion der Seiten, deren Entwickelung allerdings Schwierigkeiten macht.[1]) Hier genügt aber die Thatsache, dass die Funktion symmetrisch ist. Mittels des Satzes in (1) folgt daraus, dass unter allen isoperimetrischen Kreisvielecken von bestimmter Seitenzahl dasjenige die grösste Fläche hat, dessen Seiten gleich sind.

4) Die in den Vorbemerkungen erwähnte Aufgabe findet jetzt rasche Erledigung. Nebenbei sei darauf aufmerksam gemacht, dass sich der Ausdruck für die Summe der vier Rechtecke noch etwas einfacher darstellen lässt, als es früher, unserer Quelle folgend, geschehen ist. Wir erhalten ihn, wenn wir vom ganzen Dreieck Δ die rechts und links von den Rechtecken gelegenen kleinen Dreiecke abziehen. Je zwei derselben, welche an dasselbe Rechteck anstossen, legen wir zusammen, z. B. A E F und H G B zu J G B, dessen Fläche gleich Δ_1 sei. So entstehen fünf Dreiecke, welche dem grossen ähnlich sind. Daher ist



$$\Delta_1 = \frac{\Delta}{h^2} \cdot x^2$$

und Entsprechendes ergiebt sich für die vier anderen Dreiecke. Die Summe der Rechtecke ist mithin

$$(1) \quad F = \Delta - \frac{\Delta}{h^2}(x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + v^2).$$

Die Funktion ist symmetrisch, und da ausserdem die Bedingungsgleichung

$$(2) \quad \varphi = x + y + z + u + v - h = 0$$

besteht, so hat F einen extremen Wert, und zwar der Natur der Aufgabe nach ein Maximum, für

$$x = y = z = u = v = \frac{1}{5}h.$$

Ein zweiter Kulminationswert ist nicht vorhanden.

5) Als Probe einer Funktion, welche an der Stelle $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ unendlich wird, möge folgendes Beispiel dienen. Es sei

$$\begin{aligned} F = (x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + \ldots + (x_1 - x_n)^2 \\ + (x_2 - x_3)^2 + \ldots + (x_2 - x_n)^2 \\ - - - - - - \\ + (x_{n-1} - x_n)^2 \end{aligned}$$

und

$$\varphi = x_1 + x_2 + \ldots + x_n - na = 0.$$

1) Möbius, über die Gleichungen, mittelst welcher aus den Seiten eines in einen Kreis zu beschreibenden Vielecks der Halbmesser des Kreises und die Fläche des Vielecks gefunden werden. Gesammelte Werke I. S. 433, zuerst in Crelles Journal 3 (1828).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Verändern wir nur x_1 und x_2 und halten die übrigen x fest, so hat F eine Kulmination für $x_1 = x_2$ und zwar ist es dann ein Minimum, weil es, wie leicht zu übersehen, bei Gleichheit aller Variablen den kleinsten Wert annimmt. Der reciproke Wert von F wird mithin für $x_1 = x_2$, so lange nur diese beiden x veränderlich sind, ein Maximum, für $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ dagegen unendlich gross.

6) Es sei noch bemerkt, dass manche Aufgaben, welche nicht symmetrische Funktionen mehrerer Veränderlichen behandeln, mittels geeigneter Umformungen ihre Lösung durch den Lehrsatz in (1) finden können. Ist das Maximum oder Minimum von $F = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$ zu suchen, so setze man $x = x_1$, $1 - x = x_2$; dann ist $F = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ und $\varphi = x_1 + x_2 - 1 = 0$. Die Funktion erreicht ihren grössten Wert, wenn x_1 und x_2 einander gleich sind, d. h. für $x = \frac{1}{2}$.

Weitere Anwendungen des Satzes in (1) werden im nächsten Abschnitt sowie im 2. Abschnitt des zweiten Teils gemacht werden.

Mittelgrössen.

5. Unter einem Mittel zwischen mehreren gegebenen Grössen versteht man eine neue, zwischen der kleinsten und grössten derselben liegende Grösse.[1])

$\frac{2x_1 + 5x_2 + 20\,x_3}{27}$ ist ein Mittel zwischen x_1, x_2 und x_3. Denn ist $x_1 < x_2 < x_3$ und setzen wir alle gleich x_1, so wird der Ausdruck zu klein und gleich x_1; ersetzen wir alle Grössen durch x_3, so wird der Ausdruck zu gross und gleich x_3.

Wenn in irgend einem Mittel alle gegebenen Grössen gleich sind, so nimmt auch das Mittel den gemeinsamen Wert der Grössen an.

Im folgenden sollen nur Mittelgrössen behandelt werden, welche symmetrische Funktionen der gegebenen Grössen sind. Ausserdem seien der Einfachheit wegen alle vorkommenden Grössen reell und positiv. Hierher gehörige Mittel sind

das arithmetische Mittel $\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$,

das geometrische Mittel $\sqrt[n]{x_1 . x_2 \ldots x_n}$,

das harmonische Mittel $\dfrac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$.

Eine Reihe von Mittelgrössen erhält man, wenn man die einfachsten symmetrischen Funktionen einführt, welche in der Theorie der algebraischen Gleichungen eine so grosse Rolle spielen: $C_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, $C_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n$, $\ldots C_n = x_1 x_2 \ldots x_n$. Dividiert man sie durch die Zahl ihrer Glieder und zieht aus den Quotienten die p^{te} Wurzel, wenn die Funktion p^{ten} Grades ist, so ergeben sich, falls man die Binomialkoeffizienten mit $(n)_p$ bezeichnet, die Mittelgrössen

$$\frac{C_1}{(n)_1},\ \sqrt{\frac{C_2}{(n)_2}},\ \sqrt[3]{\frac{C_3}{(n)_3}},\ \ldots\ \sqrt[n]{\frac{C_n}{(n)_n}}.$$

Anfang und Ende dieser Reihe werden durch das arithmetische und geometrische Mittel gebildet.

1) Cauchy, Lehrbuch der algebraischen Analysis, übersetzt von Huzler. S. 11.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ferner wird man immer zu Mittelwerten gelangen, wenn man im arithmetischen oder geometrischen Mittel an die Stelle der n Grössen irgend eine Funktion derselben setzt und von dem erhaltenen Ausdruck die der ersten Funktion entgegengesetzte nimmt. Beispiele hierfür sind: das harmonische Mittel, $\arcsin \frac{\sin x_1 + \sin x_2 + \ldots + \sin x_n}{n}$, $\arccos \sqrt[n]{\cos x_1 \cdot \cos x_2 \ldots \cos x_n}$, $\sqrt[p]{\frac{x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p}{n}} = \sqrt[p]{\frac{S_p}{n}}$, wenn wir die Potenzsumme $x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p = S_p$ setzen, wobei p auch eine gebrochene Zahl sein kann, so dass z. B.

$$\left(\frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \ldots + \sqrt{x_n}}{n}\right)^2 = \left(\frac{S_{\frac{1}{2}}}{n}\right)^2$$

ein besonderer Fall des vorigen Mittels ist.

Von den Funktionen ($\sin x$, $\cos x$, $\sqrt{x}$), welche so in das arithmetische oder geometrische Mittel eingeführt worden sind, sowie von ihren Umkehrungen soll vorausgesetzt werden, dass sie alle Eigenschaften der Funktion φ in (1) besitzen, dass sie im besondern fortwährend wachsen oder fortwährend abnehmen. Die Bogen, deren Sinus und Kosinus vorkommen, müssen also zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ liegen, während ein Bogen, von welchem die Tangente zu nehmen ist, $\frac{1}{2}\pi$ nicht erreichen darf; unter Wurzeln hat man nur ihren positiven reellen Wert zu verstehen u. s. w.

Bekanntlich ist $\frac{a + a' + a'' + \ldots}{b + b' + b'' + \ldots}$ ein Mittel zwischen $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''} \ldots$, ebenso $\sqrt[B + B' + \ldots]{A \cdot A' \ldots}$ ein Mittel zwischen $\sqrt[B]{A}, \sqrt[B']{A'}, \ldots$ Derartige Mittelgrössen, in welchen nicht die gegebenen Grössen selbst, sondern einzelne Bestandteile derselben als Argumente auftreten, bleiben hier unberücksichtigt.

6. Alle symmetrischen Mittelgrössen, wie sie hier in Frage kommen, werden mit den in ihnen enthaltenen gegebenen Grössen fortwährend wachsen; da sie ausserdem als reell, eindeutig, stetig und endlich vorausgesetzt sind, so erfüllen sie, auch wenn man sie um eine Konstante vermindert, die Bedingungen, denen φ, und erst recht diejenigen, welchen die Funktion F des ersten Abschnitts unterworfen war. Sind also F und Φ zwei verschiedene symmetrische Mittel der n Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ und Φ gleich einer Konstanten a oder $\varphi = \Phi - a = 0$, so ist F ein Maximum bez. Minimum, wenn alle x einander gleich, nämlich gleich a sind; es wird auch bei diesen Funktionen nur ein extremer Wert vorhanden sein, der dann zugleich der absolut grösste oder kleinste Wert der Funktion ist. Derselbe ist auch $= a$, fällt also mit dem Werte von Φ zusammen. Da dies für jede positive Konstante a, d. h. für jeden Wert des Mittels Φ der Fall ist, so folgt hieraus, dass überhaupt

$$F \leqq \Phi \text{ bez. } F \geqq \Phi.$$

Setzen wir umgekehrt F gleich einer Konstanten a, so erhält Φ einen extremen Wert, wenn alle x einander gleich sind. Da ein Widerspruch mit dem vorigen Ergebnis nicht bestehen kann, so muss einem Maximum der einen Funktion ein Minimum der anderen entsprechen. Wir haben also einen besonderen Fall der reciproken Maxima und Minima vor uns.[1])

1) Über reciproke Maxima und Minima siehe Schlömilch, Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis. (1. Aufl. 1868) I. § 32 und 33. — Matern, Probleme aus der Theorie der Maxima und Minima mit

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wenn es richtig ist (was man für besondere Fälle leicht beweisen kann), dass ein symmetrisches Mittel nur einen extremen Wert haben kann, falls ein anderes gleich einer Konstanten ist, so wird man auf Grund obiger Überlegungen behaupten dürfen, dass sich alle die symmetrischen Mittelgrössen, welche hier in Betracht kommen können, in eine Reihe ordnen lassen, so dass die links stehende grösser ist als irgend eine rechts stehende. Welches von zwei Mitteln das grössere ist, wird sich durch Einführung besonderer Werte für die gegebenen Grössen leicht entscheiden lassen. Dass die Mittel auch einander gleich werden können (wenn alle gegebenen Grössen einen gemeinsamen Wert annehmen), braucht weiterhin nicht immer wieder erwähnt zu werden.

7. In der That hat man mehrere Reihen von Mitteln aufgestellt, so dass jedes einzelne Mittel grösser ist als das nächste. Für die Richtigkeit dieser Aufstellungen können wir jetzt eine Bestätigung liefern. Am häufigsten werden das arithmetische, geometrische und harmonische Mittel ihrer Grösse nach mit einander verglichen.[1]) Dass das erstgenannte grösser als das zweite ist, folgt aus (2). Das harmonische Mittel dagegen ist kleiner als das geometrische. Denn haben alle gegebenen Grössen den gemeinsamen Wert a, so geben die ersten beiden Glieder im Nenner des harmonischen Mittels die Summe $\frac{2}{a}$. Wird $x_1 = \frac{1}{2}a$, $x_2 = 2a$ (das geometrische Mittel soll konstant bleiben), während die übrigen Grössen den Wert a behalten, so ist die entsprechende Summe $= 2\frac{1}{2}a$, also grösser und das ganze Mittel ist kleiner geworden.[2])

An die durch Cauchy aufgestellte Ungleichung[3])

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} < \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}}$$

anknüpfend, hat Schlömilch den allgemeinen Satz abgeleitet,[4]) dass

$$(1) \qquad \sqrt[n]{x_1 . x_2 \ldots x_n} < \ldots < \left(\frac{S_{\frac{1}{3}}}{n}\right)^3 < \left(\frac{S_{\frac{1}{2}}}{n}\right)^2 < \frac{S_1}{n}$$

$$(2) \qquad \frac{S_1}{n} < \left(\frac{S_2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} < \left(\frac{S_3}{n}\right)^{\frac{1}{3}} < \ldots < x_n ,$$

wobei x_n die grösste der n Zahlen $x_1 \ldots x_n$ ist.

Nebenbedingungen. § 8. Beilage zum Jahresbericht der Realschule des Johanneums zu Hamburg. (Ostern 1876). — Haluschka, Zeitschrift für Math. und Physik. 30 (1885) S. 57. Haluschka hat offenbar wenigstens die Abhandlung von Matern nicht gekannt.

1) Den in Frage stehenden Satz hat unter Zugrundelegung von einfachen Ungleichungen Schlömilch in der Zeitschr. f. Math. u. Phys. 3 (1858) S. 187 und in Hoffm. Zeitschr. 11 (1880) S. 361 sehr kurz bewiesen.

2) Darauf, dass man für die Vergleichung des arithmetischen und geometrischen Mittels ihre relativen Maxima und Minima benutzen kann, haben aufmerksam gemacht: Grebe im Programm des Gymnasiums zu Marburg (1856) S. 21 und in der Zeitschr. f. Math. u. Phys. 3 (1858) S. 297, später Transon in Nouvelles Annales mathémat., 2. Serie 11. Bd. (1872) S. 257. Indessen verliert dadurch die unmittelbare Vergleichung der beiden Mittelwerte bei beliebiger Grösse der Argumente durch Umformung von Ungleichungen nicht ihre Bedeutung.

3) Cauchy, algebr. Analysis. S. 322.

4) Über Mittelgrössen verschiedener Ordnungen. Zeitschrift f. Math. u. Phys. 3 (1858) S. 301. — Für beliebige reelle Exponenten bewiesen von Simon, Zeitschr. für Math. u. Phys. 33 (1888) S. 56.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fort giebt unter anderen folgende Ungleichungen an:

$$(3) \qquad \frac{C_1}{(n)_1} > \sqrt{\frac{C_2}{(n)_2}} > \sqrt[3]{\frac{C_3}{(n)_3}} > \ldots > \sqrt[n]{\frac{C_n}{(n)_n}}$$

Die Reihen (1) und (3) stimmen im grössten und kleinsten ihrer Glieder überein.

Aus den Überlegungen dieses Abschnitts folgt ein neuer Beweis für diese drei Reihen von Ungleichungen. Wir haben zu untersuchen, in welcher Reihenfolge die einzelnen Glieder einzuordnen sind. Nehmen wir aus der ersten Reihe

$$F = \left(\frac{S_{\frac{1}{p}}}{n}\right)^p = \left(\frac{\sqrt[p]{x_1} + \sqrt[p]{x_2} + \ldots + \sqrt[p]{x_n}}{n}\right)^p \text{ und setzen}$$

$$\Phi = \left(\frac{S_{\frac{1}{p-1}}}{n}\right)^{p-1} = \left(\frac{\sqrt[p-1]{x_1} + \sqrt[p-1]{x_2} + \ldots + \sqrt[p-1]{x_n}}{n}\right)^{p-1} = a,$$

so ist die Summe der ersten beiden Glieder im Zähler von F, falls alle x gleich a sind, $2\sqrt[p]{a}$, im Zähler von Φ: $2\sqrt[p-1]{a}$. Letzteres muss konstant bleiben, auch wenn wir $x_1 = 0$ setzen und $x_3, \ldots x_n$ festhalten; es wird $\sqrt[p-1]{x_2} = 2\sqrt[p-1]{a}$ oder $x_2 = 2^{p-1} . a$. Durch Einsetzen dieser Werte in F wird die Summe der ersten beiden Glieder $\sqrt[p]{2^{p-1}} . \sqrt[p]{a}$, also kleiner als vorher und es ist daher

$$\left(\frac{S_{\frac{1}{p}}}{n}\right)^p < \left(\frac{S_{\frac{1}{p-1}}}{n}\right)^{p-1}.$$

Dass das geometrische Mittel am unteren Ende stehen muss, ergiebt sich daraus, dass es für $x_1 = 0$ gleich Null wird, was bei den übrigen Mitteln der Reihe nicht der Fall ist.

Der Beweis für die Ungleichungen (2) ist ganz dem vorigen entsprechend.

Aus der Reihe (3) wählen wir die beliebigen Mittel

$$F = \sqrt[p]{\frac{C_p}{(n)_p}} \text{ und } \Phi = \sqrt[p-1]{\frac{C_{p-1}}{(n)_{p-1}}} = a.$$

Die Anzahl der Glieder, welche x_1 und x_2 enthalten, ist

in F $(n-1)_{p-1} + (n-2)_{p-1}$

in Φ $(n-1)_{p-2} + (n-2)_{p-2}$

Die Summe dieser Glieder für $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = a$ erhalten wir, wenn wir die Anzahl in F mit a^p, in Φ mit a^{p-1} multiplizieren. In Φ muss diese Summe konstant bleiben. Lassen wir unter Festhaltung von $x_3, \ldots x_n$ die Grösse x_1 null werden, so wird

$$x_2 = \frac{(n-1)_{p-2} + (n-2)_{p-2}}{(n-2)_{p-2}} . a.$$

Setzen wir diese Werte in F ein, so wird die Summe der Glieder, in denen x_1 und x_2 vorkommt,

$$(n-2)_{p-1} . \frac{(n-1)_{p-2} + (n-2)_{p-2}}{(n-2)_{p-2}} . a^p$$

$$= \left[\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-p+2)(n-p)}{1 . 2 \ldots (p-2)(p-1)} + \frac{(n-2)(n-3)\ldots(n-p+1)(n-p)}{1 . 2 \ldots (p-2)(p-1)}\right] . a^p$$

$$= \left[(n-1)_{p-1} . \frac{n-p}{n-p+1} + (n-2)_{p-1}\right] . a^p$$

Dieser Wert ist kleiner als der entsprechende vorher, mithin

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\sqrt[p]{\frac{C_p}{(n)_p}} < \sqrt[p-1]{\frac{C_{p-1}}{(n)_{p-1}}}.$$

Man könnte auch versuchen, die Glieder der Reihe (3) mit denen von (1) zu vergleichen.

Ausdehnung der Untersuchung über grösste und kleinste Werte von 2 auf n Variable.

8. Wenn man in einer elementaren Aufgabe über grösste und kleinste Werte einer Funktion von mehreren Veränderlichen Bedingungsgleichungen für die einzelnen Variablen unter der Annahme abgeleitet hat, dass einstweilen die übrigen Variablen konstant seien, so pflegt man ohne weiteres diese Gleichungen als simultane anzusehen und sie für die Unbekannten aufzulösen. So geschah es z. B. bei der Aufgabe in den Vorbemerkungen. Man kann Bedenken über die Berechtigung dieses Verfahrens hegen, die wir hier nicht unberücksichtigt lassen dürfen, weil dieser Gedankengang auch beim Beweise des Satzes in (1) eingeschlagen wurde. In der That findet man die fraglichen Aufgaben verschieden behandelt.

Im 16. und 17. Bande von Hoffmanns Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht sind mehrere Aufgaben gelöst, die, etwas anders ausgedrückt, ohngefähr so lauten: Den grössten oder kleinsten Wert von $F = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma$ zu finden, wenn α, β, γ drei positive Winkel sind, deren Summe konstant $= \sigma \lesseqgtr 90^0$ ist. Zum Teil beginnen die Lösungen damit, dass ein Winkel festgehalten und untersucht wird, welche Werte die andern beiden Winkel annehmen müssen, damit die Funktion ihr Maximum oder Minimum erreicht. Es zeigt sich, dass letzteres der Fall ist, wenn die beiden Winkel gleich werden. Während nun in einigen Lösungen hieraus sofort geschlossen wird[1]), dass, wenn alle Winkel veränderlich sind, dieselben alle drei gleich werden müssen, um das Minimum herbeizuführen, meinen andere, hierfür einen besonderen Beweis erbringen zu müssen[2]).

Die Bedenken, die erhaltenen Gleichungen als simultane zu behandeln, kann man durch einen indirekten Beweis zu überwinden versuchen. Angenommen, die Funktion habe den extremen Wert erreicht. Genügt dann eine Veränderliche (wenn eine Nebenbedingung gegeben ist, so muss es natürlich heissen: genügen irgend zwei Veränderliche) der für sie gefundenen Gleichung nicht, so kann man den aus dieser Gleichung folgenden Wert von ihr in die Funktion einsetzen, wodurch letztere grösser bez. kleiner werden muss, was der Voraussetzung widerspricht. Aber auch bei dieser Überlegung zieht man die Veränderung von nur einer bez. zwei Grössen in Betracht; sie ist, was auch durch die gemachte Annahme deutlich hervortritt, nur giltig, wenn die Funktion ihrer Natur nach überhaupt einen extremen Wert haben muss, auch wenn keine der Variablen festgehalten wird.

Zu demselben Ergebnis kommt man durch Vergleichung mit dem Verfahren der Differentialrechnung. Dort macht man, wenn man die Bedingungen für das Maximum oder Minimum von $F(x_1, \ldots x_n)$ ableiten will, die Funktion von einer einzigen veränderlichen Grösse abhängig, setzt den Differentialquotienten in Bezug auf diese gleich Null und erhält eine Gleichung, in der die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial F}{\partial x_n}$ mit ganz willkürlichen Faktoren behaftet sind, so dass die Gleichung nur bestehen kann, wenn die Differentialquotienten einzeln gleich Null sind. Man erhält also dieselben Gleichungen, welche man auch gefunden hätte, wenn man nur je eine

1) Hoffm. Zeitschr. 16 (1885) S. 591 Aufg. 502, 1. u. 2. Bew., 17 (1886) S. 590 Aufg. 588, 2. Bew.
2) 16. Bd. S. 197 Aufg. 431, 4. Bew., auch 17. Bd. S. 590 Aufg. 588, 1. Bew.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

der Variablen als veränderlich, die übrigen als konstant betrachtet hätte. Nach Aufstellung dieser Gleichungen hat man sich aber in irgend einer Weise zu vergewissern, ob überhaupt ein Kulminationswert vorhanden ist. Denn dass die zweiten partiellen Differentialquotienten dasselbe Vorzeichen haben, d. h. dass bei Veränderlichkeit nur je einer Variablen lauter Maxima oder lauter Minima bestehen, genügt bekanntlich (trotz Euler) nicht.

Aus vorstehendem ergiebt sich, dass man in elementaren Aufgaben über grösste und kleinste Werte, unter anderem in dem Beweise des Lehrsatzes in (1), die notwendigen Gleichungen aufstellen wird, indem man alle Variablen ausser einer festhält; in jedem besonderen Falle aber hat man zu fragen, ob die Funktion überhaupt eines extremen Wertes fähig ist. — Sicher ist kein solcher vorhanden, wenn sich für die einzelnen Variablen keiner ergiebt. Von der letzten Bemerkung wurde in (3) Anwendung gemacht.

Der Unsicherheit, welche einer Bestimmung des äussersten Wertes einer Funktion anhaften kann, wenn man nicht die höheren Differentialquotienten untersucht, unterliegt die Vergleichung zweier Ausdrücke durch Umformung von Ungleichungen nicht. Darum wurde oben (7) die Bemerkung gemacht, dass derartige Beweise, auch wenn sie länger sind, ihre Bedeutung behalten werden.

9. Erwägungen, wie sie hier über die elementar-analytische Aufsuchung von grössten und kleinsten Werten angestellt worden sind, haben bei der geometrischen Lösung entsprechender Aufgaben vielfach stattgefunden. Wir wollen dieselben durch einen kurzen Bericht den obigen gegenüberstellen.

Unter den isoperimetrischen Aufgaben ist gewöhnlich eine der ersten die, zu beweisen, dass unter allen möglichen Dreiecken über derselben Grundlinie und von gleichem Umfange das gleichschenklige den grössten Inhalt hat. Auf diesen Satz gestützt, leitet man den andern: unter allen Dreiecken von gleichem Umfange hat das gleichseitige den grössten Inhalt, öfters in folgender Weise ab: „Dasjenige Dreieck, welches bei gegebenem Umfange den möglichst grössten Inhalt haben soll, muss über jeder Seite, als Grundlinie angesehen, gleichschenklig sein, daher müssen je zwei Seiten, und folglich alle drei Seiten einander gleich sein.“[1])

Wenn man diesen Beweis gelesen hat, so ist man durch ihn nicht überzeugt; aber man schämt sich gewissermassen es zu sagen, weil es ganz klar ist, dass der Satz gar nicht falsch sein kann. Will man das, was der Beweis verlangt, wirklich ausführen, so stösst man auf Schwierigkeiten. Denn wenn man unter Beibehaltung des Gesamtumfanges die erste und zweite Seite einander gleich werden lässt, hierauf die zweite und dritte, so wird durch die letztere Verrichtung die zweite Seite wieder geändert und es ist nicht ohne weiteres klar, dass man sich bei Fortsetzung des Verfahrens mehr und mehr dem gleichseitigen Dreieck nähert.

Durch einen indirekten Beweis, wie er oben (8) bei der Frage nach dem extremen Wert einer Funktion erwähnt wurde, kann man sich Gewissheit verschaffen, da das Dreieck nicht beliebig gross werden kann. Wenn auch nicht in diesem, so doch in vielen Fällen muss man allerdings mit solchen Beweisen, in denen man nur ein bez. zwei unabhängige Elemente einer Veränderung unterwirft, sehr vorsichtig sein, gerade wie bei der analytischen Bestimmung eines Maximums; man hat sicherzustellen, dass die betrachtete Grösse bei Veränderlichkeit aller Variablen einen extremen Wert erreichen kann. Rudolf Sturm hat dafür ein einfaches Beispiel beigebracht; es wird genügen, dasselbe auf ein gleichseitiges Dreieck anzuwenden.[2])

1) Steiners gesammelte Werke. II. S. 185.
2) Crelles Journal f. Math. 96 (1884) S 75.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Um ein gleichseitiges Dreieck A sei ein anderes B beschrieben, dessen Seiten die Aussenwinkel von A halbieren, mithin zu den Seiten desselben parallel sind. Dreht man nun eine Seite von B um den auf ihr liegenden Eckpunkt von A in der einen oder andern Richtung, so wird beide Male der Umfang von B grösser und man könnte meinen, das Dreieck B habe den kleinsten Umfang von allen um A beschriebenen Dreiecken, wenn seine Seiten parallel zu denen von A sind. Dreht man aber alle drei Seiten von B um die betreffenden Ecken in derselben Richtung um gleiche Winkel, so wird, wie man leicht beweisen kann, der Umfang kleiner und am kleinsten dann, wenn die Seiten von B mit denen von A zusammenfallen.

Auch die Rechnung könnte übrigens zu einem falschen Schluss verleiten. Führt man die Winkel, welche die Seiten von B mit den entsprechend anstossenden von A bilden, als unabhängige Variable ein und berechnet den Umfang von B, so sind die ersten Differentialquotienten gleich Null, wenn jeder der drei Winkel gleich 60^0 ist. Trotzdem findet dann keine Kulmination statt.

Steiner ist selbst von obigem Beweis für die Gleichheit der Seiten in dem grössten der isoperimetrischen Dreiecke nicht befriedigt, weil, wenn ein gleichseitiges und ein beliebiges ungleichseitiges Dreieck von gleichem Umfange gegeben seien, durch denselben nicht direkt gezeigt werden könne, dass ersteres in der That grösseren Inhalt habe als das andere.

Schon Lhuilier hatte sich, wie Steiner anmerkt, in der Weise zu helfen gesucht, dass er die Veränderungen verfolgte, welche bei der fortdauernden Gleichsetzung von je zwei Seiten die einzelnen Seiten erleiden, und zeigte, dass dieselben durch unendlich viele Wiederholungen des Verfahrens einer gemeinsamen Grenze zustreben.

Auch durch diese asymptotische Annäherung an die grösste Figur fühlt sich Steiner noch nicht befriedigt und giebt deshalb einen Beweis, in welchem er durch Vermittelung zweier Zwischendreiecke vom beliebigen zum gleichseitigen Dreieck aufsteigt. Die Ungleichförmigkeit, welche dadurch zwischen den Beweisen der entsprechenden Sätze für das Dreieck und für das Vieleck entstanden war,[1]) hat neuerdings Sturm aufgehoben, indem er durch eine endliche Zahl von Verwandlungen, von denen jede den Inhalt eines beliebigen Vielecks im Kreise vergrössert, zum regelmässigen Vieleck gelangt.[2])

10. Stellen wir die geometrischen Beweise den analytischen gegenüber, so entspricht der Übergang von einem beliebigen Dreieck zum gleichschenkligen und dann ohne weitere Untersuchung zum gleichseitigen Dreieck und Sehnenvieleck der Bestimmung des Maximums oder Minimums einer Funktion durch Festhaltung aller Veränderlichen ausser einer und Zusammenstellung von n so erhaltenen Gleichungen zu einem System; der Übergang von einer Fläche zur grössten Fläche derselben Art durch eine endliche Anzahl von Verwandlungen entspricht der Vergleichung einer Funktion mit ihrem äussersten Werte durch Umformung von Ungleichungen. Auch das Verfahren, sich nach Lhuiliers Gedankengang eine unendlich grosse Anzahl von Verwandlungen ausgeführt zu denken, wenn die Summe der Veränderlichen konstant ist, wendet man zur Aufsuchung von äussersten Werten an;[3]) und zwar kann man nicht sagen, dass dies in der Analysis etwas Unbefriedigendes hätte. Man hat auch dann die Möglichkeit diesen Weg einzuschlagen, wenn die Zahl der Veränderlichen, deren Summe konstant sein soll, beliebig gross ist, während in dem Falle, welchen Steiner anführt, ihre Zahl nur drei beträgt.

1) Baltzer, Elemente der Math. Planimetrie § 15, 3 und 8.
2) Crelles Journal. 96 S. 47.
3) Z. B. W. Fuhrmann, Hoffm. Ztschr. 17 (1886) S. 590 Aufg. 588, 1. Beweis.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Eine Funktion der positiven Grössen $x_1, \ldots x_n$, deren Summe konstant ist, habe die Eigenschaft, dass sie, wenn nur irgend zwei der x veränderlich sind, die übrigen festgehalten werden, bei Gleichheit der beiden veränderlichen x ein Maximum wird (im Falle des Minimums ist die Betrachtung genau dieselbe). Für beliebige, aber bestimmte Werte der Variablen habe die Funktion den Wert F. Lassen wir zwei der Veränderlichen, z. B. x_1 und x_2, gleich werden und zwar, da sie konstante Summe behalten müssen, gleich $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, so gehe F über in G, so dass $G > F$. Der Unterschied zwischen einer dritten Grösse x_3 und dem gemeinsamen Werte der ersten beiden Grössen sei d. Machen wir jetzt die zweite der Variablen gleich der dritten, also beide gleich dem arithmetischen Mittel aus $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ und x_3, so geht die Funktion über in G_1, so dass $G_1 > G$, und der gemeinsame Wert der zweiten und dritten Veränderlichen unterscheidet sich von dem der ersten nur noch um $\frac{1}{2}$ d. Nunmehr nehmen wir wieder das arithmetische Mittel aus den Werten der ersten und zweiten Veränderlichen und fahren so fort; die Funktion erhält dadurch nach und nach die Werte $G, G_1, G_2, \ldots$, von denen jeder folgende grösser als der vorhergehende ist, während der Unterschied zwischen den Werten der Veränderlichen $(d, \frac{1}{2} d, \frac{1}{4} d, \frac{1}{8} d, \ldots)$ bei jeder der Umwandlungen halbiert wird und also die Null zur Grenze hat, so dass die Funktion ihr Maximum erreicht, wenn die drei Veränderlichen gleich geworden sind.

Dieser Maximalwert, welchen die Funktion für $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$ annimmt, sei H. Der Unterschied zwischen x_4 und $\frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$ werde mit e bezeichnet. Dadurch, dass man die zweite, dritte und vierte Veränderliche gleich dem arithmetischen Mittel ihrer Werte setzt, werde die Funktion gleich H_1. Dies ist infolge der obigen Auseinandersetzungen, welche für je drei der Variablen angestellt werden können, grösser als H und der Unterschied zwischen dem arithmetischen Mittel und der ersten Veränderlichen ist nur noch $\frac{1}{3}$ e. Wiederum vergrössert bis zu H_2 wird die Funktion, wenn wir das arithmetische Mittel aus der ersten, zweiten und dritten Variablen nehmen, wodurch der Unterschied zwischen der vierten Variablen und dem gemeinsamen Werte der drei anderen auf $\frac{1}{9}$ e herabsinkt. Bei jeder neuen Umwandlung wird die Funktion grösser und der Unterschied der Veränderlichen sinkt auf $\frac{1}{3}$ des vorigen, so dass für $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ das Maximum erreicht wird.

Dieses Ergebnis kann man wieder benutzen, um eine fünfte, sechste Veränderliche in den Kreis der Betrachtung zu ziehen. Hat man gezeigt, dass die Funktion ein Maximum ist, wenn je p Veränderliche einander gleich sind, so kann der Satz in obiger Weise für je $p + 1$ Variable bewiesen werden; er gilt also auch für alle n Variable.

Schreibt man die auf einander folgenden Werte der Veränderlichen, wenn man z. B. vier derselben in Rechnung zieht, hin, so erhält man, falls $\frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) = m$ gesetzt wird, die Reihe $m, m + \frac{e}{3}, m + \frac{e}{3} - \frac{e}{9}, m + \frac{e}{3} - \frac{e}{9} + \frac{e}{27}, \ldots$ Da $e = x_4 - m$, so streben die Glieder in der That der Grenze $m + \frac{e}{4} = \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$ zu.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dieselben Überlegungen gelten auch, wenn statt der Summe das Produkt der Veränderlichen konstant ist. Die Funktion F der n positiven Grössen $x_1, \ldots x_n$ soll wieder die Eigenschaft haben, dass sie, wenn alle x ausser zweien festgehalten werden, bei Gleichheit der beiden letzteren ein Maximum ist. Wir setzen die beiden Veränderlichen wegen des konstanten Produkts $= \sqrt{x_1 \cdot x_2}$ und bezeichnen das Verhältnis von x_3 zu dieser Grösse mit f. Lassen wir die zweite und dritte Variable in ihr geometrisches Mittel übergehen, so ist das Verhältnis desselben zur ersten Variablen $\sqrt{f}$, hat sich also der Einheit genähert, während die Funktion grösser geworden ist. Nunmehr nehmen wir das geometrische Mittel aus der ersten und zweiten Veränderlichen; das Verhältnis der dritten zu diesem geometrischen Mittel ist $\sqrt[4]{f}$. Der Wurzelexponent des Verhältnisses wächst mehr und mehr, dieses selbst hat die Einheit zur Grenze und dabei wird der Wert der Funktion immer grösser; sie erreicht also ein Maximum für $x_1 = x_2 = x_3 = \sqrt[3]{x_1\ x_2\ x_3}$.

Es habe x_4 zu diesem gemeinsamen Werte von x_1, x_2, x_3 das Verhältnis g. Setzen wir die zweite, dritte und vierte Veränderliche gleich ihrem geometrischen Mittel, so muss nach dem, was vorher bewiesen worden ist, die Funktion immer wieder grösser werden; das geometrische Mittel hat aber zur ersten Veränderlichen das Verhältnis $\sqrt[3]{g}$. Durch Fortsetzung dieser Umwandlungen wird das Verhältnis $\sqrt[9]{g}, \sqrt[27]{g} \ldots$, es hat also wiederum die Einheit zur Grenze. Mittels des Schlusses von n auf n + 1 kann man zu beliebig vielen Variablen fortschreiten.

Schreibt man die auf einander folgenden Werte der Veränderlichen, wenn man z. B. vier derselben in Rechnung zieht, hin, so erhält man, falls $\sqrt[3]{x_1\ x_2\ x_3} = m$ gesetzt wird, die Reihe

$$m,\ m\sqrt[3]{g},\ m\sqrt[3]{g}\sqrt[-9]{g},\ m\sqrt[3]{g}\sqrt[-9]{g}\sqrt[27]{g}, \ldots$$

Die Glieder müssen $\sqrt[4]{x_1\ x_2\ x_3\ x_4}$ zur Grenze haben. Dies ist in der That der Fall. Denn da $g = \frac{x_4}{m}$, so wird $m\, g^{\frac{1}{3}} \cdot g^{\frac{-1}{9}} \cdot g^{\frac{1}{27}} \ldots = m\sqrt[4]{g} = \sqrt[4]{x_1\ x_2\ x_3\ x_4}$.

Nebenbei sei folgendes bemerkt. Allgemein ist $\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} - \ldots$, also

$$\sqrt[n+1]{a} = \frac{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n^3]{a} \ldots}{\sqrt[n^2]{a} \cdot \sqrt[n^4]{a} \ldots}$$

Man kann mithin die $(n+1)^{\text{te}}$ Wurzel durch Ausziehen von n^{ten} Wurzeln berechnen. Der erhaltene Wert wird (wenn $a > 1$) zu gross oder zu klein, je nachdem man mit einem Faktor des Zählers oder Nenners aufhört. Für $\sqrt[3]{2}$ erhält man, wenn man auf die Einschliessung in Grenzen verzichtet, bis auf vier Decimalen genau

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[16]{2} \ldots = 1{,}18921 \cdot 1{,}04427 \cdot 1{,}01089 \cdot 1{,}00271 \cdot 1{,}00068 \cdot 1{,}00017 \cdot 1{,}00004 \cdot 1{,}00001$$
$$= 1{,}2599.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Der im ersten Abschnitt entwickelte Satz, dessen Aufstellung die Veranlassung zu den Erörterungen der übrigen Abschnitte war, reicht zur vollständigen Untersuchung der Maxima und Minima einer symmetrischen Funktion mit symmetrischer Nebenbedingung im allgemeinen nicht aus; in vielen Fällen aber wird man durch ihn schon das erfahren, was man zu wissen nötig hat und ohne ihn nur durch umständlichere Rechnung feststellen könnte.

II. Betrachtungen über die Determination.

Wiederholt ist darauf hingewiesen worden, dass das Rechnen mit Ungleichungen einen ungemein wertvollen Stoff für den mathematischen Unterricht bilde. Ich erinnere nur an eine Abhandlung des Herrn Professor Erler,[1]) in welcher derselbe die Sätze, welche beim Umformen von Ungleichungen zu beachten sind, zusammenstellt und beweist, und an die Untersuchungen, welche Herr Geh. Rat Schlömilch,[2]) um zur öfteren Verwertung der Ungleichungen im mathematischen Unterricht anzuregen, über die Bedingungen anstellt, unter welchen sich aus gewissen im Dreieck vorkommenden Strecken neue Dreiecke bilden lassen, welche jene Strecken zu Seiten haben.

Am meisten Veranlassung zur Behandlung von Ungleichungen bietet die Diskussion der Lösungen von geometrischen und trigonometrischen Aufgaben. Dieselbe vorzunehmen würde sich also um der auftretenden Ungleichungen willen empfehlen, wenn es nicht schon deshalb geboten wäre, weil erst durch die Determination die Aufgabe ihren vollständigen Abschluss erreicht.

Damit will ich aber nicht die Meinung ausgesprochen haben, dass jede Aufgabe mit einer Determination zu versehen sei. Ein Übermass in dieser Beziehung würde dem Schüler lästig werden und so viel Zeit in Anspruch nehmen, dass die Zahl der gelösten Aufgaben zu gering ausfallen würde. Auch ist bei manchen Aufgaben die Aufstellung der Determination sehr mühsam, es sind viele einzelne Fälle zu unterscheiden und es ist schwer zu übersehen, ob man nicht noch einen vergessen hat, das Ergebnis der Untersuchung lässt sich nicht kurz zusammenfassen, befriedigt daher nicht, oder seine Entwickelung übersteigt die Kräfte des Schülers.

Wenn man aber in den geeigneten Fällen gleich bei der Aufgabenstellung anmerkt, ob und (falls es nötig ist) inwieweit die Determination geliefert werden soll, so ist der Nutzen derselben unverkennbar. Ich will hier nicht die viel erörterte Frage von neuem aufwerfen, ob der geometrische oder analytische Weg bei Lösungen von trigonometrischen Aufgaben vorzuziehen sei; nur bemerken will ich, dass es jedenfalls lehrreich ist, Aufgaben sowohl durch rein geometrische Konstruktion als auch durch Rechnung, die möglichst unabhängig von der Konstruktion durchgeführt wird, lösen zu lassen. Je verschiedener dann die Bedingungen zunächst aussehen, welche sich für die gegebenen Stücke aus den beiden Auflösungen ergeben, desto mehr Befriedigung erweckt es, wenn nach gehöriger Reduktion vollkommene Übereinstimmung stattfindet.

1) Ungleichungen, Hoffmanns Zeitschr. 9 (1878) S. 261 und S. 341.

2) Notiz über Ungleichungen, Zeitschr. für Math. und Phys. 30 (1885) S. 351. Über Ungleichungen und deren geometr. Anwendungen, Hoffm. Zeitschr. 17 (1886) S. 1.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf