Die Trigonometrie
in ihrem organischen Zusammenhange mit der Aehnlichkeit der Figuren.

Wenn es wahr ist, daß jede Erkenntniß ihre Methode in sich selbst hat, durch deren Anwendung sie sich zur Wissenschaft erhebt und gründlich gewonnen wird, so muß die Regsamkeit, welche sich seit Jahrzehnten auf dem Gebiete der Mathematik für die Methode zeigt, von großem Nutzen für dieselbe sein, da sie vorzugsweise auf die Erforschung des organischen Verbandes der im Laufe der letzten Jahrhunderte angehäuften Massen gerichtet ist. Zugleich wäre hiermit der Streit derer abgewiesen, welche einseitig auf Wissenschaftlichkeit pochen, während andere sich mit Methodik brüsten. Jenen besteht die Wissenschaftlichkeit in leeren Abstractionen und diese meinen mit einem Mundrechtmachen das hohe Ziel erreicht zu haben. Die wahre Lehrmethode einer Wissenschaft kann von Wissenschaftlichkeit nicht entfernt sein, sie wird sich vielmehr um so enger und inniger an sie anschließen müssen, wenn der Schüler zum Auffinden der Wahrheit angeleitet werden, sie aber nicht als etwas Angelerntes aufnehmen soll. Der hierbei so oft vernachlässigte Hauptpunkt möchte wohl der sein: Erkennen ist nicht möglich ohne Können! Jede Wissenschaft geht Hand in Hand mit einer Kunst und die Lehrmethode kann nur in der richtigen Verbindung der Kunst und Wissenschaft bestehen. Wohl nicht mit Unrecht verlangt sogar ein auf dem Gebiete der Naturwissenschaften ausgezeichneter Mann, die Kunst müsse der Wissenschaft vorangehen, wenn diese Früchte bringen solle.

Nur das hat der Schüler erkannt, was er darzustellen vermag. Diesen Grundsatz findet man beim Unterrichte in den verschiedensten Wissenschaften angewandt, und gerade da am wenigsten, wo er am leichtesten und zweckmäßigsten anzuwenden wäre, in der Geometrie, während er im zweiten Theile der Mathematik oft zur Ungebühr gebraucht zu todtem Mechanismus und Formalismus führt. Wenn im Gegensatz hierzu in einem der neusten Werke, das sich durch die Behandlung des Stoffes sonst rühmlichst auszeichnet, die wahre Bildung des Geistes und der Nutzen für die Geistesthätigkeit nur in dem erkennenden Theile der Geometrie mit gänzlicher Hintansetzung der Kunst gesucht wird, so mag dies wohl seinen Grund darin haben, daß die Bedeutung der geometrischen Kunst nicht genug hervorgehoben wird. Nicht die mit Tinte oder Blei nach Cirkel oder

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Lineal gezeichneten Striche sind die wahren Constructionen, sondern die geistige Verbindung der Linien, welche den materiellen Darstellungen zum Grunde liegt, und ich glaube mich überzeugt zu haben, daß eine gut gezeichnete Figur als ein treues Bild derselben von großem Nutzen für die Erkenntniß ist. An Körpern nehmen wir ja zuerst die Formen wahr, wenn auch nicht in geistiger Reinheit. Deshalb gehen wir von ihnen aus. An ihnen mag sich der Schüler üben, er mag sich gewöhnen die Form allein zu betrachten und den Stoff als Nebensache davon zu trennen; dann wird er an diese Anschauung anschließend leicht seine Vorstellung der Raumformen gewinnen. Man zeige dem noch an der Außenwelt Hangenden, welche Bedeutsamkeit die ersten und einfachsten Sätze der Geometrie für jene haben, wie z. B. die Deckung überall auf die Form angewandt wird, wo tiefere mathematische Kenntnisse fehlen, und die so oft geäußerte Furcht, daß die Grundlagen der Wissenschaft als triviale, allbekannte Sätze dem Schüler bedeutungslos erschienen und deshalb von ihm vernachlässigt würden, wird sich ungegründet erweisen; denn es muß ihm einleuchten, daß ein Satz, der in der Anwendung eine so hohe Bedeutung hat, wohl die Grundlage einer Wissenschaft bilden kann, die sich auf jeglichen Stoff erstreckt.

In einem wissenschaftlichen Gange, welcher sich der Forderung gemäß entwickeln soll, daß die Kunst mit der Wissenschaft gleichen Schritt halte, müßte jedem Lehrsatze auch eine Aufgabe entsprechen, die an der Stelle des Systems gelöset werden kann, wo der Lehrsatz vorkommt. Da treten uns aber bei der gewöhnlichen Anordnung sogleich die Sätze von den Winkeln in den Weg, indem man behauptet, diese müßten folgerecht den Uebergang von den geraden Linien zu den Figuren machen. Ist dies wirklich gegründet im wissenschaftlichen Fortschritte? Sehen wir einmal, wie man zu diesem Gange kommt. — Nachdem bei der Darlegung der Raumformen zuerst die Bemerkung sich herausstellt, daß nur Begrenztes erfaßt werden kann, kommt man vom Körper zur Fläche, dann zur Linie, endlich zum Punkte. Zugleich findet man dabei, daß die krummen Flächen nicht ohne Körper, sowie die krummen Linien nicht ohne Flächen und viele selbst nicht ohne Körper erkannt werden können. Beim Aufbauen des Systems glaubt man nun von einer geraden Linie zur Neigung zweier übergehen zu müssen. Wie findet sich dieser Uebergang in der eben bemerkten Darlegung? Ist es möglich nur zwei gerade Linien zu denken? Sie müßten unendlich sein; denn zwischen den Endpunkten zweier begrenzten, selbst wenn sie von einem Punkte ausgehen, ist ja immer eine dritte gegeben. Der dabei bestehende Irrthum hat jedenfalls nur darin seinen Grund, daß man mit der materiellen Construction auch die geistige verwarf. Der obigen Darstellung gemäß geht man von einem Punkte aus; zwei geben die gerade Linie, drei die Ebene, das Dreieck, den Kreis, und endlich vier Punkte den Körper.

Der Satz, welcher jeglicher geometrischen Betrachtung zum Grunde liegt, ist, wie schon erwähnt, der von der Deckung. Davon ausgehend erlaubt die Longiometrie nur die Rechnungsoperationen mit Linien, welche dazu der beste und zweckmäßigste Stoff sind, indem an ihnen namentlich auch die Division so einfach auf die Subtraction sich gründet,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wie die Multiplication auf die Addition. Ebenso muß die Planimetrie mit der Deckung der Figuren beginnen und die auf der einfachen Drehung der geraden Linie beruhenden Eigenschaften des Kreises*) werden hier an der Spitze stehen, da sie für die Erkenntniß aller geradlinigen Figuren nöthig sind. Dann erst erkennen wir Seiten und Winkel als Bestandtheile der geradlinigen Figuren und mit Hülfe der Deckung zeigen wir in wie weit überhaupt ein Zusammenhang zwischen ihnen stattfindet. Dies sind die Gleichähnlichkeitssätze und die darauf gegründeten Eigenschaften der Dreiecke, aus denen sich die entsprechenden Sätze über die mehrseitigen Figuren ergeben. Um zu bestimmen, welcher Art jener Zusammenhang sei, muß man zu den Verhältnissen übergehen, welche zwischen den Bestandtheilen der Figuren stattfinden und den Uebergang dazu macht die Betrachtung der Parallelen von selbst.

Es schließt sich also das Capitel von der Aehnlichkeit der Figuren an das von der Gleichähnlichkeit an, worauf auch die zweite besondere Eigenschaft, die Gleichheit, im dritten und letzten Capitel der Planimetrie folgen müßte, insofern sie sich nur mit den geradlinigen Figuren beschäftigt.

In der Stereometrie würde man dem Kreise entsprechend die Kugel an die Spitze stellen können, was auch geschieht, wenn man das sphärische Dreieck statt der Ecke betrachtet. Wollte man aber ausgehen von den vier Punkten, so würde folgerecht die Betrachtung mit der dreiseitigen Pyramide beginnen und an diese anschließend zuerst diejenigen Eigenschaften der Körper in Bezug auf Ecken, Kanten und Seiten aufzusuchen haben, welche dem einen planimetrischen Satze entsprechen, daß die Seitenzahl gleich der Winkelzahl ist, ehe man zu den Beziehungen übergeht, welche zwischen den Winkeln (Neigungs-) und Seiten der Ecke stattfinden, wobei die beschreibende (graphische) Darstellung der Körper neben der gewöhnlichen perspektivischen zu einer richtigen und wahren Erkenntniß unumgänglich nothwendig sein möchte, indem nur dadurch die Körper gebildet werden können.

Während aber die Gleichähnlichkeit, auf die Anschauung gestützt, zugleich die

---

*) Anmerk. Bei der Beziehung, in welcher der Kreis als erste Figur zu den geradlinigen Figuren steht, ist zu erwarten, daß die Sätze über diese bei jenem wiederkehren und so finden wir sie auch in der That in der sogenannten Lehre vom Kreise nur unter anderen Namen in leichteren, oft in bestimmteren Formen wieder. Ich erinnere an die Sätze über Summe und Unterschied zweier Seiten eines Dreiecks; sowie an die über die mittlere Proportionale, wo man die anderen Darstellungen, welche die Aehnlichkeit der Dreiecke darbot, ganz vernachlässigte. Die andere Beziehung des Kreises, als der einfachsten krummlinigen Figur, welche die Lehre von diesen eröffnen soll, findet sich da, wo es nöthig wäre, bei Radien, Sehnen und Tangenten kaum bemerkt und doch hat nur darin die Stellung dieser Lehre nach der von den geradlinigen Figuren ihren Sinn, während sie nach der jetzigen Behandlungsweise eben so gut voranstehen könnte, indem die Darstellung der geradlinigen Figuren sich ganz auf die Länge der Linie, also auf den Kreis, gründen läßt, während es umgekehrt nicht einmal gelungen ist die geradlinigen Figuren und noch vielweniger den Kreis auf die Richtung, also die gerade Linie, allein zu stützen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Grundlage aller Construction bildet, führt uns die Aehnlichkeit mit ihren Verhältnissen auf das rechnende Gebiet, welches die Geometrie neben der Construction bebauen muß. Sie verzweigt sich und man verfolgt zunächst nur den constructiven Theil, während der rechnende bei Seite gelegt wird. Dies kann aber so wenig ein wissenschaftlicher Mangel sein, als daß man überhaupt die Geometrie und Arithmetik getrennt hat. Es wird diese rechnende Geometrie (Trigonometrie im weitesten Sinne des Wortes) erst dann mit Erfolg weiter getrieben werden, wenn der Schüler die nöthige Ausbildung in der Arithmetik erhalten hat, welche nebst der gehörigen Festigkeit in der constructiven Geometrie dazu unentbehrlich ist. Da übrigens die Trigonometrie keinen unmittelbaren Einfluß auf den Gang des constructiven Theiles haben kann, so wird es ihr auch nicht zum Vorwurf gereichen, daß sie die Erleichterung benutzt, welche die Lehre vom Kreise der Planimetrie verschafft. Aber gegründeter möchte wohl der Vorwurf sein, daß auf ihren wahren Ausgangspunkt zu flüchtig hingewiesen wird und jene Verbindung mit der Kreislehre sie als unzertrennlich davon erscheinen läßt.

Wie nun schon im Allgemeinen Manches über den Gang der Geometrie zu erinnern war, so findet sich die gerügte Zusammenhangslosigkeit im Einzelnen noch vielmehr. Wie eine Mosaikarbeit erscheint die Mathematik und jeder Satz ist, nicht als ein Kunstwerk, sondern als ein Kunststück hingestellt, das man auch nur durch einen Kunstgriff lösen kann. Gewiß ist es nicht das geringste Verdienst der neueren Zeit auf den organischen Zusammenhang der Sätze in der Mathematik zu dringen, und wenn darin ein durch seine tiefsinnigen Forschungen ausgezeichneter Mann ein glänzendes Beispiel aufgestellt hat, so zeigt sich auch dies Streben keineswegs vereinzelt, sondern im Drange der Zeit begründet, an den entferntesten Orten, an den verschiedensten Lehranstalten. Die Trigonometrie ist wohl der Theil der Mathematik, welcher durch die großartige Entwickelung der Analysis in den letzten Jahrhunderten die erheblichsten Fortschritte gemacht hat, wodurch einerseits die bewunderungswürdigen Resultate in der Geometrie sich zeigten, anderseits aber ihre Anwendung in der Algebra und Analysis selbst vom glänzensten Erfolge gekrönt wurde. Diese Verbindung hat ihre Darstellung schwierig gemacht. Denn so wenig ihre Reihenentwickelungen und ihr Zusammenhang mit den Exponentialgrößen in die engen Grenzen der Schulmathematik gehören, so kann doch verlangt werden, daß der Weg dazu in den Elementen gebahnt werde und ein weiteres Studium da anknüpfen kann, wo die Schule ihr Ziel erreicht hat. Ich will versuchen im Folgenden einen solchen Gang anzugeben, indem ich einiges weiter ausführe, anderes dagegen nur kurz berühre.

§. 1. Wie die Potenzen in ihrer einfachsten Gestalt als Produkte erscheinen, so haben wir die trigonometrischen Functionen als Seitenverhältnisse der geradlinigen Figuren aufzufassen. Die Elemente gehen also von der Aehnlichkeit der Figuren aus und die durch die Construction gegebenen Beziehungen müssen wohl beachtet werden, wobei sich zeigen wird, daß die ersten und einfachsten Constructionen zu den folgenreichsten Resultaten führen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Alle geradlinigen Figuren werden bei der Construction auf das Dreieck zurückgeführt, weil sie sich in Dreiecke zerlegen lassen und diese unmittelbar dargestellt werden, also die einfachsten Figuren sind. Diese Zurückführung genügt aber nicht in der Trigonometrie, weil von den zwei Seitenverhältnissen und zwei Winkeln beim Dreieck im Allgemeinen zwei willkürlich sind. Um diese Bestimmungen zu vereinfachen, müßte ein Seitenverhältniß oder ein Winkel beständig sein. Dabei zeigen sich als die einfachsten Fälle das gleichschenklige und das rechtwinklige Dreieck. Man wählte zuerst das gleichschenklige, weil sich dann die bei den Dreiecken nöthigen Winkel, nemlich bis zu zwei Rechten, an der Spitze desselben und somit am Mittelpunkte eines Kreises darstellen ließen, wo das Verhältniß der Sehne zum Radius das der Grundlinie zum Schenkel war; gewiß eine sehr passende Verbindung bei der Anwendung, welche die Trigonometrie vorzugsweise in der Astronomie fand. Doch auch später erhielt sich diese Annahme in einem überwiegenden Ansehen, obgleich ein wesentlicher Mangel für die Anwendung auf andere Figuren dabei der ist, daß die übrigen Dreiecke sich nicht ohne weiteres aus gleichschenkligen herstellen lassen, und es nur dadurch gelang die trigonometrischen Beziehungen zu finden, daß man ein Dreieck im Kreise darstellte, es also in drei gleichschenklige zerlegte, oder mehrere Kreise zu Hülfe nahm, um dieselbe Linie zu mehreren Radien in das Verhältniß der Functionen zu bringen. Wenn man später die halben Sehnen als sinus der halben Winkel einführte, stellte man auch nur die Functionen bis zu einem Rechten dar, und als man weiter ging, stieß man auf eine Schwierigkeit, welche einer besondern Erläuterung bedurfte und im Kreise durch die Lage der beiden zu einer Sehne gehörigen Peripheriewinkel gelöset werden mußte, so daß diese Methode eigentlich ihre Endschaft erreichte, sobald man von den Sehnen auf die sinus überging, wodurch sie von selbst auf das rechtwinklige Dreieck führte. Ganz anders stellt sich die Sache, wenn man dieses als Grunddreieck wählt. Hier wird zunächst die Bedingung der einfachsten geradlinigen Figur erfüllt, da sich jedes Dreieck in zwei rechtwinklige zerlegen läßt, welche eine gemeinschaftliche Kathete haben, wobei wir zugleich noch bemerken, daß in der Stereometrie zwei Neigungswinkel einer Ecke ebenfalls in zwei rechtwinkligen Dreiecken vorkommen, welche durch die Drehung um ihre gemeinschaftliche Kathete in eine Ebene gebracht ein beliebiges Dreieck bilden. Die sogenannte sphärische Trigonometrie unterscheidet sich also von der ebenen darin, daß wir es mit zwei Winkelsystemen zu thun haben, weil die Seiten des eben bemerkten Dreiecks, durch deren Verhältniß die Winkel bestimmt werden sollen, erst durch andere Winkel, die Seiten der Ecke, gegeben sind. Wir haben ferner im rechtwinkligen Dreiecke auch nur ein willkürliches Seitenverhältniß und einen willkürlichen Winkel, welche sich gegenseitig bestimmen. Wird nun dies Seitenverhältniß mit dem einen der spitzen Winkel zusammengestellt, so ergibt sich, daß zu einem bestimmten Winkel auch nur ein solches Verhältniß gehört und umgekehrt; indem für das rechtwinklige Dreieck der Aehnlichkeitssatz gilt, daß ein gegebenes Seitenverhältniß oder ein gegebener spitzer Winkel die Form bestimmen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 2. Außer dem willkürlichen Seitenverhältnisse kommen noch zwei davon abhängige vor und von jedem die Umkehrung, so daß wir für jeden Winkel sechs Verhältnisse erhalten, nemlich die Verhältnisse der Hypotenuse zur gegenüberliegenden Kathete, der anliegenden Kathete zur gegenüberliegenden, derselben zur Hypotenuse, und deren Umkehrungen. Ihres häufigen Gebrauches wegen hat man ihnen besondere Namen gegeben, die ihre Beziehungen zum Kreise ausdrücken. Von tangens und secans ist sie bekannt, weniger klar ist die geometrische Bedeutung des Wortes sinus *). Da die drei umgekehrten Verhältnisse in umgekehrter Ordnung in derselben Beziehung zum zweiten spitzen Winkel des Dreiecks stehen, wie die drei geraden zum ersten, so hat man ihnen dieselben Namen mit der Vorsylbe Co gegeben, um sogleich ihren Zusammenhang als Complemente anzudeuten. Die einfachen Bestimmungen, die sich hieraus nach Fig. 1. ergeben, sind:

I. $s\,A = \frac{a}{b} = \cos C.$	IV. $\cos A = \frac{c}{b} = s\,C.$
II. $tg\,A = \frac{a}{c} = cotg\,C.$	V. $cotg\,A = \frac{c}{a} = tg\,C.$
III. $\sec A = \frac{b}{c} = cosec\,C.$	VI. $cosec\,A = \frac{b}{a} = \sec C.$

Hierbei bedeuten die großen Buchstaben die an den gleichbenannten Spitzen liegenden Winkel, sowie die kleinen die ihnen gegenüberstehenden Seiten.

§. 3. Mit Rücksicht auf die angenommene Reihenfolge erhalten wir nun:

1) Die Produkte je zweier Functionen, die vom Anfange und Ende gleich weit abstehen, sind gleich Eins.
2) Die Produkte je zweier Ungeraden in combinatorischer Folge sind der Reihe nach die Geraden und umgekehrt.
3) Nach dem pythagorischen Lehrsatze ist

$$s\,A^2 + \cos A^2 = 1,$$

folglich auch $tg\,A^2 + 1 = \sec A^2$ und $cotg\,A^2 + 1 = cosec\,A^2$.

Diese Gleichungen geben uns die gegenseitigen Werthbestimmungen der Functionen, sowie sie uns im Allgemeinen zeigen, daß bei wachsenden Winkeln die drei erstern wachsen, die letzteren dagegen abnehmen.

---

*) Anm. Die so wahrscheinliche, aber wohl nicht wahre Hypothese über die Bedeutung dieses Wortes, für semissis inscriptae, hat ihren Grund darin, daß Al Batani, welcher die halbe Sehne als Function des halben Winkels einführte, keinen besonderen Namen dafür gebrauchte. Doch haben die späteren Araber einen Namen dafür, welcher der gewöhnlichen Bedeutung des Wortes sinus entspricht, dessen andere geometrische Bedeutung eben so wenig gebräuchlich ist, als die der Worte Nadir, Kardaga. Auch die Worte Grad, Minute u. s. w. wurden sonst nicht für die Theile der Peripherie, sondern des Radius gebraucht.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Noch hat man aus astronomischen Gründen zu diesen Verhältnissen zwei andere gefügt, nemlich

$$s \text{ versus } A = 1 - \cos A \text{ und } \cos \text{ versus } A = 1 - s\,A,$$

ohne jedoch auf ihre Umkehrungen Rücksicht zu nehmen.

Gewöhnlich werden indessen nur vier Functionen betrachtet, da sinus und cosinus als Grundverhältnisse gelten, deren Umkehrungen, namentlich logarithmisch, sich von selbst ergeben, während man tg und cotg als ihre Quotienten erhält.

§. 4. Denkt man daran die Functionen für bestimmte Winkel zu berechnen, so bietet die Elementargeometrie außer dem rechtwinkligen Dreiecke nur die regelmäßigen Figuren dar, wie sie in und um einen Kreis beschrieben werden. Mit diesen Mitteln berechneten die früheren Mathematiker ihre trigonometrischen Tafeln auf höchst mühsame Weise. Im Allgemeinen ergibt sich schon aus den ersten Sätzen über Seitenverhältniß und Winkel, daß an ein gleichmäßiges Fortschreiten nicht zu denken ist. Auch zeigt die Betrachtung der regelmäßigen Figuren, daß nur $s\,30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ und $\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{cotg} 45^\circ = 1$. rationale Werthe für die Functionen rationaler Theile des rechten Winkels sind. Alle anderen sind irrational und müssen nähernd berechnet werden, wobei die Bemerkung, daß man sie nur für die Winkel bis 45° zu suchen hat. Die Gesetze dieser Berechnungen wurden später durch die Reihenentwicklungen der höheren Analysis gegeben und dadurch die Arbeiten sehr erleichtert. Auch bekamen die Tafeln durch die Einführung der Logarithmen unter dem Namen der künstlichen trigonometrischen Functionen eine andere Einrichtung. Die Kenntniß derselben ist für die Anwendung der Trigonometrie nothwendig und man erlangt sie am leichtesten aus den solchen Tafeln beigegebenen Anweisungen, da es ja hierbei nur darauf ankommt zu einem Winkel seine Functionen und umgekehrt zu finden. Wie aber diese Functionen anzuwenden sind, das beruht auf Gesetzen, zu deren Erforschung wir uns jetzt wenden wollen.

§. 5. Den Gleichähnlichkeitssätzen entsprechend wird es darauf ankommen, zunächst die Dreiecke aus ihren gegebenen Stücken zu bestimmen und wir betrachten natürlich zuerst das rechtwinklige Dreieck, wo wir sogleich vier Fälle zu unterscheiden haben.

1) Die Hypotenuse und eine Kathete gegeben, daraus folgt $s\,A = \frac{a}{b}$ und $c^2 = b^2 - a^2$ oder mit Benutzung des Gefundenen $c = b \,.\, \cos A$.

2) Die Hypotenuse und ein Winkel, daraus $a = b \,.\, s\,A$ und $c = b \,.\, \cos A$.

3) Eine Kathete und ein Winkel, daraus $a = c \,.\, \operatorname{tg} A$ und $b = \frac{c}{\cos A}$.

4) Beide Katheten, daraus $\operatorname{tg} A = \frac{a}{c}$ und $b^2 = a^2 + c^2$ oder $b = \frac{c}{\cos A}$.

§. 6. Das gleichschenklige Dreieck entsteht durch Verdoppelung des rechtwinkligen. Es treten demnach dieselben Fälle ein, wie bei diesem, nur unter anderen Namen, und der vierte Fall findet sich erst dann, wenn wir außer Seiten und Winkel auch die Höhe berücksichtigen, für das gleichschenklige Dreieck jedenfalls eine bedeutungsvolle Linie.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 7. Bei den Dreiecken im Allgemeinen haben wir den vier Gleichähnlichkeitssätzen entsprechend vier Fälle zu unterscheiden. Nur zwei davon, wenn nemlich die Winkel und eine Seite, oder wenn zwei Seiten und ein der dritten anliegender Winkel gegeben sind, lassen sich auf die einfache Zusammensetzung des Dreiecks aus zwei rechtwinkligen zurückführen, so daß zwei Seiten und ihre gegenüberliegenden Winkel unmittelbar in Beziehung gestellt werden können. Ist einer dieser Winkel ein stumpfer, so müssen die Functionen des Nebenwinkels genommen werden und es kann hierbei nur in dem Falle eine Zweideutigkeit entstehen, wo sie auch in der Construction entsteht, wenn nemlich bei zwei gegebenen Seiten der gegebene Winkel der kleineren davon gegenüberliegt. Die beiden anderen Fälle fordern schon in der Construction eine andere Darstellung und müssen deshalb auch trigonometrisch besonders betrachtet werden, so daß wir für die Dreiecke drei trigonometrische Hauptfälle zu unterscheiden haben.

§. 8. Stellen wir uns für den ersten Hauptfall das Dreieck abc (Fig. 2) durch zwei rechtwinklige dar und bezeichnen die gemeinschaftliche Kathete derselben durch h, so ist nach §. 5

1) h durch beide Dreiecke bestimmt, $h = a \,.\, s\,B = b \,.\, s\,A$ und daraus die bekannte Proportion $a : b = s\,A : s\,B$.

2) $c = a \,.\, \cos B + b \,.\, \cos A$, wenn das Dreieck bei a spitzwinklig (Fig. 2);

dagegen $c = a \,.\, \cos B - b \,.\, \cos A$, wo A der Nebenwinkel, wenn das Dreieck bei a stumpfwinklig (Fig. 3). Doch könnte auch die dritte Seite nach der obigen Proportion mittelst der Höhe ae bestimmt werden.

§. 9. Nehmen wir als zweiten Hauptfall, daß zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben sind, so fällt in die Augen, daß die beiden zu findenden Winkel gleiche Beziehung zu den gegebenen Stücken haben, also auf gleiche Weise bestimmt werden können. Führen wir die Construction dieses Satzes aus, indem wir mit den beiden gegebenen Seiten um den Scheitel des gegebenen Winkels A Kreise schlagen (Fig. 4), so finden wir aus der Betrachtung derselben die nöthigen Bestimmungen.

Es ist nemlich $bg : bi = gh : ch$, weil $bh \parallel ci$.
Nun ist aber $bg = b + c$ und $bi = b - c$,
ferner $\angle gbh = \frac{1}{2}(B + C)$, ebenso $\angle cbh = \frac{1}{2}(B - C)$ und
$\angle ghb = \angle gci = R$; also $\frac{gh}{bh} = tg\,\frac{1}{2}(B + C)$ und $\frac{ch}{bh} = tg\,\frac{1}{2}(B - C)$.
Demnach verwandelt sich die obige Proportion in die trigonometrische
$b + c : b - c = tg\,\frac{1}{2}(B + C) : tg\,\frac{1}{2}(B - C)$ oder, da
$\frac{1}{2}(B + C) = R - \frac{1}{2}A$ ist, in
$b + c : b - c = cotg.\,\frac{1}{2}A : tg\,\frac{1}{2}(B - C)$.

Es sind also die Winkel B und C durch ihre Summe und ihren Unterschied bestimmt und die dritte Seite kann nach §. 8 gefunden werden, was jedoch auch unmittelbar geschehen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

kann, wenn wir die Beziehungen kennen gelernt haben, welche zwischen den drei Seiten und einem Winkel bestehen.

§. 10. Der dritte Hauptfall, der einfachste für die Construction, so daß er die Grundlage derselben ist, zeigt sich als der zusammengesetzteste in der Rechnung. Indessen weiset uns auch hier die Construction den richtigen Weg. Stellen wir uns das Dreieck aus seinen drei Seiten dar (Fig. 5), so haben wir um a, die eine Spitze desselben, zwei Kreise mit den davon ausgehenden Seiten geschlagen; um eine zweite Spitze haben wir aber einen Kreis mit der dritten Seite, wobei wir zu demselben Resultate gelangen müssen, welche von den beiden übrigen Spitzen wir wählen. Schlagen wir also den dritten Kreis um b, so haben wir

1) $gc : gh = gi : gk$, als Secanten.
Hierin ist $gk = df$, da $dk =$ und $\neq fg$, indem $\angle dkc = \angle kcd = \angle agc$,
ferner $gc = 2\,b\,.\cos\frac{1}{2}A$ und $df = 2\,c\,.\cos\frac{1}{2}A$,
endlich $gi = a + b + c$ und $gh = b + c - a$;
wonach die obige Proportion in die trigonometrische Gleichung übergeht
$4\,b\,.\,c\cos\frac{1}{2}A^2 = (a + b + c)\,(b + c - a)$ oder
$\cos\frac{1}{2}A = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a + b + c)\,(b + c - a)}{b\,.\,c}}$.

2) $ce : he = ie : le$, als schneidende Sehnen.
Hierin ist $le = bd$, weil $dk =$ und $\neq be$ und kl ein Durchmesser,
ferner $ce = 2\,b\,.\,s\,\frac{1}{2}A$ und $bd = 2\,c\,.\,s\,\frac{1}{2}A$,
endlich $ie = a + c - b$ und $he = a + b - c$;
wonach die trigonometrische Gleichung
$4\,b\,.\,c\,s\,\frac{1}{2}A^2 = (a + c - b)\,(a + b - c)$ oder
$s\,\frac{1}{2}A = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a + c - b)\,(a + b - c)}{b\,.\,c}}$.

Da wir hier die Functionen als Verhältnißzahlen betrachten, so haben wir es nur mit den absoluten, also positiven, Werthen der Quadratwurzeln zu thun.

3) Zur Bestimmung der dritten Seite, wenn zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben ist, benutzen wir die mittlere Proportionale von $2\,b\,.\cos\frac{1}{2}A$ und $2\,c\,.\cos\frac{1}{2}A$ oder was dasselbe ist von $a + b + c$ und $b + c - a$. Dies ist gm die Berührende an den Kreis um b. Bezeichnen wir sie mit t und denken uns damit einen Kreis um g geschlagen, so würde $bm = a$ eine Berührende desselben sein und demnach $a^2 = (c + b + t)\,(c + b - t)$.

§. 11. Sind auf diese Weise aus den gegebenen Stücken des Dreiecks die übrigen gefunden, so lassen sich auch leicht noch andere Aufgaben lösen, z. B. die Höhen, der Inhalt finden. Jede andere geradlinige Figur muß sich dann ebenfalls berechnen lassen, wenn nur die nöthigen Stücke gegeben sind. Bei allen diesen Bestimmungen kommen wir nur auf Functionen spitzer Winkel und wir würden die der stumpfen und überstumpfen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Winkel ganz entbehren können, wenn es sich nur um diese Anwendungen handelte. Ich halte es deshalb für durchaus angemessen unsere einfache Bedeutung der Functionen auf dieser Stufe festzuhalten um nicht durch unnütze Erweiterung die Begriffe zu verwirren. Fassen wir also jetzt die für das Dreieck gefundenen Bestimmungen näher ins Auge und verfolgen sie weiter, so lassen wir dabei die Winkel den Rechten nicht übersteigen, wenn es darauf ankommt neue Gesetze daraus abzuleiten. Untersuchen wir dann die gefundenen Bestimmungen, so wird sich leicht finden, wie nach denselben der Begriff unserer Functionen zweckmäßig noch weiter ausgedehnt werden kann, ja sogar in manchen Fällen weiter ausgedehnt werden muß.

§. 12. Die Verbindung der Functionen verschiedener Winkel, wie wir sie in den Gesetzen für das Dreieck fanden, fordert jetzt eine genauere Betrachtung und wir wenden daher jene Bestimmungen auf das gleichschenklige Dreieck an, indem wir die Folgerungen übergehen, welche sich daraus mit Hülfe des rechtwinkligen herleiten lassen.

Aus §. 8 finden wir (Fig. 6 und 7)

1) $s\,A = \frac{a}{b}\,s\,B = 2\cos B\,.\,s\,B = 2\,s\,\frac{1}{2}A\,.\,\cos\frac{1}{2}A.$

2) $c = a\,.\,\cos B + b\,.\,\cos A$ (Fig. 6), folglich

$1 = \frac{a}{c}\cos B + \cos A = 2\cos B^2 + \cos A = 2\,s\,\frac{1}{2}A^2 + \cos A.$

und $c = a\,.\,\cos B - b\,.\,\cos A$ (Fig. 7), folglich

$1 = \frac{a}{c}\cos B - \cos A = 2\cos B^2 - \cos A = 2\cos\frac{1}{2}A^2 - \cos A.$

Hieraus erhalten wir zwei Bestimmungen für $\cos A$,

$\cos A = 1 - 2\,s\,\frac{1}{2}A^2 = 2\cos\frac{1}{2}A^2 - 1.$

Die Betrachtung des Dreiecks (Fig. 6) führt aber noch zu einer dritten. Da nemlich $ad = af - bf$ ist, so kommt durch Division mit c.

$\frac{ad}{c} = \frac{af}{c} - \frac{bf}{c} = \frac{af}{ae}\,.\,\frac{ae}{c} - \frac{bf}{be}\,.\,\frac{be}{c}$. d. h. $\cos A = \cos\frac{1}{2}A^2 - s\,\frac{1}{2}A^2.$

Diesen drei Ausdrücken zufolge würden sich auch drei für tg und cotg angeben lassen, von denen ich nur $\cot g\,A = \frac{ad}{cd} = \frac{af - bf}{2\,ef} = \frac{1}{2}\,(\cot g.\,\frac{1}{2}A - tg\,\frac{1}{2}A)$ hervorhebe.

§. 13. Diese Bestimmungen der Functionen des doppelten Winkels aus denen des einfachen leiten uns zu der wichtigen Erweiterung, welche unsere Functionen erfahren können. Nach dem Bisherigen ist die Anwendung derselben nur erlaubt, wenn A ein spitzer Winkel ist, also $\frac{1}{2}A < \frac{1}{2}R$. Da aber den Gleichungen des vorigen Paragraphen gemäß die Functionen von A durch Functionen in unserem Sinne bestimmt werden, so lange noch $\frac{1}{2}A < R$, wo denn A ein stumpfer Winkel wird, wenn $\frac{1}{2}A > \frac{1}{2}R$, so muß die Frage entstehen: In welchem Sinne haben wir die Functionen auch von stumpfen Winkeln anzuerkennen? Die Grundbestimmungen, welche wir für die Functionen der Complemente gemacht haben, zeigen augenblicklich, daß für den sinus eines stumpfen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Winkels der seines Nebenwinkels angenommen werden muß. Anders zeigen sich die drei übrigen Functionen. Sie sind negativ, sobald $\frac{1}{2}$ A > $\frac{1}{2}$ R, können also nicht als Verhältnißzahlen angesehen werden, übrigens haben sie die Größe der Functionen des Nebenwinkels. Wollen wir sie demnach als Functionen der stumpfen Winkel anerkennen, so haben wir einen ähnlichen Fortschritt, wie bei der Einführung der negativen Exponenten bei den Potenzen. Wie dort die für die positiven Exponenten gefundenen Gesetze für die negativen besonders nachzuweisen sind, so müssen wir auch hier die für die spitzen Winkel gefundenen für die solcher Gestalt angenommenen Functionen der stumpfen Winkel beweisen. Nehmen wir daher ein stumpfwinkliges Dreieck (Fig. 7) und dazu das rechtwinklige mit dem Nebenwinkel des stumpfen, so zeigt sich sogleich die geometrische Bedeutung des Negativen bei den Linien, indem die zur Bestimmung des cos., sowie der tg. und cotg. nöthige anliegende Kathete nicht ein Stück der Seite des gegebenen Dreiecks ist, wie beim spitzen Winkel, sondern die Verlängerung derselben über den Scheitel hinaus, ein Gegensatz, der ganz dem der Addition und Subtraction entspricht und daher ebenso bezeichnet werden muß.

§. 14. Die in §. 12, 2 gefundenen Bestimmungen geben uns sogleich den sinus und cosinus des halben Winkels durch Functionen des ganzen. Dasselbe würden wir auch durch Anwendung des dritten Hauptfalles, §. 10, auf einen Winkel an der Grundseite des gleichschenkligen Dreiecks erhalten.

$$2 \cos \tfrac{1}{2} A^2 = 1 + \cos A \text{ und } 2 \, s \, \tfrac{1}{2} A^2 = 1 - \cos A \text{ oder}$$

$$\cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}} \text{ und } s \, \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}.$$

tg und cotg würden sich hieraus ableiten lassen, doch können wir sie leicht durch die Betrachtung der Figur finden.

In Fig. 6 ist $\frac{be}{ae} = \frac{bd}{cd} = \frac{c - ad}{cd} = \left(1 - \frac{ad}{c}\right) \frac{c}{cd}$ d. h. $tg \, \frac{1}{2} A = \frac{1 - \cos A}{s \, A}$.

In Fig. 7 ist dagegen $\frac{be}{ae} = \frac{bd}{cd} = \frac{c + ad}{cd} = \left(1 + \frac{ad}{c}\right) \frac{c}{cd}$ d. h. $cotg \, \frac{1}{2} A = \frac{1 + \cos A}{s \, A}$.

§. 15. Hieraus folgt eine noch größere Ausdehnung der Functionen. Denn wenn wir sie nicht mehr als reine Verhältnißzahlen ansehen, sondern sie auch negativ nehmen, so müssen wir jetzt auch die negative Quadratwurzel neben der positiven anerkennen, so daß wir für denselben cos A zwei entgegengesetzte s $\frac{1}{2}$ A und cos $\frac{1}{2}$ A finden. Da aber der Grundbestimmung gemäß jeder Winkel nur einen sinus, sowie einen cosinus hat, so werden wir darauf hingewiesen, daß auch der cosinus zu zwei Winkeln gehören müsse. Diese zu finden bieten sich zwei Wege dar:

1. Wie wir oben die über den Scheitel hinaus gehende Verlängerung der Seite als die Negation der Linie anzusehen hatten, so werden wir hier den Winkel auf die andere Seite des einen Schenkels zu legen haben um seine Negation zu finden. Dadurch

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

bekommt die den sinus bestimmende Kathete die entgegengesetzte Lage, während die Kathete für den cosinus dieselbe behält. Wir haben daher die Bestimmung

$$s(-x) = -s\,x \text{ und } \cos(-x) = \cos x,$$

welche nur für $s\,\frac{1}{2}\,A$ genügt.

2. Dehnen wir den Begriff des Winkels über 2 R aus, so zeigt sich alsbald, daß $\cos(4\,R - x) = \cos x$ für $\cos A$ der Bestimmung von $\cos\frac{1}{2}A$ genügen würde, indem $\cos(2\,R - \frac{1}{2}A) = -\cos\frac{1}{2}A$ wäre, wogegen diese Annahme für $s\,\frac{1}{2}\,A$ nicht zu gebrauchen ist. Haben wir aber 2 R überschritten, so ist die Erweiterung der Winkelgröße über 4 R gewiß mit keiner Schwierigkeit verbunden, indem sich zeigt, daß sinus und cosinus unverändert bleiben, wenn ein Winkel um 4 R vergrößert wird, weil dann die Schenkel wieder in die ursprüngliche Lage kommen; während der eine in die entgegengesetzte kommt, wenn der Winkel um 2 R vermehrt wird. Es ist daher $\cos(4\,R + A) = \cos A$ und für die Functionen des halben Winkels

$$s(2\,R + \tfrac{1}{2}A) = -s\,\tfrac{1}{2}A \text{ und } \cos(2\,R + \tfrac{1}{2}A) = -\cos\tfrac{1}{2}A.$$

Diese Vergrößerung des Winkels um 4 R wird nun nach Belieben fortgesetzt werden können und es zeigt sich, daß wir in der Trigonometrie keine Grenze für die Winkel anzuerkennen haben, sobald wir einmal den Rechten überschreiten. Wir können nicht beim stumpfen Winkel stehen bleiben, sondern werden zu noch allgemeineren Gesetzen geführt, welche in folgenden Gleichungen ausgesprochen sind:

I. $s(4mR + x) = s(4nR + 2R - x) = -s(4mR - x) = -s(4nR + 2R + x)$.

II. $\cos(4mR + x) = \cos(4nR - x) = -\cos(4mR + 2R + x) = -\cos(4nR + 2R - x)$.

Für tg und cotg lassen sich die Bestimmungen noch einfacher darstellen, indem diese Functionen ihre Werthe behalten, wenn der Winkel um 2 R verändert wird, aber die des stumpfen Winkels denen des Nebenwinkels entgegengesetzt sind.

III. $\mathrm{tg}(2m\,R + x) = -\mathrm{tg}(2n\,R - x)$.

IV. $\mathrm{cotg}(2m\,R + x) = -\mathrm{cotg}(2n\,R - x)$.

Diese Gesetze finden vorzugsweise ihre Anwendung in der höheren Algebra. Hier mache ich nur noch auf die in §. 10 übergangene negative Quadratwurzel aufmerksam, indem auch die Construction des Dreiecks durch die drei Seiten zwei Dreiecke gibt, welche in der gegenseitigen Lage zu ihrer gemeinschaftlichen Seite so anzusehen sind, daß der ihr gegenüberliegende Winkel in dem einen Dreiecke als $\angle A$, in dem anderen als $\angle 4R + A$ betrachtet werden muß.

§. 16. Die Anwendung des zweiten Hauptfalles auf das gleichschenklige Dreieck würde keine wesentliche Vereinfachung bringen und wir suchen deshalb die Bestimmungen, welche sich mit Hülfe des Dreiecks im Allgemeinen für die Functionen von Summe und Unterschied der Winkel finden lassen. Die Betrachtung gewinnt eine bedeutende Erleichterung, wenn wir bedenken, daß je zwei Höhen mit der dritten Seite des Dreiecks neue Dreiecke bilden, in denen zwei Winkel die Complemente zweier Winkel des gegebenen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dreiecks sind. Diese Complements-Dreiecke würden wir auch erhalten, wenn wir Perpendikel in den Ecken auf den Seiten errichteten. Die mit Hülfe der Complemente gefundenen Bestimmungen sind also ebenfalls für die Dreiecke gültig und könnten nachher durch dieselben Zeichen ausgedrückt werden. Vorläufig wollen wir die Complemente der Winkel A, B und C durch α, β und γ bezeichnen (Fig. 2 und 3).

Aus §. 8, 1 haben wir $a \,.\, s\,B = b \,.\, s\,A$ und demnach auch $a \,.\, s\,C = c \,.\, s\,A$.

Hieraus folgt $b \,.\, c \,.\, s\,A = a \,.\, c \,.\, s\,B = a \,.\, b \,.\, s\,C$; dazu aus §. 8, 2

1) $c = a \,.\, \cos B + b \,.\, \cos A$, folglich

I. $s\,C = s\,A \,.\, \cos B + s\,B \,.\, \cos A = s\,(A + B)$.

Hierin statt $\angle A$ und $\angle C$ ihre Complemente eingeführt kommt

II. $\cos \gamma = \cos \alpha \,.\, \cos B + s\,B \,.\, s\,\alpha = \cos (\alpha - B)$.

2) $c = a \,.\, \cos B - b \,.\, \cos A$, folglich

III. $s\,C = s\,A \,.\, \cos B - s\,B \,.\, \cos A = s\,(A - B)$

und mittelst der Complemente von $\angle A$ und $\angle C$

IV. $\cos \gamma = \cos \alpha \,.\, \cos B - s\,B \,.\, s\,\alpha = \cos (\alpha + B)$.

§. 17. Mit Berücksichtigung, daß c auch durch die Tangenten und die Höhe ausgedrückt werden kann, haben wir, da $\frac{c}{h} = \frac{c \,.\, a}{a \,.\, h} = \frac{s\,C}{s\,A \,.\, s\,B}$,

1) aus $c = h \,.\, \mathrm{cotg}\, A + h \,.\, \mathrm{cotg}\, B$ (Fig. 2)

I. $\mathrm{cotg}\, A + \mathrm{cotg}\, B = \frac{s\,C}{s\,A \,.\, s\,B} = \frac{s\,(A + B)}{s\,A \,.\, s\,B}$

und durch die Complemente von $\angle A$ und $\angle B$

II. $\mathrm{tg}\, \alpha + \mathrm{tg}\, \beta = \frac{s\,C}{\cos \alpha \,.\, \cos \beta} = \frac{s\,(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \,.\, \cos \beta}$.

2) aus $c = h \,.\, \mathrm{cotg}\, B - h \,.\, \mathrm{cotg}\, A$ (Fig. 3)

III. $\mathrm{cotg}\, B - \mathrm{cotg}\, A = \frac{s\,C}{s\,A \,.\, s\,B} = \frac{s\,(A - B)}{s\,A \,.\, s\,B}$.

und durch die Complemente von $\angle A$ und $\angle B$

IV. $\mathrm{tg}\, \beta - \mathrm{tg}\, \alpha = \frac{s\,C}{\cos \alpha \,.\, \cos \beta} = \frac{s\,(\beta - \alpha)}{\cos \alpha \,.\, \cos \beta}$.

§. 18. Bei einer ferneren Vergleichung der Tangenten zeigt sich bald, daß es vortheilhaft sein möchte statt h das Perpendikel ef zu benutzen (Fig. 8). Wenn wir dies Perpendikel und die Seite b verlängern bis sie einander schneiden und durch die Spitze c mit der Seite c eine Parallele ziehen, so haben wir

$\frac{fg}{df} = \frac{gh + he + ef}{df}$; aber auch $\frac{fg}{df} = \frac{fg}{af} \cdot \frac{af}{ef} \cdot \frac{ef}{df}$ d. h.

I. $\mathrm{tg}\, A + \mathrm{tg}\, B + \mathrm{tg}\, C = \mathrm{tg}\, A \,.\, \mathrm{tg}\, B \,.\, \mathrm{tg}\, C$

und mittelst der Complemente

II. $\mathrm{cotg}\, \alpha + \mathrm{cotg}\, \beta + \mathrm{cotg}\, \gamma = \mathrm{cotg}\, \alpha \,.\, \mathrm{cotg}\, \beta \,.\, \mathrm{cotg}\, \gamma$.

Durch Division der Summen mit den gleichen Produkten erhalten wir

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

III. $\cot g\, C \,.\, \cot g\, B + \cot g\, C \,.\, \cot g\, A + \cot g\, B \,.\, \cot g\, A = 1$,
wie I, gültig für $A + B + C = 2\,R$.

IV. $tg\,\gamma \,.\, tg\,\beta + tg\,\gamma \,.\, tg\,\alpha + tg\,\beta \,.\, tg\,\alpha = 1$,
wie II, gültig für $\alpha + \beta + \gamma = R$.

Aus diesen Gleichungen würden wir auch die gewöhnlichen Formeln für tg und cotg der Summe und des Unterschiedes zweier Winkel sogleich ableiten können, wenn wir nur die Complemente zweier Winkel einführten. Behalten wir z. B. den Winkel C, so würde die Gleichung IV. sich verwandeln in

$\cot g\, C \,.\, tg\,\beta + \cot g.\, C \,.\, tg\,\alpha + tg\,\beta \,.\, tg\,\alpha = 1$, und daraus

$$\text{V.}\quad tg\,\alpha = \frac{1 - \cot g\, C \,.\, tg\,\beta}{\cot g\, C + tg\,\beta} = \frac{tg\, C - tg\,\beta}{1 + tg\, C \,.\, tg\,\beta} = tg\,(C - \beta).$$

§. 19. Aus dem zweiten Hauptfalle, §. 9, erhalten wir $\frac{tg\,\frac{1}{2}\,(B + C)}{tg\,\frac{1}{2}\,(B - C)} = \frac{b + c}{b - c}$; da aber $b : c = s\,B : s\,C$, so ist $\frac{b + c}{b - c} = \frac{s\,B + s\,C}{s\,B - s\,C}$, folglich

$$\text{I.}\quad \frac{tg\,\frac{1}{2}\,(B + C)}{tg\,\frac{1}{2}\,(B - C)} = \frac{s\,B + s\,C}{s\,B - s\,C}.$$

Mittelst der Complemente kommt dann $\frac{\cot g\,\frac{1}{2}\,(\beta + \gamma)}{tg\,\frac{1}{2}\,(\gamma - \beta)} = \frac{\cos\beta + \cos\gamma}{\cos\beta - \cos\gamma}$, woraus durch Umkehrung der Brüche

$$\text{II.}\quad tg\,\tfrac{1}{2}\,(\beta + \gamma) \,.\, tg\,\tfrac{1}{2}\,(\gamma - \beta) = \frac{\cos\beta - \cos\gamma}{\cos\beta + \cos\gamma}.$$

§. 20. Um $tg\,\frac{1}{2}\,(A + B)$ und $tg\,\frac{1}{2}\,(A - B)$ einzeln zu finden, müssen wir das Complements-Dreieck bkc über der Seite a benutzen (Fig. 4), indem wir dafür dieselben Beziehungen darstellen, wie für das gegebene Dreieck abc, so daß $bl = b' + c'$ und $cm = c' - b'$ wird. Daraus folgt $\frac{gh}{bh} = \frac{bg}{bl} = \frac{b + c}{b' + c'}$, weil Dreieck bhg $\backsim$ lbg, und $\frac{ch}{bh} = \frac{cd}{bl} = \frac{b - c}{b' + c'}$, weil Dreieck chd $\backsim$ bhl, d. h.

$$\text{I.}\quad tg\,\tfrac{1}{2}\,(B + C) = \frac{\cos B + \cos C}{s\,B + s\,C},\quad \text{II.}\quad tg\,\tfrac{1}{2}\,(B - C) = \frac{s\,B - s\,C}{\cos B + \cos C}.$$

Da ferner $b + c : b' + c' = c' - b' : b - c$, weil Dreieck gbl $\backsim$ mcd, so würde auch

$$\text{III.}\quad tg\,\tfrac{1}{2}\,(B + C) = \frac{\cos C - \cos B}{s\,B - s\,C},\quad \text{IV.}\quad tg\,\tfrac{1}{2}\,(B - C) = \frac{\cos C - \cos B}{s\,B + s\,C}.$$

§. 21. Bei einer weiteren Betrachtung der Figur erhalten wir

1) $\frac{bg}{cg} = \frac{bg}{b} \,.\, \frac{b}{cg}$ d. h. $\frac{\cos\frac{1}{2}\,(B - C)}{s\,B} = \frac{s\,B + s\,C}{2\,s\,\frac{1}{2}\,(B + C) \,.\, s\,B}$.

I. $2\,s\,\frac{1}{2}\,(B + C) \,.\, \cos\frac{1}{2}\,(B - C) = s\,B + s\,C$
und mittelst der Complemente

II. $2\cos\frac{1}{2}\,(\beta + \gamma) \,.\, \cos\frac{1}{2}\,(\gamma - \beta) = \cos\beta + \cos\gamma$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2) $\frac{cd}{bd} = \frac{cd}{c} \cdot \frac{c}{bd}$ d. h. $\frac{s\,\frac{1}{2}\,(B - C)}{s\,C} = \frac{s\,B - s\,C}{2\cos\frac{1}{2}\,(B + C)\,.\,s\,C}$.

III. $2\cos\frac{1}{2}\,(B + C)\,.\,s\,\frac{1}{2}\,(B - C) = s\,B - s\,C$

und mittelst der Complemente

IV. $2\,s\,\frac{1}{2}\,(\beta + \gamma)\,.\,\cos\frac{1}{2}\,(\gamma - \beta) = \cos\beta - \cos\gamma$.

§. 22. Diese Formeln, welche die wichtigsten Beziehungen der Functionen enthalten, verschaffen uns bei der Berechnung derselben eine bedeutende Erleichterung, indem wir mittelst derselben nach der Berechnung der Functionen bis 30° die Functionen über 30° durch bloße Subtraction finden können.

1) Ist in §. 21, I. $B = 30° + x$ und $C = 30° - x$, so wird, da $s\,30° = \frac{1}{2}$ ist, $\cos x = s\,(30° + x) + s\,(30° - x)$ oder $s\,(30° + x) = \cos x - s\,(30° - x)$.

2) Nehmen wir in §. 21, IV. $\gamma = 30° + x$ und $\beta = 30° - x$, so wird $s\,x = \cos\,(30° - x) - \cos\,(30° + x)$ oder $\cos\,(30° + x) = \cos\,(30° - x) - s\,x$.

§. 23. Aus dem dritten Hauptfalle erhalten wir, wenn $a + b + c = S$, $b + c - a = S'$, $a + c - b = S''$ und $a + b - c = S'''$ gesetzt wird,

1) nach §. 10, 1 die Gleichungen

$$2\cos\frac{1}{2}\,A = \sqrt{\frac{S\,S'}{b\,.\,c}},\ 2\cos\frac{1}{2}\,B = \sqrt{\frac{S\,S''}{a\,.\,c}} \text{ und } 2\cos\frac{1}{2}\,C = \sqrt{\frac{S\,S'''}{a\,.\,c}}.$$

Durch die Multiplication derselben erhalten wir

$$8\cos\frac{1}{2}\,A\,.\,\cos\frac{1}{2}\,B\,.\,\cos\frac{1}{2}\,C = \frac{S}{a\,.\,b\,.\,c}\sqrt{S\,S'\,S''\,S'''}.$$

Da nun $\frac{\sqrt{S\,S'\,S''\,S'''}}{b\,.\,c} = 2\,s\,A$ und dem entsprechend auch $2\,s\,B$ und $2\,s\,C$ gefunden werden, so ist

I. $4\cos\frac{1}{2}\,A\,.\,\cos\frac{1}{2}\,B\,.\,\cos\frac{1}{2}\,C = s\,A + s\,B + s\,C$.

2) Bilden wir auf dieselbe Weise nach §. 10, 2 die Gleichung

$8\,s\,\frac{1}{2}\,A\,.\,s\,\frac{1}{2}\,B\,.\,s\,\frac{1}{2}\,C = \frac{S'\,S''\,S'''}{a\,.\,b\,.\,c}$ und bemerken ferner, daß

$a\,.\,S'' = a\,.\,S - 2\,a\,.\,b$, sowie $b\,.\,S'' = 2\,a\,.\,b - b\,.\,S'''$,

also $(a + b)\,.\,S'\,S'' = a\,.\,S\,S' - b\,.\,S'\,S'''$,

so kommt $\frac{S'\,S''\,S'''}{a\,.\,b\,.\,c} = \frac{S\,S'}{b\,.\,c} - \frac{S'\,S'''}{a\,.\,c} - \frac{S'\,S''}{a\,.\,b}$ d. h.

II. $4\,s\,\frac{1}{2}\,A\,.\,s\,\frac{1}{2}\,B\,.\,s\,\frac{1}{2}\,C = \cos A + \cos B + \cos C - 1$.

§. 24. Die Bestimmungen, welche namentlich für die Functionen der Summe und des Unterschiedes zweier Winkel gefunden wurden, zeigen uns sogleich den Weg die Functionen jeder Reihe von Winkeln zu entwickeln, so wie ähnliche Beziehungen für die Functionen von vier Winkeln, deren Summe 2 R oder 4 R wäre, gefunden werden könnten, wie die in §. 18 und §. 23. Die Gesetze, welche sich dabei für die Functionen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

vielfacher Winkel in Bezug auf die Potenzen des einfachen Winkels herausstellen, begründen vorzugsweise eine bedeutende Anwendung in der Algebra. Ein einfaches Beispiel ist der casus irreducibilis bei den cubischen Gleichungen, sowie ein interessantes Beispiel für die Geometrie die Gesetze sind, welche Gauß für die regelmäßigen Figuren daraus ableitete. Näher hierauf einzugehen, so wie auch die Gesetze für zwei Winkelsysteme, welche die Stereometrie verlangt, aus der einfachen Betrachtung der graphisch dargestellten Ecke abzuleiten, erlaubt uns die Enge des der Abhandlung bestimmten Raumes nicht. Wenden wir uns daher zu dem letzten Hauptpunkte der Trigonometrie.

§. 25. Die gefundenen Gesetze führen uns nemlich zum Verhältniß der Functionen und ihrer Winkel um die einen aus den andern zu berechnen. Hierbei müssen die Winkel und ihre Functionen durch dieselbe Einheit ausgedrückt sein, was wir sogleich erreichen, wenn wir statt der Winkel die mit ihnen in einerlei Verhältniß stehenden Kreisbogen annehmen und diese im Verhältniß zum Radius bestimmen, der für sinus und cosinus als Hypotenuse, sowie für tangens und cotg als Kathete gilt. Da nun zwischen dem Bogen und seinen Functionen kein rationales Verhältniß stattfindet, so werden wir das transcendente mittelst Reihen auszudrücken haben, deren Coefficienten wir durch das Grundgesetz derselben bestimmen: In zwei nach Potenzen einer Größe fortschreitenden gleichen Reihen sind die Glieder gleich, welche gleiche Potenzen enthalten. Wir wollen hier nur die einfachsten Fälle untersuchen, sinus und cosinus durch den Winkel und den Winkel durch tg bestimmen. Zunächst bemerken wir für die Form der Reihen, daß die für den sinus nur die ungeraden Potenzen, die für den cosinus nur die geraden Potenzen der Winkelgröße, sowie die Reihe für den Winkel nur die ungeraden Potenzen von tg enthält, da $s(-x) = -s\,x$, $\cos(-x) = \cos x$ und $tg(-x) = -tg\,x$, also auch $Arc(tg = -x) = -Arc(tg = x)$.

1) $\cos x = a + bx^2 + cx^4 + dx^6 + \ldots$

Nach §. 21, II. haben wir $2 \cos x \,.\, \cos y = \cos(x + y) + \cos(x - y)$. Dies auf die Reihen angewandt gibt

$$2\,(a + bx^2 + cx^4 + dx^6 + \ldots)\,(a + by^2 + cy^4 + dy^6 + \ldots)$$
$$= a + b\,(x + y)^2 + c\,(x + y)^4 + d\,(x + y)^6 + \ldots$$
$$+ a + b\,(x - y)^2 + c\,(x - y)^4 + d\,(x - y)^6 + \ldots$$

Das Produkt sowohl, als die Summe kann aber zerlegt werden in eine Reihe, welche nur Potenzen von x enthält und in eine andere, deren Glieder noch mit y^2 multiplicirt sind. Der Rest ist dann auf beiden Seiten mit y^4 multiplicirt, also gleich.
Die Gleichung wird daher

$$2\,a^2 + 2\,abx^2 + 2\,acx^4 + 2\,adx^6 + \ldots$$
$$+ 2\,aby^2 + 2\,b^2\,x^2\,y^2 + 2\,bcx^4\,y^2 + \ldots \quad + y^4\,R.$$
$$= 2\,a + 2\,bx^2 + 2\,cx^4 + 2\,dx^6 + \ldots$$
$$+ 2\,by^2 + 4\,.\,3\,cx^2\,y^2 + 6\,.\,5\,dx^4\,y^2 + \ldots \quad + y^4\,R.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aus den mit y^2 multiplicirten Reihen folgt nun, nachdem wir aus dem ersten Gliede $a^2 = a = 1$ bestimmt haben, $b = b$, $4 . 3c = 2b^2$, $6 . 5d = 2bc$ u. s. w.

Das einfache Gesetz des Fortschreitens ist hierbei klar, so daß alle folgenden Coefficienten durch den zweiten bestimmt werden, für den wir hier noch keine Bestimmung finden.

2) $sx = Ax + Bx^3 + Cx^5 + \ldots$

Mittelst §. 21, IV. ist $2\,sx\,sy = \cos(x - y) - \cos(x + y)$.

Dies in Reihen ausgedrückt, kommt

$$\begin{aligned} &2\,(Ax + Bx^3 + Cx^5 + \ldots)\,(Ay + By^3 + Cy^5 + \ldots) \\ &= a + b\,(x - y)^2 + c\,(x - y)^4 + d\,(x - y)^6 + \ldots \\ &\quad - a - b\,(x + y)^2 - c\,(x + y)^4 - d\,(x + y)^6 - \ldots \end{aligned}$$

Hier erhalten wir auf beiden Seiten der Gleichung eine Reihe nach Potenzen von x, welche mit y multiplicirt ist; der Rest wird mit y^3 multiplicirt, so daß

$$\begin{aligned} &2\,A^2\,xy + 2\,ABx^3\,y + 2\,ACx^5\,y + \ldots \quad + y^3\,\mathfrak{R} \\ &= -4\,bxy - 8\,cx^3\,y - 12\,dx^5\,y - \ldots \quad + y^3\,\mathfrak{R}, \end{aligned}$$

folglich $A^2 = -2b$, $AB = -4c$, $AC = -6d$ u. s. w.

Das Gesetz des Fortschreitens fällt hier ebenfalls sogleich in die Augen.

Die Coefficienten dieser beiden Reihen bestimmen sich also gegenseitig $b = -\frac{A^2}{2}$,

$$c = \frac{2\,b^2}{4.3} = \frac{A^4}{4.3.2} \text{ und } B = -\frac{A^3}{3.2},\ d = \frac{2\,bc}{6.5} = -\frac{A^6}{6.5.4.3.2} \text{ und } C = \frac{A^5}{5.4.3.2} \text{ u. s. w.}$$

3) Setzen wir $tgx = t$, $tgy = u$ und nehmen die allgemeine Form der Reihe

$$x = \mathfrak{A}\,t + \mathfrak{B}\,t^3 + \mathfrak{C}\,t^5 + \ldots,$$

so erhalten wir, da nach §. 18, V. $tg\,(x - y) = \frac{t - u}{1 + tu}$ ist,

$$\begin{aligned} &\mathfrak{A}\,t + \mathfrak{B}\,t^3 + \mathfrak{C}\,t^5 + \ldots \quad - \mathfrak{A}\,u - \mathfrak{B}\,u^3 - \mathfrak{C}\,u^5 - \ldots \\ &= \mathfrak{A}\,(t - u) + \mathfrak{B}\,(t^3 - u^3) + \mathfrak{C}\,(t^5 - u^5) + \ldots \\ &= \mathfrak{A}\,\frac{(t - u)}{1 + tu} + \mathfrak{B}\,\frac{(t - u)^3}{(1 + tu)^3} + \mathfrak{C}\,\frac{(t - u)^5}{(1 + tu)^5} + \ldots \end{aligned}$$

Führen wir hier die Division mit dem gemeinschaftlichen Factor $(t - u)$, sowie mit den respectiven Potenzen von $(1 + tu)$ nur soweit aus, daß wir die Glieder erhalten, welche nicht mit u^2 oder höheren Potenzen von u multiplicirt sind, so bekommen wir auf beiden Seiten der Gleichung zunächst eine Reihe nach den geraden Potenzen von t und dann eine zweite nach den ungeraden Potenzen von t, wo jedes Glied mit u multiplicirt ist. Der Rest hat zum Factor u^2, ist also auf beiden Seiten gleich. Die Gleichung wird daher

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,t^2 + \mathfrak{C}\,t^4 + \ldots \\ &+ \mathfrak{B}\,tu + \mathfrak{C}\,t^3\,u + \ldots \\ &+ u^2\,\mathfrak{R} \end{aligned}\right\} = \left\{\begin{aligned} &\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,t^2 + \mathfrak{C}\,t^4 + \ldots \\ &- \mathfrak{A}\,tu - 3\,\mathfrak{B}\,t^3\,u - \ldots \\ &- 2\,\mathfrak{B}\,tu - 4\,\mathfrak{C}\,t^3\,u - \ldots \\ &+ u^2\,\mathfrak{R}, \end{aligned}\right.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

folglich aus den mit u multiplicirten Reihen

$$3\,\mathfrak{B} = -\mathfrak{A},\ 5\,\mathfrak{C} = -3\,\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \text{ u. s. w.}$$

Alle Coefficienten werden durch $\mathfrak{A}$ ausgedrückt und das Gesetz ihres Fortschreitens fällt auch hier sogleich in die Augen.

Um die beiden Anfangscoefficienten A und $\mathfrak{A}$ zu bestimmen, bedenken wir, daß

$$\operatorname{tg} x = \frac{s\,x}{\cos x} = A\,x + x^3\,\mathfrak{R},$$

wenn in der Entwicklung durch x nur das erste Glied bestimmt und der dann mit x^3 multiplicirte Rest, wie bisher mit $\mathfrak{R}$ bezeichnet wird. In dieser Gleichung x durch t ausgedrückt kommt $t = A\,\mathfrak{A}\,t + t^3\,\mathfrak{R}$, folglich $A\,\mathfrak{A} = 1$.

Da nun $\operatorname{tg} x > x$, wenn x ein spitzer Winkel, und $s\,x < x$, so ist $\frac{s\,x}{x} > \cos x$ und < 1. Je kleiner x, desto näher kommen diese Grenzen und fallen zusammen für $x = 0$, wo $\cos x = 1$ ist. Dann muß also auch $\frac{s\,x}{x} = 1$ sein. Es wird aber dieser Bruch in demselben Falle nach der obigen Reihe für $s\,x$ gleich A, mithin ist $A = 1$, folglich auch $\mathfrak{A} = 1$, für spitze Winkel. Unsere Reihen sind demnach:

$$\text{I.}\quad x = t - \tfrac{1}{3}\,t^3 + \tfrac{1}{5}\,t^5 - \ldots$$

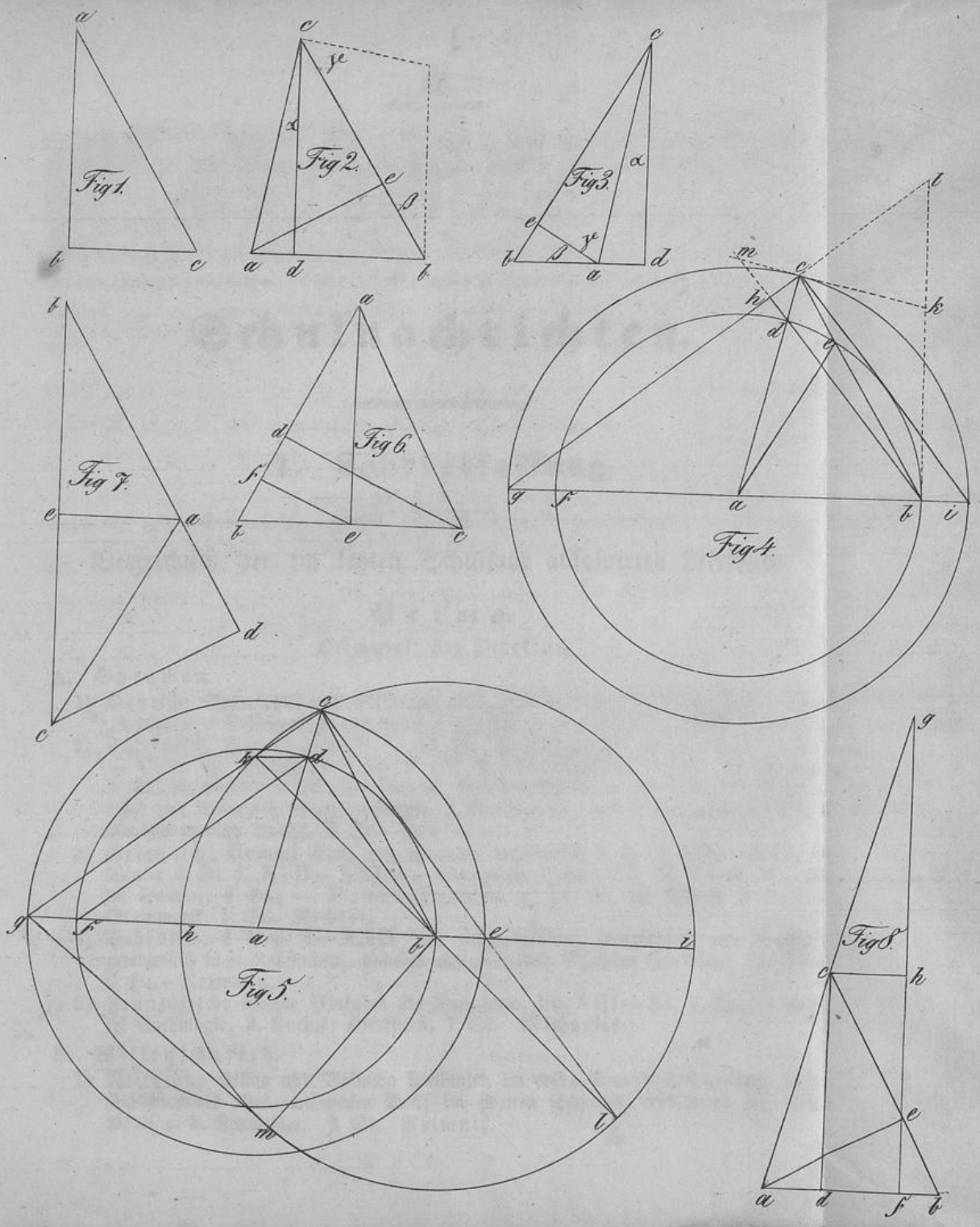
$$\text{II.}\quad s\,x = x - \frac{x^3}{3\,.\,2} + \frac{x^5}{5\,.\,4\,.\,3\,.\,2} - \ldots$$

$$\text{III.}\quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4\,.\,3\,.\,2} - \frac{x^6}{6\,.\,5\,.\,4\,.\,3\,.\,2} + \ldots$$

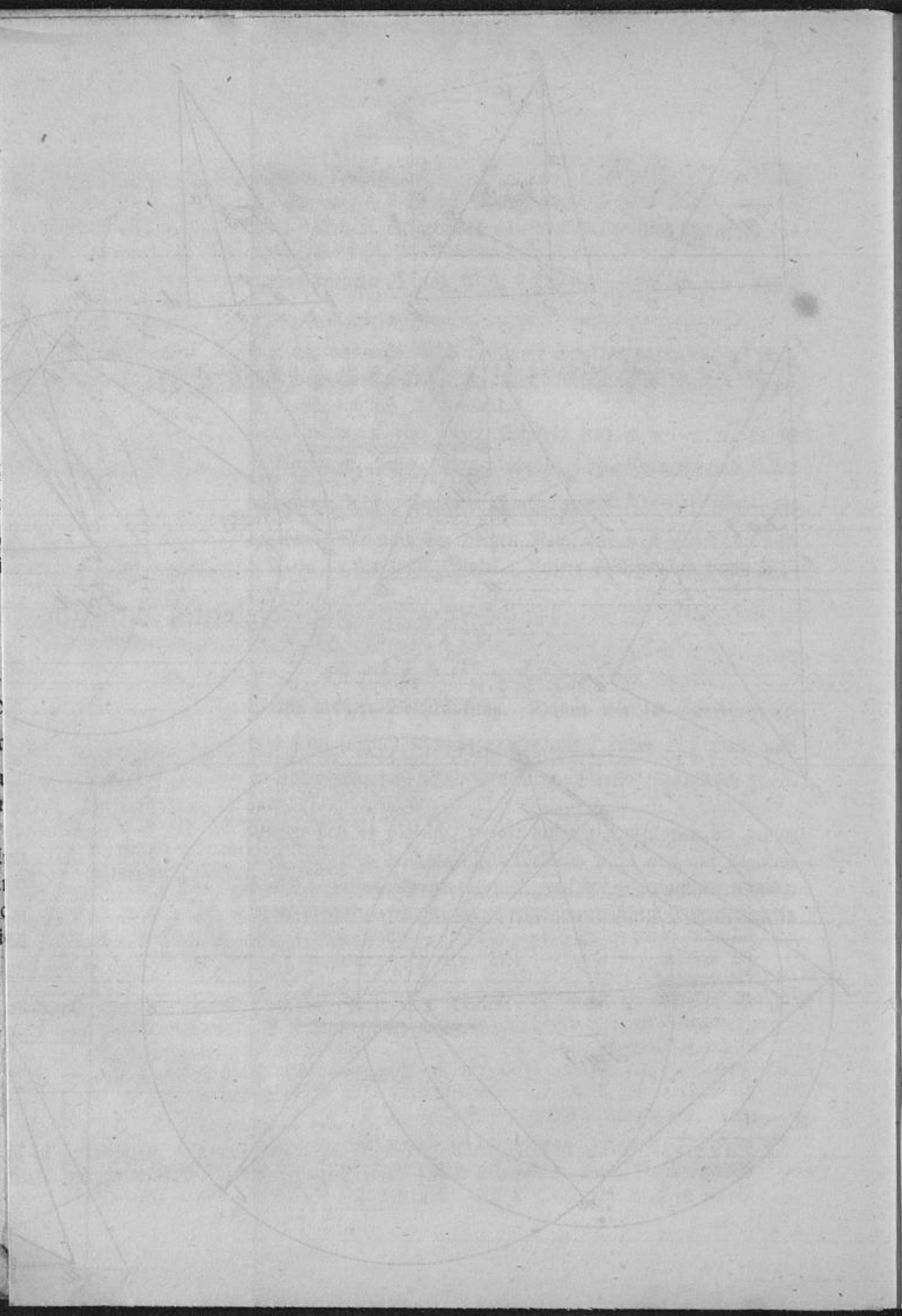
Die Reihe für x erleidet noch eine größere Beschränkung. Damit wir sie convergent erhalten, darf t nicht größer als 1 sein, folglich x nicht größer, als $\frac{\pi}{4}$ oder $\frac{R}{2}$, was auch zur Berechnung der Functionen vollständig hinreicht, da kleinere Werthe sogar noch zweckmäßiger gebraucht werden können.

Diese Reihenentwickelungen sind es zugleich, welche unseren Functionen die größte Ausdehnung geben, indem sie nun, auf rein arithmetischem Gebiete, nicht nur auf negative einfache Größen, sondern auch auf negative Quadrate, d. h. auf die sogenannten unmöglichen Größen angewandt werden können, wodurch die trigonometrischen Functionen in die logarithmischen übergehen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf