Wissenschaftliche Beilage zum Programm der Luisenstädtischen Oberrealschule zu Berlin. Ostern 1885.

Geometrische und mechanische Aufgaben zur numerischen Auflösung von Gleichungen höherer Grade.

REALGYMNASIUM DÜSSELDORF BIBLIOTHEK

Von

Dr. E. Lampe,
Professor.

qbe
36
(1885)

BERLIN 1885.
R. Gaertners Verlagsbuchhandlung
Hermann Heyfelder.

1885. Programm Nr. 97.

98, 136

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

UNIVERSITÄTS- UND LANDESBIBLIOTHEK DÜSSELDORF

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Als ich vor acht Jahren aus meinen allmählich entstandenen Kollektaneen das Werkchen zusammenstellte „Geometrische Aufgaben zu den kubischen Gleichungen" (Berlin, 1877), legte ich das Hauptgewicht auf die aus der Natur der Gleichungen zu folgernden allgemeinen Ergebnisse, fügte jedoch zur näheren Beleuchtung immer Beispiele in Zahlen hinzu. In der folgenden Sammlung, die ich als eine Fortsetzung jener ersten gebe, werden hauptsächlich Aufgaben für die numerische Auflösung von algebraischen Gleichungen beliebiger Grade oder von transcendenten Gleichungen behandelt. Die Anordnung ist nach dem inneren Zusammenhange einzelner Gruppen von Problemen, nicht etwa nach der Gattung der die Lösungen vermittelnden Gleichungen getroffen worden.

Als allgemeine Auflösungsmethode (besonders für solche Lehranstalten, an denen kubische und biquadratische Gleichungen nicht zum Pensum gehören) ist die regula falsi zu gebrauchen. In Eulers „Introductio in analysin" lib. II cap. XXII findet man die bekanntesten Aufgaben über die Kreistranscendenten mittelst dieser Methode behandelt. Aufser den nach diesem Vorbilde in den Aufgabensammlungen gegebenen Beispielen habe ich manche andere, insbesondere über Sehnen- und Tangenten-Polygone eines Kreises oft bearbeiten lassen und veröffentliche sie bei dieser Gelegenheit. Führt man die Bezeichnung $f(x) = 0$ für die zu lösende Gleichung ein, so lässt sich die regula falsi in dem Satze aussprechen: Für kleine Änderungen der Variablen x ist die Änderung $\Delta f(x)$ einer Funktion der Änderung Δx der Variablen proportional. Hierdurch ist der Übergang zur Analysis angebahnt.

Die Resultate werden meistens auf sieben Stellen mitgeteilt, damit der mit fünfstelligen Tafeln ausgerüstete Rechner die erreichte Genauigkeit kontrollieren kann. Für Ungenauigkeiten in der letzten Stelle bitte ich um Nachsicht.

Erste Abteilung.

Geometrische Aufgaben.

I. Einen gegebenen Winkel σ so in n Teile $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ zu zerlegen, dafs 1) die Sinus, 2) die Cosinus, 3) die Tangenten der Teilwinkel n gegebenen Zahlen $a_1, a_2, \ldots a_n$ proportional sind.

Sobald $n > 2$ ist, oder σ nicht die besonderen Werte $\frac{1}{2}\pi$, π, etc. hat, ist die allgemeine Lösung der Aufgabe für die Fälle 1) und 2) mit komplizierten Rechnungen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

verbunden (Vergl. V—XII). Für die Probleme ad 1) und 2) folgt daher nur je ein Zahlenbeispiel, das nach der regula falsi zu berechnen ist. (S. auch meine „Aufg. zu den kub. Gl.“ V, p. 10).

1) In den Bogen eines Kreissektors, dessen Centriwinkel 80° beträgt, lassen sich vier Sehnen von den Längen 1, 2, 3, 4 eintragen. Den Durchmesser x des Kreises zu berechnen.

$\sigma = 40° = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$; $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 4$. Man hat $1 = x \sin \alpha_1$, $2 = x \sin \alpha_2$, $3 = x \sin \alpha_3$, $4 = x \sin \alpha_4$; hieraus berechnet man $x = 14{,}441\,762$; $\alpha_1 = 3° 58' 13'', 96$; $\alpha_2 = 7° 57' 37'', 16$; $\alpha_3 = 11° 59' 21'', 89$; $\alpha_4 = 16° 4' 46'', 99$.

Zieht man auch die Fälle inbetracht, in denen Teilwinkel negativ sind, so findet man: $x_2 = 11,\ 639\ 95$ (α_1 negativ); $x_3 = 8,\ 873\ 273$ (α_2 neg.); $x_4 = 6,\ 111\ 94$ (α_3 neg.); $x_5 = 6,\ 326\ 556$ ($\alpha_1 + \alpha_2$ neg.); $x_6 = 4,\ 243\ 383$ ($\alpha_1 + \alpha_3$ neg.).

2) Den Winkel 170° in vier Teile zu zerlegen, deren Cosinus den Zahlen 3, 4, 5, 6 proportional sind.

Man setze: $3 = x \cos \alpha_1$, $4 = x \cos \alpha_2$, $5 = x \cos \alpha_3$, $6 = x \cos \alpha_4$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 170°$. Hieraus folgt: $x = 6,\ 351\ 384$ und $\alpha_1 = 61° 48' 49'', 80$; $\alpha_2 = 50° 57' 56'', 93$; $\alpha_3 = 38° 4' 21'', 39$; $\alpha_4 = 19° 8' 51'', 85$.

3) Lösung der Tangentenaufgabe. Die Summe der Kombinationen zur Klasse k von den Tangenten der Winkel α_i sei T_k, von den a_i ferner c_k, so ist

$$\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) = \operatorname{tg}\sigma = \frac{T_1 - T_3 + T_5 - \ldots}{1 - T_2 + T_4 - \ldots}.$$

Man setze: $a_1 = x \operatorname{tg} \alpha_1$, $a_2 = x \operatorname{tg} \alpha_2$, ... $a_n = x \operatorname{tg} \alpha_n$ und substituiere die hieraus folgenden Werte $a_i : x$ für $\operatorname{tg} \alpha_i$ in den Ausdruck für $\operatorname{tg} \sigma$, so folgt:

$$x^n - c_2\, x^{n-2} + c_4\, x^{n-4} - \ldots - \operatorname{cotg} \sigma\, (c_1\, x^{n-1} - c_3\, x^{n-3} + c_5\, x^{n-5} - \ldots) = 0.$$

Bemerkung. Sind die $a_1, a_2, \ldots a_n$ alle positiv, so hat diese Gleichung lauter reelle Wurzeln. Läfst man x nämlich in $a_i : x = \operatorname{tg} \alpha_i$ stetig alle Werte von $+\infty$ über 0 nach $-\infty$ durchlaufen, so nimmt α_i alle Werte von 0 über $\frac{1}{2}\pi$ bis π an, die Summe σ also alle Werte von 0 bis $n\pi$, d. h. σ durchläuft die n Intervalle $(0 \ldots \pi)$, $(\pi \ldots 2\pi)$, ..., $((n-1)\pi \ldots n\pi)$. In jedem Intervalle ist aber je ein Winkel, dessen Tangente den gegebenen Wert von $\operatorname{tg} \sigma$ hat. Jedesmal, wenn dies eintritt, ist die Gleichung erfüllt, liefert also der bezügliche Wert von x eine Wurzel der Gleichung n^{ten} Grades. — Man kann dieses Ergebnis auch so aussprechen:

Wenn die Gleichung $x^n - c_1\, x^{n-1} + c_2\, x^{n-2} - \ldots + (-1)^n\, c_n = 0$ lauter reelle positive Wurzeln besitzt, so hat die Gleichung $x^n - c_2\, x^{n-2} + c_4\, x^{n-4} - \ldots + C\,(c_1\, x^{n-1} - c_3\, x^{n-3} + c_5\, x^{n-5} - \ldots) = 0$ lauter reelle Wurzeln (C eine beliebige positive oder negative Zahl; vergl. die Bem. in II^a.).

Numerische Beispiele. 1) $\sigma = 45°$, $n = 3$, $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$; $x^3 - 9x^2 - 23x + 15 = 0$. $x_1 = 10,\ 971\ 696$; $\alpha_1 = 5° 12' 27'', 92$; $\alpha_2 = 15° 17' 33'', 48$; $\alpha_3 = 24° 29' 58'', 60$. $x_2 = 0,\ 543\ 547\ 5$ ($\sigma = 225°$); $x_3 = -2,\ 515\ 243$ ($\sigma = 405°$).

2) $\sigma = 135°$, $n = 4$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 4$; $x^4 + 10\,x^3 - 35\,x^2 - 50\,x + 24 = 0$. $x_1 = 3,\ 503\ 833_4$; $\alpha_1 = 15° 55' 43'', 82$; $\alpha_2 = 29° 43' 4'', 35$; $\alpha_3 = 40° 34' 13'', 09$; $\alpha_4 = 48° 46' 58'', 77$. $x_2 = 0,\ 387\ 139\ 9$ ($\sigma = 315°$); $x_3 = -1,\ 418\ 566\ 2$ ($\sigma = 495°$); $x_4 = -12,\ 472\ 408$ ($\sigma = 675°$).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3) $a_1 = -1$, $a_2 = -2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 4$. In diesem Falle kann man σ gleich $\alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_1 - \alpha_2$ setzen, wenn die Lösung zunächst positive Winkel im ersten Quadranten berücksichtigen soll. Es können, wenn einige der Zahlen a_i negativ sind, einzelne Lösungen oder auch alle imaginär werden. Aus $\sigma = \operatorname{arctg} \frac{a_1}{x} + \operatorname{arctg} \frac{a_2}{x} + \operatorname{arctg} \frac{a_3}{x} + \operatorname{arctg} \frac{a_4}{x}$ folgt zur Bestimmung eines Maximum oder Minimum von σ die Gleichung:

$$\frac{a_1}{a_1^2 + x^2} + \frac{a_2}{a_2^2 + x^2} + \frac{a_3}{a_3^2 + x^2} + \frac{a_4}{a_4^2 + x^2} = 0.$$

Sind alle a_i positiv, so hat diese Gleichung keine positive Wurzel für x^2, liefert also kein Maximum oder Minimum, d. i. keine Beschränkung im Werte von σ. Im gegebenen Falle aber findet man nach Einsetzung der Werte für die a_i die kubische Gleichung $2x^6 + 19x^4 - 67x^2 - 264 = 0$ mit der einzigen positiven Wurzel für x^2: 4, 493 339, also $x = 2$, 119 750. Hieraus berechnet man $\operatorname{tg} \sigma = 1$, 120 169 4; $\sigma = 48° 14' 38''$, 42; $\operatorname{cotg} \sigma = C = 0$, 892 722. — Mithin darf σ bei Beschränkung auf Winkel im ersten Quadranten nicht gröfser als dieser Wert, $\operatorname{tg} \sigma$ nicht gröfser als 1, 120 169 4 gegeben sein, wenn überhaupt die Aufgabe Lösungen besitzen soll. — Ist die Anzahl der gegebenen a eine ungerade, so existiert dagegen stets mindestens eine Lösung.

Numerische Beispiele zu den oben gegebenen a_i. A) $\sigma = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} = \operatorname{arccotg} 2 = 26° 33' 54''$, 18. Also: $x^4 - 8x^3 + 7x^2 - 44x + 24 = 0$; $x_1 = 0$, 565 780 4; $x_2 = 7$, 776 410. — B) $\sigma = \frac{1}{4}\pi$; $x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 22x + 24 = 0$; $x_1 = 1$, 385 679 6; $x_2 = 3$, 229 310. — C) $\sigma = \operatorname{arc\,tg} 2 = 73° 26' 5''$, 82; $x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 11x + 24 = 0$; keine reelle Lösung.

II[a]. Von einem Tangentenpolygon eines Kreises mit ungerader Seitenanzahl $(2n + 1)$ und lauter konkaven Winkeln sind die Seiten $a_1, a_2, \ldots a_{2n+1}$ in dieser Reihenfolge gegeben. Den Radius x des Kreises zu finden.

Die Berührungspunkte der Seiten mögen diese bezw. in die Segmente t_1 und t_2, t_2 und t_3, ... t_{2n+1} und t_1 teilen, so dafs also $a_1 = t_1 + t_2$, $a_2 = t_2 + t_3$, ... $a_{2n+1} = t_{2n+1} + t_1$ ist. Setzt man $s = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n+1})$, so berechnet man sofort $t_1 = s - (a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n})$, $t_2 = s - (a_3 + a_5 + \ldots + a_{2n+1})$, u.s.w. Man verbinde nun das Kreiscentrum mit allen Ecken des Polygons und mit allen Berührungspunkten der Seiten und benenne die zu den Segmenten t_1, t_2, ... am Centrum gehörenden Winkel bezw. mit α_1, α_2, ..., so ist:

(1.) $t_1 = x \operatorname{tg}\alpha_1$, $t_2 = x \operatorname{tg}\alpha_2$, ... $t_{2n+1} = x \operatorname{tg}\alpha_{2n+1}$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{2n+1} = K\pi$, wo K eine ganze Zahl bedeutet. Es sei nun c_k die Summe der Combinationen der t_i zur Klasse k, so folgt aus $\operatorname{tg} K\pi = 0$:

(2.) $c_1 x^{2n} - c_3 x^{2n-2} + c_5 x^{2n-4} - \ldots + (-1)^n c_{2n+1} = 0$.

Bemerkung. Für Polygone mit lauter konkaven Winkeln sind alle t_i positiv, und dann besitzt die Gleichung (2.) n reelle positive Wurzeln für x^2. Variiert nämlich x in (1.) von 0 bis ∞, so durchläuft jeder Winkel α_i alle Werte von $\frac{1}{2}\pi$ bis 0, die Summe der Winkel die Werte von $(2n + 1)\frac{1}{2}\pi = n\pi + \frac{1}{2}\pi$ bis 0. Für je einen Wert von x zwischen 0 und ∞ nimmt diese Summe also die Werte $n\pi$, $(n-1)\pi$, ... 2π, π an, ist mithin die Gleichung (2.) erfüllt. Es giebt folglich n Polygone, und zwar schliefsen diese nach

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

n, n—1, ... 2, 1 Umläufen. — Ferner folgt: Hat die Gleichung $x^{2n+1} - c_1 x^{2n} + c_2 x^{2n-1} - \ldots = 0$ lauter positive reelle Wurzeln, so haben auch die Gleichungen $c_1 x^n - c_3 x^{n-1} + c_5 x^{n-2} - \ldots = 0$ und $x^n - c_2 x^{n-1} + c_4 x^{n-2} - \ldots = 0$ lauter positive reelle Wurzeln. Hat die Gleichung $x^{2n} - c_1 x^{2n-1} + c_2 x^{2n-2} - \ldots = 0$ lauter positive reelle Wurzeln, so haben auch die Gleichungen $c_1 x^{n-1} - c_3 x^{n-2} + c_5 x^{n-3} - \ldots = 0$ und $x^n - c_2 x^{n-1} + c_4 x^{n-2} - \ldots = 0$ lauter positive reelle Wurzeln. (Vergl. die Bem. in I).

Numerische Beispiele für das Tangentensiebeneck.

1) Die Seiten $a_1, a_2, \ldots a_7$ sind bezw. gleich 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17. Hieraus berechnet man die t_i bez. gleich 7, 4, 8, 5, 9, 6, 10; danach: $c_1 = 49$, $c_3 = 11515$, $c_5 = 305\,956$, $c_7 = 604\,800$. Nach Division der Gleichung (2.) durch 49 folgt: $x^6 - 235\,x^4 + 6244\,x^2 - 12342\,\frac{6}{7} = 0$ und hieraus $x_1 = 14,311\,079$; $x_2 = 5,295\,659$; $x_3 = 1,425\,937$.

2) Die Seiten sind gegeben mit den Werten 3, 5, 7, 9, 11, 13, 8. Die t_i findet man: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Hieraus $c_1 = 28$, $c_3 = 1960$, $c_5 = 13\,132$, $c_7 = 5040$. Die kubische Gleichung ist: $x^6 - 70\,x^4 + 469\,x^2 - 180 = 0$. Ihre Wurzeln: $x_1 = 7,908\,710$; $x_2 = 2,653\,995\,5$; $x_3 = 0,639\,190\,1$.

Anmerkung. Für das reguläre Polygon von $2n + 1$ Seiten 1 und dem Radius x des eingeschriebenen Kreises gilt die Gleichung:

$$\binom{2n+1}{1} x^{2n} - \binom{2n+1}{3} x^{2n-2} + \binom{2n+1}{5} x^{2n-4} - \ldots + (-1)^n \binom{2n+1}{2n+1} = 0.$$

II^b. Bei einem Tangentenpolygone eines Kreises mit gerader Seitenanzahl 2n und lauter konkaven Winkeln sind die Segmente $t_1, t_2, \ldots t_{2n}$ der einzelnen Seiten in dieser Reihenfolge gegeben. Den Radius x des Kreises zu finden*).

Die zu lösende Gleichung ist nach der unter I gegebenen Entwickelung:

$$c_1 x^{2(n-1)} - c_3 x^{2(n-2)} + \ldots + (-1)^{n-1} c_{2n-1} = 0.$$

Numerisches Beispiel für das Achteck. Die t_i seien der Reihe nach gleich 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Man berechnet $c_1 = 36$, $c_3 = 4536$, $c_5 = 67\,284$, $c_7 = 109\,584$. Die kubische Gleichung wird: $x^6 - 126\,x^4 + 1869\,x^2 - 71\,044 = 0$. Ihre Wurzeln $x_1 = 10,446\,488$; $x_2 = 3,874\,653$; $x_3 = 1,363\,076$.

Bemerkung. Sind die Segmente t_i beliebig gegebene Zahlen, so dürfte es am einfachsten sein, die c_k direkt zu berechnen, obschon dieses Verfahren etwas mühsam ist. Für die Berechnung der Summe der Kombinationen c_k von den Zahlen 1, 2, ... n kann man besondere Formeln aufstellen. Es sei $(n+1)_i$ der i^{te} Binominal-Koeffizient für die $(n+1)^{te}$ Potenz, so ist:

---

*) Bei einem Tangentenpolygone mit gerader Seitenanzahl ist die Summe der 1ten, 3ten, 5ten, ... Seite gleich der Summe der 2ten, 4ten, 6ten, ... Seite. Ist diese Bedingung erfüllt, so kann man aus den Seiten a_i nicht ihre Segmente t_i finden, weil nun eine Gleichung zu wenig gegeben ist. Da aber die Lösung direkt von den Segmenten abhängt, so kann man für das 2n-Eck die Aufgabe an die gegebenen Segmente knüpfen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$c_1 = (n+1)_2,\ c_2 = \frac{1}{4}(n+1)_3 \cdot (3n+2),\ c_3 = (n+1)_4 \cdot (n+1)_2,$$

$$c_4 = \frac{1}{48}(n+1)_5 \cdot (15n^3 + 15n^2 - 10n - 8),$$

$$c_5 = \frac{1}{8}(n+1)_6 \cdot (n+1)_2 (3n^2 - n - 6),$$

$$c_6 = \frac{1}{576}(n+1)_7 \cdot (63n^5 - 315n^3 - 224n^2 + 140n + 96),$$

$$c_7 = \frac{1}{504}(n+1)_8 \cdot (n+1)_2 (63n^4 - 126n^3 - 399n^2 + 238n + 560),$$

$$2^8 . 3 . 5 . 7 . c_8 = (n+1)_9 \cdot (945n^7 - 2205n^6 - 11025n^5 + 5145n^4 + 37240n^3 + 19740n^2 - 13552n - 8064), \ldots.$$

Der Beweis dieser Formeln kann unter anderem an die Gleichung $x^n - c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} - \ldots + (-1)^n c_n = 0$ anknüpfen, welche die Zahlen $1, 2, \ldots n$ zu Wurzeln hat. Aus den Newtonschen Formeln $s_1 - c_1 = 0$, $s_2 - c_1 s_1 + 2c_2 = 0$, $s_3 - c_1 s_2 + c_2 s_1 - 3c_3 = 0$ etc. und aus den bekannten Formeln für die Summen $s_i = 1^i + 2^i + \ldots + n^i$ lassen sich die obigen Ausdrücke für die c_k ableiten.

Zusatz. Wenn ein beweglicher Punkt die Seiten des Tangentenpolygons der Reihe nach durchläuft, so dreht sich die Verbindungslinie dieses Punktes mit dem Kreiscentrum um das letztere. Bei den bisher betrachteten Tangentenvielecken ist die Drehungsrichtung der Verbindungslinie für den ganzen Umfang dieselbe. Betrachtet man aber auch solche Vielecke, bei denen die Drehungsrichtung rückläufig werden kann, so hat man nach Festsetzung einer positiven Richtung für die Winkel α_i unter ihnen zwischen positiven und negativen Winkeln zu unterscheiden und, weil $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$ ist, die zu negativen Winkeln gehörigen Tangentensegmente t_i negativ zu rechnen (und umgekehrt). Die Bedingung für den Anschlufs der letzten Seite an die erste Ecke ist $\Sigma\alpha_i = k\pi$, worin k, die Anzahl der Umläufe, $0, 1, 2, \ldots$ sein kann.

Beispiele. 1. Viereck mit den Tangentensegmenten $3, 4, -5, -2\frac{1}{2}$. $(t_1, t_2, -t_3, -t_4)$.

$$x^2 (t_1 + t_2 - t_3 - t_4) = t_3 t_4 (t_1 + t_2) - t_1 t_2 (t_3 + t_4).$$

Damit x reell werde, mufs man haben:

entweder $t_1 + t_2 > t_3 + t_4$ und $t_3 t_4 (t_1 + t_2 > t_1 t_2 (t_3 + t_4)$,

oder $t_1 + t_2 < t_3 + t_4$ und $t_3 t_4 (t_1 + t_2) < t_1 t_2 (t_3 + t_4)$.

Für die gegebenen Zahlen ist $x = \sqrt{481} = 21,931\,712$; $k = 0$.

2. Fünfeck mit den Tangentensegmenten $1, 2, -3, 4, -5$. $x^4 + x^2 - 120 = 0$; $x = 3,235\,097$; $k = 0$.

3. Siebeneck mit den Tangentensegmenten $1, -2, 3, 4, 5, -6, -7$. $x^6 + 11x^4 - 710x^2 - 2520 = 0$; $x = 4,858\,343$; $k = 0$.

4. Siebeneck mit den Tangentensegmenten $-1, 2, 3, 4, 5\ 6, 7$. $13x^6 - 685x^4 + 1462x^2 + 2520 = 0$; $x_1 = 1,852\,055_3$; $k_1 = 2$; $x_2 = 7,098\,158\,5$; $k_2 = 1$; $x_3^2 = -1,121\,652\,1$.

Bestimmt man im Falle 3. das Maximum von $\Sigma\alpha_i$, so hat man die Gleichung zu lösen:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\frac{1}{1+x^2} - \frac{2}{4+x^2} + \frac{3}{9+x^2} + \frac{4}{16+x^2} + \frac{5}{25+x^2} - \frac{6}{36+x^2} - \frac{7}{49+x^2} = 0.$$

Man findet $x^2 = 113,3$; $x = 10,644\,247$; $\Sigma\alpha_i = 6^\circ\,31'\,1''$.

III. Die Tangenten der Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ eines ebenen Polygons von n Seiten sind mit n gegebenen Zahlen $t_1, t_2, \ldots t_n$ proportional; die Winkel zu berechnen.

Ist x ein Proportionalitäts-Faktor so kann man setzen: $t_1 = x\,\mathrm{tg}\,\alpha_1$, $t_2 = x\,\mathrm{tg}\,\alpha_2$, $\ldots t_n = x\,\mathrm{tg}\,\alpha_n$; $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = (n-2)\,\pi$.

Daher erhält man für x dieselbe Gleichung wie unter II^a und II^b. Ist x gefunden, so mufs man alle Winkel aufsuchen, deren Summe $(n-2)\pi$ ist*).

Numerisches Beispiel für das Sechseck. Die t_i sind bezw. gleich 1, 2, 3, 4, 5, 6 gegeben. Die Gleichung für x ist $x^4 - 35\,x^2 + 84 = 0$; $x_1 = \pm 5,692\,807$; $x_2 = \pm 1,609\,952\,9$. 1) Zum positiven Werte x_1 gehörig findet man sechs spitze Winkel: $\alpha_1 = 9^\circ\,57'\,46'',62$; $\alpha_2 = 19^\circ\,21'\,26'',73$; $\alpha_3 = 27^\circ\,47'\,18'',15$; $\alpha_4 = 35^\circ\,5'\,36'',43$; $\alpha_5 = 41^\circ\,17'\,34'',37$; $\alpha_6 = 46^\circ\,30'\,17'',75$. 2) Zum positiven Werte x_2 gehören $\alpha_1 = 31^\circ\,50'\,45'',27$; $\alpha_2 = 51^\circ\,10'\,0'',31$; $\alpha_3 = 61^\circ\,46'\,47'',03$; $\alpha_4 = 68^\circ\,4'\,32'',85$; $\alpha_5 = 72^\circ\,9'\,6'',95$; $\alpha_6 = 74^\circ\,58'\,47'',59$. Die spitzen Winkel unter 1) ergeben die Summe π. Beschränkt man die Betrachtung auf Sechsecke mit der Winkelsumme $4\,\pi$, so erhält man aus 1) 20 Sechsecke, die je drei konvexe Winkel $(\pi + \alpha_i)$ und drei spitze α_i enthalten. Der negative Wert von x_1 liefert stumpfe Winkel oder konvexe im vierten Quadranten; daraus folgen keine Sechsecke mit der Winkelsumme $4\,\pi$. Die Winkel unter 2) ergeben die Summe $2\,\pi$; daher folgen aus ihnen 15 Sechsecke mit je zwei konvexen und vier spitzen Winkeln. Der negative Wert von x_2 endlich ergiebt ein Sechseck mit lauter stumpfen Winkeln.

IV. Alle Tangentenfünfecke eines Kreises zu finden, die von fünf gegebenen Seiten a, b, c, d, e in beliebiger Folge gebildet werden.

Von den 120 Permutationen der Elemente a b c d e geben die 5 cyklischen Permutationen sämtlicher Elemente einer beliebig herausgegriffenen Permutation und die 5 inversen dieser fünf Permutationen dasselbe Fünfeck. Somit giebt es 12 Anordnungen der Elemente a b c d e, die verschiedene Fünfecke liefern, z. B. a b c d e, a b c e d, a b d c e, a b d e c, a b e c d, a b e d c, a c b d e, a c b e d, a c d b e, a c e b d, a d b c e, a d c b e. Für jede Anordnung folgen besondere Werte der t_i und je zwei Werte des Radius x (nach II^a, Gl. (1.) Im ganzen giebt es also 24 Fünfecke**).

Numerisches Beispiel. $a = 6$, $b = 7$, $c = 8$, $d = 9$, $e = 10$. Die Tangentensegmente t_i für die zwölf verschiedenen oben gegebenen Anordnungen, die Werte der c_k für die quadratische Gleichung $c_1\,x^4 - c_3\,x^2 + c_5 = 0$, so wie die Wurzeln x_1 und x_2 dieser Gleichungen sind aus folgender Tabelle zu entnehmen:

---

*) Bei dieser Gelegenheit ist darauf hinzuweisen, dass die Winkelsumme eines n-Eckes $(n - 2m)\pi$ statt $(n - 2)\pi$ ist, wenn die Peripherie des Polygons m Umläufe macht.

**) Für ein $(2\,n+1)$-Eck erhält man $\frac{1}{2}\,n\,.\,(2\,n)!$ Lösungen, für ein $2\,n$-Eck $\frac{1}{2}(n-1)\,.\,(2\,n-1)!$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	c_1	c_3	c_5	x_1	x_2
1)	4	2	5	3	6	20	580	720	5, 263 115	1, 140 009 5
2)	3	3	4	4	6	20	606	864	5, 366 563	1, 224 745
3)	5	1	6	3	5	20	538	450	5, 102 529	0, 929 620 6
4)	3	3	4	5	5	20	616	900	5, 409 453	1, 240 089
5)	5	1	6	4	4	20	550	480	5, 157 292	0, 949 913
6)	4	2	5	5	4	20	602	800	5, 357 853	1, 180 427
7)	3	3	5	2	7	20	550	630	5, 128 586	1, 094 353 6
8)	2	4	4	3	7	20	562	672	5, 181 557	1, 118 689
9)	5	1	7	2	5	20	494	350	4, 895 908	0, 854 448 2
10)	5	1	7	3	4	20	520	420	5, 016 525	0, 913 496
11)	3	3	6	1	7	20	498	378	4, 910 835	0, 885 269 7
12)	4	2	7	1	6	20	484	336	4, 846 095	0, 845 790 1

Bemerkung. So wie man zu fünf gegebenen Seiten zwölf quadratische Gleichungen findet, die den zwölf verschiedenen Anordnungen jener Seiten entsprechen, so giebt es auch zu fünf gegebenen Tangentensegmenten bei frei gelassener Reihenfolge zwölf verschiedene Fünfecke, die alle demselben Kreise umgeschrieben sind.

V. Den Durchmesser x eines Kreises numerisch zu berechnen, dem sich ein Sehnensechseck mit den Seiten 1, 2, 3, 4, 5, 6 einschreiben läfst.

Die zu den Seiten gehörigen Centriwinkel seien der Reihe nach $2\alpha_1$, $2\alpha_2$, ... $2\alpha_6$, so hat man:

$$1 = x \sin \alpha_1,\ 2 = x \sin \alpha_2,\ 3 = x \sin \alpha_3,\ 4 = x \sin \alpha_4,\ 5 = x \sin \alpha_5,\ 6 = x \sin \alpha_6,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 = 0, \text{ oder } \pi, \text{ oder } 2\pi.$$

Die Auflösung dieser Gleichungen erfolgt mit Anwendung der regula falsi. Um über die Anzahl der Lösungen Klarheit zu erhalten, bemerke man, dafs der Durchmesser x gleich 6 oder gröfser als 6 sein mufs. Setzt man x gleich 6, so folgt: $\alpha_1 = 9° 35', 6$, $\alpha_2 = 19° 28', 3$, $\alpha_3 = 30°$, $\alpha_4 = 41° 48'$, $\alpha_5 = 56° 26', 6$, $\alpha_6 = 90°$. Mithin die Summe aller Winkel $247° 18', 5$.

1) Nimmt x zu von 6 bis ∞, so nimmt die Summe der Winkel ab von $247° 18', 5$ bis Null, erreicht also einmal den Wert 180°, nämlich für $x_1 = 7, 292\ 619$.

2) $-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6$ hat für $x = 6$ den Wert $228° 7', 2$, für $x = \infty$ den Wert 0; folglich einmal den Wert 180°, nämlich für $x_2 = 6, 803\ 248$.

3) $\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6$ hat für $x = 6$ den Wert $208° 7', 2$, für $x = \infty$ den Wert 0; den Wert 180° für $x_3 = 6, 366\ 152$.

4) $\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6$ wird für $x = 6$ zu $187° 18', 5$, zu 180° für $x_4 = 6, 038\ 424$.

5) $-(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6$ wird für $x = 6$ zu $189° 10', 6$, zu 180° für $x_5 = 6, 057\ 080$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

6) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5 - (\alpha_4 + \alpha_6)$ ist negativ für $x = 6$. Für ein sehr grofses x sind die Winkel den Zahlen 1, 2, ... 6 proportional, ist also jene Differenz proportional mit $1 + 2 + 3 + 5 - (4 + 6)$, also positiv; folglich ist sie Null für einen Wert zwischen 6 und ∞, nämlich für $x_6 = 6,\ 606\ 384$.

7) $\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_6 - (\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5)$ ist positiv für $x = 6$, für sehr grofse Werte von x proportional mit $1 + 3 + 6 - (2 + 4 + 5)$, also negativ; mithin Null für einen Zwischenwert von x, nämlich $x = 6,\ 253\ 026$.

Bemerkung. Die zu lösende algebraische Gleichung ist (cf. Möbius, Crelle's Journ. Bd. 3) für x^2 vom siebenten Grade im Falle des Sehnen-Fünfecks und Sechsecks. Alle Wurzeln derselben sind also bei dem gewählten Beispiele reell; daher ist es auch unmöglich, mehr Wurzeln zu finden. — Durch Permutation der Seiten folgen (vergl. IV) $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ verschiedene Formen des Sechsecks für jeden einzelnen der gefundenen Durchmesser.

VI. Den Durchmesser x eines Kreises numerisch zu berechnen, dem sich ein Sehnenfünfeck mit fünf gegebenen Seiten einschreiben läfst.

In Bezug auf die Behandlung dieser Aufgabe und anderer, die folgen, ist auf Aufgabe V zu verweisen.

1) Beispiel mit 7 Lösungen. Gegebene Seiten: 101, 102, 103, 104, 105.

$x_1 = 108,\ 398\ 8$ (zwei Umläufe); $x_2 = 175,\ 242\ 8$ (ein Umlauf);

$x_3 = 120,\ 458\ 68$ (α_1 neg.); $x_4 = 119,\ 741\ 84$ (α_2 neg.); $x_5 = 118,\ 990\ 18$ (α_3 neg);

$x_6 = 118,\ 197\ 9$ (α_4 neg.); $x_7 = 117,\ 370\ 63$ (α_5 neg.). — Mit Ausnahme vom ersten Falle ist die Winkelsumme der α immer π.

2) Beispiel mit 5 Lösungen. Gegebene Seiten: 5, 6, 7, 8, 9.

$x_1 = 12,\ 039\ 514$ (ein Umlauf); $x_2 = 9,\ 605\ 819$ (α_1 neg.); $x_3 = 9,\ 204\ 340$ (α_2 neg.); $x_4 = 12,\ 071\ 02$ ($\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_4 + \alpha_5$); $x_5 = 9,\ 011\ 814$ ($\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 = \alpha_3 + \alpha_5$).

3) Beispiel mit 3 Lösungen. Gegebene Seiten: 2, 3, 4, 5, 7.

$x_1 = 7,\ 556\ 555$ (ein Umlauf); $x_2 = 7,\ 000\ 682$ ($\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_5$); $x_3 = 7,\ 978\ 396$ ($\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 = \alpha_2 + \alpha_5$).

4) Beispiel mit 1 Lösung. Gegebene Seiten: 1, 2, 3, 4, 9.

$x = 12,\ 221\ 709$ ($\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \alpha_5$).

VII. Bei einem Sehnenfünfeck im Kreise mit gegebenem Durchmesser d ist jede folgende Seite um 1 grösser als die vorangehende. Wie gross ist die erste, a) wenn $d = 10$, das Fünfeck mit einem Umlaufe schliefst, b) wenn $d = 100$, das Fünfeck mit zwei Umläufen schliefst?

$$x = d \sin \alpha_1,\ x + 1 = d \sin \alpha_2,\ x + 2 = d \sin \alpha_3,\ x + 3 = d \sin \alpha_4,\ x + 4 = d \sin \alpha_5.$$

a) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = \pi$; daraus folgt $x = 3{,}784\ 363$, wenn $d = 10$.

b) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 2\pi$; „ „ $x = 93{,}004\ 07$, „ $d = 100$.

Bemerkung. In den nächsten Aufgaben über Sehnenpolygone werden die algebraischen Gleichungen für den Durchmesser x aufgestellt werden. Oft ist es aber vorzuziehen, statt dieselben direkt aufzulösen, x wie in V, VI u. VII nach der regula falsi zu berechnen. Hierbei wird die Natur des Polygons zugleich mitbestimmt, die bei blosser Berechnung von x unklar bleibt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

VIII. Ein Sehnenfünfeck im Kreise hat zwei Paare gleicher Seiten a, a und b, b, die letzte Seite gleich c. Den Kreis-Durchmesser x zu berechnen.

Es möge gehören der Centriwinkel 2α zu a, 2β zu b, 2γ zu c. Dann ist $2\alpha + 2\beta + \gamma = 0$, π oder 2π, $\sin(2\alpha + 2\beta) = \pm \sin\gamma$, $a = x \sin\alpha$, $b = x \sin\beta$, $c = x \sin\gamma$. Entwickelt man $\sin(2\alpha + 2\beta)$ nach Funktionen von α und β, ersetzt diese durch ihre Ausdrücke in a, b und x und befreit die Gleichung von den Quadratwurzeln, so folgt:

$$(1.)\ x^6 (2a + 2b + c)(2a - 2b + c)(2a + 2b - c)(2a - 2b - c)$$
$$+ 8x^4 \{(a^4 + b^4)(c^2 - 4a^2 - 4b^2) + 8a^2 b^2 (a^2 + b^2 + c^2)\}$$
$$+ 16x^2 \{(a^4 + b^4)^2 - 4a^2 b^2 (a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2)\} + 64 a^4 b^4 c^2 = 0.$$

Bemerkung 1. Ist $2a + c = 2b$, oder $2b + c = 2a$, so wird eine Wurzel der Gleichung unendlich; die beiden anderen bestimmen sich aus einer quadratischen Gleichung.

Bemerkung 2. Ist $c = 0$, so folgt nach Fortlassung des Faktors $(a^2 - b^2)^2$ die doppelte Wurzel $x^2 = a^2 + b^2$.

Bemerkung 3. Ist $a = b$, das Fünfeck also aus den Seiten a, a, a, a, c, so folgt die irreduktible Gleichung:

$$(16a^2 - c^2) x^6 - 80 a^4 x^4 + 128 a^6 x^2 - 64 a^8 = 0.$$

Für $a = c$ folgt hieraus:

$$(3x^2 - 4a^2)(5x^4 - 20 a^2 x^2 + 16 a^4) = 0.$$

Der Faktor $3x^2 - 4a^2$ giebt den Durchmesser des umgeschriebenen Kreises für das gleichseitige Dreieck mit der Seite a, der andere Faktor die beiden regulären Fünfecke mit der Seite a. Setzt man in der kubischen Gleichung dieser Bemerkung c gleich Null, so folgt $(x^2 - 2a^2)^2 (x^2 - a^2) = 0$. Die Bedeutung der beiden Faktoren liegt auf der Hand.

Bemerkung 4. Setzt man in (1.) $b = c$, so zerlegt sich die Gleichung in:

$$\{(4a^2 - b^2) x^2 - 4a^4\} \{(4a^2 - 9b^2) x^4 - 4x^2 (a^4 - 6b^4) - 16 b^6\} = 0.$$

Der erste Faktor giebt den Durchmesser des umgeschriebenen Kreises für das Dreieck a, a, b (hierzu ist zu nehmen b einmal positiv, dann negativ), der andere die Kreis-Durchmesser für die Fünfecke mit den Seiten a, a, b, b, b. Bedingung für die Realität der beiden letzteren Werte ist $3b \gtreqless 2a$.

Numerische Beispiele:

1) $a = 3$, $b = 5$, $c = 7$ (also 3, 3, 5, 5, 7). $6831 x^6 - 703\,824 x^4 + 19\,255\,424 x^2 - 158\,760\,000 = 0$. $x = \frac{14}{3}\sqrt{3} = 8{,}092\,9037$ $(\alpha + \beta + \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}\pi)$.

Die beiden anderen Wurzeln sind imaginär.

2) $a = 3$, $b = 7$, $c = 5$ (also 3, 3, 7, 7, 5). $585 x^6 - 70\,704 x^4 + 1\,807\,744 x^2 + 12\,446\,784 = 0$.

$x_1 = 8{,}795\,606$ $(\alpha + \beta + \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}\pi)$; $x_2 = 7{,}007\,138$ $(\alpha + \beta - \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}\pi)$; x_3^2 ist negativ, also x_3 imaginär.

3) $a = 5$, $b = 7$, $c = 3$ (also 5, 5, 7, 7, 3). $441 x^6 - 48\,944 x^4 - 194\,176 x^2 + 96\,040\,000 = 0$. $x_1 = 9{,}363\,515$ $(\alpha + \beta + \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}\pi)$; $x_2 = 7{,}927\,022$ $(\alpha + \beta - \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}\pi)$; x_3^2 ist negativ, also x_3 imaginär.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

4) $a = 7$, $b = 3$, $c = 8$ (7, 7, 3, 3, 8, mithin $2a = 2b + c$). $105x^4 - 18\,212x^2 + 777\,924 = 0$. $x_1 = 9{,}864\,946$ $(\alpha + \beta + \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}\pi)$; $x_2 = 8{,}725\,276$ $(\beta + \frac{1}{2}\gamma - \alpha = 0)$.

5) $a = 7$, $b = 5$, $c = 4$ (7, 7, 5, 5, 4, mithin $2a = 2b + c$). $1085x^4 - 165\,464x^2 + 6\,002\,500 = 0$.

$x_1 = 9{,}645\,768$ $(\alpha + \beta + \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}\pi)$; $x_2 = 7{,}711\,066$ $(\alpha + \beta - \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}\pi)$.

6) $a = 5$, $b = 3$, $c = 4$ (5, 5, 3, 3, 4, mithin $2a = 2b + c$).

$165x^4 - 12\,104x^2 + 202\,500 = 0$.

$x_1 = 6{,}895\,242$ $(\alpha + \beta + \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}\pi)$; $x_2 = 5{,}080\,670$ $(\alpha + \beta - \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}\pi)$.

IX. Ein Sehnenfünfeck im Kreise hat drei Seiten gleich a, die vierte gleich b, die fünfte gleich c. Den Kreis-Durchmesser x zu berechnen.

Mit Beibehaltung der Bezeichnungen in VIII hat man hier $3\alpha + \beta + \gamma = 0$, π oder 2π; daraus entwickelt man:

$$x^8 (3a + b + c)(3a + b - c)(3a - b + c)(3a - b - c)$$
$$- 12a^2 x^6 \{4a^2 (9a^2 - b^2 - c^2) - 3b^2 c^2\} + 32a^4 x^4 (27a^4 - 3b^2 c^2 - a^2 b^2 - a^2 c^2) - 64a^6 x^2 (12a^4 - b^2 c^2) + 256a^{12} = 0.$$

Bemerkung. Es sei $b = c$, $a \gtrless b$, so erhält man (Vgl. VIII Bemerk. 4):

$$(3x^2 - 4a^2)^2 \{(9a^2 - 4b^2) x^4 - 4x^2 (6a^4 - b^4) + 16a^6\} = 0.$$

Ist $a = c$, $a \gtrless b$, so folgt (vergl. VIII, Bemerk. 3 u. 4)

$$\{(4a^2 - b^2) x^2 - 4a^4\} \cdot \{(16a^2 - b^2) x^6 - 80a^4 x^4 + 128a^6 x^2 - 64a^8\} = 0.$$

Der zweite Faktor giebt die kubische Gleichung für x^2 beim Kreisfünfecke a, a, a, a, b. Ihre Diskriminante Δ findet man aus:

$$27 (16a^2 - b^2)^4 \cdot \Delta = 2^{12} . a^{16} b^2 (3^3 . b^2 - 2^5 a^2).$$

Die kubische Gleichung hat eine reelle Wurzel, wenn $b > \frac{4}{9} a \sqrt{6}$ (S. X); drei reelle Wurzeln, wenn $b < \frac{4}{9} a \sqrt{6}$; zwei gleiche Wurzeln, wenn $b = \frac{4}{9} a \sqrt{6}$, nämlich $x_1 = x_2 = a \sqrt{\frac{6}{5}}$, $x_3 = a \sqrt{3}$ (Wurzeln der Gleichung: $25x^6 - 135a^2 x^2 + 216a^4 x^2 - 108a^6 = 0$).

Numerisches Beispiel für das Fünfeck a, a, a, b, b und $b < \frac{4}{9} a \sqrt{6}$.

Es sei $a = 1$, $b = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. $31x^6 - 40x^4 + 16x^2 - 2 = 0$. $x_1 = 0{,}803\,636$; $x_2 = 0{,}620\,536$; $x_3 = 0{,}509\,3407$.

Xa. Den Radius R der umgeschriebenen Kugel für denjenigen halbregulären Körper zu berechnen, bei dem in jeder Ecke vier gleichseitige Dreiecke und ein Quadrat zusammentofsen.

Jede Ecke des Körpers ist Spitze einer fünfseitigen Pyramide, deren Basis ein Kreisfünfeck mit den Seiten a, a, a, a, $a\sqrt{2}$ ist, und deren Seitenkanten die Länge a haben. Nach VIII, Bemerk. 3 und IX, Bemerk. findet man den Durchmesser x des dem Fünfecke umgeschriebenen Kreises aus der Gleichung $7x^6 - 40a^2 x^4 + 64a^4 x^2 - 32a^6 = 0$,

also $x^2 = \frac{2}{21} a^2 \left\{ 20 + (566 + 42\sqrt{32})^{\frac{1}{3}} + (566 - 42\sqrt{33})^{\frac{1}{3}} \right\}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Der gesuchte Radius R wird leicht als Radius der um die Pyramide beschriebenen Kugel gefunden, nämlich $R^2 (4a^2 - x^2) = a^2$; mithin

$$R^2 = a^2 : \frac{2}{21} \left\{ 22 - (566 + 42\sqrt{33})^{\frac{1}{3}} - (566 - 42\sqrt{33})^{\frac{1}{3}} \right\}; R = 1{,}343\,716a.$$

Xb. Den Radius R der umgeschriebenen Kugel für denjenigen halbregulären Körper zu berechnen, bei dem in jeder Ecke vier gleichseitige Dreiecke und ein reguläres Fünfeck zusammenstofsen.

Das die Lösung vermittelnde Kreisfünfeck hat die Seiten a, a, a, a, $\frac{1}{2} a (1 + \sqrt{5})$. Man findet den Durchmesser x des ihm umgeschriebenen Kreises aus $(29 - \sqrt{5}) x^6 - 160 a^2 x^4 + 256 a^4 x^2 - 128 a^6 = 0$; also: $x = 1{,}945\,465\,8a$; hieraus den Radius der dem Körper umgeschriebenen Kugel $R = 2{,}155\,842a$.

Bemerkung. Die Frage nach den Radien der umgeschriebenen Kugeln für die anderen 11 archimedischen Körper führt nur auf quadratische Gleichungen. Die Lösungen mögen hier angefügt werden. In jeder Ecke des halbregulären Körpers stofsen zusammen (alle Polygone sind regulär): 1) 1 Dreieck, 2 Sechsecke, $R = \frac{1}{4} a \sqrt{22}$; 2) 1 Dreieck, 2 Achtecke, $R = \frac{1}{2} a \sqrt{7 + 4\sqrt{2}}$; 3) 1 Viereck, 2 Sechsecke, $R = \frac{1}{2} a \sqrt{10}$; 4) 1 Dreieck, 2 Zehnecke, $R = \frac{1}{4} a \sqrt{74 + 30\sqrt{5}}$; 5) 1 Fünfeck, 2 Sechsecke, $R = \frac{1}{4} a \sqrt{58 + 18\sqrt{5}}$; 6) 2 Dreiecke, 2 Vierecke, $R = a$; 7) 2 Dreiecke, 2 Fünfecke, $R = \frac{1}{2} a (1 + \sqrt{5})$; 8) 1 Viereck, 1 Sechseck, 1 Achteck, $R = \frac{1}{2} a \sqrt{13 + 6\sqrt{2}}$; 9) 1 Viereck, 1 Sechseck, 1 Zehneck, $R = \frac{1}{4} a \sqrt{31 + 12\sqrt{5}}$; 10) 1 Dreieck, 3 Vierecke, $R = \frac{1}{2} a \sqrt{5 + 2\sqrt{2}}$; 11) 1 Dreieck, 2 Vierecke, 1 Fünfeck, $R = \frac{1}{2} a \sqrt{11 + 4\sqrt{5}}$; 12) und 13) Xa u Xb. Hiernach kann man die Frage nach dem Volumen dieser Körper leicht beantworten,

Für die unendliche Serie der halbregulären Körper, die — Körperstumpfe vorstellend — zwei reguläre n - Ecke als Deck- und Grundfläche, 2n gleichseitige Dreiecke als Seitenflächen besitzen, findet man das Volumen v, falls man $\varphi = \frac{\pi}{2n}$ setzt,

$$v = \frac{n a^3}{12 \sin^2 2\varphi} \sqrt{\frac{\sin^3 3\varphi}{\sin \varphi}} \cdot \text{Z. B. } n = 3, \text{ (Oktaeder) } v = \tfrac{1}{3} a^3 \sqrt{2};\ n = 4,$$

$v = \frac{1}{3} a^3 (\sqrt[4]{8} + \sqrt[4]{2})$; $n = 5$ (Mittelkörper des Ikosaeders), $v = \frac{1}{6} a^3 (5 + 2\sqrt{5})$; $n = 6$, $v = a^3 \sqrt{2 + 2\sqrt{3}}$; $n = 8$, $v = \frac{2}{3} a^3 \sqrt{6w^3 + 2w^2 - 2w}$, wo $w = \sqrt{2 + \sqrt{2}} = 2 \cos. 22^\circ, 5$.

XI. Bei einem Sehnenzehneck im Kreise sind sieben Seiten gleich a, drei gleich b. Den Kreisdurchmesser x zu finden.

Sind 2α und 2β die zu den Sehnen a und b gehörigen Centriwinkel, so hat man $7\alpha + 3\beta = 0, \pi, 2\pi, 3\pi$ oder 4π. Mithin $\sin 7\alpha = \pm \sin 3\beta$. Aus den Entwickelungen von $\sin 7\alpha$ und $\sin 3\beta$ nach Potenzen resp. von $\sin \alpha$ und $\sin \beta$ und aus $a = x \sin \alpha$, $b = x \sin \beta$ folgt das Gleichungspaar: $(7a \pm 3b) x^6 - 4 (14 a^3 \pm b^3) x^4 + 112 a^5 x^2 - 64 a^7 = 0$.

Numerisches Beispiel. $a = 1$, $b = 2$. Die beiden Gleichungen sind: $13 x^6 - 88 x^4 + 112 x^2 - 64 = 0$ und $x^6 - 24 x^4 + 112 x^2 - 64 = 0$. Die Wurzeln der ersten: $x_1 = 4{,}238\,331$; $x_2 = 2{,}318\,085$; $x_3 = 0{,}814\,265$; die einzige reelle der zweiten: $x = 2{,}307\,578\,6$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Bemerkung. Sind von einem Sehnenpolygon von 2 n Seiten n gleich a und n gleich b gegeben, so ist $n\alpha + n\beta = k\pi$, also $\alpha + \beta = \frac{k\pi}{n}$, $\sin\alpha : \sin\beta = a : b$, und es ist eine der ersten Aufgaben der Trigonometrie, aus diesen Gleichungen α und β zu berechnen und zu konstruieren. Ist n eine Zahl, für welche die Kreisteilung mit Zirkel und Lineal ausführbar ist, so erhält man durch Entwickelung der Gleichungen $\sin n\alpha = \pm \sin n\beta$ Gleichungen, die sich auf quadratische reduzieren lassen. So folgt für das Sehnenzehneck mit 5 Seiten a und 5 Seiten b aus $\sin 5\alpha = \pm \sin 5\beta$:

$$x^2 = 2(a^2 + ab + b^2) \pm \tfrac{2}{5}\sqrt{5}\,(a^2 + 3ab + b^2),$$
$$x^2 = 2(a^2 - ab + b^2) \pm \tfrac{2}{5}\sqrt{5}\,(a^2 - 3ab + b^2).$$

Für das Sehnenachteck erhält man aus $\sin 4\alpha = \pm \sin 4\beta$ die kubische Gleichung: $x^6 - 5(a^2 + b^2)x^4 + 8(a^4 + a^2b^2 + b^4)x^2 - 4(a^6 + a^4b^2 + a^2b^4 + b^6) = 0$, mit den Wurzeln; $x_1^2 = 2(a^2 + b^2 + ab\sqrt{2})$, $x_2^2 = a^2 + b^2$, $x_3^2 = 2(a^2 + b^2 - ab\sqrt{2})$.

XII. Bei einem Sehnenachtecke im Kreise sind sieben Seiten gleich a, eine gleich b. Den Kreisdurchmesser x zu berechnen.

Man findet x aus einer der beiden Gleichungen:

$$(7a - b)\,x^6 - 56a^3x^4 + 112a^5x^2 - 64a^7 = 0,$$
$$(7a + b)\,x^6 - 56a^3x^4 + 112a^5x^2 - 64a^7 = 0.$$

Numerische Beispiele.

1) $a = 1$, $b = 1/2$.

$13x^6 - 112x^4 + 224x^2 - 128 = 0$ und $15x^6 - 112x^4 + 224x^2 - 128 = 0$.

Die erste Gleichung hat die Wurzeln $x_1 = 1,045\,353\,6$ $(7\alpha + \beta = 3\pi)$; $x_2 = 1,222\,614\,2$ $(7\alpha - \beta = 2\pi)$; $x_3 = 2,455\,165$ $(7\alpha + \beta = \pi)$. Die zweite hat die Wurzeln $x_1 = 1,011\,437\,7$ $(7\alpha - \beta = 3\pi)$; $x_2 = 1,339\,394\,7$ $(7\alpha + \beta = 2\pi)$; $x_3 = 2,156\,312\,5$ $(7\alpha - \beta = \pi)$.

2) $a = 1$, $b = 6$.

$x^6 - 56x^4 + 112x^2 - 64 = 0$; $x_1 = 7,344\,782$ $(7\alpha - \beta = 0)$.

$13x^6 - 56x^4 + 112x^2 - 64 = 0$; $x_1 = 0,937\,439\,3$ (unbrauchbar).

3) $a = 1$, $b = 1$.

$3x^6 - 28x^4 + 56x^2 - 32 = 0$; $x_1^2 = 4 - 2\sqrt{2}$ $(\alpha = \tfrac{3}{8}\pi)$; $x_2^2 = \tfrac{4}{3}$ $(\alpha = \tfrac{1}{3}\pi)$; $x_3^2 = 4 + 2\sqrt{2}$ $(\alpha = \tfrac{1}{8}\pi)$.

$x^6 - 7x^4 + 14x^2 - 8 = 0$; $x_1^2 = 1$ $(\alpha = \pi)$; $x_2^2 = 2$ $(\alpha = \tfrac{1}{4}\pi)$; $x_3^2 = 4$ $(\alpha = \tfrac{1}{6}\pi)$.

Die Wurzeln $\alpha = \tfrac{1}{3}\pi$ und $\alpha = \tfrac{1}{6}\pi$ geben uneigentliche Achtecke; das bezügliche Sechseck und das doppelt zu zählende Dreieck sind durch eine in positiver und sofort in negativer Richtung hinzuzufügende Seite a zu Achtecken zu ergänzen.

Bemerkung. Nach Analogie von XI und XII lassen sich durch Zerlegung einer geraden Zahl in zwei ungerade noch viele Aufgaben bilden, die auf Gleichungen von nicht zu hohen Graden ohne komplizierte Zwischenrechnungen führen. Ein Sehnenzehneck aus 9 Seiten a und einer Seite b führt auf Gleichungen vierten Grades, ein Sehnenzwölfeck aus 7 Seiten a und 5 Seiten b auf Gleichungen dritten Grades, u. s. w.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Beispiele. Sehnenzehneck aus 9 Seiten a, einer Seite b ($r =$ Radius):

$$(9a \pm b)\, r^8 - 30a^3r^6 + 27r^4 - 9r^2 + 1 = 0.$$

Also für $a = 1$, $b = 2$:

$7r^8 - 30r^6 + 27r^4 - 9r^2 + 1 = 0$, $r_1 = 1,789\,477$ ($\alpha = 16^\circ\, 13'\, 29'',48$); $r_2 = 0,494\,5940$ (unbrauchbar),

$11r^8 - 30r^6 + 27r^4 - 9r^2 + 1 = 0$, $r_1 = 1,083\,315$ ($\alpha = 27^\circ\, 29'\, 13'',015$); $r_2 = 1$, $\alpha = {}^1/_6\, \pi$.

Für $a = 1$, $b = 1$:

$8r^8 - 30r^6 + 27r^4 - 9r^2 + 1 = 0$, $r_1 = {}^1/_2\,(1 + \sqrt{5})$, $r_2 - {}^1/_2\,(-1 + \sqrt{5})$, $r_3 = {}^1/_2\,\sqrt{2}$, $r_4 = 2$.

$10r^8 - 30r^6 + 27r^4 - 9r^2 + 1 = 0$, $r_2 - \sqrt{{}^1/_{10}\,(5 + \sqrt{5})}$, $r_2 = \sqrt{{}^1/_{10}\,(5 - \sqrt{5})}$, $r_3 = \sqrt{{}^1/_2\,(2 + \sqrt{2})}$, $r_4 = \sqrt{{}^1/_2\,(2 - \sqrt{2})}$.

XIII. Den Winkel x zu bestimmen aus den Gleichungen:

a) $16 \sin x \sin 2x \sin 3x \sin 4x = 3$,

b) $16 \cos x \cos 2x \cos 3x \cos 4x = 1$.

Lösung. Für jedes ungerade n gelten die Formeln:

$$\alpha)\ 2^{\frac{1}{2}(n-1)} \sin\frac{\pi}{n} \sin\frac{2\pi}{n} \sin\frac{3\pi}{n} \ldots \sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \sqrt{n},$$

$$\beta)\ 2^{\frac{1}{2}(n-1)} \cos\frac{\pi}{n} \cos\frac{2\pi}{n} \cos\frac{3\pi}{n} \ldots \cos\frac{(n-1)\pi}{n} = 1.$$

Mithin ist $x = {}^1/_9\,\pi$ eine Lösung von a) und b). Um alle Lösungen zu finden, stellen wir die algebraischen Gleichungen für $\sin x = y$ und $\cos x = z$ auf (Vergl. unten die Bemerkung). Man erhält aus a):

$$(1.)\ 1024\, y^{10} - 2304\, y^8 + 1664\, y^6 - 384\, y^4 + 3 = 0.$$

Ferner ist:

$$(1^a.)\ \sin 9x = y\,(256\, y^8 - 576\, y^6 + 432\, y^4 - 120\, y^2 + 9).$$

Weil manche Lösungen von (1.) $\sin 9x$ zu Null machen, so muss die linke Seite von (1.) mit dem Polynom für $\sin 9x$ einen Faktor gemeinsam haben. Durch das bekannte Divisionsverfahren findet man denselben gleich $64\, y^6 - 96\, y^4 + 36\, y^2 - 3$, so dafs

$$(1^a.)\ \sin 9x = y\,(4\, y^2 - 3)\,(64\, y^6 - 96\, y^4 + 36\, y^2 - 3),$$

$$(1.)\ (16\, y^4 - 12\, y^2 - 1)\,(64\, y^6 - 96\, y^4 + 36\, y^2 - 3) = 0.$$

Da nun $\sin 9x$ gleich 0 ist für $x = {}^1/_9\,\pi$, ${}^2/_9\,\pi$, ${}^3/_9\,\pi$, ${}^4/_9\,\pi$, aber $4\, y^2 - 3$ für $x = {}^1/_3\,\pi$ Null ist, so wird der gemeinsame Faktor sechsten Grades Null für $\pm x = {}^1/_9\,\pi$, ${}^2/_9\,\pi$, ${}^4/_9\,\pi$. Diese drei Werte sind also Lösungen der Gleichung (1.). Die noch übrigen Wurzeln findet man aus der Gleichung $16\, y^4 - 12\, y^2 - 1 = 0$. Hieraus folgt $y = \sin x = \pm\, {}^1/_4\, \sqrt{6 \pm \sqrt{52}}$. Reell ist blofs $\pm x = \arc\sin {}^1/_4\, \sqrt{6 + \sqrt{52}} = 65^\circ\, 19'\, 23'',4$. Dieser Wert kommt noch zu den aus A) leicht erschlossenen Wurzeln ${}^1/_9\,\pi$, ${}^2/_9\,\pi$, ${}^4/_9\,\pi$.

In ähnlicher Weise findet man aus b) für $\cos x = z$:

$$(2.)\ 1024\, z^{10} - 2304\, z^8 + 1792\, z^6 - 544\, z^4 + 48\, z^2 - 1 = 0.$$

$$(2^a.)\ \cos 9x = \sin x\,(256\, z^8 - 448\, z^6 + 240\, z^4 - 40\, z^2 + 1).$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Man suche den gemeinsamen Faktor der linken Seite von (2.) und des Polynoms in z von (2^a.), so findet man:

$$(2^a.)\ \cos 9x = \sin x\,(64z^6 - 96z^4 + 36z^2 - 1)\,(4z^2 - 1),$$
$$(2.)\ (64z^6 - 96z^4 + 36z^2 - 1)\,(16z^4 - 12z^2 + 1) = 0.$$

Da $4z^2 - 1$ für $z^2 = \cos^2 60°$ Null wird, so mufs der gemeinsame Faktor für $z^2 = \cos^2 x = \cos^2 20°$, $\cos^2 40°$, $\cos^2 80°$ Null werden. Aus $16z^4 - 12z^2 + 1 = 0$ folgt: $z = \frac{1}{4}\sqrt{6 \pm 2\sqrt{5}}$, d. h. $z_1 = \pm \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5}) = \pm \cos 36°$, $z_2 = \pm \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5}) = \pm \cos 72°$. Somit sind die Wurzeln der Gleichung b) die Werte: 20°, 40°, 80°, 36°, 72° und andere leicht daraus abzuleitende Werte.

Bemerkung. Die Entwickelung von a) und b) nach Potenzen von $\cos 2x = u$ giebt kleinere Koeffizienten. So erhält man statt der Gleichung (1.) die folgende:

$$32u^5 - 16u^4 - 48u^3 + 16u^2 + 16u - 3 = 0, \text{ oder}$$

$(8u^3 - 6u + 1)\,(4u^2 - 2u - 3) = 0$. Der ganze Gedankengang der Lösung knüpft aber an die Entwickelung von $\sin nx$ und $\cos nx$ nach Potenzen von $\sin x$ und $\cos x$ an; daher ist von diesen auch für die Lösung Gebrauch gemacht.

XIV. Die Werte von x zu bestimmen aus der Gleichung:

$$64 \sin^2 x \cdot \sin^2 2x \cdot \sin^2 3x = 7.$$

Setzt man $\sin x = y$, so folgt:

$$(1.)\ 64y^{12} - 160y^{10} + 132y^8 - 36y^6 + \frac{7}{64} = 0.$$

Aus $\sin 7x = -y\,(64y^6 - 112y^4 + 56y^2 - 7)$ schliefst man, dafs das Polynom sechsten Grades für $y = \sin^2 \frac{1}{7}\pi$, $\sin^2 \frac{2}{7}\pi$, $\sin^2 \frac{3}{7}\pi$ Null wird, und dafs $64 \sin^2 \frac{1}{7}\pi \cdot \sin^2 \frac{2}{7}\pi \cdot \sin^2 \frac{3}{7}\pi = 7$ ist. Dasselbe Polynom erweist sich als Faktor der Gleichung (1.); nach Abtrennung desselben bleibt:

$$(2.)\ y^6 - \frac{3}{4}y^4 - \frac{1}{8}y^2 - \frac{1}{64} = 0.$$

Der einzige reelle Wert von y, der hieraus folgt, ergiebt sich aus $y^2 = 0,906\,8412$, woraus $\pm x = 72°\,13'\,43'',2$ etc. Zu den Wurzelwerten von x, die man aus der Entwickelung von $\sin 7x$ schlofs, kommt dieser noch hinzu.

XV. Die Werte von x zu bestimmen aus der Gleichung:

$$32 \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x \cdot \cos 4x \cdot \cos 5x = 1.$$

Man setze $\cos x = z$, so folgt:

$$(1.)\ 1024z^{15} - 3584z^{13} + 4992z^{11} - 3504z^9 + 1288z^5 - 230z^5 + 15z^3 - \frac{1}{32} = 0.$$

Die linke Seite enthält den Faktor

$$32z^5 - 64z^4 - 32z^3 + 12z^2 + 6z - 1,$$

der für alle ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{11}$ Null wird. Trennt man diesen Faktor von der linken Seite von (1.) ab, so folgt:

$$(2.)\ 32z^{10} + 16z^9 - 72z^8 - 32z^7 + 56z^6 + 21z^5 - 17z^4 - \frac{19}{4}z^3 + \frac{3}{2}z^2 + \frac{3}{16}z + \frac{1}{32} = 0.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Hieraus leitet man her: $z_1 = \cos x_1 = 0,350\,548$, $x_1 = 69^\circ\,28'\,45''$ etc.; $z_2 = \cos x_2 = 0,644\,315$, $x_2 = 49^\circ\,53'\,8''$ etc.; $z_3 = \cos x_3 = -0,552\,682$, $x_3 = 123^\circ\,33'\,4''$ etc.; $z_4 = \cos x_4 = -0,736\,120$, $x_4 = 137^\circ\,24'\,7''$ etc. Diese vier Wurzeln treten zu den fünf ungeraden Vielfachen von $^1/_{11}\,\pi$.

XVI. Gegeben ist ein Rechteck mit den Seiten a und b, ferner eine Strecke von der Länge l. Die Strecke l so zu legen, dafs sie durch eine Ecke des Rechtecks geht und dafs ihre Endpunkte auf den Schenkeln des Gegenwinkels der Ecke liegen.

Es sei x die Strecke, um welche a, y diejenige, um welche b zu verlängern ist bis zu dem betreffenden Endpunkte von l. Dann ist $(a+x)^2 + (b+y)^2 = l^2$, $ab = xy$, folglich:

$$x^4 + 2\,ax^3 - x^2\,(l^2 - a^2 - b^2) + 2\,ab^2\,x + a^2\,b^2 = 0.$$

Ist $l^{\frac{2}{3}} > a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}$, so hat diese Gleichung vier reelle Wurzeln, zwei positive und zwei negative; ist $l^{\frac{2}{3}} < a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}$, so hat sie zwei negative und zwei imaginäre Wurzeln. $l^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}$ giebt das Minimum von l.

Numerische Beispiele. 1) $a = 2$, $b = 1$, $l = 5$; $x^4 + 4\,x^3 - 20\,x^2 + 4\,x + 4 = 0$. $x_1 = 0,612\,9476$; $x_2 = 2,685\,734\,7$; $x_3 = -0,349\,663\,3$; $x_4 = -6,949\,019$.

2) $a = 8$, $b = \sqrt{125}$, $l = 27$; $x^4 + 16\,x^3 - 540\,x^2 + 2000\,x + 8000 = 0$. $x_1 = x_2 = 10$, $x_3 = -2\,(13 - \sqrt{61})$, $x_4 = -2\,(13 + \sqrt{61})$.

XVII. Gegeben ist ein Parallelogramm mit den Seiten a, b und einem Winkel gleich γ, ferner eine Strecke l. Die Strecke l so zu legen, dafs sie durch den Scheitel des Winkels γ geht und dafs ihre Endpunkte auf den Schenkeln des Gegenwinkels von γ liegen.

Es sei x die Strecke, um welche a, y diejenige, um welche b zu verlängern ist bis zu dem betreffenden Endpunkte von l. Dann ist

$$(a+x)^2 + (b+y)^2 - 2\,(a+x)(b+y)\cos\gamma = l^2,\ xy = ab;\ \text{also:}$$

$$x^4 + 2\,x^3\,(a - b\cos\gamma) - x^2\,(l^2 + 4\,ab\cos\gamma - a^2 - b^2) + 2\,ab\,x\,(b - a\cos\gamma) + a^2\,b^2 = 0.$$

Derjenige Wert von x, der bei gegebenen a, b, γ das Minimum von l^2 ergiebt, folgt (nach Division durch $x + a$) aus der Gleichung:

$$x^3 - bx^2\cos\gamma + abx\cos\gamma - ab^2 = 0.$$

Numerisches Beispiel: $a = 2$, $b = 1$, $\gamma = 60^\circ$. Der Minimalwert für l folgt nach Lösung der Gleichung $x^3 - {}^1/_2\,x^2 + x - 2 = 0$, woraus $x = 1,147\,473\,8$, $l = 2,965\,978$.

1) $a = 2$, $b = 1$, $\gamma = 60^\circ$, $l = 5$; $x^4 + 3\,x^3 - 24\,x^2 + 4 = 0$.
$x_1 = 0,421\,081\,1$; $x_2 = 3,593\,150$; $x_3 = -0,399\,685\,9$; $x_4 = -6,614\,545$.

2) $a = 2$, $b = 1$, $\gamma = 60^\circ$, $l = 3$; $x^4 + 4\,x^3 - 8\,x^2 + 4 = 0$.
$x_1 = 1$; $x_2 = 1,320\,884$; $x_3 = -0,648\,060\,8$; $x_4 = -4,672\,823$.

XVIII. Aus einer gegebenen Kugel durch eine zweite Kugel, deren Centrum auf der Oberfläche der ersten liegt, den n^{ten} Teil des Volums herauszuschneiden.

Der Radius der gesuchten Kugel sei x, der gegebenen r, so findet man: $x^4 - \frac{8}{3}\,rx^3 + \frac{16}{3n}\,r^4 = 0$, eine Gleichung, die immer eine positive Wurzel zwischen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

0 und 2 r besitzt, so lange $n > 1$ ist; die zweite positive Wurzel zwischen 2 r und $2\frac{2}{3}$ r ist unbrauchbar.

Numerische Beispiele: 1) $n = 4$ (ein Viertel der Kugel); $x_1 = 0,912643\,5\,r$; $x_2 = 2,589\,916\,r$. 2) $n = 2$ (zwei Viertel); $x_1 = 1,228\,545\,r$; $x_2 = 2,494\,965\,r$. 3) $n = \frac{4}{3}$ (drei Viertel); $x_1 = 1,513\,953\,r$; $x_2 = 2,363\,827\,r$.

XIX. Um einen Punkt der Oberfläche einer gegebenen Kugel als Centrum eine zweite Kugelfläche zu beschreiben, so dafs der Sektor dieser zweiten Kugel, der zum Schnittkreise beider Kugeln gehört, einen gegebenen Inhalt $n \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$ hat.

Ist der Radius der gesuchten Kugel x, so hat man: $x^4 - 2rx^3 + 4nr^4 = 0$. Z. B. für $n = \frac{1}{8}$ folgt $x_1 = 1,930\,504\,r$; $x_2 = 0,733\,614\,8\,r$.

XX. Ein gegebenes Parabelsegment, bei welchem die Sehne senkrecht zur Hauptaxe ist, durch eine Parabel zu halbieren, die denselben Brennpunkt und dieselbe Hauptaxe hat.

Die Sehne des gegebenen Segments sei 2b, ihr Abstand vom Scheitel a, so dafs $b^2 = 2pa$, wenn 2p der Parameter der Parabel ist. Die entsprechenden Stücke bei der zu findenden Parabel seien 2y, x und 2q, so dafs $y^2 = 2qx$. Man hat: $\frac{4}{3}xy = \frac{2}{3}ab$, $a - x = \frac{1}{2}(p - q)$. Hieraus folgt für y die Gleichung: $y^4 + (2a - p)aby - a^2b^2 = 0$ oder $4p^2y^4 + 2(b^2 - p^2)b^3y - b^6 = 0$.

Numerisches Beispiel. $b = 3p$; $y^4 + 108p^3y - 182{,}25p^4 = 0$. $y_1 = 1,623\,218\,8p$; $x_1 = 4,158\,404p$. Die zweite reelle Wurzel $y = -5,227\,648p$ ist geometrisch nicht brauchbar.

XXI. Von einem Rotationsparaboloide schneidet man durch eine zur Hauptaxe senkrechte Ebene ein Segment ab und beschreibt in das letztere denjenigen Kreiscylinder, dessen Mantel ein Maximum ist. Wie grofs ist der Durchmesser der Basis des Segmentes, wenn seine krumme Oberfläche n-mal so grofs ist wie der Mantel jenes Cylinders?

Der Quadratinhalt der Oberfläche des Rotationsparaboloides vom Scheitel bis zur Ordinate $y = b$ ist: $\Omega = \frac{2}{3}\frac{\pi}{p}\left[(p^2 + b^2)^{\frac{3}{2}} - p^3\right]$. Der dem Segmente einbeschriebene Cylinder mit dem Maximum des Mantels hat den Radius $\frac{1}{3}b\sqrt{3}$, die Höhe $\frac{1}{3}\frac{b^2}{p}$, folglich den Mantel $M = \frac{2}{9}\frac{\pi}{p}b^3\sqrt{3}$. Daher folgt die Gleichung $\Omega = n \cdot M$, und hieraus die biquadratische Gleichung für b:

$$(n^2 - 3)b^4 - 9b^2p^2 + 2nbp^3\sqrt{3} - 9p^4 = 0.$$

Numerisches Beispiel: $n = 2$; $b_1 = 2,769\,800p$; $b_2 = -3,432\,53p$ (b_2 geometrisch nicht brauchbar).

Zusatzaufgabe. Bei welchem Segmente eines Rotationsparaboloides ist die krumme Oberfläche n-mal so grofs wie die kreisförmige Basis?

Aus $\Omega = n \cdot \pi b^2$ erhält man $b^4 - (\frac{9}{4}n^2 - 3)p^2b^2 - 3(n-1)p^4 = 0$,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$b^2 = {}^1/_2 p^2 \left\{ (^9/_4 n^2 - 3) + \sqrt{(^9/_4 n^2 - 3)^2 + 12(n-1)} \right\}$. Z. B. für $n = 2$ folgt $b^2 = p^2 (3 + 2\sqrt{3})$; für $n = 3$ ferner $b^2 = {}^1/_8 p^2 (69 + 7\sqrt{105})$.

XXII. Aus einer Kugel durch ein Rotationsparaboloid, dessen Scheitel im Centrum der Kugel liegt, den n^{ten} Teil herauszuschneiden.

Der Schnittkreis der Kugel und des Paraboloides habe den Radius y, den Abstand x vom Centrum, so folgt ${}^1/_2 \pi y^2 x + {}^1/_3 \pi (r-x)^2 (2r + x) = \frac{1}{n} \cdot {}^4/_3 \pi r^3$, $y^2 = r^2 - x^2$, also: $x^3 + 3r^2 x - \frac{8}{n} r^3 = 0$.

Numerisches Beispiel. $n = 4$; $x = 0,596\,071\,6\,r$; $y = 0,802\,931\,3\,r$; $p = 0,540\,789\,6\,r$.

XXIII. Einen gegebenen Kreiskegel durch eine Ebene, die durch eine Tangente zur Basis geht, so zu schneiden, dafs der abgeschnittene Kegel mit elliptischer Basis der n^{te} Teil vom ganzen Kegel ist.

Es sei r der Radius der Basis des Kreiskegels, α der Winkel zwischen der Seite des Kegels und der Basis, φ derjenigen zwischen der schneidenden Ebene und der Basis; dann sind die Halbaxen der Schnittellipse $a = \frac{r \sin \alpha}{\sin(\alpha + \varphi)}$, $b = r \sqrt{\frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin(\alpha + \varphi)}}$; die Höhe des Kegels, dessen Basis die Schnittellipse ist, wird $r \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \alpha}$. Folglich ist das Volumen dieses Kegels:

$$V = {}^1/_3 \pi r^3 \operatorname{tg} \alpha \left\{ \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin(\alpha + \varphi)} \right\}^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{n} \cdot {}^1/_3 \pi r^3 \operatorname{tg} \alpha.$$

$$\text{Hieraus folgt } \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\sin(\alpha - \varphi)} = n^{\frac{2}{3}};\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{n^{\frac{2}{3}} - 1}{n^{\frac{2}{3}} + 1} \operatorname{tg} \alpha.$$

Z. B. 1) $n = 8$; $\operatorname{tg} \varphi = {}^3/_5 \operatorname{tg} \alpha$. 2) $n = 27$; $\operatorname{tg} \varphi = {}^4/_5 \operatorname{tg} \alpha$.

XIV. Das Volumen eines Kreiskegels durch einen parabolischen Schnitt zu halbieren.

Die Ebene der Parabel schneide die Basis in einer Sehne 2b, welche zum Centriwinkel 2φ gehöre; Seite, Höhe, Radius seien bezw. s, h, r. Das Volumen V_1 desjenigen Kegels, welcher den parabolischen Schnitt zur Basis, die Spitze des Kreiskegels zur Spitze hat, ist $V_1 = {}^2/_9 r^2 h \sin^3 \varphi$. Das Volumen V_2 desjenigen Teiles des Kreiskegels, der das kleinere Kreissegment über 2b zur Basis hat, ist $V_2 = {}^1/_3 r^2 h (\varphi - {}^1/_2 \sin 2\varphi)$, mithin die Summe beider: $V_1 + V_2 = V = {}^1/_3 r^2 h (\varphi - {}^1/_2 \sin 2\varphi + {}^2/_3 \sin^3 \varphi) = {}^1/_2 \cdot {}^1/_3 r^2 \pi h$.

Dies giebt für φ die transcendente Gleichung:

$$^1/_2 \pi - \varphi + {}^1/_2 \sin 2\varphi - {}^2/_3 \sin^3 \varphi = 0.$$

Aus ihr folgt $\varphi = 72^\circ 50' 12'',26$; $2s = 1,910\,935\,6\,r$.

Bemerkung. Setzt man $\varphi = {}^1/_3 \pi$, so wird $V = {}^1/_3 r^2 h \cdot {}^1/_3 \pi$, also gleich dem dritten Teile des Kegelvolums. Die Aufgabe, den Kegel durch einen parabolischen Schnitt im Verhältnis 1 : 2 zu teilen, ist daher geometrisch leicht zu bewerkstelligen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

XXV. Einen gegebenen Kreiskegel durch eine zur Axe parallele Ebene so zu schneiden, dafs der Flächeninhalt des hyperbolischen Schnittes der n^{te} Teil vom Axenschnitte des Kegels ist.

Es sei r der Radius der Basis; 2s die Sehne, in welcher die Ebene die Basis schneidet; 2φ der zu 2s gehörige Centriwinkel; α der Winkel zwischen der Seite und der Basis des Kegels; a die Halbaxe der Hyperbel; b die halbe Queraxe, so findet man $b = r \cos \varphi$, $a = r \cos \varphi \operatorname{tg} \alpha$. Der Flächeninhalt eines Hyperbelsegmentes ist $F = xy - ab \log \operatorname{nat} \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)$. In unserem Falle ist $y = r \sin \varphi$, $x = r \operatorname{tg} \alpha$, also

$$F = r^2 \operatorname{tg} \alpha \left(\sin \varphi - \cos^2 \varphi \log \operatorname{nat} \operatorname{tg} \left(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\varphi\right)\right) = \frac{1}{n} r^2 \operatorname{tg} \alpha.$$

Hieraus folgt die transcendente Gleichung für φ:

$$\sin \varphi - \cos^2 \varphi \log \operatorname{nat} \operatorname{tg} \left(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\varphi\right) = \frac{1}{n}.$$

Für $n = 2$ ergiebt sich z. B. $\varphi = 58^\circ\, 8'\, 22''$.

XXVI. Von einem gegebenen Kreiskegel durch eine zur Axe parallele Ebene ein Viertel des Volums abzuschneiden.

Behält man die Bezeichnungen der vorigen Aufgabe bei, so ergiebt sich das Volumen V des abgeschnittenen Stückes:

$$V = \tfrac{1}{3} r^3 \operatorname{tg} \alpha \left\{\varphi - \sin 2\varphi + \cos^3 \varphi \log \operatorname{nat} \operatorname{tg} \left(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\varphi\right)\right\} = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{3} r^3 \pi \operatorname{tg} \alpha.$$

Hieraus folgt die transcendente Gleichung für φ:

$$\varphi - \sin 2\varphi + \cos^3 \varphi \log \operatorname{nat} \operatorname{tg} \left(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\varphi\right) = \tfrac{1}{4}\pi.$$

Aus ihr berechnet man $\varphi = 73^\circ\, 34'\, 25'', 72$.

XXVII. Aus einer gegebenen Kreisfläche durch einen zweiten Kreis, dessen Centrum auf der Peripherie des ersteren liegt, den n^{ten} Teil des Inhaltes herauszuschneiden.

Der Radius des gegebenen Kreises sei r, der des gesuchten ϱ; zur gemeinschaftlichen Sehne gehöre in dem zu findenden Kreise der Centriwinkel 2φ; dann findet man für φ die transcendente Gleichung: $2\varphi \cos 2\varphi - \sin 2\varphi + \frac{n-1}{n}\pi = 0$.

Beispiele. 1) $n = 4$; $\varphi = 67^\circ\, 12'\, 31'', 13$; $\varrho = 0,774\,752\,9\,r$. 2) $n = 2$; $\varphi = 0,952\,8479 = 54^\circ\, 35'\, 39''$; $\varrho = 1,158\,728\,r$.

XXVIII. Aus einem gegebenen Kreise durch eine Parabel, deren Scheitel im Centrum liegt, den n^{ten} Teil des Inhaltes herauszuschneiden.

Es sei r der Radius des Kreises, 2φ der Centriwinkel, der zur gemeinschaftlichen Sehne vom Kreise und von der Parabel gehört, so ist das Parabelsegment $\tfrac{2}{3} r \cos \varphi \cdot 2r \sin \varphi$, das Kreissegment $r^2\varphi - \tfrac{1}{2} r^2 \sin 2\varphi$; folglich gilt für φ die transcendente Gleichung: $\frac{1}{6} \sin 2\varphi + \varphi - \frac{1}{n}\pi = 0$.

Numerische Beispiele: 1) $n = 4$; $\varphi = 0,627\,022\,7 = 35^\circ\, 55'\, 32'', 72$; $\cos\varphi = 0,809\,964\,2$; $2 \sin \varphi = 1,173\,473$; $p = 0,212\,515\,4$. 2) $n = \frac{5}{2}$; $\varphi = 64^\circ 35'\, 59'', 20$; $\cos \varphi = 0,428\,938\,6$; $\sin \varphi = 0,903\,333\,8$; $p = 0,951\,198\,6$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

XXIX. Aus einem gegebenen Kreise durch eine Parabel, deren Brennpunkt im Centrum liegt, den n^{ten} Teil des Inhaltes herauszuschneiden.

Es sei r der Radius des Kreises, 2φ der zur gemeinschaftlichen Sehne beider Curven gehörige Centriwinkel, x und y die Coordinaten des einen Schnittpunktes beider Curven bezogen auf die Hauptaxe und Scheiteltangente der Parabel als Axen, 2p der Parameter der Parabel, dann ist $x = {}^1/_2 p + r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $p = r - r\cos\varphi$; mithin das Parabelsegment $= {}^2/_3 r^2 \sin\varphi\,(1 + \cos\varphi)$, das Kreissegment $r^2\varphi - {}^1/_2 r^2 \sin 2\varphi$. Demnach erhält man für φ die transcendente Gleichung:

$$\varphi + \frac{2}{3}\sin\varphi - \frac{1}{6}\sin 2\varphi = \frac{1}{n}\pi.$$

Beispiel. $n = 2$; $\varphi = 63^\circ\, 27'\, 41'',67$; $y = 0,894\,634\,9r$; $x = 0,723\,398\,9r$; $p = 0,276\,601\,1\,r$.

XXX. Von den beiden Rotationsellipsoiden, die durch Rotation derselben Ellipse das eine Mal um die kleine, das andere Mal um die grosse Axe erzeugt werden, hat das erstere eine doppelt so grosse Oberfläche wie das zweite. Die Ekzentrizität e der Ellipse zu berechnen.

Die Oberfläche des abgeplatteten Rotationsellipsoides ist

$$F_1 = 2\pi a^2 \left(1 + \frac{1-e^2}{2e}\log\text{nat}\frac{1+e}{1-e}\right).$$

Die Oberfläche des verlängerten Rotationsellipsoides ist:

$$F_2 = 2\pi a^2\left(1 - e^2 + \frac{1}{e}\sqrt{1-e^2}\cdot\arcsin e\right).$$

Aus $F_1 = 2F_2$ folgt die zu lösende Gleichung für e. Setzt man in ihr zur Vereinfachung $e = \cos\alpha$, so erhält man:

$$1 + \sin\alpha\,\text{tg}\,\alpha\log\text{nat}\,\text{cotg}\frac{1}{2}\alpha = 2\left(\sin^2\alpha + \left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right)\text{tg}\,\alpha\right).$$

Hieraus berechnet man $\alpha = 22^\circ\, 11'\, 41'',57$; $\log\cos\alpha = \log e = 9,966\,5661$; $e = 0,925\,904\,3$; $\log\sin\alpha = \log\frac{b}{a} = 9,577\,213\,7$; $\frac{b}{a} = 0,377\,758\,0$.

XXXI. Die Oberfläche eines abgeplatteten Rotationsellipsoides ist dreimal so grofs wie der Mantel desjenigen eingeschriebenen Kreis-Cylinders, der das Maximum des Mantels besitzt. Die Ekzentrizität der Ellipse zu berechnen, welche Meridiankurve ist.

Der betreffende Cylinder besitzt einen Mantel von der Gröfse $2\pi a^2 . \sqrt{1-e^2} = 2\pi ab$. Mithin ist die zu lösende transcendente Gleichung für e, bezw. für $e = \cos\alpha$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-e^2}} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{2e}\log\text{nat}\frac{1+e}{1-e} = 3;\ \frac{1}{\sin\alpha} + \text{tg}\,\alpha\log\text{nat}\,\text{cotg}\frac{1}{2}\alpha = 3.$$

Hieraus folgt $\alpha = 25^\circ\, 56'\, 40'',35$; $e = \cos\alpha = 0,899\,217\,8$; $\frac{b}{a} = 0,437\,500\,9$.

XXXII. Die Sehne eines Kreissegmentes ist s, der Bogen b. Den Flächeninhalt des Segmentes zu berechnen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Der zur Sehne gehörige Centriwinkel sei 2φ, so ist $\sin\varphi - \frac{s}{b}\varphi = 0$, eine transcendente Gleichung für φ.

Numerische Beispiele: 1) $s = 13$ cm, $b = 45$ cm; $\varphi = 2,382\,485\,95 = 136°\,30'\,23''$; $r = 9,443\,919$ cm; Inhalt des Segmentes $= 257,0204$ qcm. 2) $s = 24$, $b = 36$; $\varphi = 1,495\,782\,1 = 85°\,42'\,7'',22$; $r = 12,033\,84$; Inhalt des Segmentes $97,482\,23$.

XXXIII. Wie tief sinkt ein cylindrischer Balken vom spezifischen Gewichte s in Wasser ein?

Die Wasseroberfläche bestimmt in der Endfläche des Cylinders eine Sehne, zu welcher der Centriwinkel 2φ gehöre, dann gilt, wenn $s > {}^1/_2$ ist, die Gleichung für φ: $\varphi - 0,5 \sin 2\varphi - (1 - s)\pi = 0$.

Numerische Beispiele: 1) $s = 0,76$; $\varphi = 65°\,5'\,18'',74$; Tiefe des Eintauchens $t = 1,421\,217\,2\,r$. 2) $s = 0,857\,621\,5$; $\varphi = 53°\,7'\,48'',37$; $t = 1,6r$. 3) $r = 5$ cm, $s = 0,425$. Es ist $\varphi - \sin\varphi = 0,85\pi$; $\varphi = 166°\,26'\,12'',64$; $t = 4,409\,576$ cm.

XXXIV. Den Punkt der Kurve $y = \operatorname{tg} x$ zu bestimmen, wo sie am stärksten gekrümmt ist.

Der Krümmungsradius dieser Kurve im Punkte $(x\,y)$ ist:

$$\varrho = \frac{(1 + \cos^4 x)^{\frac{3}{2}}}{2 \sin x \cos^3 x}; \quad \frac{d\varrho}{dx} = \frac{-(1 + \cos^4 x)^{\frac{1}{2}}}{2 \sin^2 x \cos^4 x}(2 \cos^6 x - 3 \cos^4 x - 4 \cos^2 x + 3).$$

Für das Minimum von ϱ bestimmt man x aus der Gleichung $2 \cos^6 x - 3 \cos^4 x - 4 \cos^2 x + 3 = 0$. Hieraus folgt $\cos^2 x = 0,591\,184\,79$, $\pm x = 39°\,44'\,45'',95$; $\varrho = 2,696\,998$. —

Die beiden anderen Wurzeln der kubischen Gleichung $\cos^2 x = 2,110\,838\,7$ und $\cos^2 x = -1,202\,023\,5$ ergeben x imaginär.

XXXV. Den Punkt der Kurven 1) $y = x^2 - x^4$, 2) $y^2 = x^2 - x^4$ zu bestimmen, wo sie am stärksten gekrümmt sind.

1) $\varrho = \frac{(1 + 4x^2 - 16x^4 + 16x^6)^{\frac{3}{2}}}{2(1 - 6x^2)}$; $\frac{d\varrho}{dx}$ wird gleich Null, wenn $28x^6 - 22x^4 + 5x^2 - 1 = 0$, d. h. $x^2 = 0,584\,788\,1$; $x = \pm 0,764\,714$; $\varrho = 0,219\,747\,8$. (Für $x = 0$ ist $\varrho = 0,5$; für $x = \sqrt{0,5}$ ist $\varrho = 0,25$).

2) $\varrho = \frac{(2 - 5x^2 + 4x^4)^{\frac{3}{2}}}{x(-3 + 2x^2)}$; $\frac{d\varrho}{dx}$ wird Null, wenn:

$4x^6 - 10x^4 + 3x^2 + 1 = 0$, d. h. $x^2 = 0,613\,567$; $x = \pm 0,783\,305$; $\varrho = 0,208\,742$.

XXXVI. Vom Punkte $(\xi\,\eta)$ 1) an die Kurve $y = x^2 - x^4$, 2) an die Kurve $y^2 = x^2 - x^4$ die Tangenten zu ziehen.

Die Abscisse des Berührungspunktes sei x, so findet man:

1) $3x^4 - 4x^3\xi - x^2 + 2x\xi - \eta = 0$. Z. B. $\eta = 0, \xi = 2$: $x_1 = 0$, $x_2 = 0,751\,967\,9$; $x_3 = 2,597\,362\,6$; $x_4 = -0,682\,663\,8$.

2) $x^6 - 4x^5\xi + 4x^4\xi^2 + 2x^3\xi - x^2(4\xi^2 - \eta^2) + \xi^2 - \eta^2 = 0$.

Z. B. A) $\xi = 0$; $x^6 + x^2\eta^2 - \eta^2 = 0$; eine positive Wurzel für x^2.

B) $\eta = 0$; $(x^3 - 2x^2\xi + \xi)^2 = 0$. Ist $\xi > {}^3/_8\sqrt{6}$, so hat die kubische Gleichung für x drei Wurzeln so, dafs ${}^1/_2\sqrt{6} > x_1 > {}^1/_2\sqrt{2}$; ${}^1/_2\sqrt{6} < x_2 < \infty$;

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$-\frac{1}{4}\sqrt{6} < x_3 < -\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Aus x_3 folgen zwei reelle Tangenten; aus x_2 keine; aus x_1 zwei, wenn $\xi > 1$.

Numerische Beispiele zu B.) α) $\eta = 0, \xi = 2; x^3 - 4x^2 + 2 = 0; x_1 = 0,789\,244\,1; x_2 = 3,866\,198\,3; x_3 = -0,655\,442\,4$. β) $\eta = 0, \xi = \frac{15}{16}; x^3 - \frac{15}{8}x^2 + \frac{15}{16} = 0;$ $x_1 = 1,099\,495\,68;\ x_2 = 1,389\,258\,7;\ x_4 = -0,613\,754\,4$. γ) $\eta = 0, \xi = \frac{1}{2}; x^3 - x + \frac{1}{2} = 0;\ x = -0,565\,197\,8$.

XXXVII. Von einem Punkte mit den Koordinaten a, b an die Parabel $y^2 = 2px$ die Normalen zu ziehen.

Die Koordinaten des gesuchten Parabelpunktes seien x, y, so ist y durch die Gleichung zu bestimmen: $y^3 = 2p(a-p)y + 2bp^2$. Es giebt mithin 1) eine Normale wenn $b^2 > \frac{8}{27p}(a-p)^3$; 2) drei distinkte Normalen, wenn $b^2 < \frac{8}{27p}(a-p)^3$; 3) eine einzelne und zwei zusammenfallende Normalen, wenn $b^2 = \frac{8}{27p}(a-p)^3$, d. h. wenn der Punkt auf der Evolute der Parabel liegt.

Numerische Beispiele für $p = 6$.

1a.) $a = 9, b = 1;\ y^3 = 36y + 72.\ y_1 = 6,822\,948;\ x_1 = 3,879\,386.$
$y_2 = -4,453\,363;\ x_2 = 1,652\,704.\ y_3 = -2,369\,585;\ x_3 = 0,467\,911.$

1b.) $a = 18, b = 5;\ y^3 = 144y + 360.\ y_1 = 13,095\,44;\ x_1 = 14,290\,875.$
$y_2 = -10,469\,725;\ x_2 = 9,134\,598.\ y_3 = -2,625\,716;\ x_3 = 0,574\,532.$

2) $a = 15, b = 6;\ y_3 = 108y + 432.\ y_1 = x_1 = 12.\ y_2 = y_3 = -6;$ $x_2 = x_3 = 3$.

3) $a = 5, b = 2;\ y^3 = -12y + 144.\ y_1 = 4,484\,492;\ x_1 = 1,666\,728.$

XXXVIII. Einem Kreise vom gegebenen Durchmesser d ein Sehnenviereck vom Umfange 2s und vom Inhalte q^2 einzubeschreiben, so dass eine Seite vom Durchmesser d gebildet wird.

Die drei fehlenden Seiten sind die Wurzeln der kubischen Gleichung:

$$x^3 - (2s-d)x^2 + \left(s^2 - 2sd + \frac{q^4}{(s-d)^2}\right)x - d\left(\frac{q^4}{(s-d)^2} - s^2\right) = 0.$$

Numerisches Beispiel. $2s = 162,\ d = 65,\ q^2 = 1\,344.$

$$x^3 - 97x^2 + 3087x - 32\,175 = 0;\ x_1 = 25, x_2 = 33, x_3 = 39.$$

Zusatzaufgabe. Die Seiten eines Sehnenvierecks sind die Wurzeln der biquadratischen Gleichung $x^4 - mx^3 + nx^2 - px + q = 0$.

Den Inhalt $\mathfrak{J}$ des Vierecks und den Radius r des Kreises zu finden.

Sind a, b, c, d die Seiten des Vierecks, so ist:

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{4}\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{2\Sigma a^2b^2 - \Sigma a^4 + 8abcd} = \frac{1}{4}\sqrt{16q - m^4 + 4m^2n - 8mp}$$

$$r = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{16\mathfrak{J}^2}} = \sqrt{\frac{p^2 + m^2q - 4nq}{16q - m^4 + 4m^2n - 8mp}}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

XXXIX. Von einem Dreiecke kennt man den Umfang $2s$ und die Radien r und ϱ des um- und des eingeschriebenen Kreises. Die kubische Gleichung für die drei Seiten aufzustellen und zu diskutieren.

Die zu lösende Gleichung ist (vergl. meine „Aufg. zu den kub. Gl.“ VI, p. 11): $x^3 - 2sx^2 + (s^2 + 4r\varrho + \varrho^2)x - 4r\varrho s = 0$. Die Diskriminante Δ der kubischen Gleichung $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ ist: $27\Delta = 4a^3c - a^2b^2 - 18abc + 4b^3 + 27c^2$. Für unsere Gleichung ergiebt dies:

$$\frac{27}{4}\Delta = s^4 - 2s^2(2r^2 + 10r\varrho - \varrho^2) + 64r^3\varrho + 48r^2\varrho^2 + 12r\varrho^3 + \varrho^4$$
$$= [s^2 - 2r^2 - 10r\varrho + \varrho^2 + 2r^{\frac{1}{2}}(r - 2\varrho)^{\frac{3}{2}}][s^2 - 2r^2 - 10r\varrho + \varrho^2 - 2r^{\frac{1}{2}}(r - 2\varrho)^{\frac{3}{2}}].$$

Damit die drei Wurzeln reell seien, mufs $r \geqq 2\varrho$ sein, und s^2 mufs zwischen den beiden Werten liegen, die aus $\Delta = 0$ folgen. Ist s^2 gleich einem dieser Grenzwerte, so ist das Dreieck gleichschenklig. Aus diesen Maximal-, resp. Minimalwerten von s, folgen auch der gröfste und der kleinste Wert von ϱs oder vom Inhalte bei gegebenen r und ϱ.

Zusätze. Folgende Aufgaben haben mit der vorstehenden eine innere Verwandtschaft:

Die drei Seiten eines Dreiecks aus dem Radius r des umgeschriebenen Kreises, dem Inhalte q^2 und einer Schwerpunktslinie t zu finden. — Gehört t zur Seite $2x$, so ist:

$$x^6 - 2t^2x^4 + (t^4 + 4q^4)x^2 - 4r^2q^4 = 0.$$

Die drei Seiten eines Dreiecks aus dem Radius r des umgeschriebenen, dem Radius ϱ des eingeschriebenen Kreises und der Summe s zweier Seiten zu finden. — Die dritte Seite x findet man aus:

$$x^3 - 2sx^2 + (s^2 + 4\varrho^2 + 8r\varrho)x - 8r\varrho s = 0.$$

Man vergleiche auch: Hermes, Sammlung von Aufgaben aus der Goniometrie und Trigonometrie (Berlin 1879), pag. 138, Aufg. 5, 6, 7. — Besonders aber: Lange, die Berührungskreise eines ebenen Dreiecks und deren Berührungskreise. Wissensch. Beil. zum Progr. d. Friedr. Werderschen Oberrealschule (Berlin 1884). — Bei den meisten der so entstehenden kubischen Gleichungen wird die Diskussion für einen Schüler viel zu schwer.

Da der zur Verfügung stehende Raum von drei Bogen erschöpft ist, so kann der Abdruck des Restes geometrischer Aufgaben (etwa noch zwei Seiten) und der zweiten Abteilung mit den mechanischen Aufgaben nicht erfolgen.

Druckfehler: S. 6 Zeile 13 lese man 1,465 statt 1,425.

Druck von W. Pormetter in Berlin C.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

XXXIX. Vor ... en Umfang 2 s und die Radien r und ϱ de ... n Kreises. Die kubische Gleichung für die ... diskutieren.

Die zu lösend ... zu den kub. Gl.“ VI, p. 11): $x^3 - 2sx^2 + (s^2 + 4$ ... riminante Δ der kubischen Gleichung $x^3 - ax^2 +$ ... $^2 b^2 - 18abc + 4b^3 + 27c^2$. Für unsere Gleichung ...

$$\frac{27}{4}\Delta = s^4 - 2s^2(2r^2 \ldots 12r\varrho^3 + \varrho^4$$

$$= [s^2 - 2r^2 - 1 \ldots - 10r\varrho + \varrho^2 - 2r^{\frac{1}{2}}(r - 2\varrho)^{\frac{3}{2}}].$$

Damit die dre ... ein, und s^2 mufs zwischen den beiden Werten liegen, ... inem dieser Grenzwerte, so ist das Dreieck gleichscher ... imalwerten von s, folgen auch der gröfste und der k ... e bei gegebenen r und ϱ.

Zusätze. Fo ... rstehenden eine innere Verwandtschaft:

Die drei Seite ... des umgeschriebenen Kreises, dem Inhalte q^2 und ei ... Gehört t zur Seite 2 x, so ist: ... $^4 = 0$.

Die drei Seit ... des umgeschriebenen, dem Radius ϱ des eingesc ... zweier Seiten zu finden. — Die dritte Seite x find ...

$$x \ldots \varrho s = 0.$$

Man vergleicl ... ufgaben aus der Goniometrie und Trigonometrie (B ... — Besonders aber: Lange, die Berührungskreise ... Berührungskreise. Wissensch. Beil. zum Progr. d. ... (Berlin 1884). — Bei den meisten der so entst ... d die Diskussion für einen Schüler viel zu schwe ...

Da der zur Ve ... en erschöpft ist, so kann der Abdruck des Restes g ... wei Seiten) und der zweiten Abteilung mit den me ...

D ... statt 1,425.

Grauskala #13 B.I.G.
A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19
C Y M

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf