ANWENDUNG

DER

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

1. ORDNUNG UND *n*. GRADES

AUF

GEOMETRISCHE BEISPIELE

MIT

BESONDERER BERÜCKSICHTIGUNG DER SINGULÄREN LÖSUNGEN.

VON

PROF. ADALBERT DESCHMANN.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die allgemeine Form einer Differentialgleichung 1. Ordnung und n. Grades ist:

$$1)\ \left(\frac{dy}{dx}\right)^n + Z_1\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + Z_2\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2} + \ldots + Z_{n-1}\frac{dy}{dx} + Z_n = 0,$$

worin Z_1, Z_2, $Z_3 \ldots\ldots Z_n$ Functionen von x und y bezeichnen. Das zunächst sich darbietende Verfahren zur Integration einer derartigen Differentialgleichung besteht darin, dass man die Gleichung in Beziehung auf $\frac{dy}{dx}$ als Unbekannte auflöst, wodurch man im Allgemeinen n verschiedene Werte $f_1, f_2, f_3 \ldots f_n$, sämmtlich Functionen von x und y, erhält und nachher die n Differentialgleichungen

$$\frac{dy}{dx} = f_1,\ \left(\frac{dy}{dx}\right) = f_2,\ \left(\frac{dy}{dx}\right) = f_3\ \ldots\ldots\ \left(\frac{dy}{dx}\right) = f_n$$

einzeln integriert. Angenommen diese Integrale seien gefunden und durch die Gleichungen:

$$\varphi_1\,(x, y, C_1) = 0,\ \varphi_2\,(x, y, C_2) = 0 \ldots\ldots \varphi_n\,(x, y, C_n) = 0$$

dargestellt, so muss jedes derselben, welcher Wert auch der in ihm enthaltenen Constanten beigelegt werden mag, der Gleichung (1) genügen, aber keines lässt sich aus dem andern durch blosse Specialisierung der Constanten erhalten, und keines ist im eigentlichen Sinne ein particuläres Integral. Die Gleichung aber, welche alle n Integrale in sich enthält und als das allgemeine Integral betrachtet werden muss, ist die folgende:

$$\varphi_1\,(x, y, C_1) \,.\, \varphi_2\,(x, y, C_2) \,.\, \varphi_3\,(x, y, C_3) \ldots\ldots \varphi_n\,(x, y\, C_n) = 0.$$

Darin können jedoch, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, alle n Constante durch denselben Buchstaben C bezeichnet werden, so dass jenes allgemeine Integral durch die Gleichung:

$$\varphi_1\,(x, y, C) \,.\, \varphi_2\,(x, y, C) \,.\, \varphi_3\,(x, y, C) \ldots\ldots \varphi_n\,(x, y, C) = 0$$

dargestellt ist.

Beispielsweise sei die gegebene Differentialgleichung:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - ax = 0.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die beiden einzelnen Differentialgleichungen sind:

$$\frac{dy}{dx} = +\sqrt{ax}, \quad \frac{dy}{dx} = -\sqrt{ax};$$

die Integrale dieser Gleichungen sind:

$$y - \frac{2}{3}\sqrt{ax^3} - C_1 = 0, \quad y + \frac{2}{3}\sqrt{ax^3} - C_2 = 0,$$

folglich ist das allgemeine Integral, wenn man $C_1 = C_2 = C$ setzt,

$$(y - C)^2 - \frac{4}{9}ax^3 = 0.$$

Das vorher entwickelte Verfahren verliert seine Brauchbarkeit, wenn die Wurzeln der gegebenen Gleichungen sehr verwickelte Ausdrücke oder gar nicht angebbar sind; es ist dann häufig vortheilhaft, die Gleichung 1) auf y oder x zu reducieren, d. h. ihr eine der folgenden Formen zu verleihen:

$$y = \Phi\left(x, \frac{dy}{dx}\right) \text{ oder } x = \Psi\left(y, \frac{dy}{dx}\right).$$

Aus $y = \Phi(x, y')$ ergibt sich durch Differentiation

$$y' = \frac{d\,\Phi(x, y')}{dx} + \frac{d\,\Phi(x, y')}{dy'} \cdot \frac{dy'}{dx},$$

d. h. eine Differentialgleichung zwischen den beiden Variabeln x und y; durch Integration erhält man hieraus eine Gleichung $f(x, y'\,C) = 0$, welche mit $y = \Phi(x, y')$ verbunden durch Elimination von y' zu einer Gleichung zwischen x und y führt.

Aehnlich wird das Verfahren, wenn man die gegebene Differentialgleichung nach x auflöst.

Lässt sich die gegebene Differentialgleichung auf die homogene Form:

$$y' + F_1\left(\frac{y}{x}\right)y'^{n-1} + F_2\left(\frac{y}{x}\right)y'^{n-2} + \ldots\ldots + F_{n-1}\left(\frac{y}{x}\right)y' + F_n\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

bringen, so hat die Integration meistens keine Schwierigkeiten. Setzt man nämlich $\frac{y}{x} = t$, so erhält die obige Gleichung die Form:

$$f(y', t) = 0,$$

die man entweder in Beziehung auf y' oder, wenn dies umständlich wäre, noch t auflösen kann, wodurch man entweder $y' = \varphi(t)$ oder $t = \psi(y')$ zum Resultate erhält.

Aus der Gleichung $y = xt$ erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dt}{dx} + t, \; y' - t = x\frac{dt}{dx}, \text{ daraus } \frac{dx}{x} = \frac{dt}{y' - t}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ist $y' = \varphi(t)$, so erhält man auf der rechten Seite nur t, ist aber $t = \psi(y')$, so kommt rechter Hand nur y' vor; in jedem Falle sind die Variabeln gesondert und durch Integration erhält man

$$\log x = \int \frac{dt}{y' - t}$$

oder auch

$$\log x = -\log(y' - t) + \int \frac{dy'}{y' - t}.$$

Im erstern Falle gibt die wirklich ausgeführte Integration $\log x = \chi(t) + C$, worin man für $t = \frac{y}{x}$ setzt;

im zweiten Falle ist das Ergebnis von der Form $\log x = \chi(y') + C$, welche Gleichung man mit der gegebenen verbindet, indem man y' aus beiden eliminiert.

Anwendung der Differentialgleichungen auf die Geometrie.

Da die trigonometrische Tangente des Winkels λ, welchen die in irgend einem Punkte der Curve gezogene Tangente mit der Abscissenachse bildet, durch $\frac{dy}{dx} = y'$ dargestellt ist, so lassen sich die Subtangente, Subnormale, Normale etc., als Functionen von y' ausdrücken.

P sei ein beliebiger Punkt der Curve, deren Gleichung $y = f(x)$ ist, $OM = x$, $MP = y$, Q und R bezeichnen die Punkte, in welchen eine durch P senkrecht zu OP gelegte Gerade die Abscissen-, beziehungsweise die Ordinatenachse schneidet, ferner U den Durchschnitt der Normale mit der Abscissenachse, V den Durchschnitt der Tangente mit der Ordinatenachse, so erhalten wir folgende Relationen:

$$OU = x + yy', \quad OV = y - xy', \quad MU = yy',$$

$$QU = \frac{y(xy' - y)}{x}, \quad OR = \frac{x^2 + y^2}{y}, \quad OQ = \frac{x^2 + y^2}{x}.$$

Beispiele:

I) Es wird die Curve gesucht, bei welcher die Relation $OV = a \operatorname{Cotg} \lambda$ stattfindet.

$$y - xy' = \frac{a}{y'}, \quad \operatorname{Cotg} \lambda = \frac{1}{y'}$$

$$yy' - xy'^2 = a, \quad y = \frac{a + xy'^2}{y'},$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

differenziert man diese Gleichung nach y', so erhält man

$$0 = \frac{xy'^2 - a}{y'^2} \cdot \frac{dy'}{dx}.$$

Setzt man $\frac{dy'}{dx} = 0$, so ist $y' = C$, welchen Wert man in die gegebene Gleichung substituirt, woraus

$$y = \frac{a + C^2 x}{C} = \frac{a}{C} + Cx$$

$$C = \frac{a}{b},\ y = b + \frac{a}{b} \cdot x.$$

Setzt man aber $\frac{xy' - a}{y'^2} = 0$, $y' = \sqrt{\frac{a}{x}}$ in die gegebene Gleichung substituiert gibt

$$y^2 = 4\,ax.$$

Es findet nun in diesem, wie in manchen andern Fällen der merkwürdige Umstand statt, dass man der gegebenen Differentialgleichung nicht nur durch das allgemeine Integral mit einer willkürlichen Constanten, sondern auch durch eine Gleichung zwischen x und y genügen kann, in welcher keine willkürliche Constante vorkommt und welche auch nicht durch Specialisierung der Constanten als solcher aus dem allgemeinen Integrale abgeleitet werden kann, somit nicht etwa als ein particuläres Integral der gegebenen Differentialgleichung dargestellt werden kann. Man nennt nun eine solche Lösung eine besondere oder singuläre Lösung der gegebenen Differentialgleichung.

Interessant ist nun der Zusammenhang des allgemeinen Integrales mit der singulären Lösung. Es sei nämlich $F(x, y, C)$ die Gleichung einer Curve, in welcher ein Parameter C vorkommt, welchem beliebige Werte beigelegt werden können. Gibt man C verschiedene Werte δ, 2δ, 3δ, $4\delta \ldots$, so erhält man eine Reihenfolge von Curven derselben Art. Hiebei kann es aber geschehen, dass jede nachfolgende die vorhergehende in einem Punkte schneidet, und in diesem Falle entsteht die Frage nach dem geometrischen Orte der aufeinanderfolgenden.

Man muss die gegebene Gleichung $F(x, y, C) = 0$ nach C differenzieren und die so erhaltene Gleichung $\frac{dF(x, y, C)}{dC} = 0$ mit der ursprünglichen verbinden, indem man C eliminiert. Die dadurch erhaltene Gleichung, in welcher C nicht vorkommt, entspricht der Gesammtheit der aufeinanderfolgenden Durchschnittspunkte, welche eine Curve bilden, welche die „einhüllende Curve“ (enveloppe) des gedachten Systems von Curven ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

In unserem Beispiele I) ist das allgemeine Integral:

$$y' - b - \frac{ax}{b} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \underline{|1}$$

$$-1 + \frac{ax}{b^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \underline{|2},$$

die durch Elimination von b erhaltene Gleichung 3

$$y^2 = 4ax \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \underline{|3}$$

Das Beispiel I) lässt sich auf folgende Weise lösen.

$$y - xy' = \frac{a}{y'}$$

$$yy' - xy'^2 = a,$$

multipliciert man die Gleichung mit $4x$ und addiert y^2

$$4xy'^2 - 4xyy' + y^2 = y^2 - 4ax$$

$$(2xy' - y)^2 = y^2 - 4ax$$

Setzt man $y = uv, \quad y' = uv' + vu'$

$$(2xuv' + 2xvu' - uv)^2 = u^2v^2 - 4ax$$

$$\left[2xu \cdot \frac{dv}{dx} + v\left(2x\frac{du}{dx} - u\right)\right]^2 = u^2v^2 - 4ax$$

Wählt man u so, dass $2x\frac{du}{dx} - u = 0$, so folgt

$$\frac{du}{u} = \frac{2\,dx}{x}$$

$$u = \sqrt{x};$$

mithin

$$\left(2x\frac{dv}{dx} \cdot u\right)^2 = xv^2 - 4ax$$

$$2x\frac{dv}{dx} = \sqrt{v^2 - 4a}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\sqrt{v^2 - 4a}}{2x}$$

daraus

$$\int \frac{dx}{2x} = \int \frac{dv}{\sqrt{v^2 - 4a}}$$

$$log\, Cx^{\frac{1}{2}} = log\,(v + \sqrt{v^2 - 4a})$$

$$Cx^{\frac{1}{2}} - v = \sqrt{v^2 - 4a}$$

$$C^2x - 2Cvx^{\frac{1}{2}} = -4a$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$v = \frac{y}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{C^2 x + 4a}{2Cx^{\frac{1}{2}}}, \quad \text{weil } y = uv \text{ und } u = \sqrt{x}$$

$$C = \frac{2a}{b}, \quad y = b + \frac{a}{b} \cdot x$$

II) Es wird die Curve gesucht, für welche

$$OV^2 = a^2 Tang\, \lambda$$

$$(y - xy')^2 = a^2 y'. \qquad \text{Setzt man } y' = p,$$

$$y - xp = a\sqrt{p}.$$

Differenziert man die Gleichung nach x,

$$p - p - x\frac{dp}{dx} = \frac{a}{2\sqrt{p}} \cdot \frac{dp}{dx}$$

$$\left(x + \frac{a}{2\sqrt{p}}\right) \cdot \frac{dp}{dx} = 0.$$

Setzt man $\frac{dp}{dx} = 0$, $p = C$ in die obige Gleichung substituiert

$$y - Cx = a\sqrt{C}, \qquad a\sqrt{C} = b, \qquad C = \frac{b^2}{a^2}$$

$$y = \frac{b^2}{a^2} \cdot x + b \quad \text{das allgemeine Integral.}$$

$$x + \frac{a}{2\sqrt{p}} = 0, \qquad \sqrt{p} = -\frac{a}{2x}, \qquad p = \frac{a}{4x^2}$$

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{a^2}{4x^2}, \qquad y = -\frac{a^2}{4x};$$

$$4xy = -a^2 \quad \text{die singuläre Lösung.}$$

Construiert man sich z. B. mehrere Grade, deren Gleichungen

$$y = \frac{1}{36} \cdot x + 1$$

$$y = \frac{4}{36} \cdot x + 2$$

$$y = \frac{9}{36} \cdot x + 3$$

$$\vdots$$

$$y = \frac{n^2}{36} \cdot x + n$$

so ist der geometrische Ort der aufeinanderfolgenden Durchschnittspunkte eine gleichseitige Hyperbel, deren Gleichung $4xy = -36$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

III) Es wird die Curve gesucht, für welche die Relation besteht

$$OU \,.\, OV = xy$$

$$(x + yy')\,(y - xy') = xy$$

Nach der Multiplication der beiden Binome, Reduction und Division durch y' erhält man:

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{xy} = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}.$$

Setzt man in der homogenen Differentialgleichung $y = xt$,

$$x\frac{dt}{dx} + t = t - \frac{1}{t}$$

$$tdt = -\frac{dx}{x}$$

$$\frac{t^2}{2} = log\, ax^{-1} \quad Constante = log\, a$$

$$\frac{y^2}{2x^2} = log\left(\frac{a}{x}\right)$$

$$y^2 = 2x^2 \,.\, log\left(\frac{a}{x}\right) \quad \text{das allgemeine Integral.}$$

IV) Es wird die Curve gesucht, bei welcher das Rechteck aus OU und OV gleich der Summe der Dreiecksfläche OMP und der Hälfte der Dreiecksfläche MPQ ist.

$$(x + yy')\,(y - xy') = \frac{xy}{2} + \frac{y^3}{4x}$$

$$xyy'^2 - (y^2 - x^2)\,.\,y' = \frac{2x^2y - y^3}{4x}$$

$$y'^2 - \left(\frac{y^2}{x^2} - 1\right).\,y' = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^3$$

$$y = xt, \quad y' = \frac{t^2 - 1}{2t} \pm \sqrt{\frac{(t^2-1)^2 + t^2(2-t)}{4t^2}}$$

$$1)\quad y' = \frac{t}{2}, \qquad 2)\quad y' = \frac{t^2 - 2}{2t}$$

$$1)\qquad y' = \frac{t}{2}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{2x}$$

$$log\, y = \frac{1}{2}\, log\, x + C \qquad C = log\, c^{\frac{1}{2}}$$

$$y = c^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} \quad \text{oder} \quad y^2 = cx$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$2)\quad \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dt}{\frac{t^2-2}{t} - t}$$

$$\log x = -\int \frac{2\,t dt}{t^2+2} = -\log(t^2+2) + C$$

$$\log x = \log\left(\frac{y^2+2x^2}{x^2}\right)^{-1} + \log 4a \qquad C = \log 4a$$

$$x = \frac{4ax^2}{y^2+2x^2}, \qquad y^2+2x^2 = 4ax$$

Der Aufgabe genügen eine Parabel und eine Ellipse, deren Gleichungen sind:

$$1)\quad y^2 = cx \qquad 2)\quad y^2 + 2x^2 = 4ax$$

V) Man verlangt die Curve, für welche

$$OU.OV = 4(\triangle OMP - \triangle MPQ) \quad \text{ist.}$$

$$(x+yy')(y-xy') = \frac{2x}{y}(x^2-y^2)$$

Nach Division der Gleichung durch x^2 und Substitution von $y = xt$

$$y'^2 - y'.\frac{t^2-1}{t} = 2t^2-1$$

$$1)\quad y' = -t \qquad 2)\quad y' = \frac{2t^2-1}{t}$$

$$1)\qquad y' = -t$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

$$xy = C$$

$$2)\qquad y' = \frac{2t^2-1}{t}$$

$$\log x = \int \frac{dt}{\frac{2t^2-1}{t} - t}$$

$$\log x = \log(t^2-1)^{\frac{1}{2}} + C, \qquad C = \log a$$

$$\frac{x}{a} = \left(\frac{y^2-x^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$y^2 = x^2 + \frac{x^4}{a^2}$$

Die beiden Lösungen sind: $xy = c, \quad y^2 = x^2 + \frac{x^4}{a^2}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

VI) In einer Curve sei der Abstand der Tangente vom Coordinatenursprunge gleich der doppelten Senkrechten, welche vom Endpunkte der Abscisse auf den Radiusvector OP gefällt wird; man sucht die zugehörige Curve.

$$\frac{y - xy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$(x^2 + y^2)(y - xy')^2 = 4x^2y^2(1 + y'^2)$$

Dividiert man die Gleichung durch x^4 und setzt $y = xt$,

$$y'^2 - \frac{2t(1 + t^2)}{1 - 3t^2} \cdot y' = \frac{t^2(3 - t^2)}{1 - 3t^2}$$

1. $y' = -t$

$xy = c$ wie in V.

2. $y' = \dfrac{3t - t^3}{1 - 3t^2}$

$$log\, x = \frac{1}{2} \int \frac{1 - 3t^2}{t + t^3} \cdot dt$$

Zerlegt man den Bruch $\dfrac{1 - 3t^2}{t + t^3}$ in Partialbrüche,

$$\frac{1 - 3t^2}{t + t^3} = \frac{A}{t} + \frac{B + Ct}{t + t^2}$$

so erhält man $A = 1$, $B = 0$, $C = -4$.

$$log\, x = \frac{1}{2}[log\, t - 2\, log\,(1 + t^2)] + Constante$$

$$= \frac{1}{2}\, log \frac{t}{(1 + t^2)^2} = log \left[\frac{t}{(1 + t^2)^2}\right]^{\frac{1}{2}} + Constante$$

$$x = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot c}{1 + \left(\frac{y^2}{x^2}\right)}, \quad Constante = log\, c$$

$$(x^2 + y^2)^2 = c^2 \cdot xy$$

Der Aufgabe genügt mithin jede gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten die Coordinatenachsen sind, andrerseits die Fusspunktcurve jeder solchen Hyperbel, d. h. eine Lemniscate. Die Gleichung der Fusspunktcurve erhält man im Allgemeinen auf folgende Weise. Es seien x und y die Coordinaten eines beliebigen Punktes der gegebenen Curve, m und n die Coordinaten des sogenannten Poles, u und v die Coordinaten des Fusspunktes der vom Pole C auf die im Punkte (x, y) gezogenen Tangente, so erhalten wir aus der Figur leicht folgende Gleichungen:

$$v - y = y'(u - x), \qquad v - n = -\frac{1}{y'}(u - m)$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

daraus
$$u - m = \frac{(x-m)\,y'^2 - (y-n)\,y'}{1+y'^2}$$
$$v - n = -\frac{(x-m)\,y' - (y-n)}{1+y'^2}$$

Setzen wir nun, um aus dem allgemeinen Integrale $xy = c$ in Beispiel VI die singuläre Lösung zu erhalten,
$$m = 0 \quad n = 0 \quad xy = c^2 \quad y' = -\frac{c^2}{x^2}$$
so ist:
$$u = \frac{c^4 x + c^2 x^2 y}{c^4 + x^4}, \quad v = \frac{c^2 x^3 + x^4 y}{c^4 + x^4}$$
oder:
$$ux^4 + uc^4 = 2c^4 x, \quad vx^4 + vc^4 = 2c^2 x^3$$

Durch Elimination von x aus diesen beiden Gleichungen erhält man $(v^2 + u^2)^2 = 4c^2 uv$ die Gleichung der Lemnisate, die singuläre Lösung zu VI.

VII) Die Differentialgleichung: $y - xy' = F(y')$ lässt sich, wie folgt, auflösen.
$$y - px = F(p), \quad y' = p$$
$$p - p - x\frac{dp}{dx} = F'(p) \cdot \frac{dp}{dx} \text{ durch Differentiation } (F'(p) + x)\frac{dp}{dx} = 0.$$

1. $\frac{dp}{dx} = 0$, $p = C$ wird substituirt in die gegebene Gleichung, gibt das allgemeine Integral $y - Cx = F(C)$.

2. $F'(p) + x = 0$, daraus $p = y' = \frac{dy}{dx} = f(x)$, das Integral dieser Gleichung gibt die singuläre Lösung.

VIII) Auf VII lässt sich folgende Differentialgleichung zurückführen:
$$4ay'^3 = (2xy' - y)^2$$
Nimmt man $y = z^n$, $y' = nz^{n-1} \cdot \frac{dz}{dx}$
$$4an^3 z^{4n-3}\left(\frac{dz}{dx}\right)^3 = \left(2nx\frac{dz}{dx} - z^n\right)^2$$
$$4an^3 z^{4n-3}\left(\frac{dz}{dx}\right)^3 = z^{n-1}\left(2nx\frac{dz}{dx} - z\right)$$
$$4an^3 z^{2n-2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^3 = 2nx\frac{dz}{dx} - z$$
$$\sqrt{4an^3 z^{2n-2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^3} = \sqrt{2nx\frac{dz}{dx} - z}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wählt man nun $n = \frac{1}{2}$, so erhält man

$$z - x\frac{dz}{dx} = -\sqrt{\frac{ap^3}{2}}$$

1. $$\left[\frac{3ap^2}{4}\left(\frac{2}{ap^3}\right)^{\frac{1}{2}} - x\right] \cdot \frac{dp}{dx} = 0$$

$$\frac{dp}{dx} = 0 \qquad p = C$$

$$y^2 - Cx = -\sqrt{\frac{aC^3}{2}}, \quad \text{weil } y = z^n = z^{\frac{1}{2}}$$

$$y^2 = C\left(x - \sqrt{\frac{aC}{2}}\right), \quad C = \frac{2c^2}{a}$$

$$y^2 = \frac{2c^2}{a}(x - c) \quad \text{das allgemeine Integral}$$

2. $$\frac{3ap^2}{4}\left(\frac{2}{ap^3}\right)^{\frac{1}{2}} = x$$

$$\frac{9ap}{8} = x^2, \qquad p = \frac{8x^2}{9a}$$

$$p = \frac{dz}{dx} = \frac{8x^2}{9a}, \quad dz = \frac{8x^2}{9a}dx$$

$$z = \frac{8}{9a}\int x^2 \,.\, dx$$

$$y^2 = \frac{8x^3}{27a} \quad \text{die singuläre Lösung.}$$

Will man aus dem allgemeinen Integrale $y^2 - \frac{2c^2}{a}(x - c) = 0$, die singuläre Lösung, so differenziere man $y^2 - \frac{2c^2}{a}(x - c) = 0$ nach c

$$0 - \frac{4cx}{a} + \frac{6c^2}{a} = 0$$

$$c = \frac{2x}{3}$$

also:

$$y^2 - \frac{8x^2}{9a}\left(x - \frac{2x}{3}\right) = 0$$

$$y^2 = \frac{8x^3}{27a}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

IX) $OT \,.\, OU = K^2$,

T bedeute den Durchschnittspunkt der Tangente mit der Abscissenachse.

$$\frac{(xy' - y)(x + yy')}{y'} = K^2$$

$$(xyy' - y^2)(x + yy') = K^2 yy'$$

Setzt man $$x^2 + y^2 = z$$

dann ist $$x + yy' = \frac{1}{2} \cdot \frac{dz}{dx}$$

und $$xyy' - y^2 = \frac{1}{2}\frac{dz}{dx} - x^2 - y^2 = \frac{1}{2}\frac{dz}{dx} - z$$

$$\left(\frac{1}{2}\frac{dz}{dx} - z\right) \cdot \frac{dz}{dx} = 2K^2\left(\frac{1}{2}\frac{dz}{dx} - x\right)$$

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 - \frac{2z}{x} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{2K^2}{x} \cdot \frac{dz}{dx} - 4K^2$$

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 - \frac{2(z + K^2)}{x} \cdot \frac{dz}{dx} = -4K^2$$

Addiert man beiderseits $\left(\frac{z + K^2}{x}\right)^2$, so erhält man

$$\left(\frac{dz}{dx} - \frac{z + K^2}{x}\right)^2 = \left(\frac{z + K^2}{x}\right)^2 - 4K^2.$$

$$\frac{z + K^2}{x} = t, \quad z + K^2 = xt, \quad \frac{dz}{dx} = t + x\frac{dt}{dx}$$

$$x^2\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 = t^2 - 4K^2$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dt}{t^2 - 4K}$$

$$\log x = \log(t + \sqrt{t^2 - 4K^2}) + Constante$$

$$x = C(t + \sqrt{t^2 - 4K^2}), \quad Constante = \log C$$

$$\left(\frac{x}{C} - t\right)^2 = t^2 - 4K^2$$

$$\frac{x^2}{C^2} - \frac{2tx}{C} + 4K^2 = 0, \quad tx = x^2 + y^2 + K^2$$

$$x^2 - 2C(x^2 + y^2 + K^2) = -4C^2K^2$$

$$x^2(1 - 2C) - 2Cy^2 = 2CK^2(1 - 2C)$$

$$\frac{x^2}{2CK^2} - \frac{y^2}{K^2(1 - 2C)} = 1$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$2CK^2 = c^2$$

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2 - K^2} = 1$$

Als allgemeine Lösung findet man demnach eine Schaar concentrischer Ellipsen $c^2 > K^2$ oder Hyperbeln $c^2 < K^2$, deren gemeinsame lineare Excentricität $= K$ ist. Die singuläre Lösung gibt 2 Punkte, nämlich die jenen Kegelschnitten gemeinschaftlichen Brennpunkte.

X) Man verlangt die Curve, für welche

$$MU \,.\, QU = h^2$$

$$\frac{yy' \,.\, y\,(y - xy')}{x} = h^2$$

$$y^3y' - xy^2y'^2 = h^2x$$

$$y'^2 - \frac{y}{x}\,y' = -\frac{h^2}{y^2}$$

Die Gleichung ist nicht homogen, wird es aber, wenn man $y = \sqrt{xu}$ setzt.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{x}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{u}} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{x}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{u}} \cdot \frac{du}{dx}\right)^2 - \sqrt{\frac{u}{x}}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{x}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{u}} \cdot \frac{du}{dx}\right) + \frac{h^2}{xu} = 0$$

$$\frac{x}{4u}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - \frac{u}{4x} + \frac{h^2}{xu} = 0$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2 = \frac{u^2 - 4h^2}{x^2}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 4h^2}}$$

$$\log x = \log\left(u + \sqrt{u^2 - 4h^2}\right) + \log C$$

$$x = C\left(u + \sqrt{u^2 - 4h^2}\right)$$

$$\frac{x^2}{C^2} - \frac{2ux}{C} + 4h^2 = 0$$

$$x^2 - 2Cy^2 + 4C^2h^2 = 0 \qquad u = \frac{y^2}{x}$$

$$2C = c$$

$$x^2 - cy^2 + c^2h^2 = 0 \quad \text{das allgemeine Integral.}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Differenziert man die Gleichung nach c,

$$-y^2 + 2h^2c = 0, \qquad c = \frac{y^2}{2h^2},$$

so gibt $c = \frac{y^2}{2h^2}$ in die Gleichung für das allgemeine Integral substituirt,

$$y^4 = 4h^2x^2 \text{ als singuläres Integral.}$$

Man erhält die singuläre Lösung auch ohne Kenntnis des allgemeinen Integrales aus der gegebenen Differentialgleichung, indem man dieselbe nach y' differenziert und aus dieser neuen und früheren Gleichung y' eliminiert.

$$y'^2 - \frac{y}{x} \cdot y' + \frac{h^2}{y^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1$$

$$2y' - \frac{y}{x} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2$$

$$y' = \frac{y}{2x} \text{ in 1 substituiert,}$$

$$\frac{y^2}{4x^2} - \frac{y^2}{2x^2} + \frac{h^2}{y^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y^4 = 4h^2x^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf