Wissenschaftliche Beilage zum Jahresbericht
des Luisenstädtischen Realgymnasiums. Ostern 1906.

Die Elemente der Mechanik
vom Standpunkte des Hamilton'schen Prinzips.

(Teil II.)

Von

Prof. Dr. Karl Hollefreund.

Mit zwei Tafeln.

Bibliothek des Städt. Gymnasiums * Düsseldorf *

q6e
37

BERLIN
Weidmannsche Buchhandlung.
1906.

1906. Programm Nr. 113.

113 b

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

HT008978008

UNIVERSITÄTS- UND LANDESBIBLIOTHEK DÜSSELDORF

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Der Zweck der folgenden Untersuchungen ist derselbe wie beim ersten Teil, nämlich die Eigentümlichkeiten des Hamilton'schen Prinzips dadurch recht deutlich hervortreten zu lassen, dafs ausschliefslich mit seiner Verwendung die Gesetze der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt und darauf der Einflufs der Erdrotation auf die Bewegung eines Massenpunktes untersucht werden. Diese Beispiele sind besonders deshalb gewählt, weil sie eine mannigfaltige Art der Anwendung des Hamilton'schen Prinzips gestatten.

35. Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt. Ehe wir die allgemeinen Bewegungsgleichungen ableiten, wollen wir vorher das Prinzip auf einen besonderen Fall anwenden und die Frage beantworten, wann ein solcher Körper, auf den keine äufseren Kräfte wirken, eine augenblicklich vorhandene Drehung um eine durch seinen festen Punkt O gehende Achse dauernd beibehält. Wir nehmen zunächst an, der Körper drehe sich um eine feste Achse, die wir zur z-Achse, O zum Anfangspunkt wählen wollen. Dann ist seine lebendige Kraft $L = \frac{1}{2}\Sigma m(x'^2 + y'^2)$ oder, wenn wir den Abstand eines beliebigen Punktes von der Drehungsachse mit r und den Winkel zwischen r und der Richtung der x-Achse mit φ bezeichnen, $L = \frac{1}{2}\Sigma m r^2 \varphi'^2 = \frac{1}{2} K \varphi'^2 = \frac{1}{2} K \omega^2$, indem wir K das Trägheitsmoment des Körpers um die z-Achse und ω die Winkelgeschwindigkeit bei der Drehung um diese Achse nennen. Nach Teil I, 11 u. 12 ist das kinetische Potential $H = -L$; aus $\partial H/\partial \varphi' = -K\varphi'$ und $\partial H/\partial \varphi = 0$ ergibt das Hamilton'sche Prinzip die Bewegungsgleichung $K\varphi' = \text{const}$.

Wäre ein einzelner Punkt des Körpers ganz frei und sein Ort, wie Fig. 1 zeigt, durch ϱ, φ, ϑ bestimmt, so wäre sein kinetisches Potential

$$\bar{H} = -\tfrac{1}{2} m (\varrho'^2 + \varrho^2 \sin^2\vartheta \cdot \varphi'^2 + \varrho^2 \vartheta'^2)$$

und folglich seine Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial \varrho'}\right) - \frac{\partial \bar{H}}{\partial \varrho} = -m\varrho'' + m\varrho(\sin^2\vartheta \cdot \varphi'^2 + \vartheta'^2) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial \varphi'}\right) - \frac{\partial \bar{H}}{\partial \varphi} = -m\varrho^2 \sin^2\vartheta \cdot \varphi'' - m\varrho^2 \varphi' \vartheta' \sin 2\vartheta - 2m\varrho\varrho'\varphi' \sin^2\vartheta = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial \vartheta'}\right) - \frac{\partial \bar{H}}{\partial \vartheta} = -m\varrho^2 \vartheta'' - 2m\varrho\varrho'\vartheta' + m\varrho^2 \varphi'^2 \sin\vartheta \cos\vartheta = 0.$$

Weil nun aber die Bewegung dieses Punktes so vor sich geht, dafs ϱ und ϑ konstant bleiben und nur φ sich gleichförmig ändert, so unterliegt seine wirkliche Bewegung den

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zwangskräften $P_\varrho = m\varrho\varphi'^2 \sin^2\vartheta$, $P_\varphi = 0$, $P_\vartheta = m\varrho^2\varphi'^2 \sin\vartheta \cos\vartheta$. Wie Fig. 2 zeigt, setzen sich die beiden Kräfte P_ϱ und $\frac{1}{\varrho}P_\vartheta$ zu der Centrifugalkraft $m\varrho \sin\vartheta \cdot \omega^2 = mr\omega^2$ zusammen, deren Komponenten nach den Achsen $X = mx\omega^2$ und $Y = my\omega^2$ sind. Summieren wir alle diese Kräfte, so erhalten wir erstens die am festen Punkte wirkenden Zugkräfte $\Sigma X = \Sigma mx\omega^2 = \omega^2\xi$; $\Sigma Y = \Sigma my\omega^2 = \omega^2\eta$, wenn ξ, η, ζ die Koordinaten des Schwerpunktes bezeichnen; ferner das Drehungsmoment in der xz-Ebene $\Sigma(Xz - Zx) = \omega^2 \Sigma mxz$ und in der yz-Ebene $\Sigma(Zy - Yz) = -\omega^2 \Sigma myz$. Diese Kräftepaare suchen die z-Achse aus ihrer Lage zu drehen. Sie sind nur dann nicht vorhanden, wenn Σmxz und Σmyz Null sind, d. h. wenn die Drehungsachse eine der drei durch O gehenden Hauptträgheitsachsen des Körpers ist. In diesem Falle behält also der Körper die Drehung um die z-Achse dauernd bei, auch wenn nicht zwei ihrer Punkte, sondern nur einer, der Nullpunkt, im Raume fest liegen.

36. Im allgemeinen Falle ändern sich sowohl die Drehungsachse (Momentanachse) als auch die Winkelgeschwindigkeit beständig. Entsprechend den drei Graden von Bewegungsfreiheit wollen wir drei von einander unabhängige Koordinaten einführen, indem wir durch den festen Punkt O einmal ein im Raume festliegendes Koordinatensystem (x, y, z) legen und aufserdem noch ein im Körper festliegendes, aber zugleich mit dem Körper im Raume bewegliches System (ξ, η, ζ) und für das letztere die drei durch den festen Punkt gehenden Hauptträgheitsachsen des Körpers wählen. Der Körper sei in kardanischer Aufhängung frei um den Punkt O drehbar angebracht[1]). Er sei zu diesem Zweck an einer Hauptträgheitsachse mit zwei Spitzen versehen, die in zwei diametral entgegengesetzten Achsenlagern des starren Ringes I ruhen. Dadurch ist eine beliebige Drehung um die Achse TT′ möglich, die wir durch den Winkel ψ messen wollen, um den sich die ursprünglich mit der Ebene des Ringes I zusammenfallende Meridianebene M des Körpers aus der Ebene des Ringes herausgedreht hat (Fig. 3 und 4). Der Ring I kann sich nun selbst wieder um eine Achse HH′ drehen, welche senkrecht zu TT′ in seiner Ebene festgelegt ist. Er ist zu diesem Zwecke in H und H′ aufsen mit zwei Spitzen versehen, deren Lager sich in einem zweiten etwas weiteren Ringe II diametral gegenüberstehen. Es sei ϑ der Winkel, um den sich die Ebene I aus der Ebene II herausgedreht hat. Der Ring II endlich ist selbst wieder mittelst Spitzen in einem absolut unbeweglichen Ringe III, d. h. also um eine im Raume absolut festliegende Achse VV′ drehbar, welche in der Ebene II senkrecht auf der Achse HH′ steht. Es sei φ der Winkel zwischen den Ebenen II und III. Die feste Ebene III möge mit der xz-Ebene zusammenfallen und die feste Achse VV′ mit der vertikalen z-Achse. Dann liegt die Achse HH′ stets in der horizontalen xy-Ebene (Fig. 5). Die Koordinaten x, y, z drücken wir am einfachsten durch ξ, η, ζ aus, wenn wir zunächst beide Systeme zusammenfallen lassen und dann den Übergang von der Anfangslage zu einer beliebigen Lage des Körpers durch drei nach einander erfolgende Drehungen ausgeführt denken. Zunächst drehen wir aus der Anfangsstellung heraus in positivem Sinne um den Winkel φ, bis die Hauptträgheitsachse $O\xi$ in die Lage OH kommt. Um diese Achse OH wird jetzt abermals um den Winkel ϑ gedreht, wobei die Achse $O\zeta$ in die Lage OT übergeht. Drittens erfolgt noch um die

[1]) Nach Helmholtz: Vorlesungen über die Dynamik diskreter Massenpunkte. § 69.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Achse OT eine Drehung um den Winkel ψ. Dann liegen $O\xi$ und $O\eta$ in der Normalebene von OT und OH ist im allgemeinen nicht mehr Hauptträgheitsachse. Die Koordinaten x, y, z eines beliebigen Punktes des Körpers fallen anfänglich mit den durch die späteren Drehungen sich nicht ändernden Abmessungen ξ, η, ζ zusammen. Sind $x_1 y_1 z_1$ die Koordinaten dieses Punktes bezogen auf das um den Winkel φ aus der Anfangsstellung herausgedrehte Koordinatensystem, so ist

$$x = x_1 \cos\varphi - y_1 \sin\varphi \qquad y = x_1 \sin\varphi + y_1 \cos\varphi \qquad z = z_1.$$

Wird jetzt um die x_1-Achse um den Winkel ϑ gedreht und sind $x_2 y_2 z_2$ die Koordinaten des betrachteten Punktes in bezug auf die neue Lage des Koordinatensystems, so ist

$$x_1 = x_2 \qquad y_1 = y_2 \cos\vartheta - z_2 \sin\vartheta \qquad z_1 = y_2 \sin\vartheta + z_2 \cos\vartheta.$$

Nach der dritten Drehung um die z_2-Achse um den Winkel ψ deckt sich das bewegliche Koordinatensystem mit dem im Körper festen der ξ, η, ζ und es ist

$$x_2 = \xi \cos\psi - \eta \sin\psi \qquad y_2 = \xi \sin\psi + \eta \cos\psi \qquad z_2 = \zeta.$$

Hieraus ergeben sich durch Elimination die Gleichungen

$$\begin{aligned}
x &= (\cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi \cos\vartheta)\,\xi - (\cos\varphi \sin\psi + \sin\varphi \cos\psi \cos\vartheta)\,\eta + \sin\varphi \sin\vartheta \cdot \zeta \\
y &= (\sin\varphi \cos\psi + \cos\varphi \sin\psi \cos\vartheta)\,\xi - (\sin\varphi \sin\psi - \cos\varphi \cos\psi \cos\vartheta)\,\eta - \cos\varphi \sin\vartheta \cdot \zeta \\
z &= \qquad\qquad \sin\psi \sin\vartheta \cdot \xi \qquad\qquad + \cos\psi \sin\vartheta \cdot \eta \qquad + \cos\vartheta \cdot \zeta.
\end{aligned}$$

Jede unendlich kleine Drehung eines Körpers kann immer betrachtet werden als die Resultante aus drei gleichzeitigen Drehungen um drei auf einander senkrechte Achsen. Der betrachtete Körper möge zur Zeit t um die Momentanachse die Winkelgeschwindigkeit ω besitzen und es seien α', β', γ' die Komponenten von ω in bezug auf die drei mit dem Körper beweglichen Hauptträgheitsachsen. Dann ist $\omega^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2$. Die sichtbaren Drehungen des Körpers um die drei Achsen VV', HH' und TT', die aber nicht auf einander senkrecht stehen, können wir jede in ihre Komponenten nach den Hauptträgheitsachsen ξ, η, ζ zerlegen. Da OH mit $O\xi$ den Winkel ψ bildet, so können wir die Drehung $\vartheta' dt$ durch die beiden Komponenten $\vartheta' dt \cos\psi$ und $-\vartheta' dt \sin\psi$ ersetzen. Die Drehung $\psi' dt$ erfolgt schon um eine Hauptträgheitsachse. Die dritte Drehung $\varphi' dt$ um OV kann zunächst in die beiden Komponenten $\varphi' dt \cos\vartheta$ um OT und $\varphi' dt \sin\vartheta$ um eine Achse zerlegt werden, die in der Normalebene von OT senkrecht auf OH steht (Fig. 6). Diese gibt dann die Komponenten $\varphi' dt \sin\vartheta \sin\psi$ und $\varphi' dt \sin\vartheta \cos\psi$. Daher gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\alpha' &= \vartheta' \cos\psi \qquad + \varphi' \sin\vartheta \sin\psi \\
\beta' &= -\vartheta' \sin\psi + \varphi' \sin\vartheta \cos\psi \\
\gamma' &= \psi' \qquad\qquad + \varphi' \cos\vartheta.
\end{aligned} \tag{1}$$

Sind A, B, C die drei Hauptträgheitsmomente des betrachteten Körpers, so ist seine lebendige Kraft $L = \frac{1}{2}(A\alpha'^2 + B\beta'^2 + C\gamma'^2)$ oder

$$2L = A(\vartheta' \cos\psi + \varphi' \sin\vartheta \sin\psi)^2 + B(-\vartheta' \sin\psi + \varphi' \sin\vartheta \cos\psi)^2 + C(\psi' + \varphi' \cos\vartheta)^2.$$

Sehen wir zunächst von äufseren Kräften ab, so können wir zufolge des Hamilton'schen Prinzips aus den drei Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \varphi'}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \text{ und zwei analogen für } \vartheta \text{ und } \psi$$

die unabhängigen Koordinaten als Funktionen der Zeit ermitteln.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

37. Ableitung der Euler'schen Gleichungen. Es ist meist von Vorteil, zunächst die Winkelgeschwindigkeiten α', β', γ' als Funktionen der Zeit zu bestimmen. Wir beziehen daher unsere Betrachtungen auf ein festes Koordinatensystem, dessen Achsen mit den Hauptträgheitsachsen des Körpers, wie sie zur Zeit t gerichtet sind, zusammenfallen. Sind äufsere Kräfte vorhanden, so seien $-X$, $-Y$, $-Z$ ihre Komponenten nach diesen Achsen und $-P_\alpha$, $-P_\beta$, $-P_\gamma$ ihre Drehungsmomente, also z. B. $-P_\alpha = \Sigma(Zy - Yz)$. Die bei einer kleinen Verrückung des Körpers gegen die äufseren Kräfte geleistete Elementararbeit ist dann (nach Teil I, 12) gleich $P_\alpha d\alpha + P_\beta d\beta + P_\gamma d\gamma$[1]) oder nach den Gleichungen 1)

$$P_\alpha \cos\psi d\vartheta + P_\alpha \sin\vartheta \sin\psi d\varphi - P_\beta \sin\psi d\vartheta + P_\beta \sin\vartheta \cos\psi d\varphi + P_\gamma d\psi + P_\gamma \cos\vartheta d\varphi.$$

Bezeichnen wir dies mit $P_\varphi d\varphi + P_\vartheta d\vartheta + P_\psi d\psi$, so sind die Gröfsen P_φ, P_ϑ, P_ψ die Kräfte, mit denen der starre Körper auf Vergröfserung der unabhängigen Koordinaten hinwirkt. Diese Drehungsmomente in bezug auf die drei Achsen OV, OT und OH, nämlich

$$\begin{aligned} P_\varphi &= P_\alpha \sin\vartheta \sin\psi + P_\beta \sin\vartheta \cos\psi + P_\gamma \cos\vartheta \\ P_\vartheta &= P_\alpha \cos\psi \qquad\quad - P_\beta \sin\psi \\ P_\psi &= P_\gamma \end{aligned}$$

ergeben sich auch, wenn man die drei Gröfsen P_α, P_β, P_γ als Strecken auf den Achsen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ aufträgt und ihre Komponenten nach den Achsen OV, OT, OH bildet (Fig. 8). Dabei liegen $O\xi$, $O\eta$ und OH in der Äquatorealebene des starren Körpers, $O\zeta = OT$ steht senkrecht dazu, OV dagegen bildet mit OT den Winkel ϑ und mit OH einen rechten Winkel.

Die Bewegungsgleichungen sind nun, wenn $H = -L$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \varphi'}\right) - \frac{\partial H}{\partial \varphi} = P_\varphi$ und zwei analoge für ϑ und ψ. Aus den Werten für L und für α', β', γ' folgt

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi'} = A\alpha' \sin\vartheta \sin\psi + B\beta' \sin\vartheta \cos\psi + C\gamma' \cos\vartheta; \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \text{ daher}$$

$$\begin{aligned} &A\alpha'' \sin\vartheta \sin\psi + A\alpha' (\cos\vartheta \sin\psi \ \vartheta' + \sin\vartheta \cos\psi \cdot \psi') + B\beta'' \sin\vartheta \cos\psi \\ &+ B\beta' (\cos\vartheta \cos\psi \cdot \vartheta' - \sin\vartheta \sin\psi \cdot \psi') + C\gamma'' \cos\vartheta - C\gamma' \sin\vartheta \cdot \vartheta' \\ &= - P_\alpha \sin\vartheta \sin\psi - P_\beta \sin\vartheta \cos\psi - P_\gamma \cos\vartheta. \quad \text{Ferner ist} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vartheta'} = A\alpha' \cos\psi - B\beta' \sin\psi; \quad \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = A\alpha'\varphi' \cos\vartheta \sin\psi + B\beta'\varphi' \cos\vartheta \cos\psi - C\gamma'\varphi' \sin\vartheta,$$

also $A\alpha'' \cos\psi - A\alpha'(\sin\psi \cdot \psi' + \cos\vartheta \sin\psi \cdot \varphi') - B\beta'' \sin\psi - B\beta' \cos\psi(\psi' + \varphi' \cos\vartheta) + C\gamma'\varphi' \sin\vartheta$

$$= - P_\alpha \cos\psi + P_\beta \sin\psi. \quad \text{Endlich ist}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \psi'} = C\gamma'; \quad \frac{\partial L}{\partial \psi} = A\alpha'\beta' - B\alpha'\beta', \text{ mithin}$$

$$C\gamma'' - (A - B)\,\alpha'\beta' = - P_\gamma.$$

Mit Benutzung der letzten Gleichung erhalten die beiden ersten die Form

$$\begin{aligned} &A\alpha'' \sin\vartheta \sin\psi + A\alpha'\gamma' \sin\vartheta \cos\psi + B\beta'' \sin\vartheta \cos\psi - B\beta'\gamma' \sin\vartheta \sin\psi - C\gamma'\vartheta' \sin\vartheta \\ &= - P_\alpha \sin\vartheta \sin\psi - P_\beta \sin\vartheta \cos\psi - P_\gamma \cos\vartheta. \\ &A\alpha'' \cos\psi - A\alpha'\gamma' \sin\psi - B\beta'' \sin\psi - B\beta'\gamma' \cos\psi + C\gamma'\varphi' \sin\vartheta = - P_\alpha \cos\psi + P_\beta \sin\psi. \end{aligned}$$

---

[1]) Dreht sich der Körper z. B. um die z-Achse um den Winkel $d\gamma$, so verschiebt sich der Punkt (x, y) um $dy = r \cos\gamma d\gamma = x d\gamma$ und $-dx = r \sin\gamma d\gamma = y d\gamma$. Vergl. Fig. 7. Die von den Reaktionskräften X, Y geleistete Arbeit ist daher $dA = X dx + Y dy = Y x d\gamma - X y d\gamma = P_\gamma d\gamma$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Multiplizieren wir die erste dieser beiden Gleichungen mit $\sin\psi$, die zweite mit $\sin\vartheta\cos\psi$, so folgt durch Addition nach Abspaltung von $\sin\vartheta$

$$A\alpha'' - (B - C)\beta'\gamma' = -P_\alpha.$$

Multiplizieren wir dagegen die erste Gleichung mit $-\sin\vartheta\sin\psi$, die zweite mit $\cos\psi$, so ergibt sich die dritte Euler'sche Gleichung

$$B\beta'' - (C - A)\alpha'\gamma' = -P_\beta.$$

Anmerkung. Die von Helmholtz aufgestellten Reciprocitätsgesetze ergeben in diesem Beispiele

$$\frac{\partial P_\varphi}{\partial\vartheta''} = \frac{\partial P_\vartheta}{\partial\varphi''} = (A - B)\sin\vartheta\sin\psi\cos\psi;\quad \frac{\partial P_\varphi}{\partial\psi''} = \frac{\partial P_\psi}{\partial\varphi''} = C\cos\vartheta \quad\text{und}\quad \frac{\partial P_\vartheta}{\partial\psi''} = \frac{\partial P_\psi}{\partial\vartheta''} = 0.$$

Dagegen ist hier nicht wie beim Kreisel mit zwei gleichen Hauptträgheitsmomenten $\frac{\partial P_\varphi}{\partial\vartheta'} = -\frac{\partial P_\vartheta}{\partial\varphi'}$, sondern hier gilt die allgemeinere Gleichung

$$\frac{\partial P_\varphi}{\partial\vartheta'} + \frac{\partial P_\vartheta}{\partial\varphi'} = \frac{d}{dt}\left(\frac{2\partial^2 L}{\partial\vartheta'\partial\varphi'}\right) = A\,(2\psi'\sin\vartheta\cos 2\psi + \vartheta'\cos\vartheta\sin 2\psi).$$

Ferner $\frac{\partial P_\varphi}{\partial\psi'} + \frac{\partial P_\psi}{\partial\varphi'} = 2\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\psi'\partial\varphi'}\right) = -2C\vartheta'\sin\vartheta$, aber $\frac{\partial P_\vartheta}{\partial\psi'} = -\frac{\partial P_\psi}{\partial\vartheta'}$. (Vergl. Helmholtz, Vorlesungen über die Dynamik diskreter Massenpunkte § 79.)

38. Den **Zug am festen Punkte O** können wir in der Weise bestimmen, dafs wir ihn zunächst als frei beweglich voraussetzen, indem wir ihn durch die Koordinaten u, v, w auf ein im Raume absolut festes Koordinatensystem beziehen. Da der Körper um O frei beweglich ist und jede Drehung ohne Zwang ausführen kann, so widersteht die Festigkeit des Punktes O nur noch den drei Zugkräften, die ihn parallel den festen Achsen x, y, z verschieben wollen. Es genügt daher festzusetzen, dafs das System der x, y, z, auf welches bisher die Bewegung des starren Körpers bezogen wurde, parallel dem neuen System u, v, w sei und sich nur parallel dazu bewege. Sehen wir von äufseren Kräften ab, so ist das kinetische Potential

$$H = -\mathfrak{L} \text{ und } 2\mathfrak{L} = \Sigma m\,[(u' + x')^2 + (v' + y')^2 + (w' + z')^2],$$

wobei x, y, z Funktionen der unabhängigen Veränderlichen φ, ϑ, ψ und u, v, w drei neue unabhängige Veränderliche sind. Schreiben wir

$$2\mathfrak{L} = \Sigma m\,[u'^2 + v'^2 + w'^2 + 2u'x' + 2v'y' + 2w'z'] + 2L, \text{ so folgt}$$

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial u'} = \Sigma m\,(u' + x'),\quad \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial u} = 0$$

und analog für v und w. Ferner

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\varphi'} = \Sigma m\left(u'\frac{\partial x'}{\partial\varphi'} + v'\frac{\partial y'}{\partial\varphi'} + w'\frac{\partial z'}{\partial\varphi'}\right) + \frac{\partial L}{\partial\varphi'};\quad \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\varphi} = \Sigma m\left(u'\frac{\partial x'}{\partial\varphi} + v'\frac{\partial y'}{\partial\varphi} + w'\frac{\partial z'}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial L}{\partial\varphi}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Bewegungsgleichungen sind dann

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial u'}\right) = -\Sigma m\,(u'' + x'') = -M\,(u'' + \mathfrak{x}'') = 0$$

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \varphi'}\right) + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \varphi} = -M\left(u''\frac{\partial \mathfrak{x}'}{\partial \varphi'} + v''\frac{\partial \mathfrak{y}'}{\partial \varphi'} + w''\frac{\partial \mathfrak{z}'}{\partial \varphi'} + u'\frac{\partial \mathfrak{x}''}{\partial \varphi'} + v'\frac{\partial \mathfrak{y}''}{\partial \varphi'} + w'\frac{\partial \mathfrak{z}''}{\partial \varphi'}\right)$$

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \varphi'}\right) + M\left(u'\frac{\partial \mathfrak{x}'}{\partial \varphi} + v'\frac{\partial \mathfrak{y}'}{\partial \varphi} + w'\frac{\partial \mathfrak{z}'}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial L}{\partial \varphi}, \text{ wenn}$$

$\mathfrak{x} = \frac{\Sigma m x}{M}$, $\mathfrak{y} = \frac{\Sigma m y}{M}$, $\mathfrak{z} = \frac{\Sigma m z}{M}$ die Koordinaten des Schwerpunktes sind.

Ist der feste Punkt des starren Körpers zufällig der Schwerpunkt gewesen, also $\mathfrak{x} = \mathfrak{y} = \mathfrak{z} = 0$, so zeigen diese Gleichungen, dafs dann die Aufhebung der Festigkeit keine Änderung bewirkt. Im anderen Falle geben sie uns die am festen Punkte wirkenden Zugkräfte. Denn erfolgt statt der durch sie dargestellten natürlichen Bewegung die gezwungene, bei welcher u, v, w konstant sind, so sind die hierfür erforderlichen Zwangskräfte

$$-P_u = \Sigma m x''; \quad -P_v = \Sigma m y''; \quad -P_w = \Sigma m z'',$$

die eben durch die Festigkeit des Drehpunktes O geliefert werden. Die von Seiten des rotierenden Körpers an O ausgeübten Zugkräfte sind daher P_u, P_v, P_w.

Dieses Resultat können wir folgendermafsen physikalisch deuten. Ist ω zur Zeit t die Winkelgeschwindigkeit um die Momentanachse und sind a, b, c deren Richtungscosinus mit den Achsen x, y, z, so können wir die Rotation während der Zeit dt in ihre drei Komponenten nach diesen Achsen zerlegen und erhalten auf diese Weise

$$x' = \omega\,(bz - cy); \quad x'' = \omega\,(bz' - cy') + \omega'\,(bz - cy) + \omega\,(b'z - c'y)$$
$$y' = \omega\,(cx - az); \quad y'' = \omega\,(cx' - az') + \omega'\,(cx - az) + \omega\,(c'x - a'z)$$
$$z' = \omega\,(ay - bx); \quad z'' = \omega\,(ay' - bx') + \omega'\,(ay - bx) + \omega\,(a'y - b'x).$$

Bezeichnet (Fig. 9) r den Abstand des betrachteten Punktes x, y, z vom Drehpunkt, l die Projektion von r auf die Momentanachse und ϱ das Lot von dem Punkte auf diese Achse, so ist $l = ax + by + cz$ und die Richtungscosinus von ϱ sind $\frac{x - al}{\varrho}$, $\frac{y - bl}{\varrho}$, $\frac{z - cl}{\varrho}$. Demnach ergibt sich

$$\omega\,(bz' - cy') = \omega^2\,(aby - b^2x - c^2x + acz) = \omega^2\,(al - x) \text{ und}$$
$$x'' = \omega^2\,(al - x) + \omega'\,(bz - cy) + \omega\,(b'z - c'y); \text{ ferner}$$
$$P_u = -\Sigma m x'' = \omega^2 M\,(x_s - al_s) + \Sigma m\,[\omega'(cy - bz) + \omega(c'y - b'z)],$$

wo der Index s die auf den Schwerpunkt bezüglichen Gröfsen bezeichnen soll. Das erste Glied ist die Komponente der Centrifugalkraft $M\omega^2\varrho_s$ der im Schwerpunkte vereinigt gedachten Massen entsprechend der Drehung um die zur Zeit t vorhandene Momentanachse. Das zweite Glied stammt von der Änderung dieser Achse her (vergl. 40).

39. Wie bewegt sich der starre Körper infolge eines Stofses? Durch den Stofs wird dem Körper in der durch O und die Richtung des Stofses bestimmten Ebene ein Drehungsmoment erteilt. Senkrecht zu dieser Ebene errichten wir in O ein Lot von der Gröfse des Drehungsmomentes und zerlegen es in seine drei Komponenten nach den Hauptträgheitsachsen. Wir erhalten so die drei Drehungsmomente $-S_\alpha$, $-S_\beta$, $-S_\gamma$ um

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

diese drei Achsen, die wir wieder zu Koordinatenachsen wählen wollen. Die gesuchte Momentanachse möge mit ihnen Winkel bilden, deren Richtungscosinus a, b, c seien; ω sei die gesuchte, durch den Stofs hervorgebrachte Winkelgeschwindigkeit um diese anfängliche Momentanachse und α', β', γ' ihre Komponenten, also $\omega^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2$. Dann ist, wie in 36, die dem Körper durch den Stofs erteilte lebendige Kraft $L = \frac{1}{2}(A\alpha'^2 + B\beta'^2 + C\gamma'^2)$ und das Trägheitsmoment um die Momentanachse $\Sigma m\varrho^2 = Aa^2 + Bb^2 + Cc^2$. Bilden wir wieder, wie in 37, die Drehungsmomente in bezug auf die drei Achsen der cardanischen Aufhängung, so erhalten wir

$$\begin{aligned} S_\varphi &= S_\alpha \sin\psi \sin\vartheta + S_\beta \cos\psi \sin\vartheta + S_\gamma \cos\vartheta \\ S_\vartheta &= S_\alpha \cos\psi \qquad\quad + S_\beta \sin\psi \\ S_\psi &= S_\gamma. \end{aligned}$$

Für den Stofs gelten nun (I, 32) die Gleichungen $S_\varphi = -\left[\frac{\partial L}{\partial \varphi'}\right]_t^{t+\tau}$ und zwei analoge für S_ϑ und S_ψ; d. h. S_φ ist gleich dem Werte von $-\frac{\partial L}{\partial \varphi'}$ unmittelbar nach dem Stofse vermindert um den Wert dieser Gröfse unmittelbar vor dem Stofse. Hiernach ergeben sich die Gleichungen

$$A\alpha' \sin\vartheta \sin\psi + B\beta' \sin\vartheta \cos\psi + C\gamma' \cos\vartheta = -S_\alpha \sin\psi \sin\vartheta - S_\beta \cos\psi \sin\vartheta - S_\gamma \cos\vartheta,$$

$$A\alpha' \cos\psi - B\beta' \sin\psi = -S_\alpha \cos\psi + S_\beta \sin\psi \text{ und}$$

$$C\gamma' = -S_\gamma, \text{ d. h. es ist auch } A\alpha' = -S_\alpha \text{ und } B\beta' = -S_\beta.$$

Folglich haben wir $a = \frac{\alpha'}{\omega} = -\frac{S_\alpha}{A\omega}$; $b = -\frac{S_\beta}{B\omega}$; $c = -\frac{S_\gamma}{C\omega}$

$$\text{und } \omega^2 = \left(\frac{S_\alpha}{A}\right)^2 + \left(\frac{S_\beta}{B}\right)^2 + \left(\frac{S_\gamma}{C}\right)^2, \text{ also } \omega^2 \Sigma m\varrho^2 = \frac{S_\alpha^2}{A} + \frac{S_\beta^2}{B} + \frac{S_\gamma^2}{C}$$

$$\text{und } \omega \Sigma m\varrho^2 = -aS_\alpha - bS_\beta - cS_\gamma.$$

Der Körper beginnt also nicht um die Achse des ihm durch den Stofs erteilten Drehungsmomentes zu rotieren, sondern um eine andere Achse mit den Richtungscosinus a, b, c. Beide Achsen bilden einen Winkel mit einander, dessen Cosinus gleich $\frac{\omega \Sigma m\varrho^2}{S}$ ist. Die anfängliche Winkelgeschwindigkeit ω ist gleich dem dem Körper um die wirkliche Rotationsachse erteilten Drehungsmomente, geteilt durch das Trägheitsmoment um diese Momentanachse.

40. Ein starrer Körper, der um eine Momentanachse (a, b, c) mit der Winkelgeschwindigkeit w rotiert, **wird plötzlich gezwungen, um eine andere Achse (α, β, γ) zu rotieren.** Mit welcher Winkelgeschwindigkeit ω fängt er an, sich um die neue Achse zu drehen? Den durch das plötzliche Festhalten der neuen Achse ausgeübten Zwang können wir durch einen Stofs hervorgebracht denken. Die lebendige Kraft vor dem Stofse ist $L = \frac{1}{2}w^2(Aa^2 + Bb^2 + Cc^2)$, nach dem Stofse $= \frac{1}{2}\omega^2(A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2)$. Nach 39 sind daher die erforderlich gewesenen Stofskräftepaare

$$-S_\alpha = A(\alpha\omega - aw); \quad -S_\beta = B(\beta\omega - bw); \quad -S_\gamma = C(\gamma\omega - cw).$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Vor dem Stofse besafs ein beliebiger Punkt E der neuen Achse (Fig. 10) eine Geschwindigkeit v senkrecht zu OE, da sich ja E um die alte Achse drehte. Durch den Stofs mufs diese Geschwindigkeit vernichtet worden sein, denn OE ist jetzt Drehungsachse, d. h. E befindet sich in Ruhe. Das Stofskräftepaar mufste also das Moment $m \cdot OE \cdot v$ gehabt haben und senkrecht zur Ebene beider Achsen gerichtet gewesen sein. Tragen wir, wie üblich, dieses Moment in O senkrecht zur Ebene des Kräftepaares, also auch senkrecht zu OE, als Strecke ab, so müssen $-S_\alpha$, $-S_\beta$, $-S_\gamma$ deren Projektionen sein, oder anders ausgedrückt, diese Komponenten müssen längs OE die Resultante Null liefern, daher $\alpha S_\alpha + \beta S_\beta + \gamma S_\gamma = 0$ oder, obige Werte eingesetzt,

$$\omega (A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2) = w (Aa\alpha + Bb\beta + Cc\gamma),$$

d. h. $\omega \Sigma m \varrho^2$ ist gleich dem Drehungsmomente vor dem Stofse in bezug auf die neue Achse.

Für zwei unendlich benachbarte Lagen der beiden Achsen haben wir

$$\omega = w + \tau w', \ \alpha = a + \tau a', \ \beta = b + \tau b', \ \gamma = c + \tau c',$$

$$\text{daher} \quad -S_\alpha = A\,[(a + \tau a')(w + \tau w') - a w] = \tau \Sigma m\,(y^2 + z^2)(a w' + w a').$$

In den Anwendungen des Gaufs'schen Prinzips vom kleinsten Zwange (Wissenschaftliche Beilage. Ostern 1897) ist § 21 gezeigt worden, dafs die plötzliche Änderung der Rotationsachse so wirkt, als ob jeder Punkt des Körpers einen Stofs erhalten hätte, dessen x-Komponente $= m\tau\,[w'(cy - bz) + w(c'y - b'z)]$ ist. Wir können leicht zeigen, dafs unsere Resultate hiermit in Übereinstimmung sind. Bilden wir zu obigem Werte von $(-X)$ die entsprechenden für $(-Y)$ und $(-Z)$, so ergibt eine kurze Rechnung

$$\Sigma\,(yZ - zY) = \tau \Sigma m\,(y^2 + z^2)(a w' + w a') = -S_\alpha.$$

---

41. Relative Bewegung. Bewegungsgleichungen eines freien materiellen Punktes in bezug auf ein Achsensystem, das sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um die feste z-Achse dreht.

Bildet das bewegliche Achsensystem ξ, η zur Zeit t mit dem festen System x, y den Winkel ϑ, so ist nach Fig. 11

$$x = \xi \cos\vartheta + \eta \sin\vartheta, \text{ also } x' = (\xi' + \omega\eta)\cos\vartheta + (\eta' - \omega\xi)\sin\vartheta$$

$$y = -\xi \sin\vartheta + \eta \cos\vartheta, \quad y' = -(\xi' + \omega\eta)\sin\vartheta + (\eta' - \omega\xi)\cos\vartheta, \text{ mithin}$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 + \omega^2(\xi^2 + \eta^2) - 2\omega(\xi\eta' - \eta\xi')\,^{1)}.$$

Aus $H = -\frac{1}{2} m\,(x'^2 + y'^2 + z'^2)$ erhalten wir

$$\frac{\partial H}{\partial \xi'} = -m\xi' - m\omega\eta; \quad \frac{\partial H}{\partial \xi} = -m\omega^2\xi + m\omega\eta'$$

$$\frac{\partial H}{\partial \eta'} = -m\eta' + m\omega\xi; \quad \frac{\partial H}{\partial \eta} = -m\omega^2\eta - m\omega\xi'; \quad \frac{\partial H}{\partial \zeta'} = -m\zeta'; \quad \frac{\partial H}{\partial \zeta} = 0.$$

---

[1]) Mit Rücksicht auf § 47 sei darauf hingewiesen, dafs, wenn die y-Achse und die η-Achse die entgegengesetzte Richtung haben,

$$x = \xi \cos\vartheta - \eta \sin\vartheta; \ y = \xi \sin\vartheta + \eta \cos\vartheta \text{ und}$$

$$x'^2 + y'^2 = \xi'^2 + \eta'^2 + \omega^2(\xi^2 + \eta^2) + 2\omega(\xi\eta' - \eta\xi')$$

ist und die Komponenten der Coriolis'schen Kraft $+2m\omega\eta'$ und $-2m\omega\xi'$ sind.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nach dem Hamilton'schen Prinzipe sind dann die Bewegungsgleichungen

$$m\xi'' = m\omega^2\xi - 2m\omega\eta'; \quad m\eta'' = m\omega^2\eta + 2m\omega\xi'; \quad m\zeta'' = 0.$$

Für einen Beobachter, der sich mit dem beweglichen Koordinatensystem mitdreht, erscheint also die Bewegung des Massenpunktes nicht als frei, sondern als beeinflufst durch zwei Kräfte, von denen die erste $mr\omega^2$ (Centrifugalkraft) in Richtung des Abstandes des Punktes m von der z-Achse wirkt. Die zweite, bisweilen nach Coriolis benannte Kraft $2m\omega\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}$ ist in jedem Augenblick senkrecht zu der relativen Geschwindigkeit des Punktes und zwar im Sinne der Bewegung nach rechts gerichtet (für einen in Richtung der z-Achse aufrecht stehenden Beobachter), wie Fig. 12 zeigt. Ist der Punkt relativ in Ruhe, so ist also nur die Centrifugalkraft an ihm wirksam.

42. Im Anschlufs hieran können wir ermitteln, wie sich ein **materieller Punkt m ohne treibende Kräfte auf einer gleichförmig um einen festen Durchmesser rotierenden Kugel** bewegt.

Der Durchmesser falle mit der ζ-Achse zusammen. Bestimmen wir die Lage des Punktes durch Polarkoordinaten (Länge und Breite), so haben wir nach Fig. 13 $\xi = r\cos\varphi\sin\lambda$; $\eta = r\cos\varphi\cos\lambda$; $\zeta = r\sin\varphi$, daher $\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = r^2\lambda'^2\cos^2\varphi + r^2\varphi'^2$ und $L = \frac{1}{2}m(x'^2 + y'^2 + z'^2) = \frac{1}{2}mr^2[\varphi'^2 + (\lambda' + \omega)^2\cos^2\varphi]$. Aus $H = -L$ folgt

$$\frac{\partial H}{\partial\varphi'} = -mr^2\varphi'; \quad \frac{\partial H}{\partial\varphi} = mr^2(\lambda' + \omega)^2\sin\varphi\cos\varphi; \quad \frac{\partial H}{\partial\lambda'} = -mr^2(\lambda' + \omega)\cos^2\varphi; \quad \frac{\partial H}{\partial\lambda} = 0.$$

Die Bewegungsgleichungen des freien Punktes relativ zur rotierenden, als kugelförmig betrachteten Erde sind daher

$$-mr^2\varphi'' - mr^2(\lambda' + \omega)^2\sin\varphi\cos\varphi = 0$$
$$-mr^2\cos^2\varphi\lambda'' + 2mr^2(\lambda' + \omega)\sin\varphi\cos\varphi\cdot\varphi' = 0.$$

Wird der betrachtete Punkt gezwungen, sich anders zu bewegen als diesen allgemeinen Gleichungen entspricht, so erhält man die Kräfte, mit denen er auf den ausgeübten Zwang reagiert, aus

$$P_\varphi = -mr^2\varphi'' - mr^2(\lambda' + \omega)^2\sin\varphi\cos\varphi$$
$$P_\lambda = -mr^2\cos^2\varphi\lambda'' + mr^2(\lambda' + \omega)\varphi'\sin 2\varphi,$$

worin sich nun λ und φ auf die gegebene gezwungene Bewegung beziehen.

I. Ist z. B. der Punkt m auf der Erde in Ruhe, also $\lambda = \text{const.}$ und $\varphi = \text{const.}$, so sind die Reaktionskräfte $P_\varphi = -mr^2\omega^2\sin\varphi\cos\varphi$ und $P_\lambda = 0$. Die Rotation der Erde bringt also ein Drehungsmoment $-mr^2\omega^2\sin\varphi\cos\varphi$ hervor, das auf Verkleinerung von φ hinwirkt. Wie Fig. 14 zeigt, ist diese nach dem Äquator gerichtete Kraft $mr\omega^2\sin\varphi\cos\varphi$ die tangentiale Komponente der nach 41) wirksamen Centrifugalkraft $mr\omega^2\cos\varphi$.

II. Ist der Punkt gezwungen, sich auf einem Meridian zu bewegen, also blofs noch φ veränderlich, so ergibt sich aus $\overline{H} = -\frac{1}{2}mr^2(\varphi'^2 + \omega^2\cos^2\varphi)$ die Bewegungsgleichung

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$-mr^2\varphi'' - mr^2\omega^2 \sin\varphi \cos\varphi = 0$ oder $2\varphi'' = -\omega^2 \sin 2\varphi$, mithin $\varphi'^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \cos 2\varphi + \text{const.}$ Der Vergleich mit der Bewegung des freien Punktes liefert uns die Reaktion des Punktes gegen den Zwang $P_\lambda = mr^2\omega\varphi' \sin 2\varphi$. Soll die Bewegung längs des Meridians auch noch gleichförmig sein ($\varphi' = \text{const.}$), so erfordert dies das Hinzutreten der äufseren Kraft $-P_\varphi = \frac{1}{2} mr^2\omega^2 \sin 2\varphi$. Ist das Bewegte z. B. eine Lokomotive (35 000 kg), so erhalten wir aus P_λ den Seitendruck D gegen die Schienen. Da $P_\lambda d\lambda$ die Arbeit ist, welche bei einer Änderung $d\lambda$ der Koordinate λ allein geleistet wird, diese Arbeit aber auch $= D \cdot r \cos\varphi \cdot d\lambda$ ist, so folgt $D = 2mr\omega\varphi' \sin\varphi$ in Richtung des wachsenden λ, d. h. nach Osten. Bei der Fahrt von Norden nach Süden ist φ' negativ, der Druck erfolgt also gegen die westliche Schiene, bei der Fahrt nach Norden gegen die östliche Schiene. Die Gröfse des Druckes ist, wenn wir die Geschwindigkeit der Lokomotive $r\varphi' = 25\,\text{m/sec}$ wählen, in der Breite von Berlin ungefähr 10 kg, da $\omega = \frac{2\pi}{86\,124}$, also nahezu $= \frac{1}{14\,000}$ ist.

III. Ist endlich der betrachtete Punkt gezwungen, sich auf dem Parallelkreise $\varphi = \text{const.}$ zu bewegen, so erhalten wir aus $\overline{\overline{H}} = -\frac{1}{2} mr^2 (\lambda' + \omega)^2 \cos^2\varphi$ die Bewegungsgleichung $\lambda'' = 0$ und als Reaktion gegen den Zwang $P_\varphi = -\frac{1}{2} mr^2 (\lambda' + \omega)^2 \sin 2\varphi$. Ist wieder D der senkrecht gegen die Bahn ausgeübte Seitendruck, so folgt aus $P_\varphi d\varphi = D r d\varphi$, dafs $D = -\frac{1}{2} mr (\lambda' + \omega)^2 \sin 2\varphi$. Da P_φ auf Vergröfserung von φ hinwirkt, so ist das erhaltene Resultat ein Druck gegen die südliche Schiene sowohl bei östlicher wie bei westlicher Fahrt. In dem gewählten Beispiele erhalten wir ungefähr 65 kg bei östlicher Fahrt, circa 45 kg bei westlicher Fahrt.

Dieses Ergebnis ist insofern bemerkenswert, als ein Seitendruck bei einer senkrecht zum Meridian gerichteten Bahn mehrfach ganz geleugnet ist. Gerade bei nordsüdlicher Richtung soll er angeblich seinen gröfsten Wert haben, und eine vermeintlich durch ihn hervorgebrachte Verschiebung der Eisenbahnschienen ist sogar als Beweis für die Umdrehung der Erde angeführt worden.

Da noch eingewandt werden könnte, dafs die Bahn auf dem Parallelkreise kein gröfster Kugelkreis sei, so soll dieser Fall noch besonders untersucht werden und zwar auch mit Anwendung des Hamilton'schen Prinzips.

43. Seitendruck bei beliebig gerichteter Bahn auf der (kugelförmigen) Erde. Durch einen beliebigen, aber festen Punkt B der Erde (Breite b) gehe ein gröfster Kreis, der mit dem Meridian von B den Winkel α bilde. Die Lage eines veränderlichen Punktes P, der die Breite φ und die auf den festen Meridian NB bezogene Länge λ habe, kann dann durch die neuen unabhängigen Koordinaten α und β bestimmt werden, wo das Azimut α von Norden aus über Osten bis 360° gezählt werden möge, so dafs $BP = \beta$ immer positiv zu rechnen ist. Nach 42 ist $\xi = r \cos\varphi \sin\lambda$, $\eta = r \cos\varphi \cos\lambda$, $\zeta = r \sin\varphi$. Aus dem sphärischen Dreieck NBP (Fig. 15) ergibt sich $\sin\alpha \sin\beta = \sin\lambda \cos\varphi$ und $\sin\varphi = \cos\beta \sin b + \sin\beta \cos b \cos\alpha$. Ferner ist $\cos u = \cos\lambda \cos\varphi = \cos b \cos\beta - \sin b \sin\beta \cos\alpha$, mithin $\xi = r \sin\alpha \sin\beta$, $\eta = r (\cos\beta \cos b - \sin\beta \sin b \cos\alpha)$, $\zeta = r (\cos\beta \sin b + \sin\beta \cos b \cos\alpha)$ und $\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = r^2 (\alpha'^2 \sin^2\beta + \beta'^2)$, wie auch an sich klar. Demnach erhalten wir

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$H = -\tfrac{1}{2} m r^2 [\alpha'^2 \sin^2\beta + \beta'^2 + \omega^2 (\sin^2\alpha \sin^2\beta + \cos^2 b \cos^2\beta + \sin^2 b \cos^2\alpha \sin^2\beta - \sin 2b \cos\alpha \sin\beta \cos\beta)$$
$$- 2\omega (\alpha' \sin b \sin^2\beta - \alpha' \cos b \cos\alpha \sin\beta \cos\beta - \beta' \cos b \sin\alpha)],$$

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha'} = - m r^2 \sin\beta (\alpha' \sin\beta - \omega \sin b \sin\beta + \omega \cos b \cos\alpha \cos\beta),$$

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha} = - m r^2 \omega^2 \sin\alpha \sin\beta \cos b (\cos\alpha \sin\beta \cos b + \sin b \cos\beta) + m r^2 \omega \cos b (\alpha' \sin\alpha \sin\beta \cos\beta - \beta' \cos\alpha),$$

$$\frac{\partial H}{\partial \beta'} = - m r^2 (\beta' + \omega \cos b \sin\alpha),$$

$$\frac{\partial H}{\partial \beta} = - m r^2 [\alpha'^2 \sin\beta \cos\beta + \omega^2 (\sin\beta \cos\beta (\sin^2 b - \cos^2 b \cos^2\alpha) - \cos 2\beta \sin b \cos b \cos\alpha)$$
$$- \omega \alpha' (\sin 2\beta \sin b - \cos 2\beta \cos b \cos\alpha)].$$

Die Bewegungsgleichungen eines freien Punktes auf der Kugeloberfläche sind daher

$$- m r^2 [\alpha'' \sin^2\beta + \alpha'\beta' \sin 2\beta - \omega \beta' \sin b \sin 2\beta - 2\omega \beta' \cos b \cos\alpha \sin^2\beta$$
$$- \omega^2 (\cos^2 b \sin\alpha \cos\alpha \sin^2\beta + \sin b \cos b \sin\alpha \sin\beta \cos\beta)] = 0$$

$$- m r^2 [\beta'' + 2\omega \alpha' \cos b \cos\alpha \sin^2\beta - \alpha'^2 \sin\beta \cos\beta + \omega \alpha' \sin b \sin 2\beta$$
$$- \omega^2 (\sin\beta \cos\beta (\sin^2 b - \cos^2 b \cos^2\alpha) - \sin b \cos b \cos\alpha \cos 2\beta)] = 0.$$

Wird nun dem Massenpunkte durch einen gegebenen Wert von α eine bestimmte Bahn vorgeschrieben, so bewegt er sich in ihr nach dem Gesetz

$$\beta'' = \tfrac{1}{2} \omega^2 (\sin^2 b \sin 2\beta - \cos^2 b \cos^2\alpha \sin 2\beta - \sin 2b \cos\alpha \cos 2\beta)$$

und äufsert gegen den auferlegten Zwang die Reaktionskraft

$$P_\alpha = m r^2 [\omega \beta' \sin b \sin 2\beta + 2\omega \beta' \cos b \cos\alpha \sin^2\beta + \omega^2 \sin\alpha \sin\beta \cos b (\cos b \cos\alpha \sin\beta + \sin b \cos\beta)].$$

Bezeichnet wieder D den auf Vergröfserung von α hingerichteten Seitendruck der Bahn, so ist $P_\alpha d\alpha = D r \sin\beta d\alpha$. In dem hieraus sich ergebenden Ausdruck für D müssen wir nun, um den Seitendruck im Punkte B der Bahn zu erhalten, $\beta = 0$ setzen. Dann folgt

$$D = 2 m r \omega \beta' \sin b + \tfrac{1}{2} m r \omega^2 \sin 2b \sin\alpha.$$

Bei jeder beliebigen Richtung der Bahn ist also erstens ein konstanter Druck gegen die im Sinne der Fahrt rechte Schiene von der Stärke $2 m r \omega \beta' \sin b$ vorhanden (in Übereinstimmung mit 42, II); aufserdem noch ein mit dem Azimute der Bahn veränderlicher Druck, der unabhängig von der Geschwindigkeit in der Bahn ist. Dieser verschwindet nur, wenn die Bahn mit dem Meridian von B zusammenfällt, und erreicht seinen gröfsten Wert $\tfrac{1}{2} m r \omega^2 \sin 2b$ bei west-östlicher Fahrt. Liegt α zwischen 0° und 180°, so hat er dieselbe Richtung wie der zuerst betrachtete Bestandteil, für Werte von α zwischen 180° und 360° dagegen die entgegengesetzte Richtung. Nur für zwei Azimute ist der Gesamtdruck Null, nämlich wenn $\omega \cos b \cdot \sin\alpha = -2\beta'$, falls $2\beta' < \omega \cos b$.

In dem gewählten Zahlenbeispiel tritt dies ungefähr ein bei $\alpha = 190°$ und 350°. Bei östlicher Fahrt ergibt sich als Gesamtdruck gegen die südliche Schiene annähernd (58 + 10) kg, bei westlicher Fahrt ebenfalls gegen die südliche Schiene (58 — 10) kg.

Obschon die beiden in 42, III und hier betrachteten Bahnen in B dieselbe Tangente haben, stimmen die Resultate doch nur der Gröfsenordnung nach überein.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dies erklärt, warum elementare Betrachtungen, die man angestellt hat, nicht zum richtigen Ziele geführt haben, da sich schwer übersehen läfst, in welchem Grade eine scheinbar geringfügige Abänderung der Aufgabe das Resultat beeinflufst. Das zeigen auch die folgenden Paragraphen, in denen dieselbe Aufgabe für die abgeplattete anstatt für eine rein kugelförmige Gestalt der Erde behandelt wird.

44. Bewegung auf einem Rotationsellipsoide. In 41 haben wir gezeigt, dafs wir von der gleichförmigen Rotation eines Körpers absehen können, wenn wir zu den wirkenden äufseren Kräften noch zwei neue Kräfte $m\varrho\omega^2$ und $2m\omega\sqrt{\xi'^2+\eta'^2}$ hinzufügen, wo ϱ den Abstand des Punktes m von der Rotationsachse bedeutet. Bei der Bewegung auf einer homogenen Kugel konnte von der Attraktion abgesehen werden, da sie überall in Richtung des Radius wirkt, die Bewegung auf der Kugelfläche also nicht beeinflussen kann. Dies ist bei der abgeplatteten Erde nicht mehr der Fall, wir können aber annehmen, dafs sich ihre Gleichgewichtsgestalt so gebildet hat, dafs die Resultante aus den Attraktionskräften des Ellipsoids und der Centrifugalkraft an jeder Stelle senkrecht zur Erdoberfläche steht. Wollen wir daher nur die Bewegung in der Fläche betrachten, so können wir dabei auch wieder von den äufseren Kräften absehen, wenn wir gleichzeitig von der Wirkung der Centrifugalkraft absehen. Wir haben daher auch in diesem Falle $H = -L$ und $L = \frac{1}{2}m(x'^2+y'^2+z'^2) = \frac{1}{2}m(\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2) - m\omega(\xi\eta'-\eta\xi')$.

Die Bedingung, dafs sich der Punkt m auf dem Ellipsoide bewegen soll, führen wir dadurch ein, dafs wir (Fig. 16a und b) $\zeta = b\sin u$, $\varrho = a\cos u$ setzen, so dafs $\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}\operatorname{tg} u$. Dabei ist β die geocentrische Breite. Die Polhöhe oder geographische Breite ergibt sich aus $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{b}\operatorname{tg} u = \frac{a^2}{b^2}\operatorname{tg}\beta$. Die Koordinaten des betrachteten Massenpunktes sind dann

$$\xi = a\cos u\sin\lambda,\quad \eta = a\cos u\cos\lambda,\quad \zeta = b\sin u.\quad \text{Hieraus folgt}$$

$$\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2 = a^2\lambda'^2\cos^2 u + u'^2(a^2\sin^2 u + b^2\cos^2 u)\ \text{ und }\ 2\omega(\xi\eta'-\eta\xi') = -2\omega a^2\lambda'\cos^2 u,$$

$$\text{also } L = \tfrac{1}{2}m\,[a^2\lambda'^2\cos^2 u + u'^2(a^2\sin^2 u + b^2\cos^2 u) + 2\omega\lambda' a^2\cos^2 u].\quad \text{Aus}$$

$$\frac{\partial H}{\partial\lambda'} = -ma^2(\lambda'+\omega)\cos^2 u;\quad \frac{\partial H}{\partial\lambda} = 0;\quad \frac{\partial H}{\partial u'} = -mu'(a^2\sin^2 u + b^2\cos^2 u)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = ma^2(\lambda'^2+2\omega\lambda')\sin u\cos u - me^2u'^2\sin u\cos u$$

erhalten wir die Bewegungsgleichungen

$$-ma^2\cos u(\lambda''\cos u - 2\lambda' u'\sin u - 2\omega u'\sin u) = 0$$

$$-mu''(a^2\sin^2 u + b^2\cos^2 u) - m(e^2u'^2 + a^2\lambda'^2 + 2a^2\omega\lambda')\sin u\cos u = 0.$$

I. Ist der Punkt in Ruhe, so ergibt sich $P_\lambda = 0$ und $P_u = 0$, d. h. äufsere Kräfte sind dazu nicht erforderlich.

II. Soll sich der Punkt nur längs eines Meridians bewegen, also $\lambda = \text{const.}$ sein, so ist seine Bewegungsgleichung

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$- m u'' (a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u) - m e^2 u'^2 \sin u \cos u = 0 \text{ oder}$$

$$- m \frac{d}{dt} (u' \sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u}) = - m \frac{d^2 s}{dt^2} = 0,$$

wenn ds ein Bogenelement des Meridians bedeutet, d. h. die Bewegung geschieht, wie zu erwarten war, ohne Beschleunigung. Die Kraft, mit welcher der Punkt gegen die ihm aufgezwungene Bahn reagiert, ist $P_\lambda = 2 m \omega u' a^2 \sin u \cos u$. Bezeichnet wieder D den Seitendruck gegen die Bahn, so ist die bei einer Verrückung $d\lambda$ geleistete Arbeit $P_\lambda d\lambda = D \varrho d\lambda = D a \cos u d\lambda$, mithin der Seitendruck

$$D = 2 m \omega a u' \sin u = 2 m \omega \sin \varphi \cdot \frac{ds}{dt}$$

in genauer Übereinstimmung mit 42, II.

III. Soll sich der betrachtete Punkt auf einem Parallelkreise bewegen, d. h. φ und $u = \text{const.}$ sein, so ist die Bewegungsgleichung $- m a^2 \lambda'' \cos^2 u = 0$ und die Reaktionskraft $P_u = - m a^2 (\lambda'^2 + 2 \omega \lambda') \sin u \cos u$. Bezeichnen wir den Seitendruck gegen die südliche Schiene mit D, so ist die bei einer Verrückung du geleistete Arbeit

$$P_u du = - D ds = - D du \cdot \sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u}, \text{ folglich}$$

$$D = m a (\lambda'^2 + 2 \omega \lambda') \cos u \sin \varphi = 2 m \omega \varrho \lambda' \sin \varphi + m \varrho \lambda'^2 \sin \varphi.$$

Bei der Bewegung auf dem Parallelkreise ist auch hier der Seitendruck stärker als auf der dazu senkrechten Bahn. In unserem Beispiele beträgt der Wert von $m \varrho \lambda'^2 \sin \varphi$ aber noch nicht 1 kg.

45. Um den **Seitendruck auf dem Ellipsoide bei beliebigem Azimute** angenähert zu bestimmen, legen wir in dem betrachteten Punkte B (Fig. 17) die Tangentialebene an die Fläche und führen ein neues Koordinatensystem ein, dessen $\xi\eta$-Ebene diese Tangentialebene und dessen ζ-Achse die Normale in B sei. Die ξ-Achse sei nach Osten, die η-Achse nach Norden gerichtet. Wir beschränken die folgenden Untersuchungen auf einen so kleinen Raum um B, dafs wir darin die Resultante aus Attraktion und Centrifugalkraft überall gleich $m g_\varphi$ und parallel der ζ-Achse annehmen dürfen. Die Anziehung eines Ellipsoids auf einen Punkt seiner Oberfläche (und auch auf einen Punkt des betrachteten Gebietes) liefert[1]) drei Komponenten $- m \alpha x$, $- m \beta y$ und $- m \gamma z$, die dazugehörige Kräftefunktion Φ ist also $= \frac{1}{2} m (\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2)$. Die Centrifugalkraft hat das Potential $- \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2)$. Da nun die Anziehung der Erde so beschaffen ist, dafs sie im Verein mit der Centrifugalkraft nur eine Komponente $m g_\varphi$ in Richtung der ζ-Achse liefert, so mufs $\Phi = m g_\varphi \zeta + \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2)$ sein. Der Punkt B hat die Koordinaten $x_0 = a \cos u \sin \vartheta$, $y_0 = a \cos u \cos \vartheta$, $z_0 = b \sin u$ und allgemein ist

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \xi \cos (\xi, x) + \eta \cos (\eta, x) + \zeta \cos (\zeta, x) \\ y &= y_0 + \xi \cos (\xi, y) + \eta \cos (\eta, y) + \zeta \cos (\zeta, y) \\ z &= z_0 + \xi \cos (\xi, z) + \eta \cos (\eta, z) + \zeta \cos (\zeta, z). \end{aligned}$$

---

[1]) Vergl. z. B. Thomson u. Tait, Handbuch d. theor. Physik. Teil II. S. 316.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wird blofs die Koordinate ϑ um $d\vartheta$ geändert, so ist $d\xi = a \cos u \, d\vartheta$ und $dx = a \cos u \cos\vartheta \, d\vartheta$. Wird nur u geändert, so folgt $d\eta = ds = du \cdot \sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u}$, $dx = - a \sin\vartheta \sin u \, du$. Daher ist $\cos(\xi, x) = \frac{dx}{d\xi} = \cos\vartheta$, $\cos(\eta, x) = - \sin\vartheta \sin\varphi$; analog ergeben sich die übrigen Werte und da nach Fig. 17 $\cos(\zeta, z) = \sin\varphi$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} x &= (a \cos u + \zeta \cos\varphi) \sin\vartheta + \xi \cos\vartheta - \eta \sin\vartheta \sin\varphi \\ y &= (a \cos u + \zeta \cos\varphi) \cos\vartheta - \xi \sin\vartheta - \eta \cos\vartheta \sin\varphi \\ z &= b \sin u + \zeta \sin\varphi \qquad\qquad + \eta \cos\varphi \qquad \text{und} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x' &= \quad \omega y + \xi' \cos\vartheta - \eta' \sin\vartheta \sin\varphi + \zeta' \sin\vartheta \cos\varphi \\ y' &= - \omega x - \xi' \sin\vartheta - \eta' \cos\vartheta \sin\varphi + \zeta' \cos\vartheta \cos\varphi \\ z' &= \qquad\qquad \eta' \cos\varphi \qquad + \zeta' \sin\varphi \qquad , \text{ mithin} \end{aligned}$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \omega^2 (x^2 + y^2) + \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 + 2\omega [(a \cos u + \zeta \cos\varphi - \eta \sin\varphi) \xi' + \xi \eta' \sin\varphi - \xi \zeta' \cos\varphi].$$

Aus $H = \Phi - L$ folgt nun

$$H = m g \zeta - \tfrac{1}{2} m (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) - m\omega [(a \cos u + \zeta \cos\varphi - \eta \sin\varphi) \xi' + \xi \eta' \sin\varphi - \xi \zeta' \cos\varphi].$$

Für einen freien Punkt in der Nähe von B erhalten wir hieraus in bekannter Weise die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \xi'' + 2\omega \zeta' \cos\varphi - 2\omega \eta' \sin\varphi &= 0 \\ \eta'' + 2\omega \xi' \sin\varphi &= 0 \\ \xi'' - 2\omega \xi' \cos\varphi &= - g. \end{aligned}$$

Nehmen wir an, dafs zur Zeit $t = 0$ die Anfangswerte von ξ', η', ζ' Null sind und aufserdem $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = h$, so erhalten wir zunächst $\eta' = - 2\omega \xi \sin\varphi$. Vernachlässigen wir Gröfsen von der Ordnung ω^2, so folgt $\xi' + 2\omega \zeta \cos\varphi = 2\omega h \cos\varphi$, daher nach der dritten Gleichung $\zeta = h - \frac{1}{2} g t^2$, folglich $\xi' = \omega g t^2 \cos\varphi$ und $\xi = \frac{1}{3} \omega g t^3 \cos\varphi$ als Abweichung nach Osten.

Im Folgenden wollen wir uns nur auf Bewegungen in der Tangentialebene beschränken. Wir führen wieder (Fig. 18) das von Norden über Osten gezählte Azimut α ein, wie in 43, und setzen $\xi = r \sin\alpha$, $\eta = r \cos\alpha$. Dann haben wir

$$H = - \tfrac{1}{2} m (r'^2 + r^2 \alpha'^2) - m\omega [a \cos u (r' \sin\alpha + r \alpha' \cos\alpha) - r^2 \alpha' \sin\varphi]$$

und hieraus die beiden Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} - m r'' + m r \alpha'^2 - 2 m r \alpha' \omega \sin\varphi &= 0 \\ - m r^2 \alpha'' - 2 m r r' \alpha' + 2 m r r' \omega \sin\varphi &= 0. \end{aligned}$$

Unterliegt der Massenpunkt dem Zwange $\alpha = \text{const.}$, so erhalten wir als Bewegungsgleichung in seiner Bahn $r'' = 0$ und als Reaktion gegen den Zwang $P_\alpha = 2 m r r' \omega \sin\varphi$. Die bei einer blofsen Verrückung von α geleistete Arbeit ist, wenn D die dazu nötige Kraft bezeichnet, $P_\alpha \, d\alpha = D r \, d\alpha$, mithin $D = 2 m r' \omega \sin\varphi$.

Eine Lokomotive übt daher auf der abgeplatteten Erde gegen die rechte Schiene (im Sinne der Fahrt) immer denselben Seitendruck aus, ganz unabhängig von der Richtung der Bahn; seine Gröfse beträgt in dem gewählten Zahlenbeispiel nahezu 60 kg.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

46. Um schliefslich noch **die Aufgabe ohne alle Beschränkung** auf Meridian, Parallelkreis und Tangentialebene zu lösen, müssen wir vorher die Gleichung der kürzesten Linie auf einem Rotationsellipsoide bestimmen.

Bewegt sich ein Massenpunkt m ohne den Einflufs äufserer Kräfte auf dem Ellipsoide, so geschieht das (I, 13) auf der kürzesten Linie und mit konstanter Geschwindigkeit. Wir erhalten daher die Gleichung der kürzesten Linie ausgedrückt durch die Variablen u und λ, wenn wir nach dem Hamilton'schen Prinzipe die Bewegungsgleichungen des Punktes aufstellen und aus ihnen die Zeit eliminieren. Aus

$$L = \tfrac{1}{2} m (x'^2 + y'^2 + z'^2) = \tfrac{1}{2} m [a^2 \lambda'^2 \cos^2 u + u'^2 (a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u)] = \frac{m}{2} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \text{const. folgt}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda'} = m a^2 \lambda' \cos^2 u, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0, \quad \text{also} \quad a^2 \lambda' \cos^2 u = \text{const.} \quad \text{oder} \quad a^2 \cos^2 u \, d\lambda = c_1 dt.$$

Hiermit verbinden wir die schon im Voraus bekannte Beziehung $ds = c_2 dt$. Aus beiden Gleichungen folgt $a^2 \cos^2 u \, d\lambda = c ds$.

Betrachten wir nun (Fig. 19) ein Bogenelement ds der von einem festen Punkte B_0 (u_0, λ_0) ausgehenden kürzesten Linie und sei α das wieder von Norden aus gerechnete Azimut der Bahn, so ist $a \cos u_0 d\lambda$ das zugehörige Längenelement des durch B_0 gehenden Parallelkreises und mithin $ds \sin\alpha = a \cos u_0 d\lambda$. Verbinden wir hiermit die Gleichung $a^2 \cos^2 u_0 d\lambda = c ds$, so folgt $c = a \cos u_0 \sin\alpha$. Daher ist

$$a \cos^2 u \, d\lambda = \cos u_0 \sin\alpha \, ds = \cos u_0 \sin\alpha \sqrt{a^2 \cos^2 u \, d\lambda^2 + du^2 (a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u)} \quad \text{oder}$$

$$a^2 \cos^2 u \, d\lambda^2 (\cos^2 u - \cos^2 u_0 \sin^2\alpha) = \cos^2 u_0 \sin^2\alpha \, (a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u) \, du^2 \quad \text{und}$$

$$d\lambda = du \cdot \frac{\cos u_0 \sin\alpha}{a \cos u} \sqrt{\frac{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u}{\cos^2 u - \cos^2 u_0 \sin^2\alpha}} = du \cdot G.$$

Für $u = u_0$ sei $\lambda = 0$, dann ist

$$\lambda = \int_{u_0}^{u} G du, \quad \text{wo} \quad G = \frac{\sin\alpha \cos u_0}{\cos u} \sqrt{\frac{1 - \varepsilon^2 \cos^2 u}{\cos^2 u - \cos^2 u_0 \sin^2\alpha}},$$

wenn ε die numerische Excentricität des Rotationsellipsoids bezeichnet. Hiermit ist λ als Funktion von u und α gegeben, also $\lambda = f(u, \alpha)$ die Gleichung der kürzesten Linie auf dem ruhenden Ellipsoid. Sie gibt zu jedem Werte von u, gerechnet von u_0 an, den zugehörigen Wert von λ, gerechnet von dem durch B_0 gehenden Meridian an.

Sind nun für einen Punkt des ruhenden Ellipsoids die Koordinaten $x = a \cos u \sin\lambda$, $y = a \cos u \cos\lambda$, $z = b \sin u$, so sind auf dem rotierenden Ellipsoide zur Zeit t seine Koordinaten $x = a \cos u \sin(\lambda + \omega t)$, $y = a \cos u \cos(\lambda + \omega t)$, $z = b \sin u$. Hieraus folgt

$$L = \tfrac{1}{2} m (x'^2 + y'^2 + z'^2) = \tfrac{1}{2} a^2 m [(\lambda' + \omega)^2 \cos^2 u + u'^2 (1 - \varepsilon^2 \cos^2 u)].$$

Dabei ist $d\lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \lambda}{\partial u} du = F d\alpha + G du$, wo $F = \int_{u_0}^{u} \frac{\partial G}{\partial \alpha} du$, mithin $\frac{\partial G}{\partial \alpha} = \frac{\partial F}{\partial u}$.

Das Potential des homogenen Rotationsellipsoides für einen Punkt seiner Oberfläche ist bis auf eine additive Konstante $= \tfrac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2) = \tfrac{1}{2} m \omega^2 a^2 \cos^2 u$, also

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$H = \Phi - L = \tfrac{1}{2} m a^2 \omega^2 \cos^2 u - \tfrac{1}{2} m a^2 [\cos^2 u (F\alpha' + \omega + G u')^2 + u'^2 (1 - \varepsilon^2 \cos^2 u)] \text{ und}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha'} = - m a^2 F \cos^2 u (F\alpha' + \omega + G u')$$

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha} = - m a^2 \cos^2 u (F\alpha' + \omega + G u') \left(\frac{\partial F}{\partial \alpha} \cdot \alpha' + \frac{\partial G}{\partial \alpha} \cdot u' \right) = - m a^2 \cos^2 u F' (F\alpha' + \omega + G u').$$

Aus $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \alpha'}\right) - \frac{\partial H}{\partial \alpha} = 0$ erhalten wir

$$- m a^2 [F \cos^2 u (F'\alpha' + F\alpha'' + G'u' + Gu'') - u' F \sin 2u (F\alpha' + \omega + G u')] = 0.$$

Unterliegt nun die Bewegung des bisher als auf dem Ellipsoide ganz frei beweglich betrachteten Punktes dem Zwange, dafs er sich auf einer kürzesten Linie bewegen soll, die mit einem festen Meridian das Azimut α bildet, so erhalten wir die Kraft P_α, mit der der Punkt auf diesen Zwang reagiert, aus

$$P_\alpha = - m a^2 [F \cos^2 u (G'u' + Gu'') - u' F \sin 2u (\omega + G u')]$$
$$= - m a^2 [- \omega F u' \sin 2u + F \cdot \frac{d}{dt} (G u' \cos^2 u)].$$

Die Gleichung für die Bewegung in dieser Bahn erhalten wir aus dem kinetischen Potential H, indem wir bei der Bildung von $\frac{\partial H}{\partial u'}$ und $\frac{\partial H}{\partial u}$ die Gröfse α von vornherein als konstant behandeln. So folgt

$$\frac{\partial H}{\partial u'} = - m a^2 [(G\omega + G^2 u') \cos^2 u + u' (1 - \varepsilon^2 \cos^2 u)]$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = - m a^2 \omega^2 \sin u \cos u - m a^2 \left[- (\omega + G u')^2 \sin u \cos u + u' \frac{\partial G}{\partial u} (\omega + G u') \cos^2 u + u'^2 \varepsilon^2 \sin u \cos u \right]$$

und daher als Bewegungsgleichung

$$u'' (G^2 \cos^2 u + 1 - \varepsilon^2 \cos^2 u) + G G' u' \cos^2 u + u'^2 \varepsilon^2 \sin u \cos u - G^2 u'^2 \sin u \cos u = 0 \text{ oder}$$

$$\frac{d}{dt} (u' \sqrt{G^2 \cos^2 u + 1 - \varepsilon^2 \cos^2 u}) = 0.$$

Nun war allgemein

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = a^2 \cos^2 u (F\alpha' + G u')^2 + a^2 u'^2 (1 - \varepsilon^2 \cos^2 u),$$

daher ist für die obige vorgeschriebene Bahn ($\alpha = \text{const.}$)

$$\frac{ds}{dt} = a u' \sqrt{G^2 \cos^2 u + 1 - \varepsilon^2 \cos^2 u}.$$

Unsere Bewegungsgleichung lautet also, wie von vornherein zu erwarten war,

$$\frac{ds}{dt} = \text{const.}$$

Mit Benutzung des Wertes von G können wir diese Gleichung umformen in

$$ds = a\,du \sqrt{\frac{G^2 \cos^4 u}{\sin^2 \alpha \cos^2 u_0}} = \frac{a G \cos^2 u\, du}{\sin \alpha \cos u_0}.$$

Aus $\frac{d^2 s}{dt^2} = 0$ folgt jetzt $\frac{d}{dt} (G u' \cos^2 u) = 0$, also $P_\alpha = m a^2 \omega u' F \sin 2u$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die betrachtete gezwungene Bewegung des Massenpunktes auf der kürzesten Linie erfolgt unter einer beständigen Reaktion des Punktes gegen diesen Zwang. Er strebt mit der Kraft P_α die Koordinate α zu vergröfsern, und $P_\alpha d\alpha$ ist die Arbeit bei einer solchen Verschiebung $d\alpha$, bei der u ungeändert bleibt (Fig. 20). Bezeichnen wir durch einen hinzugesetzten Index, welche Koordinate bei einer Verschiebung konstant bleiben soll, so ist $ds_u = a \cos u \, d\lambda_u = a \cos u F d\alpha$, wie sich aus dem allgemeinen Ausdruck für $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ ergibt. Nennen wir D den Seitendruck gegen die Bahn, ψ ihren Winkel mit dem Parallelkreise ($u = \text{const}$), so ist die bei einer solchen Verrückung $d\alpha$ geleistete Arbeit $P_\alpha d\alpha = D \cdot a \cos u F d\alpha \cdot \sin\psi$.

Den Winkel ψ können wir leicht aus einer Verschiebung bestimmen, bei der α konstant bleibt (Fig. 21) und sich nur u um du ändert. Dabei ist

$$ds_\alpha = \frac{a \cos^2 u G du}{\sin\alpha \cos u_0} \text{ und } ds_\alpha \cos\psi = a \cos u \, d\lambda_\alpha = a \cos u G du,$$

$$\text{also } \cos\psi = \frac{\sin\alpha \cos u_0}{\cos u} \text{ und } \sin\psi = \frac{\sqrt{\cos^2 u - \sin^2\alpha \cos^2 u_0}}{\cos u} = \frac{\sin\alpha \cos u_0}{G \cos^2 u}\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 u}.$$

Daher ergibt sich schliefslich für den Seitendruck

$$D = \frac{2 m \omega \cdot a \cos^2 u G u' \cdot \sin u}{\sin\alpha \cos u_0 \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 u}} = 2 m \omega \cdot \frac{ds_\alpha}{dt} \cdot \sin\varphi,$$

womit die Behauptung am Ende von 45 ganz allgemein bewiesen ist.

47. Das Foucault'sche Pendel unter dem Einflufs der abgeplatteten Erde. Fig. 22.

Durch einen beliebigen Punkt B des Erdsphäroids legen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem (ξ, η, ζ), so dafs $B\xi$ nach Osten, $B\eta$ nach Norden, $B\zeta$ nach dem Zenite gerichtet ist. Im Abstande h von B befindet sich auf der Achse $B\zeta$ der Aufhängungspunkt A des Pendels, dessen Pendellänge l sei. Der betrachtete Massenpunkt m bewegt sich also auf einer Kugelfläche (Radius l), deren Mittelpunkt A infolge der Erdrotation in 24^h Sternzeit einen Kreis beschreibt. Die Lage eines beliebigen Punktes P dieser Kugelfläche sei einerseits durch die Koordinaten ξ, η, ζ, andererseits durch die Winkel α und β bestimmt. Dann ist nach Fig. 23

$$\begin{aligned} \xi &= l \sin\beta \cos\alpha; & \xi' &= -l\alpha' \sin\beta \sin\alpha + l\beta' \cos\beta \cos\alpha \\ \eta &= l \sin\beta \sin\alpha; & \eta' &= l\alpha' \sin\beta \cos\alpha + l\beta' \cos\beta \sin\alpha \\ \zeta &= h - l \cos\beta; & \zeta' &= \phantom{-l\alpha' \sin\beta \cos\alpha + {}} l\beta' \sin\beta, \end{aligned} \qquad \text{also}$$

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = l^2 \alpha'^2 \sin^2\beta + l^2 \beta'^2.$$

In bezug auf ein absolut festes Koordinatensystem, dessen Anfangspunkt der Erdmittelpunkt sei, habe B die Koordinäten x_0, y_0, z_0 und P die Koordinaten x, y, z. Dann ist

$$\begin{aligned} x_0 &= a \cos u \sin\vartheta; & x &= x_0 + \xi \cos(\xi, x) + \eta \cos(\eta, x) + \zeta \cos(\zeta, x) \\ y_0 &= a \cos u \cos\vartheta; & y &= y_0 + \xi \cos(\xi, y) + \eta \cos(\eta, y) + \zeta \cos(\zeta, y) \\ z_0 &= b \sin u \quad ; & z &= z_0 + \xi \cos(\xi, z) + \eta \cos(\eta, z) + \zeta \cos(\zeta, z). \end{aligned}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nach 45 folgt hieraus

$$x = (a\cos u + \zeta\cos\varphi)\sin\vartheta + \xi\cos\vartheta - \eta\sin\vartheta\sin\varphi$$
$$y = (a\cos u + \zeta\cos\varphi)\cos\vartheta - \xi\sin\vartheta - \eta\cos\vartheta\sin\varphi$$
$$z = b\sin u + \zeta\sin\varphi + \eta\cos\varphi$$

und weiter für das kinetische Potential $\mathfrak{H}$ von m, indem auch in P noch g parallel $B\zeta$ angenommen wird,

$$m g \zeta - \tfrac{1}{2} m (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) - m\omega\,[(a\cos u + \zeta\cos\varphi - \eta\sin\varphi)\xi' + \xi\eta'\sin\varphi - \xi\zeta'\cos\varphi]$$
$$= m g (h - l\cos\beta) - \tfrac{1}{2} m (l^2\alpha'^2\sin^2\beta + l^2\beta'^2) - m l\omega\,[\alpha'\sin\beta(l\sin\beta\sin\varphi + l\cos\beta\cos\varphi\sin\alpha$$
$$- a\cos u\sin\alpha - h\cos\varphi\sin\alpha) + \beta'\cos\alpha\cos\beta(a\cos u + h\cos\varphi) - l\beta'\cos\varphi\cos\alpha].$$

Bezeichnen wir das Trägheitsmoment der Erde in Bezug auf ihre Achse mit K, so ist die lebendige Kraft ihrer Rotation $= \frac{1}{2} K\omega^2$ und folglich das kinetische Potential des betrachteten Systems $H = \mathfrak{H} - \frac{1}{2} K\omega^2$. Demnach erhalten wir

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha'} = - m l^2\alpha'\sin^2\beta - m l\omega\sin\beta\,(l\sin\beta\sin\varphi + l\cos\beta\cos\varphi\sin\alpha - a\cos u\sin\alpha - h\cos\varphi\sin\alpha),$$

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha} = - m l\omega\,[\alpha'\cos\alpha\sin\beta(l\cos\beta\cos\varphi - a\cos u - h\cos\varphi) - \beta'\sin\alpha(a\cos u\cos\beta + h\cos\varphi\cos\beta - l\cos\varphi)],$$

$$\frac{\partial H}{\partial \beta'} = - m l^2\beta' - m l\omega\cos\alpha\,(a\cos\beta\cos u + h\cos\beta\cos\varphi - l\cos\varphi),$$

$$\frac{\partial H}{\partial \beta} = m g l\sin\beta - m l^2\alpha'^2\sin\beta\cos\beta - m l\omega\,[l\alpha'(\sin\varphi\sin 2\beta + \cos\varphi\cos 2\beta\sin\alpha)$$
$$- (a\cos u + h\cos\varphi)(\alpha'\sin\alpha\cos\beta + \beta'\sin\beta\cos\alpha)],$$

$$\frac{\partial H}{\partial \vartheta} = 0 \quad \text{und}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \vartheta'} = \frac{\partial H}{\partial \omega} = - K\omega + \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \omega} =$$
$$- K\omega - m l\,[\alpha'\sin\beta(l\sin\beta\sin\varphi + l\cos\beta\cos\varphi\sin\alpha - a\cos u\sin\alpha - h\cos\varphi\sin\alpha)$$
$$+ \beta'\cos\alpha\cos\beta(a\cos u + h\cos\varphi) - l\beta'\cos\varphi\cos\alpha].$$

Die drei allgemeinsten Bewegungsgleichungen sind dann

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \alpha'}\right) - \frac{\partial H}{\partial \alpha} = \mathfrak{P}_\alpha = 0 \text{ und analog für } \beta \text{ und } \vartheta.$$

Die dritte bestimmt die Änderung der Winkelgeschwindigkeit der Erde.

Betrachten wir die Bewegung der Erde als gleichförmig ($\omega' = 0$), so ergeben sich die beiden Bewegungsgleichungen des Pendels

$$\text{I.} \quad - m l^2\sin\beta\,[\alpha''\sin\beta + 2\alpha'\beta'\cos\beta + 2\omega\beta'\sin\varphi\cos\beta - 2\omega\beta'\cos\varphi\sin\alpha\sin\beta] = 0$$

$$\text{II.} \quad - m l^2\,[\beta'' - \alpha'^2\sin\beta\cos\beta + 2\omega\alpha'\cos\varphi\sin\alpha\sin^2\beta - 2\omega\alpha'\sin\varphi\sin\beta\cos\beta + \frac{g}{l}\sin\beta] = 0.$$

Aus der Gleichung $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \omega}\right) = - K\omega' + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \omega}\right)$ folgt, dafs die Kraft, mit welcher dabei das Pendel die Drehung der Erde zu beeinflussen sucht $(- P_\vartheta) = - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \omega}\right)$ ist, wobei die aus den Gleichungen I und II folgenden Werte für α und β in den

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ausdruck für $\mathfrak{H}$ einzusetzen sind, da ja für die rotierende Erde allein die Gleichung $-K\omega' = 0$ gilt.

In dem allgemeinsten Falle, wo auch ω veränderlich ist, entspricht die gegenseitige Einwirkung der beiden Systeme Pendel und Erde dem allgemeinen Reciprocitätsgesetz[1])

$$\frac{\partial \mathfrak{P}_\vartheta}{\partial \alpha'} + \frac{\partial \mathfrak{P}_a}{\partial \omega} = 2\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial \alpha' \partial \omega}\right) \text{ und analog für } \beta,$$

das hier nicht die einfache Form $\frac{\partial \mathfrak{P}_\vartheta}{\partial \alpha'} = -\frac{\partial \mathfrak{P}_a}{\partial \omega}$ annimmt, da die rechte Seite

$$2\frac{d}{dt}[-ml\sin\beta(l\sin\beta\sin\varphi + l\cos\beta\cos\varphi\sin\alpha - a\cos u\sin\alpha - h\cos\varphi\sin\alpha)]$$

von Null verschieden ist.

Ein Vergleich mit den Bewegungsgleichungen des Raumpendels bei ruhender Erde (I, 29) zeigt, dafs durch die Rotation der Erde die äufseren Kräfte

$$(-P_a) = 2ml^2\omega\beta'\sin\beta(-\sin\varphi\cos\beta + \cos\varphi\sin\alpha\sin\beta) \text{ und}$$
$$(-P_\beta) = 2ml^2\omega\alpha'\sin\beta(\sin\varphi\cos\beta - \cos\varphi\sin\alpha\sin\beta)$$

hinzugekommen sind. Wir wollen jetzt noch zeigen, dafs diese Kräfte nichts anderes sind als die Drehungsmomente, mit denen die Coriolis'sche Kraft auf Vergröfserung von α und β hinstrebt.

In 41 ist gezeigt worden, dafs wir von der Drehung der Erde absehen können und die Bewegung eines Massenpunktes relativ zur ruhenden Erde erhalten, wenn wir zu den schon vorhandenen Kräften noch zwei neue hinzufügen: die Centrifugalkraft und die Coriolis'sche Kraft. Da m praktisch stets als Punkt der Erdoberfläche betrachtet werden kann, so heben sich die Centrifugalkraft und die Attraktion des Ellipsoids gegenseitig auf (44). Bezeichnen wir nun, um mit 41 in Übereinstimmung zu bleiben, mit x, y, z die absolut festen, mit p, q, z dagegen die beweglichen Koordinaten (Fig. 24a), so ist längs der p-Achse die Zusatzkraft $-2m\omega q'$ und längs der q-Achse die Kraft $+2m\omega p'$ anzubringen. Der Punkt B hat die Koordinaten $p_0 = a\cos u$, $q_0 = 0$, $z_0 = b\sin u$. Ferner ist (Fig. 24b) $\cos(\xi, p) = 0$, $\cos(\eta, p) = -\sin\varphi$, $\cos(\zeta, p) = \cos\varphi$, $\cos(\xi, q) = -1$, $\cos(\eta, q) = 0$, $\cos(\zeta, q) = 0$, $\cos(\xi, z) = 0$, $\cos(\eta, z) = \cos\varphi$ und $\cos(\zeta, z) = \sin\varphi$, mithin

$$p = a\cos u - \eta\sin\varphi + \zeta\cos\varphi \quad \text{und} \quad p' = -\eta'\sin\varphi + \zeta'\cos\varphi$$
$$q = -\xi \qquad\qquad q' = -\xi'$$
$$z = b\sin u + \eta\cos\varphi + \zeta\sin\varphi.$$

Die Komponenten der Coriolis'schen Kraft nach den Achsen $B\xi$, $B\eta$, $B\zeta$ sind daher

$$\Xi = -2m\omega q'\cos(p, \xi) + 2m\omega p'\cos(q, \xi) = -2m\omega p'$$
$$H = -2m\omega q'\cos(p, \eta) + 2m\omega p'\cos(q, \eta) = 2m\omega q'\sin\varphi$$
$$Z = -2m\omega q'\cos(p, \zeta) + 2m\omega p'\cos(q, \zeta) = -2m\omega q'\cos\varphi.$$

Bezeichnen wir die in P senkrecht zu AP wirkende Kraft, welche β zu vergröfsern strebt, mit B, so zeigt Fig. 25a und b, dafs

[1]) H. v. Helmholtz, Wissenschaftliche Abhandlungen. III. Band. S. 233.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\cos(\mathrm{l}, \xi) = \sin\beta\cos\alpha, \quad \cos(\mathrm{l}, \eta) = \sin\beta\sin\alpha, \quad \cos(\mathrm{l}, \zeta) = -\cos\beta;$$
$$\cos(B, \xi) = \cos\beta\cos\alpha, \quad \cos(B, \eta) = \cos\beta\sin\alpha, \quad \cos(B, \zeta) = \sin\beta.$$

Für das Kräftepaar $(-\mathrm{P}_\beta)$ ergibt sich mithin

$$\begin{aligned}(-\mathrm{P}_\beta) &= \mathrm{l}\cdot[\Xi\cos(B,\xi) + H\cos(B,\eta) + Z\cos(B,\zeta)]\\ &= 2\,\mathrm{m}\,\mathrm{l}\,\omega\,(-\mathrm{p}'\cos\alpha\cos\beta + \mathrm{q}'\sin\varphi\sin\alpha\cos\beta - \mathrm{q}'\cos\varphi\sin\beta)\\ &= 2\,\mathrm{m}\,\mathrm{l}\,\omega\,(\cos\alpha\cos\beta(\eta'\sin\varphi - \zeta'\cos\varphi) - \xi'\sin\varphi\sin\alpha\cos\beta + \xi'\cos\varphi\sin\beta).\end{aligned}$$

Hieraus folgt mit Benutzung der Werte für ξ', η', ζ'

$$(-\mathrm{P}_\beta) = 2\,\mathrm{m}\,\mathrm{l}^2\,\omega\,\alpha'\sin\beta\,(\sin\varphi\cos\beta - \cos\varphi\sin\alpha\sin\beta).$$

Nennen wir nun A die in P senkrecht zu FP angreifende Kraft, welche α zu vergröfsern strebt, so haben wir

$$\cos(A, \xi) = -\sin\alpha, \quad \cos(A, \eta) = \cos\alpha, \quad \cos(A, \zeta) = 0.$$

Für das Kräftepaar $(-\mathrm{P}_\alpha)$ erhalten wir daher

$$\begin{aligned}(-\mathrm{P}_\alpha) &= \mathrm{l}\sin\beta\,[\Xi\cos(A,\xi) + H\cos(A,\eta) + Z\cos(A,\zeta)]\\ &= 2\,\mathrm{m}\,\mathrm{l}\,\omega\sin\beta\,(\mathrm{p}'\sin\alpha + \mathrm{q}'\cos\alpha\sin\varphi)\\ &= 2\,\mathrm{m}\,\mathrm{l}\,\omega\sin\beta\,(-\eta'\sin\varphi\sin\alpha + \zeta'\cos\varphi\sin\alpha - \xi'\sin\varphi\cos\alpha)\\ &= 2\,\mathrm{m}\,\mathrm{l}^2\,\omega\,\beta'\sin\beta\,(\cos\varphi\sin\alpha\sin\beta - \sin\varphi\cos\beta),\end{aligned}$$

wie gezeigt werden sollte.

Die Integration der Bewegungsgleichungen des Foucault'schen Pendels für sehr kleine Schwingungen ist ausgeführt in der Beilage zum Jahresbericht des Luisenstädtischen Realgymnasiums Ostern 1897 „Anwendungen des Gaufs'schen Prinzipes vom kleinsten Zwange" S. 24. Hier mag daher nur noch folgende einfache Bemerkung Platz finden.

Blofs in bezug auf eine ruhende Erde, also bei festem Aufhängungspunkt des Pendels hat es einen Sinn, von einer unveränderlichen Schwingungsebene zu sprechen [1]). Als ein solches Pendel können wir, wie oben gezeigt, das Foucault'sche Pendel betrachten, wenn wir den Einflufs der Erdrotation durch die Coriolis'sche Kraft ersetzen. Bei sehr kleinen Schwingungen dürfen wir in erster Annäherung (mit Helmholtz' Worten) „das kleine Stück der Kugelfläche, welches den Ruhepunkt umgibt und den Schauplatz des ganzen Vorganges umschliefst, nahezu als ein ebenes und horizontales Schwingungsfeld ansehen."

---

[1]) Bei vielen Versuchen, die Gesetze des Foucault'schen Pendels in elementarer Weise abzuleiten, wird gewissermafsen als ein Axiom aufgestellt, dafs „ein Pendel seine Schwingungsebene im Raume unverändert beibehält, wie man auch den Aufhängepunkt bewegen mag". Letzteres gilt nun nicht einmal immer bei ruhender Erde (vergl. Teil I, 17) und ist schon unrichtig, wenn, wie beim Foucault'schen Pendel, der Aufhängepunkt mit gleichförmiger Geschwindigkeit einen Kreis beschreibt. Selbst am Pol kann man nur dann von einer unveränderlichen Schwingungsebene sprechen, wenn dem Pendel aus seiner Ruhelage heraus eine Anfangsgeschwindigkeit erteilt wird. Solche elementaren Ableitungen sind auch vom pädagogischen Standpunkte aus zu verwerfen. Es kann nur Verwirrung stiften, wenn dem Schüler die Grundgesetze der Mechanik zuerst in aller Strenge entwickelt und dann (oft fast schon bei den ersten Anwendungen) entweder neue, aus diesen Grundlagen nicht ableitbare Sätze hinzugenommen werden (leider oft in dem Gewande selbstverständlicher Wahrheiten) oder behufs Vereinfachung die mechanischen Bedingungen der Aufgabe in einer Weise verändert werden, deren Tragweite gerade der Schüler von vornherein nicht übersehen kann.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Da dann $\zeta' = 0$, so sind für das am Orte B befindliche Pendel die Zusatzkräfte

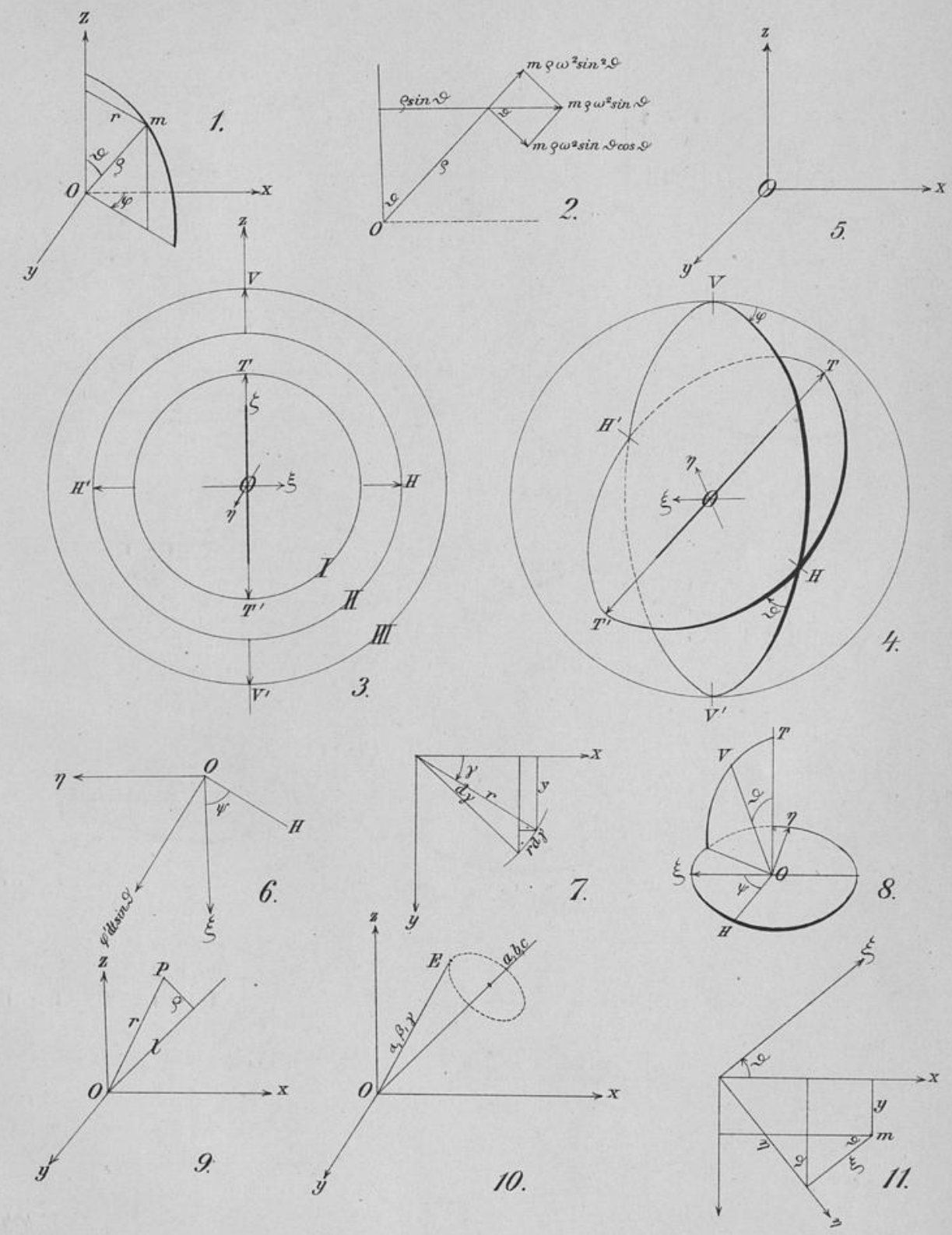
$$\Xi = 2m\omega\eta' \sin\varphi \text{ und } H = -2m\omega\xi' \sin\varphi.$$

Nach den Betrachtungen in 41 Anmerk. würden sich aber dieselben Zusatzkräfte ergeben, wenn sich unter dem betrachteten Massenpunkte die Erde um die Achse Bζ mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega \sin\varphi$ in demselben Sinne wie am Nordpol (umgekehrt wie der Uhrzeiger) drehte. Relativ zur ruhenden Erde scheint sich die Pendelebene umgekehrt zu drehen. Dafs dabei das Pendel seine anfängliche Schwingungsebene im Raume nicht etwa unverändert beibehält, zeigt schon der Umstand, dafs nach 24^h Sternzeit der Meridian von B zwar seine alte Lage wieder erreicht, die Pendelebene aber noch keine volle Umdrehung gemacht hat.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

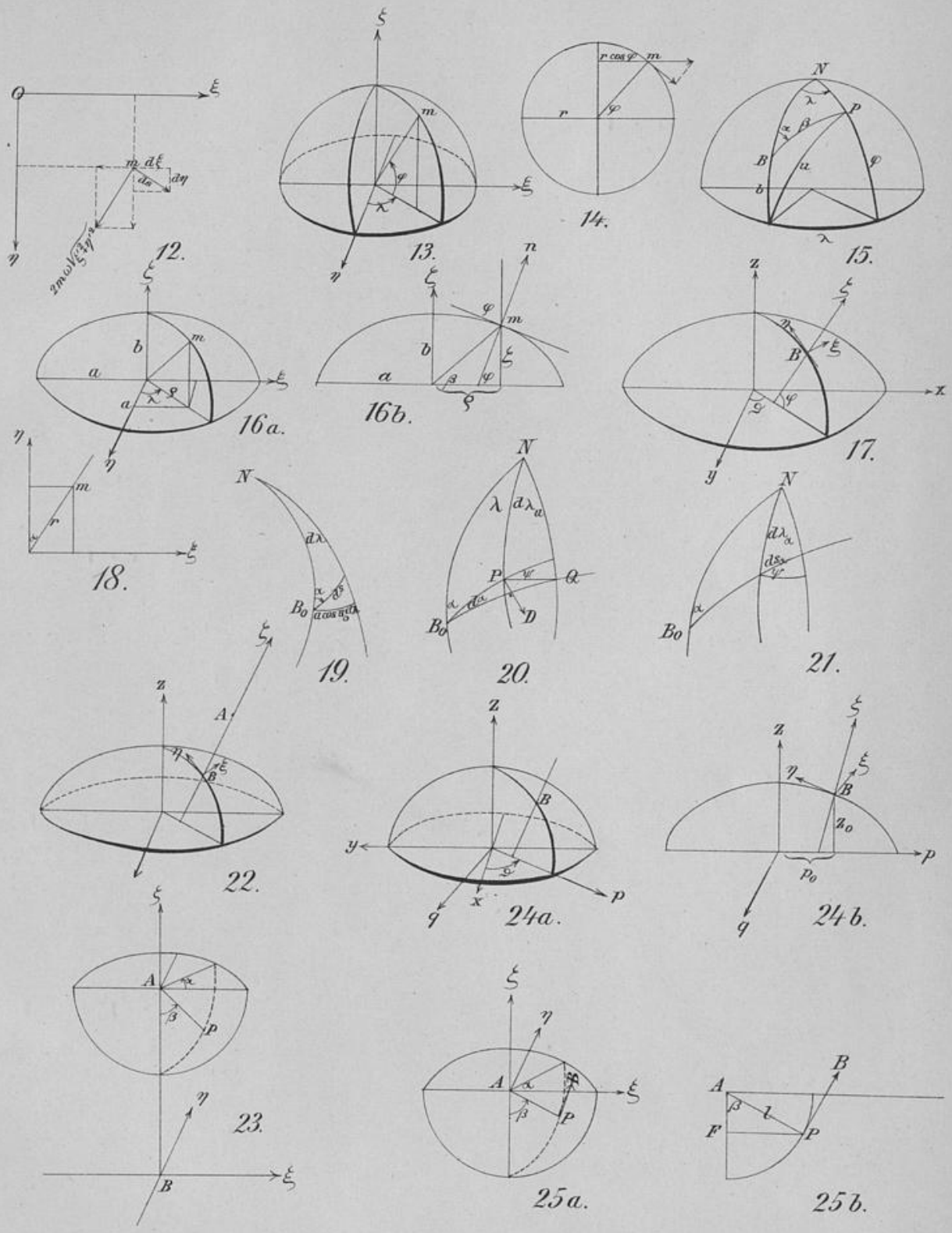
Druck von W. Pormetter in Berlin.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Grauskala #13
B.I.G.
C Y M
A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf