Wissenschaftliche Beilage zum Jahresbericht des Luisenstädtischen Realgymnasiums zu Berlin. Ostern 1900.

Die Sirenen.

Ein Beitrag zur Entwickelungsgeschichte der Akustik.

Teil IV.

Die Analyse der Sirenenklänge.

Von

Dr. Ernst Robel,
Oberlehrer und Professor.

Mit 1 Tafel.

9be
37

BERLIN 1900.
R. Gaertners Verlagsbuchhandlung
Hermann Heyfelder.

1900. Programm Nr. 102.

102b

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

HT009779895

UNIVERSITÄTS- UND LANDESBIBLIOTHEK DÜSSELDORF

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

In den drei bereits veröffentlichten Teilen der vorliegenden Monographie ist der Versuch unternommen worden, auf Grund der Originalarbeiten einerseits eine kritische Entdeckungsgeschichte, sowie eine möglichst vollständige Beschreibung der verschiedenen Sirenenformen und der mit ihnen angestellten Versuche zu geben; andrerseits aber auch auf den Einflufs hinzuweisen, welchen die eigenartige, neue Art der Tonerregung auf die Vorstellungen der Physiker über das Wesen des Tones ausüben mufste, bis aus dem Widerstreite der Meinungen die so lange gesuchte Lösung des Klangproblemes hervorging. Da seit dem Erscheinen des letzten Teiles bereits fünf Jahre verflossen sind, so dürfte eine kurze Hervorhebung der Hauptpunkte nicht überflüssig erscheinen, zumal dadurch auch dem Leser, welchem der Inhalt der früheren Teile unbekannt ist, eine Orientierung ermöglicht wird.

Die Tonerzeugung durch getrennte Impulse ist viel früher versucht worden, als man im allgemeinen annimmt; denn schon 1681 benutzte Robert Hooke gezahnte Räder zur Hervorbringung von Tönen, und John Robison berichtete etwa um das Jahr 1793 ausführlich über Versuche von Tonerregung durch getrennte Luftstöfse. Aber erst Cagniard de Latour und Savart haben die Sirenen zur Lösung zahlreicher Probleme der physikalischen und physiologischen Akustik verwendet und zum Range wissenschaftlicher Apparate erhoben. Ersterer führte den Namen „Sirene“ ein und studierte methodisch die Tonerzeugung durch Luftstöfse, wobei er in geschickter Weise die bewegende Kraft des Luftstromes in seinen Apparaten verwendete. Bei den Flugrädchen (moulinet-sirène) liefs er den in eine Röhre eintretenden Luftstrom auf Flügel auftreffen, welche auf einem zur Längsachse der Röhre senkrechten Durchmesser so aufgesetzt waren, dafs sie bei der Drehung das Rohr abwechselnd schliefsen und öffnen und auf diese Weise den durchstreichenden Luftstrom absperren oder hindurchlassen mufsten; bei den Sirenen im engeren Sinne trat der Luftstrom in einen mit durchbohrter Deckplatte versehenen Windkessel ein, und die durch die Öffnungen entweichende, im Windkessel verdichtete Luft wurde zur Drehung der auf einer vertikalen Achse befestigten und mit entsprechenden Öffnungen versehenen Sirenenscheibe benutzt. Die erste nach diesem Gesichtspunkte im Jahre 1819 konstruierte sirène ordinaire ist als die Stammform der später bekannt gewordenen Lochsirenen zu betrachten; die nach einigen Jahren erfolgte Anbringung eines Zählwerkes machte den Apparat geeignet zur Bestimmung der absoluten Schwingungszahl eines Tones. Savart beschäftigte sich eingehend mit der Tonerregung durch Zahnräder, konstruierte die erste

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Akkordsirene und untersuchte die Wirkungen des akustischen Speichenrades und des Stabapparates.

Deutsche Physiker übertrugen das Prinzip der Savartschen Zahnakkordsirene auf die Lochsirenen. Den Anfang machte um 1830 Fr. W. Opelt, der auf den Pappscheiben seiner Sirene bis zu 24 konzentrische Löcherreihen anbrachte; da er durch Anblasen der einzelnen Reihen nicht blofs einzelne Töne, wie C. de Latour bei seiner sirène ordinaire, sondern auch zwei- und dreistimmige Akkorde erzeugen wollte, so mufsten die Öffnungen solcher Kreise in ungleichen gegenseitigen Entfernungen zu stehen kommen. Etwa zehn Jahre später beschrieb Aug. Seebeck seine in der einfachen Konstruktion der Opeltschen ähnliche Sirene, ohne von dem Apparate seines Vorgängers irgend welche Kenntnis zu haben. Durch Anblasen der Scheibe in entgegengesetzten Richtungen wies er das Auftreten von Interferenzerscheinungen nach; durch absichtliche Bohrung der Öffnungen in ungleichen Abständen kam er auf seine Aufsehen erregenden Versuche über Tonerzeugung bei gestörtem Isochronismus der Impulse; und im Verlaufe seines Streites mit Ohm über die Definition des Tones gab er den bisher angewendeten kreisrunden Öffnungen die Gestalt von Rechtecken und Dreiecken bei gleichzeitiger Änderung der Öffnung des Anblaseröhrchens und der Drehungsrichtung der Scheibe. Um die Intensität der Töne zu steigern und die Sirene zur Erzeugung von kräftigen Kombinationstönen benutzen zu können, konstruierte Dove im Jahre 1851 seine vierstimmige Sirene, wobei er im wesentlichen auf die Einrichtung der sirène ordinaire von Cagniard de Latour mit Zählwerk zurückgriff. Durch Vereinigung zweier Dovescher Sirenen mit verschiedener Löcherzahl auf beiden Scheiben brachte v. Helmholtz in seiner Doppelsirene die Konstruktion der Akkordsirenen zum Abschlufs.

In wie hohem Grade die Tonerzeugung durch Luftstöfse das Interesse der Physiker von jeher erregt hat, geht aus den im zweiten Teile dieser Monographie angeführten Äufserungen von Chladni, Roeber, W. Weber und Aug. Seebeck zur genüge hervor. Gleichzeitig trat aber damit an die Männer der Wissenschaft die Frage nach dem Wesen des Tones heran, und ihre Beantwortung führte zu dem lebhaften wissenschaftlichen Streite zwischen Seebeck und G. S. Ohm über die Definition des Tones, welche schliefslich zu gunsten des letzteren von H. v. Helmholtz entschieden wurde und mit der endgültigen Lösung des Klangproblemes endigte. Sehr merkwürdig ist hierbei die Thatsache, dafs dieser grofse Fortschritt auf dem Gebiete der physikalischen Akustik erst durch eine Entdeckung auf dem Gebiete der höheren Analysis ermöglicht worden war; denn ohne Kenntnis der Fourierschen Reihe hätte Ohm das nach ihm benannte akustische Fundamentalgesetz nicht aufstellen können. Das Jahr 1843, in welchem er seine Abhandlung über die Sirene veröffentlichte, beansprucht eine epochemachende Bedeutung in der Entwickelungsgeschichte der Akustik. Ohm hat sich absichtlich darauf beschränkt, den durch die Sirenenstöfse auf das Ohr gemachten Eindrücken die Form der Sinusfunktion zu geben[1]) mit der Bedingung, dafs jeder dieser Eindrücke nur eine Verdichtung bez. nur eine Verdünnung in sich enthalte. Es blieb noch die Aufgabe zu lösen, die von Ohm gegebene Erklärung auf die mit den verschiedenen Sirenenformen angestellten Versuche auszudehnen. Die Lösung dieser Aufgabe ist in vollendeter Weise durch den

[1]) II, p. 27.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

französischen Physiker A. Terquem gegeben worden in seiner Abhandlung[1]): „Étude sur le timbre des sons produits par des chocs discontinus et en particulier par la sirène"; er hat die Ohmschen Untersuchungen unter Vereinfachung der Rechnungsmethoden verallgemeinert und die Helmholtzsche Klangtheorie auf die durch die Sirenenapparate von Savart, Opelt und Seebeck erzeugten Klänge angewendet. Mit Rücksicht auf die Bedeutung dieser Arbeit sollen die darin niedergelegten Resultate möglichst vollständig hier wiedergegeben werden. Einige Angaben über die experimentelle Analyse der Sirenenklänge sollen den Schlufs dieser Abhandlung bilden.

Bezeichnet F (t) irgend eine zur Zeit t durch das Ausströmen von Luft aus den Öffnungen der Sirenenscheibe erzeugte Erschütterung, so hängt die Natur dieser Funktion von zwei Elementen ab: von der Gestalt der Öffnungen und von den Geschwindigkeitsänderungen der ausströmenden Luft. Was den ersten Punkt anbetrifft, so ist die Erschütterung der äufseren Luft proportional der Gröfse der Ausflufsöffnung. Um aber die aus dem zweiten Elemente herrührenden Rechnungsschwierigkeiten überwinden zu können, mufs man die vereinfachende Voraussetzung machen, dafs der Druck der in dem Windkessel befindlichen Luft während des Ausströmens unverändert bleibt, dafs also das Ausströmen der Luft mit konstanter Geschwindigkeit geschieht: eine Annahme, die in allen denjenigen Fällen hinreichend erfüllt sein dürfte, wo die Öffnungen der Sirenenscheibe im Verhältnisse zu ihren Abständen klein sind. Unter dieser Voraussetzung hat nun Terquem die Untersuchung der Sirenenklänge durchgeführt und hierbei vier Hauptfälle unterschieden, je nachdem die Töne entweder durch gleiche und äquidistante, oder durch zwei ungleich entfernte, oder durch drei ungleich entfernte, oder durch beliebig viele, ungleich entfernte Luftstöfse erzeugt werden. Diese vier Fälle umfassen alle bis jetzt erwähnten Tonerzeugungen mittelst der Sirenen.

Allgemeine Entwickelungen.

I. Nach dem Theorem von Fourier ist, wenn F(t) eine periodische Funktion von der Periode T bezeichnet[2]):

$$\left.\begin{aligned} F(t) = A_0 + A_1 \cos 2\pi \frac{t}{T} + A_2 \cos 2\pi \frac{2t}{T} + \ldots + A_m \cos 2\pi \frac{mt}{T} + \ldots \\ + B_1 \sin 2\pi \frac{t}{T} + B_2 \sin 2\pi \frac{2t}{T} + \ldots + B_m \sin 2\pi \frac{mt}{T} + \ldots \end{aligned}\right\}$$

$$= A_0 + \sum_1^\infty \left(A_m \cos 2\pi \frac{mt}{T} + B_m \sin 2\pi \frac{mt}{T}\right) \tag{1}$$

---

[1]) Ann. scient. de l'École Norm. Sup. tome VII, Année 1870, p. 269—365. — Extrait de l'auteur C. R. LXXXIII, p. 165—168. (Cf. Referat von Roeber Fortsch. d. Phys. XXVII, p. 253—256; von Oberbeck Fortsch. d. Math. II, p. 775—776.)

[2]) II, p. 25.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

oder auch[1]):

$$F(t) = A_0 + \alpha_1 \cos 2\pi\left(\frac{t-p_1}{T}\right) + \alpha_2 \cos 2\pi\left(\frac{t-p_2}{T}\right) + \ldots + \alpha_m \cos 2\pi\left(\frac{t-p_m}{T}\right) + \ldots$$

$$= A_0 + \sum_1^\infty \left(\alpha_m \cos 2\pi\left(\frac{t-p_m}{T}\right)\right), \tag{2}$$

wo zwischen den Koeffizienten dieser beiden Reihen folgende Beziehungen stattfinden:

$$\left.\begin{aligned} A_m &= \alpha_m \cos 2\pi \frac{m p_m}{T}, \qquad B_m = \alpha_m \sin 2\pi \frac{m p_m}{T}, \\ \alpha_m^2 &= A_m^2 + B_m^2; \qquad \tan 2\pi \frac{m p_m}{T} = \frac{B_m}{A_m}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Die Koeffizienten der Reihe (1) sind durch folgende Integrale bestimmt:

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{T}\int_\tau^{\tau+T} F(t)\,dt. \\ A_m &= \frac{2}{T}\int_\tau^{\tau+T} F(t) \cos 2\pi \frac{m t}{T}\,dt; \qquad B_m = \frac{2}{T}\int_\tau^{\tau+T} F(t) \sin 2\pi \frac{m t}{T}\,dt. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Weil $F(t)$ eine periodische Funktion von der Periode T ist, so sind die Gröfsen A_0, A_m und B_m von dem absoluten Werte von τ unabhängig, dagegen von dem Anfangspunkte der Zeit abhängig.

Dafs die Koeffizienten α_m vom Anfangspunkte der Zeit unabhängig sind, läfst sich in folgender Weise nachweisen. Verschiebt man die Zeit um die Gröfse ϑ, dann geht $F(t)$ in $F(t-\vartheta)$ über, und man erhält:

$$\left.\begin{aligned} F(t-\vartheta) &= A_0 + \sum_1^\infty \left(A_m \cos 2\pi \frac{m(t-\vartheta)}{T} + B_m \sin 2\pi \frac{m(t-\vartheta)}{T}\right) \\ &\text{und} \\ F(t-\vartheta) &= A_0 + \sum_1^\infty \left(\alpha_m \cos 2\pi \frac{m(t-\vartheta-p_m)}{T}\right), \end{aligned}\right\}$$

oder wenn man entwickelt:

$$F(t-\vartheta) = A_0 + \sum_1^\infty \left[\left(A_m \cos 2\pi \frac{m\vartheta}{T} - B_m \sin 2\pi \frac{m\vartheta}{T}\right) \cos 2\pi \frac{m t}{T} + \left(A_m \sin 2\pi \frac{m\vartheta}{T} + B_m \cos 2\pi \frac{m\vartheta}{T}\right) \sin 2\pi \frac{m t}{T}\right],$$

wofür man auch schreiben kann:

$$F(t-\vartheta) = A_0 + \sum_1^\infty \left(A'_m \cos 2\pi \frac{m t}{T} + B'_m \sin 2\pi \frac{m t}{T}\right).$$

---

[1]) III, p. 5.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Hieraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} A'_m &= A_m \cos 2\pi \frac{m\vartheta}{T} - B_m \sin 2\pi \frac{m\vartheta}{T} = \alpha_m \cos 2\pi \frac{m(p_m+\vartheta)}{T} \\ B'_m &= A_m \sin 2\pi \frac{m\vartheta}{T} + B_m \cos 2\pi \frac{m\vartheta}{T} = \alpha_m \sin 2\pi \frac{m(p_m+\vartheta)}{T}, \end{aligned}\right\}$$

und weiter:

$$\left.\begin{aligned} A'^2_m + B'^2_m &= A_m^2 + B_m^2 = \alpha_m^2, \\ \tan 2\pi \frac{m(p_m+\vartheta)}{T} &= \frac{B'_m}{A'_m}. \end{aligned}\right\} \qquad (3a)$$

Die Koeffizienten α_m der Reihe (2), d. h. die Amplituden der verschiedenen harmonischen Obertöne, sind vom Anfangspunkte der Zeitzählung unabhängig, was auch a priori klar war; nur die Phase eines jeden dieser Töne hängt davon ab. Dagegen sind die Phasenunterschiede der verschiedenen Obertöne wieder davon unabhängig.

Unter diesen Umständen läſst sich eine möglichst einfache Berechnung der Gröſsen A_m und B_m in den speziellen Fällen durch eine passende Annahme des Anfangspunktes der Zeit erreichen, besonders wenn eine der Gröſsen A_m oder B_m dadurch gleich Null wird. Wenn z. B. $B_m = 0$ wird, so wird $\alpha_m = A_m$; eine Berücksichtigung des Zeichens ist unnötig, weil dasselbe der Phase zugeschrieben werden kann, von welcher die Intensität des entsprechenden Obertones unabhängig ist.

II. Bei der Bestimmung der Gröſsen A_m und B_m sind mit Rücksicht auf die Grenzen der bestimmten Integrale drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die Dauer der Impulse gleich, kleiner oder gröſser als die Periode T ist. Für jeden Impuls sei die der Luft mitgeteilte Erschütterung durch die Funktion $y = \varphi(t)$ gegeben, und a sei die Dauer der Erschütterung (Fig. 1).

1) Ist $a = T$ (1), so ist die Funktion $\varphi(t)$ durch die Kurve AA'B gegeben; es ist $AB = BC = CD = \ldots = T = a$. Die Grenzen der Integrale werden 0 und T oder a sein, wenn man für den Punkt A $T = 0$ setzt.

2) Ist $a < T$ (2), also $AB = A'B' = A''B'' = a$, $AA' = A'A'' = T$, so werden die Grenzen der Integrale ebenfalls 0 und a sein, weil die Funktion $\varphi(t)$ zwischen a und T verschwindet.

3) Ist $a > T$ (3), also $AB = A'B' = A''B'' = a$, $AA' = A'A'' = T$, so bleiben auch hier die Grenzen der Integrale 0 und a. Es ist $A'B' = A'A'' + A''B'$ und $A''B' = A'B$; verlegt man den Anfangspunkt der Zeit nach A', so muſs man von A' bis B die Summe der Flächen A'bB und A'c'B bilden, woraus man erhält:

$$A_m = \frac{2}{T}\int_0^T \varphi(t) \cos 2\pi \frac{mt}{T}\, dt + \frac{2}{T}\int_T^a \varphi(t) \cos 2\pi \frac{mt}{T}\, dt,$$

also:

$$A_m = \frac{2}{T}\int_0^a \varphi(t) \cos 2\pi \frac{mt}{T}\, dt, \quad \text{und ebenso} \quad B_m = \frac{2}{T}\int_0^a \varphi(t) \sin 2\pi \frac{mt}{T}\, dt.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Hieraus folgt der Satz: Die Grenzen der Integrale, welche A_m und B_m bestimmen, sind dieselben, welchen Wert auch immer die Dauer des Impulses im Vergleich mit der Schwingungsperiode haben mag, oder, mit anderen Worten, wie grofs auch die Öffnungen der Sirenenscheiben im Vergleich mit ihren gegenseitigen Abständen sein mögen.

III. Wenn die Funktion F (t) denselben Wert für positive und negative Werte von t annimmt, und wenn man überdies den Anfang der Zeit in die Mitte desjenigen Intervalls verlegt, innerhalb dessen F (t) nicht Null wird, so hat man:

$$\left.\begin{aligned} A_m &= \frac{2}{T}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} F(t)\cos 2\pi\frac{mt}{T}\,dt = \frac{4}{T}\int_{0}^{\varepsilon} F(t)\cos 2\pi\frac{mt}{T}\,dt, \\ B_m &= \frac{2}{T}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} F(t)\sin 2\pi\frac{mt}{T}\,dt = 0, \end{aligned}\right\} \tag{4a}$$

also:

$$\alpha_m = A_m.$$

Hat F (t) zwei verschiedene Formen für die positiven und negativen Werte von t, wie $f_1(t)$ und $f_2(t)$, so behalten diese Beziehungen ihre Gültigkeit, wenn nur $f_1(-t) = f_2(t)$ ist: ein Fall, der ziemlich oft eintritt.

IV. Wenn beliebig gestaltete Öffnungen, durch welche die Luft ausströmt, im Vergleiche zu ihrer Gröfse sehr weit von einander abstehen, so wird B_m sehr klein im Vergleiche zu A_m. Es sei d der Abstand zweier ähnlich gelegenen Punkte in zwei benachbarten Öffnungen einer Sirenenscheibe, x ihre Entfernung von den Rändern der Öffnung im Sinne der Drehungsrichtung der Scheibe, v die Geschwindigkeit eines Punktes der Scheibe auf dem betrachteten Löcherkreise, und a wieder die Dauer eines Luftstofses, so ist:

$$t = \frac{x}{v}, \qquad T = \frac{d}{v},$$

und:

$$\left.\begin{aligned} A_m &= \frac{2}{d}\int_0^a F\left(\frac{x}{v}\right)\cos 2\pi\frac{mx}{d}\,dx, \\ B_m &= \frac{2}{d}\int_0^a F\left(\frac{x}{v}\right)\sin 2\pi\frac{mx}{d}\,dx, \\ A_0 &= \frac{1}{d}\int_0^a F\left(\frac{x}{v}\right)dx. \end{aligned}\right\}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wenn d, also auch T im Vergleiche mit a sehr grofs ist, so erhält man, wenn man den Sinus und Cosinus durch die ersten Glieder ihrer Reihen ersetzt:

$$\left.\begin{aligned} A_m &= \frac{2}{d}\int_0^a F\left(\frac{x}{v}\right) dx = 2A_0, \\ B_m &= \frac{2\pi m}{d^2}\int_0^a xF\left(\frac{x}{v}\right) dx = 0. \end{aligned}\right\} \quad (4b)$$

B_m ist also unendlich klein im Vergleich mit A_m, und A_m nähert sich, unabhängig von m, der konstanten Grenze $2A_0$. Hierin liegt folgender Satz: Wenn die Abstände zwischen den beliebig gestalteten Ausflufsöffnungen einer Sirenenscheibe im Vergleiche mit der Gröfse der Öffnungen sehr grofs sind, so nähern sich die Amplituden aller Obertöne der Amplitude des Grundtones, oder, mit andern Worten: das Verhältnis $\frac{A_m}{A_1}$, welches sonst stets kleiner als 1 ist, nähert sich in diesem Falle der Einheit.

V. Unter der Voraussetzung, dafs während der ganzen Dauer eines Luftstofses die Verschiebungen und die Verdichtungen der umgebenden Luft in demselben Sinne erfolgen, kann niemals $A_0 = 0$ sein; dieses Glied stellt überhaupt keinen Ton dar[1]), sondern drückt für eine Schwingungsperiode die mittlere Verdichtung der äufseren Luft aus. Erst die Summe der veränderlichen Glieder der Fourierschen Reihe trägt zur Erzeugung eines Klanges bei; deshalb stellt der Ausdruck $F(t) - A_0$ in Wirklichkeit die erzeugte Schwingungsbewegung dar, d. h. die Funktion $F(t) - A_0$ mufs denselben Klang, denselben Eindruck auf das Ohr hervorbringen wie die Funktion $F(t)$. Diese Überlegung hat nun Terquem auf folgenden wichtigen Satz geführt (Fig. 2):

Konstruiert man die Kurve $y = F(t)$ gleich ABC, A'B'C', A''B''C'', ..., wo $T = AA' = CC' = A'A'' = C'C'' \ldots$ ist, so lege man zu AC'' eine Parallele PQ'' in der Entfernung $y_1 = A_0 = PD$. Wenn man diese Parallele als Abscissenachse wählt, so stellt die Kurve PBQCA'P'B'Q'... die durch die Funktion $F(t) - A_0$ ausgedrückte vorhandene Schwingungsbewegung dar. Dann stellt aber auch der positive Teil der Kurve PBQ, P'B'Q', P''B''Q'', ... die Periode der Verdichtung, der negative Teil QCA'P', Q'C'A''P'', ... die Periode der Verdünnung dar. Welche Werte nun aber auch immer die Funktion $y = F(t)$ haben mag, so läfst sich beweisen, dafs die Flächen PBQ und QCA'P' stets gleich sind. Es ist nämlich:

$$A_0 \cdot T = \int^T F(t) \cdot dt = \text{Fl. } ABC;$$

weil aber $PD = A_0$ ist, so ist auch das Rechteck $PDD'P' = A_0 \cdot T$; mithin:

$$\begin{aligned} \text{Fl. } ABC = PDD'P' &= \text{Fl. } APP'A'; \\ \frac{APQC}{\text{Fl. } PBQ} &= \frac{APQC}{= \text{Fl. } QCA'P'}, \end{aligned}$$ subtrahiert, giebt:

[1]) II, p. 25.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

d. h. in jeder Schwingungsperiode ist die Verdichtung gleich der Verdünnung. Terquem spricht dieses wichtige Resultat in folgender Fassung aus[1]):

„Si l'on produit un son par des chocs séparés les uns des autres et donnant naissance à des déplacements des molécules de l'air dans un seul sens, on peut séparer l'ébranlement communiqué à l'air ambiant en deux parties: La première consiste en un déplacement réel de l'air, qui se propage plus ou moins loin, ne produit aucun effet sur l'oreille, et correspond au terme A_0: La deuxième constitue la seule partie efficace du son perçu; elle se divise elle-même en deux périodes pendant lesquelles les molécules de l'air ont des mouvements égaux et de sens inverse; la condensation et la dilatation totales sont égales entre elles, de même que si le son était produit par un corps solide vibrant. Ces deux périodes peuvent, du reste, avoir des durées inégales et suivre des lois différentes".

Hieraus folgt, dafs der Klang des erzeugten Tones, oder was dasselbe sagen will, dafs die relative Amplitude der harmonischen Obertöne nur abhängen kann von der relativen Dauer der beiden Perioden, in welche jede beliebige der Luft mitgeteilte Erschütterung zerfällt, und von der Form der Funktion, welche jede dieser Perioden darstellt. Haben diese beiden Perioden gleiche Dauer, d. h. wird die um das Stück A_0 verschobene Abscissenachse durch die Schwingungskurve in gleiche Abschnitte $PQ = QP' = P'Q' = Q'P'' = \ldots$ zerlegt, dann mufs sich der erzeugte Sirenenton soviel als möglich einem einfachen Tone (son pendulaire) nähern.

Diese hier angeführten Sätze bilden die Grundlage für die folgenden Untersuchungen über den Klang der Sirenentöne.

Spezielle Untersuchungen.

I. Die Töne werden durch gleiche, gleich gerichtete, äquidistante Impulse erzeugt.

Terquem hat elf Fälle untersucht, welche alle durch die sirène ordinaire[2]) von Cagniard de la Tour verifiziert werden können, wenn man den auf der beweglichen Sirenenscheibe befindlichen Öffnungen die Form von Rechtecken, Rhomben, Dreiecken und Kreisen giebt, während auf der festen Deckelplatte des Windkessels entweder enge in Richtung der Radien geschnittene Spalten oder Öffnungen, welche den auf der Sirenenscheibe vorhandenen kongruent sind, angebracht sind. Nur in zwei Fällen, welche hernach zuerst erwähnt werden sollen, werden anstatt der Öffnungen auf der Sirenenscheibe am Rande der letzteren Kurven von vorgeschriebener Form ausgeschnitten: ein Verfahren, das zuerst von Rudolf König[3]) im Jahre 1868 angegeben und in gröfserem Mafsstabe auf seine im V. Teile zu beschreibende Wellensirene angewendet worden ist. Die von Terquem vorgeschlagene Untersuchungsmethode mufs ihrer Wichtigkeit wegen für einige Fälle vollständig wiedergegeben werden, während von den übrigen nur die Resultate mitgeteilt werden sollen.

---

[1]) Ann. de l'École Norm. Sup. t. VII, p. 286. [2]) I, p. 11.

[3]) Wiedemann Ann. XII, p. 344; XIV, p. 374. Quelques expériences d'acoustique. (Paris 1882.) p. 157.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

1. Fall. Die getrennten Impulse werden nur von einer Verdichtung oder Verdünnung eines einfachen Tones gebildet.

Es ist dies der einzige Fall, der von Ohm behandelt worden ist[1]); derselbe läfst sich in einfacherer Weise untersuchen, wenn man sich diese Art von Lufterschütterungen dadurch hervorgebracht denkt, dafs auf der festen Deckelplatte sich schmale, gradlinige, in Richtung der Radien gezogene Spalten befinden, während die bewegliche Sirenenscheibe am Rande eine in Form von Halbsinusoiden ausgeschnittene Kurve trägt, wie sie in Fig. 3 gezeichnet sind. Es sei $\omega = AC$ die Dauer eines Impulses; $AA_1 = T$ die Schwingungsperiode, welche den Anfang zweier auf einander folgender Erschütterungen trennt; $BD = a$. Verlegt man den Anfangspunkt der Zeit in die Mitte der Erschütterung, nach D, so ist:

$$F(t) = a \cos \frac{\pi t}{\omega} \text{ von } t = -\frac{\omega}{2} \text{ bis } t = +\frac{\omega}{2},$$

und:

$$F(t) = 0 \qquad \text{von } t = +\frac{\omega}{2} \text{ bis } t = T - \frac{\omega}{2}.$$

Nach (4) ist dann:

$$A_0 = \frac{a}{T} \int_{-\frac{\omega}{2}}^{+\frac{\omega}{2}} \cos \frac{\pi t}{\omega} \, dt = \frac{2 a \omega}{\pi T},$$

$$A_m = \frac{2a}{T} \int_{-\frac{\omega}{2}}^{+\frac{\omega}{2}} \cos \frac{\pi t}{\omega} \cos 2\pi \frac{mt}{T} \, dt = \frac{4 a T \omega}{\pi (T^2 - 4 m^2 \omega^2)} \cdot \cos \pi \frac{m \omega}{T},$$

$$B_m = 0,$$

$$\alpha_m = A_m = \frac{4 a \frac{\omega}{T}}{\pi \left[1 - 4 m^2 \left(\frac{\omega}{T}\right)^2\right]} \cdot \cos \pi \frac{m \omega}{T}.$$

Macht man jetzt $D\alpha = AC = \omega$, $D\beta = \frac{\pi}{2} \cdot AA' = \frac{\pi}{2} T$, zieht $B\beta$ und durch α zu $B\beta$ eine Parallele, welche BD in M schneidet, so ist $DM = \frac{2 a \omega}{\pi T} = A_0$. Legt man jetzt durch M zu XX′ die Parallele PQ, so kann die erzeugte Schwingungsbewegung[2]) durch die Kurve PBQCA′P′ dargestellt werden, und die Fläche PBQ stellt die auf die Periode entfallende Verdichtung, die Fläche QCA′P′ die Verdünnung dar.

Um sich von dem Klange der erzeugten Töne Rechenschaft geben zu können, mufs man die Funktion $\frac{\alpha_m}{\alpha_1}$, das Verhältnis der Amplituden der Obertöne zur Amplitude des Grundtones, untersuchen.

---

[1]) II, p. 27 u. ff. [2]) p. 9.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Bezeichnet man diese Funktion mit y, so ist:

$$y = \frac{\cos \pi m \frac{\omega}{T}}{\cos \pi \frac{\omega}{T}} \cdot \frac{1 - 4\left(\frac{\omega}{T}\right)^2}{1 - 4m^2\left(\frac{\omega}{T}\right)^2} = \frac{\cos \pi m x}{\cos \pi x} \cdot \frac{1 - 4x^2}{1 - 4m^2x^2},$$

wenn man $\frac{\omega}{T}$, das Verhältnis der Dauer der Erschütterung zur Schwingungsperiode, gleich x setzt[1]). Diese Funktion läſst sich graphisch darstellen, wenn man die x als Abscissen einträgt. Terquem hat in allen von ihm untersuchten Fällen diese Konstruktion für $m = 1, 2, 3, 4, 5$, also für die fünf ersten harmonischen Töne, durchgeführt; da x nur zwischen den Grenzen 0 und 1 liegen kann, sind die Abscissen in Zehnteln aufgetragen. Aus der graphischen Darstellung des vorliegenden Falles lassen sich folgende Schlüsse ziehen:

1) Wenn $\frac{\omega}{T} = 0$ ist, wenn also die Öffnuugen im Verhältnisse zu ihrer Gröſse sehr weit von einander entfernt sind, so sind alle harmonischen Töne gleich stark.

2) Die relativen Amplituden, also auch die Intensitäten, der verschiedenen Obertöne nehmen um so schneller ab, je gröſser m wird, und darauf entfernen sie sich nur wenig von Null, wenn sie auch durch mehrere auf einander folgende, positive oder negative, aber immer mehr abnehmende Maximalwerte hindurchgehen.

3) Für $\frac{\omega}{T} = \frac{3}{4}$, d. h. wenn die Dauer des Impulses drei Viertel der Schwingungsperiode beträgt, wird der zweite harmonische Ton, also der erste Oberton, Null, die höheren harmonischen Töne sind sehr schwach; man wird also für diesen Wert fast einen einfachen Ton erhalten.

4) Um zu ermitteln, für welchen Wert von $\frac{\omega}{T}$ die beiden Perioden, in welche jede Schwingung zerfällt, gleich sind, hat man die transcendente Gleichung $\frac{2\omega}{\pi T} = \cos \frac{\pi T}{4\omega}$ aufzulösen. Man findet $\frac{\omega}{T} = 0{,}716$, ein Wert, der von demjenigen Werte, für welchen der erste Oberton verschwindet, nur wenig abweicht.

2. Fall. Die feste Deckelplatte des Windkessels hat wieder schmale, gradlinige, in Richtung der Radien geschnittene Spalten, aber die Sirenenscheibe trägt jetzt am Rande eine in Form von Ganzsinusoiden ausgeschnittene Kurve[2]).

Stellen in Fig. 4 die Kurven ABCDE, A'B'C'D'E' die der umgebenden Luft mitgeteilte Schwingungsbewegung dar, so ist $AE = \omega$ die Dauer eines Impulses, $AA' = T$

---

[1]) In den Untersuchungen von Seebeck ist dieses Verhältnis mit $\frac{\lambda}{l}$ bezeichnet (III, p. 17 ff.).

[2]) Nach dem Vorschlage von Rud. König würde man diese Art von Lufterschütterung noch besser hervorbringen, wenn man längs der Seiten der Mantelfläche eines Cylinders gradlinige Spalten anbringen und diesen letzteren mit einer andern um die gemeinsame Achse beweglichen Cylinderfläche umgeben würde, deren Rand in Form einer Sinuslinie ausgeschnitten ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

die Dauer der Schwingungsperiode. Setzt man $CM = a$, und verlegt man den Anfangspunkt der Zeit in die Mitte M der Erschütterung, so ist:

$$F(t) = \frac{a}{2}\left(1 + \cos 2\pi \frac{t}{\omega}\right) \text{ von } t = -\frac{\omega}{2} \text{ bis } t = +\frac{\omega}{2},$$

und:

$$F(t) = 0 \text{ von } t = \frac{\omega}{2} \text{ bis } t = T - \frac{\omega}{2};$$

folglich:

$$A_0 = \frac{a}{2T}\int_{-\frac{\omega}{2}}^{+\frac{\omega}{2}} \left(1 + \cos 2\pi \frac{t}{\omega}\right) dt = \frac{a\omega}{2T},$$

$$A_m = \frac{a}{T}\int_{-\frac{\omega}{2}}^{+\frac{\omega}{2}} \left(1 + \cos 2\pi \frac{t}{\omega}\right) \cos 2\pi \frac{mt}{dt}\, dt = \frac{aT^2}{m\pi(T^2 - m^2\omega^2)} \sin \pi \frac{m\omega}{T},$$

$$B_m = 0,$$

$$\alpha_m = A_m = \frac{a}{m\pi\left[1 - m^2\left(\frac{\omega}{T}\right)^2\right]} \sin \pi \frac{m\omega}{T}.$$

Da $MM' = T$, $ME = \frac{\omega}{2}$, $MC = a$ ist, so folgt, dafs die durch E zu CM′ gezogene Parallele von CM das Stück $MN = A_0 = \frac{a\omega}{2T}$ abschneidet. Legt man durch N zu XX′ die Parallele PQ, so stellen die Kurven BCD, B′C′D′ die Periode der Verdichtung, DEA′B′ die Periode der Verdünnung während einer Schwingungsperiode dar. Die Untersuchung und graphische Darstellung der Funktion:

$$y = \frac{\alpha_m}{\alpha_1} = \frac{\sin \pi \frac{m\omega}{T}}{\sin \pi \frac{\omega}{T}} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\omega}{T}\right)^2}{m\left[1 - m^2\left(\frac{\omega}{T}\right)^2\right]} = \frac{\sin \pi m x}{\sin \pi x} \cdot \frac{1 - x^2}{m(1 - m^2 x^2)}$$

zeigt, dafs wieder für $\frac{\omega}{T} = 0$ alle harmonischen Töne gleiche Stärke haben, und dafs sonst der erste Oberton niemals verschwindet, sondern alle übrigen an Stärke übertrifft. Da die Intensität der höheren Obertöne mit wachsender Ordnungszahl sehr schnell abnimmt, so wird man im allgemeinen nur den ersten Oberton hören.

3. Fall. Die Sirenenscheibe hat äquidistante rechteckige Öffnungen, und die Deckelplatte des Windkessels schmale, in Richtung der Radien geschnittene Spalten.

Es sei (Fig. 5) $AD = A'D' = a$ die Länge, $AB = A'B' = b$ die Breite eines Rechteckes, h die Breite des Spaltes MN, M′N′; $AA' = d$ die Entfernung gleichliegender Längsseiten zweier auf einander folgenden Öffnungen; T die Dauer der Periode, ω die

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dauer der Erschütterung, v die Geschwindigkeit der Sirenenscheibe beim Vorübergehen vor den Spalten, k die konstante Ausflufsgeschwindigkeit der Luft. Dann ist:

$$T = \frac{d}{v}, \quad \omega = \frac{b}{v}, \quad \text{und} \quad ah \quad \text{die Gröfse eines Spaltes.}$$

Legt man nun den Anfangspunkt der Zeit in den Halbierungspunkt von AB, und nimmt man an, dafs eine Erschütterung der äufseren Luft nur so lange stattfindet, als sich der Spalt vor einer Öffnung befindet, dann ist:

$$F(t) = k \cdot ah \quad \text{von} \quad t = -\frac{\omega}{2} \quad \text{bis} \quad t = +\frac{\omega}{2},$$

und:

$$F(t) = 0 \quad \text{von} \quad t = \frac{\omega}{2} \quad \text{bis} \quad t = T - \frac{\omega}{2}.$$

Die dieser Schwingungsbewegung entsprechende Kurve ist in Fig. 6 durch ABCD, A'B'C'D', ... gegeben. Dann ist nach Formel (4):

$$A_0 = \frac{kah}{T} \int_{-\frac{\omega}{2}}^{+\frac{\omega}{2}} dt = \frac{kah\omega}{T} = \frac{kahb}{d},$$

$$A_m = \frac{2kah}{T} \int_{-\frac{\omega}{2}}^{+\frac{\omega}{2}} \cos 2\pi \frac{mt}{T} dt = \frac{2kah}{\pi} \cdot \frac{\sin \pi \frac{mb}{d}}{m},$$

$$B_m = 0,$$

also:

$$\alpha_m = A_m = \frac{2kah}{\pi} \cdot \frac{\sin \pi \frac{mb}{d}}{m}.$$

Aus $A_0 = \frac{kahb}{d}$ folgt: $d : b = kah : A_0$; nun ist $AA' = d$, $AB = b$, $AD = kah$; folglich $MA = A_0$. Legt man nun durch M zu XX' die Parallele MN, so stellen die Flächen MDCN, M'D'C'N' die Verdichtungsperiode, NBA'M' die Verdünnungsperiode jeder Schwingung dar.

Von der Funktion:

$$y = \frac{\alpha_m}{\alpha_1} = \frac{\sin \pi \frac{mb}{d}}{m \sin \pi \frac{b}{d}} = \frac{\sin \pi m x}{m \sin \pi x}$$

hängt der Klang des erzeugten Sirenentones ab; ihre Untersuchung liefert folgende besondere Resultate:

1) Für $x = \frac{b}{d} = 1$, d. h. wenn zwei benachbarte Öffnungen sich berühren, entsteht gar kein Ton.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2) Der Klang bleibt ungeändert, wenn man zur Erzeugung des Tones eine Sirenenscheibe anwenden würde, an welcher die Ausschnitte mit den Vollräumen mit einander vertauscht wären.

3) Der m. harmonische Ton fehlt in dem Klange, wenn $x = \frac{b}{d} = \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \frac{3}{m}, \ldots, \frac{m-1}{m}$ ist.

4) Damit die beiden Perioden der Schwingungsbewegung gleiche Dauer haben, muſs die Entfernung zweier benachbarter Öffnungen gleich ihrer Breite sein. Alle graden harmonischen Töne fehlen in diesem Falle, und die ungraden erreichen noch eine ziemlich beträchtliche Stärke, weil für ein ungrades m immer $\alpha_m = \frac{\alpha_1}{m}$ ist.

4. Fall. Die Sirenenscheibe und die Deckelplatte haben beide kongruente rechteckige Öffnungen.

Es sei (Fig. 7 und 8) $AD = A'D' = a$ die Länge, $AB = A'B' = b$ die Breite jeder Öffnung; $AA' = d$ die Entfernung zweier benachbarter Öffnungen, und v die Geschwindigkeit der rotierenden Sirenenscheibe, k die Ausfluſsgeschwindigkeit der Luft wie im 3. Falle. Wählt man als Anfangspunkt der Zeit den Moment, in welchem die Öffnungen auf einander fallen, so ist zur Zeit t die Entfernung x eines Randes der beweglichen Öffnung von dem entsprechenden Rande der festen Öffnung $x = vt$.

Man findet also für positive t (Fig. 8):

$$F(t) = k \times BCHE = k \cdot a(b-x) \text{ von } x = 0 \text{ bis } x = b,$$

$$\text{oder vielmehr von } t = 0 \text{ bis } t = \frac{b}{v};$$

für negative t (Fig. 7):

$$F(t) = k \times AFGD = k \cdot a(b+x) \text{ von } x = -b \text{ bis } x = 0,$$

$$\text{oder vielmehr von } t = -\frac{b}{v} \text{ bis } t = 0.$$

Wenn man die durch F(t) dargestellte Kurve konstruiert (Fig. 9), so erhält man die beiden Graden AC und BC, wenn $OA = b$ und $OC = kab$ ist.

Man erhält nun nach (4), weil $dt = \frac{dx}{v}$ ist:

$$A_0 = \frac{ka}{vT}\left[\int_{-b}^{0}(b+x)\,dx + \int_{0}^{b}(b-x)\,dx\right] = \frac{2ka}{d}\int_{0}^{b}(b-x)\,dx = \frac{kab^2}{d},$$

$$A_m = \frac{2ka}{vT}\left[\int_{-b}^{0}(b+x)\cos 2\pi\frac{mx}{d}\,dx + \int_{0}^{b}(b-x)\cos 2\pi\frac{mx}{d}\,dx\right]$$

$$= \frac{4ka}{d}\int_{0}^{b}(b-x)\cos 2\pi\frac{mx}{d}\,dx = \frac{2kad}{\pi^2}\cdot\frac{\sin^2\pi\frac{mb}{d}}{m^2},$$

$$B_m = 0;$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

also:

$$\alpha_m = A_m = \frac{2\,kad}{\pi^2} \cdot \frac{\sin^2 \pi \frac{mb}{d}}{m^2}.$$

Zieht man zu der Graden CO′ durch B die Parallele BP, so ist $OP = A_0 = \frac{kab^2}{d} = \frac{OC \times b}{d}$, weil $OC = kab$, $OB = b$, $OO' = d$ ist. Legt man durch P zu XX′ die Parallele PE, so stellen die Dreiecke DCE, D′C′E′ die Periode der Verdichtung, die Trapeze EBA′D′ die Periode der Verdünnung während der Schwingungsperiode dar. Fig. 9 bezieht sich nur auf den Fall, wenn $d > 2b$ ist, d. h. wenn die Entfernung zweier benachbarter Öffnungen gröfser als ihre doppelte Breite ist. Wenn dagegen $d < 2b$ ist, so würde überhaupt keine Unterbrechung in dem Ausströmen der Luft eintreten; untersucht man diesen Fall näher, so kommt man bezüglich der beiden Perioden der Verdichtung und Verdünnung zu einem ganz ähnlichen Resultate.

Der Klang des erzeugten Sirenentones hängt von der Funktion:

$$y = \frac{\alpha_m}{\alpha_1} = \frac{\sin^2 \pi \frac{mb}{d}}{m^2 \sin^2 \pi \frac{b}{d}} = \frac{\sin^2 \pi m x}{m^2 \sin^2 \pi x}$$

ab. Wie man sofort sieht, ist diese Funktion das Quadrat der im 3. Falle betrachteten Funktion, deshalb wird von dem Klange im ganzen und grofsen dasselbe wie dort gelten; und auch hier lassen sich die Öffnungen mit den Vollräumen wieder vertauschen, ohne dafs die Natur des erzeugten Klanges sich ändert. Die beiden Perioden einer Schwingung haben gleiche Dauer, wenn $\frac{b}{d} = \frac{1}{2}$ ist; in diesem Falle entsteht ein Ton, der von einem einfachen Tone nur sehr wenig verschieden ist, weil alle harmonischen Töne vom zweiten an sehr schwach sind.

Aus diesen vier Beispielen kann man hinreichend die von Terquem befolgte Untersuchungsmethode erkennen. Dieselbe besteht darin, dafs nach Ableitung der Funktion F (t) aus der Gestalt der Öffnungen die Schwingungskurve konstruiert, und hierauf die Gröfsen A_0 und α_m ermittelt werden. Durch die Gröfse A_0 wird die Zerlegung der ganzen Schwingungsperiode in eine Verdichtung und in eine Verdünnung, durch die Funktion $y = \frac{\alpha_m}{\alpha_1}$ der Klang des Sirenentones bestimmt. Eine graphische Darstellung dieser Funktion für die fünf ersten Partialtöne läfst die Intensitätsverhältnisse dieser Töne zum Grundtone leicht erkennen, und in den hieraus gezogenen Folgerungen wird besonders der Einflufs des Verhältnisses der Gröfse der Öffnungen zu ihrem gegenseitigen Abstande auf den Klang hervorgehoben.

Von den sieben von Terquem noch untersuchten Fällen führe ich hier nur die mathematischen Resultate an, um hieran die aus allen diesen Fällen von ihm gezogenen Schlüsse zu knüpfen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

5. Fall. Die Sirenenscheibe hat rhombische Öffnungen, die Deckelplatte schmale in Richtung der Radien geschnittene Spalte.

Ist a die Querdiagonale, b die Längsdiagonale eines Rhombus, h die Breite des Spaltes, k die Ausflufsgeschwindigkeit der Luft; und wählt man als Anfangspunkt der Zeit den Moment, in welchem der Spalt mit der Querdiagonale zusammenfällt, so ist die Schwingungskurve:

$$\left.\begin{aligned} F(t) &= k \cdot ah\left(\frac{b-2x}{b}\right) \text{ von } x=0 \text{ bis } x=\frac{b}{2}, \\ F(t) &= k \cdot ah\left(\frac{b+2x}{b}\right) \text{ von } x=-\frac{b}{2} \text{ bis } x=0. \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \frac{kab^2}{d}\cdot\frac{2h}{b}=\frac{2kabh}{d}; \qquad B_m=0. \\ A_m &= \frac{4kahd}{\pi^2 b}\cdot\frac{\sin^2\pi\frac{mb}{2d}}{m^2}=\alpha_m. \end{aligned}\right\}\ ^{1)}$$

$$y=\frac{\alpha_m}{\alpha_1}=\frac{\sin^2\pi\frac{mb}{2d}}{m^2\sin^2\pi\frac{b}{2d}}.$$

6. Fall. Die Sirenenscheibe und die Deckelplatte haben kongruente rhombische Öffnungen.

Wählt man als Anfangspunkt der Zeit den Moment, in welchem zwei Rhomben sich decken, so wird die Schwingungskurve:

$$\left.\begin{aligned} F(t) &= \frac{ka}{2b}(b-x)^2 \text{ von } x=0 \text{ bis } x=b; \\ F(t) &= \frac{ka}{2b}(b+x)^2 \text{ von } x=-b \text{ bis } x=0. \end{aligned}\right\}$$

$$A_0=\frac{kab^2}{3d}; \qquad B_m=0.$$

$$A_m=\frac{kad}{m^2\pi^2}\left(1-\frac{d}{2\pi b}\cdot\frac{\sin 2\pi\frac{mb}{d}}{m}\right)=\alpha_m.$$

$$y=\frac{\alpha_m}{\alpha_1}=\frac{1-\frac{d}{2\pi b}\cdot\frac{\sin 2\pi\frac{mb}{d}}{m}}{m^2\left(1-\frac{d}{2\pi b}\cdot\sin\frac{2\pi b}{d}\right)}.$$

---

[1]) Diese Werte von A_0, A_m und α_m gehen aus den entsprechenden Werten des 4. Falles durch Multiplikation mit dem Faktor $\frac{2h}{b}$ hervor.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

7. Fall [1]). Die Sirenenscheibe hat Öffnungen in Gestalt gleichschenkliger Dreiecke, die Deckelplatte schmale mit den Radien zusammenfallende und den Grundlinien der Dreiecke parallele Spalte [2]).

Ist a die Grundlinie, b die Höhe eines Dreieckes, h die Breite eines Spaltes; und wählt man als Anfangspunkt der Zeit den Moment, in welchem der Spalt mit der Grundlinie des Dreiecks zusammenfällt, so ist die Schwingungskurve:

$$F(t) = \frac{k \cdot a h}{b}(b - x) \text{ von } x = 0 \text{ bis } x = b.$$

$$A_0 = \frac{k a b h}{2 d}.$$

$$A_m = \frac{k a h d}{\pi^2 b} \cdot \frac{\sin^2 \pi \frac{m b}{d}}{m^2}.$$

$$B_m = \frac{k a h}{m \pi}\left(1 - \frac{d}{2 \pi m b} \cdot \sin 2 \pi \frac{m b}{d}\right).$$

$$\alpha_m^2 = A_m^2 + B_m^2 = \frac{k^2 a^2 h^2}{\pi^2}\left[\frac{d^2}{\pi^2 b^2} \cdot \frac{\sin^4 \pi \frac{m b}{d}}{m^4} + \frac{1}{m^2}\left(1 - \frac{d}{2 \pi m b} \cdot \sin 2 \pi \frac{m b}{d}\right)^2\right].$$

Wird die Sirenenscheibe in entgegengesetzter Richtung gedreht, so dafs also bei dem Vorbeigehen der dreieckigen Öffnungen vor den Spalten die Erschütterung allmählich zunimmt und dann plötzlich abbricht, so bleibt A_m ungeändert und B_m ändert nur das Zeichen; folglich ändert sich weder α_m noch der Klang.

8. Fall. Die Sirenenscheibe und die Deckelplatte haben kongruente Öffnungen in Gestalt gleichschenkliger Dreicke, und zwar liegen die Spitzen zweier Dreiecke auf beiden Platten nach derselben Richtung, wenn zwei Grundlinien zusammenfallen.

Ist der Anfangspunkt der Zeit der Moment, in welchem zwei Öffnungen sich decken, so ist die Schwingungskurve:

$$\left.\begin{aligned} F(t) &= \frac{k a}{2 b}(b - x)^2 \text{ von } x = 0 \text{ bis } x = b, \\ F(t) &= \frac{k a}{2 b}(b + x)^2 \text{ von } x = -b \text{ bis } x = 0, \end{aligned}\right\}$$

welche mit dem Fall 6 vollkommen übereinstimmt.

9. Fall. Die Sirenenscheibe und die Deckelplatte haben wieder kongruente Öffnungen in Gestalt gleichschenkliger Dreiecke, aber die Spitzen zweier über einander

---

[1]) Die Fälle Nr. 7, 8 und 9 sind von Seebeck experimentell untersucht worden (cf. III, p. 18).

[2]) Mach hat bei der stroboskopischen Untersuchung transversal schwingender Flammen eine Sirenenscheibe mit dreieckigen Öffnungen angewendet, um den Luftstöfsen mehr die Form einer einfachen Schwingung zu geben. (Optisch-akustische Versuche, Prag 1873, p. 40.)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

liegenden Dreiecke liegen in entgegengesetzter Richtung, wenn zwei Grundlinien zusammenfallen.

Wählt man als Anfangspunkt der Zeit den Moment, in welchem die Spitze einer Deckelöffnung in die Grundlinie einer Scheibenöffnung fällt, so wird die Schwingungskurve:

$$\left.\begin{aligned} F(t) &= \frac{ka}{4b}(b+x)^2 \text{ von } x=-b \text{ bis } x=0, \\ F(t) &= \frac{ka}{4b}(b^2+2bx-3x^2) \text{ von } x=0 \text{ bis } x=b. \end{aligned}\right\}$$

$$A_0 = \frac{kab^2}{3d} \text{ (6. Fall).}$$

$$A_m = -\frac{kad}{2m^2\pi^2}\left(\cos\frac{2\pi mb}{d} - \frac{\sin\frac{2\pi mb}{d}}{\frac{2\pi mb}{d}}\right).$$

$$B_m = \frac{kad}{2m^2\pi^2}\left(\frac{-d}{\pi mb}\cos\frac{2\pi mb}{d} + \frac{d}{\pi mb} - \sin\frac{2\pi mb}{d}\right).$$

$$\alpha_m^2 = A_m^2 + B_m^2$$

$$= \left(\frac{kad}{\pi^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{m^4}\left[\left(\cos\frac{2\pi mb}{d} - \frac{\sin\frac{2\pi mb}{d}}{\frac{2\pi mb}{d}}\right)^2 + \left(\frac{d}{\pi mb} - \frac{d}{\pi mb}\cos\frac{2\pi mb}{d} - \sin\frac{2\pi mb}{d}\right)^2\right].$$

10. Fall. Die Sirenenscheibe hat kreisförmige Öffnungen, die Deckelplatte schmale in Richtung der Radien geschnittene Spalte.

Ist r der Radius des Kreises, h die Breite des Spaltes; und wählt man als Anfangspunkt der Zeit den Moment, wo der Mittelpunkt des Kreises in den Spalt fällt, so ist die Schwingungskurve:

$$F(t) = 2kh\sqrt{r^2 - x^2}.$$

$$A_0 = \frac{k\pi r^2 h}{d}; \qquad B_m = 0.$$

$$A_m = \frac{4khr}{d}\int_{-r}^{+r}\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}\cdot\cos\frac{2\pi mx}{d}\cdot dx = \alpha_m.$$

Die Integration kann nur durch Reihen ausgeführt werden.

11. Fall. Die Sirenenscheibe und die Deckelplatte haben kongruente kreisförmige Öffnungen.

Ist D der Durchmesser einer Öffnung, und wählt man als Anfangspunkt der Zeit den Moment, wo zwei Kreise sich von aufsen berühren, so ist die Schwingungskurve:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\left.\begin{aligned} F(t) &= \frac{kD}{2}\left(D \cdot \arccos\frac{x}{D} - x\sqrt{1-\frac{x^2}{D^2}}\right) \text{ von } x=0 \text{ bis } x=D, \\ F(t) &= \frac{kD}{2}\left[D\left(\pi - \arccos\frac{x}{D}\right) + x\sqrt{1-\frac{x^2}{D^2}}\right] \text{ von } x=-D \text{ bis } x=0. \end{aligned}\right\}$$

$$A_0 = \frac{2\,kD^2}{3\,d}; \qquad B_m = 0.$$

$$A_m = \frac{2\,kD^2}{d}\int_0^D \left(\arccos\frac{x}{D} - \frac{x}{D}\sqrt{1-\frac{x^2}{D^2}}\right)\cos\frac{2\,\pi m x}{d}\cdot dx = \alpha_m.$$

Die Integration mufs durch Reihen ausgeführt werden.

Aus diesen elf untersuchten Fällen ergiebt sich nun folgendes über den Klang der Sirenentöne:

1) Wenn die Öffnungen im Vergleich zu ihrer Gröfse sehr weit von einander entfernt sind, werden die Amplituden aller harmonischen Töne unter sich gleich.

2) Nur in fünf Fällen (Nr. 1, 2, 3, 4, 10) wird jeder harmonische Ton Null für gewisse Werte des Verhältnisses der Dauer des Impulses zur Schwingungsperiode. Aufserdem wird jeder m^{te} harmonische Ton $(m-1)$ mal Null.

3) In den übrigen Fällen (Nr. 5, 6, 7, 8, 9, 11) wird kein harmonischer Ton Null, welches auch die gegenseitige Entfernung der Öffnungen sein mag; aber die Amplitude jedes m^{ten} Tones geht durch $(m-1)$ Maxima. Jedoch wird der Unterschied zwischen den Maxima und Minima immer geringer, je mehr die Ordnungszahl des Partialtones wächst.

4) Die höheren Partialtöne haben das Maximum der Intensität in Nr. 3, das Minimum der Intensität in Nr. 6 und 9; bei beliebig gestalteter Öffnung und bei engem Spalte sind die Partialtöne immer stärker als bei zwei gleich gestalteten Öffnungen.

5) In zwei Fällen, Nr. 3 und 4, bleibt der Klang ungeändert, wenn die Ausschnitte und Vollräume mit einander vertauscht werden.

6) Die gröfste Analogie findet man bei Vergleichung der graphischen Darstellungen der Intensitätsverhältnisse im Fall Nr. 1 und 10, weniger bei Nr. 3.

7) Ebenso existiert noch eine ziemliche Analogie bei Nr. 4, 6, 7, 9, 11. In den auf diese Fälle bezüglichen Schwingungskurven findet man meistens zwei Kurven oder zwei Grade, welche die Abscissenachse unter einem veränderlichen Winkel schneiden und einen Punkt enthalten, an welchem eine Diskontinuität in der Krümmung eintritt.

8) Das Minimum des zweiten harmonischen Tones findet meistens statt, wenn das Verhältnis der Breite der Öffnungen zu ihrem gegenseitigen Abstande zwischen 0,5 und 0,7 liegt. Damit die beiden Perioden der Verdichtung und Verdünnung einer jeden Schwingungsperiode gleiche Dauer haben, nimmt dieses Verhältnis Werte an, die von den eben erwähnten nur wenig verschieden sind.

II. Die Töne werden durch zwei nicht-äquidistante Impulse erzeugt.

In diesem Abschnitte werden von Terquem unter andern auch solche Töne untersucht, wie sie von Seebeck bei seinem 3., 6. und 7. Versuche[1]) beobachtet worden waren.

[1]) II, p. 15.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

1. Fall. Die beiden Impulse erfolgen in demselben Sinne (Fig. 10).

Werden die beiden verschiedenen, sich periodisch wiederholenden Erschütterungen mit F(t) und φ(t) bezeichnet, so mag die erste Erschütterung F(t) dureh die Kurve ABC, die zweite Erschütterung φ (t) durch die Kurve DEF dargestellt werden, wo A und D die Anfangspunkte der Koordinaten jeder dieser Kurven sind; ferner sei $AA' = T$ die Schwingungsperiode, $AD = \tau$ das Intervall zwischen den beiden Impulsen. Man hat dann nach Formel (1) und (2):

$$F(t) = A_0 + \sum_1^\infty \left(\alpha_m \cos 2\pi \frac{m(t-p_m)}{T}\right) = A_0 + \sum_1^\infty \left(A_m \cos 2\pi \frac{mt}{T} + B_m \sin 2\pi \frac{mt}{T}\right),$$

$$\varphi(t) = A'_0 + \sum_1^\infty \left(\alpha'_m \cos 2\pi \frac{m(t-p'_m)}{T}\right) = A'_0 + \sum_1^\infty \left(A'_m \cos 2\pi \frac{mt}{F} + B'_m \sin 2\pi \frac{mt}{T}\right),$$

$$\varphi(t-\tau) = A'_0 + \sum_1^\infty \left(\alpha'_m \cos 2\pi \frac{m(t-p'_m-\tau)}{T}\right),$$

wo zwischen den Koeffizienten die bekannten Beziehungen stattfinden:

$$\alpha_m^2 = A_m^2 + B_m^2; \qquad \alpha'^2_m = A'^2_m + B'^2_m.$$

Die resultierende Schwingungsbewegung ist dann:

$$\left.\begin{aligned} \psi(t) = F(t) + \varphi(t-\tau) &= A_0 + A'_0 + \sum_1^\infty \left(a_m \cos 2\pi \frac{m(t-\vartheta_m)}{T}\right) \\ &= A_0 + A_0' + \sum_1^\infty \left[\cos \frac{2\pi mt}{T}\left(A_m + A'_m \cos \frac{2\pi m\tau}{T} - B'_m \sin \frac{2\pi m\tau}{T}\right)\right. \\ &\quad \left. + \sin \frac{2\pi mt}{T}\left(B_m + A'_m \sin \frac{2\pi m\tau}{T} + B'_m \cos \frac{2\pi m\tau}{T}\right)\right], \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

wo:

$$a_m^2 = \alpha_m^2 + \alpha'^2_m + 2\cos\frac{2\pi m\tau}{T}(A_m A'_m + B_m B'_m) + 2\sin\frac{2\pi m\tau}{T}(B_m A'_m - A_m B'_m). \tag{6}$$

Sind speziell die beiden Impulse gleich, so wird:

$$\left.\begin{aligned} a_m^2 &= 4\,\alpha_m^2 \cos^2 \frac{2\pi m\tau}{T}, \quad \text{oder} \quad a_m = 2\,\alpha_m \cos\frac{\pi m\tau}{T}, \\ \psi(t) &= 2\,A_0 + \sum_1^\infty \left(2\,\alpha_m \cos\frac{\pi m\tau}{T} \cos\frac{2\pi m\left(t - p_m - \frac{\tau}{2}\right)}{T}\right). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Dann reduziert sich die Untersuchung des Klanges der erzeugten Töne auf die Untersuchung der von dem Verhältnisse $\frac{\tau}{T}$ abhängigen Gröfse a_m, und sie wird dadurch vereinfacht, dafs man $\frac{\tau}{T}$ nur zwischen den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}$ zu betrachten hat, weil die Werte $\frac{\tau}{T}$ und $1 - \frac{\tau}{T}$ dieselben absoluten Werte für a_m liefern. Hieraus ergeben sich folgende Resultate:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

1) Wenn $\tau = 0$ ist, so ist jede Erschütterung verdoppelt, und man erhält denselben Ton mit vierfacher Intensität. Mit der Zunahme von τ nehmen der Grundton und die ersten Obertöne an Stärke ab; nur sowie $\cos\frac{\pi m \tau}{T}$ um so rascher sich ändert, als m zunimmt, verschwinden gewisse harmonische Töne und werden hernach mehrere Male Maxima.

2) Der Ton a_m verschwindet, wenn $\frac{\tau}{T} = \frac{(2k+1)}{2m}$ wird, wenn also $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{2m}, \frac{3}{2m}, \frac{5}{2m}, \ldots$ ist; für ein grades m ist in dieser Reihe der letzte Wert $\frac{m-1}{2m}$, für ein ungrades m aber $\frac{1}{2}$.

3) Der Koeffizient $\cos\frac{\pi m \tau}{T}$ von α_m erreicht seine Maxima, wenn $\frac{\tau}{T} = \frac{k}{m}$ wird, also $\frac{\tau}{T} = 0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \frac{3}{m}, \ldots$ ist; für ein grades m ist der letzte Wert in dieser Reihe $\frac{1}{2}$, für ein ungrades aber $\frac{m-1}{2m}$.

4) Für $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{2}$ erhält man den Ton a_2 mit seinen harmonischen Tönen; für die Koeffizienten $a_2, a_4, a_6, \ldots$ erhält man die nämlichen Werte, wenn man in den für A_m und B_m aufgestellten Formeln (3) T durch $\frac{T}{2}$ ersetzt. Man findet auf diese Weise $A_m = 2A_{2m}$, $B_m = 2B_{2m}$. Ersetzt man ganz allgemein in (3) die Gröfse T durch $\frac{T}{p}$, so wird:

$$A_m = p A_{mp}, \qquad B_m = p B_{mp}, \qquad a_m = p \alpha_{mp}.$$

Hieraus folgt der Satz: Sind in der Fourierschen Reihe $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_m$ die Intensitätskoeffizienten für eine gewisse Entfernung der Impulse, so stellen die Koeffizienten $\alpha_2, \alpha_4, \alpha_6, \ldots \alpha_{2m}$ die relativen Amplituden des Grundtones und seiner Obertöne dar, wenn der Abstand der Öffnungen auf die Hälfte reduziert wird; und ganz allgemein stellen die Koeffizienten $\alpha_p, \alpha_{2p}, \alpha_{3p}, \ldots \alpha_{mp}$ die Amplituden des Grundtones und seiner Obertöne dar, wenn der Abstand der Öffnungen auf den p^{ten} Teil reduziert wird.

Hiernach findet der dritte Versuch von Seebeck seine vollständige Erklärung, wie sie auch schon Ohm[1]) gegeben hatte. Man wird den Grundton und seine höhere Oktave mehr oder weniger deutlich hören, je nachdem sich der Wert von $\frac{\tau}{T}$ mehr oder weniger der Grenze 1 oder $\frac{1}{2}$ nähert. Wenn $\frac{\tau}{T}$ fast gleich $\frac{1}{2}$ ist, so sind die graden harmonischen Töne sehr stark und erregen im Ohre durch ihr gleichzeitiges Auftreten die Empfindung der Oktave des Grundtones. Indessen können in diesem Falle, wie aus der Untersuchung des Ausdruckes $\frac{a_m}{a_1} = \frac{\alpha_m}{\alpha_1} \cdot \frac{\cos\frac{\pi m \tau}{T}}{\cos\frac{\pi \tau}{T}}$ hervorgeht, für ein ungrades m auch ungrade harmonische Töne, wenn auch schwächer, auftreten.

[2]) II, p. 28.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2. Fall. Die beiden Impulse erfolgen in entgegengesetztem Sinne (Fig. 11).

Ist wieder $AA' = T$ die Schwingungsperiode, $CD = \tau$ das Intervall zwischen den beiden entgegengesetzt gerichteten Impulsen $F(t)$ und $\varphi(t)$, dann ist die resultierende Bewegung dargestellt durch:

$$\psi(t) = F(t) - \varphi(t-\tau) = A_0 - A_1 + \sum_1^\infty \left(a_m \cos 2\pi \frac{m(t-\vartheta_m)}{T}\right)$$

$$= A_0 - A'_0 + \sum_1^\infty \left[\cos\frac{2\pi m t}{T}\left(A_m - A'_m \cos\frac{2\pi m \tau}{T} + B'_m \sin\frac{2\pi m \tau}{T}\right)\right.$$

$$\left. + \sin\frac{2\pi m t}{T}\left(B_m - A'_m \sin\frac{2\pi m \tau}{T} - B'_m \cos\frac{2\pi m \tau}{T}\right)\right]. \qquad (8)$$

Dann ist:

$$a_m^2 = \alpha_m^2 + \alpha'^2_m - 2\cos\frac{2\pi m \tau}{T}(A_m A'_m + B_m B'_m) + 2\sin\frac{2\pi m \tau}{T}(A_m B'_m - B_m A'_m). \qquad (9)$$

Sind speziell die beiden Impulse gleich, so wird:

$$\left.\begin{aligned} a_m^2 &= 4\,\alpha_m^2 \sin^2\frac{\pi m \tau}{T}, \quad \text{oder} \quad a_m = 2\,\alpha_m \sin\frac{\pi m \tau}{T}, \\ \psi(t) &= \sum_1^\infty \left(2\,\alpha_m \sin\frac{\pi m \tau}{T} \cos 2\pi \frac{m\left(t - p_m - \frac{\tau}{T} + \frac{T}{4m}\right)}{T}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Hieraus ergeben sich folgende Resultate, wobei man wieder $\frac{\tau}{T}$ nur innerhalb der Grenzen 0 und $\frac{1}{2}$ zu betrachten hat:

1) Wenn $\frac{\tau}{T} = 0$ oder $\frac{\tau}{T} = 1$ ist, so entsteht weder ein Grundton noch ein anderer harmonischer Ton.

2) Mit $\frac{\tau}{T}$ nimmt die Amplitude aller Töne zu, aber diejenige der höheren Obertöne um so schneller, je höher ihre Ordnungszahl ist. So lange wenigstens α_m nicht allzu schwach ist, werden, wenn $\frac{\tau}{T}$ von Null wenig verschieden ist, grade die hohen Obertöne hörbar sein.

3) Wenn ein Ton durch getrennte gleiche und in demselben Sinne erfolgende Impulse entsteht, so kann die Amplitude der harmonischen Obertöne niemals gröfser als diejenige des Grundtones werden, und strebt ihr nur gleich zu werden, wenn die Dauer des Impulses im Vergleiche zur Schwingungsperiode unendlich klein wird. Wenn dagegen jede Erschütterung aus zwei Teilen von derselben Dauer besteht, während welcher die Verdichtungen und Bewegungen in entgegengesetztem Sinne erfolgen, so ist bei unendlicher Entfernung der Impulse die Amplitude des m^{ten} harmonischen Tones m mal so grofs als diejenige des Grundtones. Wenn der zweite Teil jedes Impulses fortwährend abnimmt, so wird offenbar die Amplitude des m^{ten} harmonischen Tones, die anfangs m mal so grofs als die Amplitude des Grundtones war, fortwährend abnehmen, bis sie beim Verschwinden dieses zweiten Teiles jedes Impulses derselben gleich wird.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Daraus wird es erklärlich, dafs bei dem Stabapparat[1]) von Savart die höheren Obertöne so intensiv werden können, dafs der Grundton ganz unhörbar wird: eine Thatsache, auf welche schon von Helmholtz[2]) hingewiesen worden ist.

4) Ein m^{ter} harmonischer Ton verschwindet, wenn $\frac{\tau}{T} = \frac{k}{m}$ ist, wenn also $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{m}$, $\frac{2}{m}, \frac{3}{m}, \ldots$ wird; für ein grades m ist der letzte Wert $\frac{1}{2}$, für ein ungrades $\frac{m-1}{2m}$.

5) Der Koeffizient von α_m wird ein Maximum, wenn $\frac{\tau}{T} = \frac{2k+1}{2m}$ ist, wenn also $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{2m}$, $\frac{2}{2m}, \frac{3}{3m}, \ldots$ wird; für ein ungrades m ist der letzte Wert $\frac{1}{2}$, für ein grades $\frac{m-1}{2m}$.

6) Wenn $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{2}$ ist, so verschwinden alle graden harmonischen Töne, und die entstehenden ungraden haben dieselbe relative Intensität wie bei einem einzigen Impulse.

III. Die Töne werden durch drei nicht-äquidistante Impulse erzeugt.

Unter diesen Abschnitt fallen der 4., 5. und 8. Versuch von Seebeck.

1. Fall. Die drei Impulse sind gleich und erfolgen in demselben Sinne. Es sei T die Schwingungsperiode; verlegt man den Anfangspunkt der Zeit in einen beliebigen Punkt des mittleren Impulses, so kann man die drei Erschütterungen durch $f(t)$, $f(t+\tau)$, $f(t-\tau')$ darstellen. Ist nun:

$$f(t) = A_0 + \sum_1^\infty \left(\alpha_m \cos 2\pi \frac{m(t-p_m)}{T}\right),$$

so ist die resultierende Bewegung dargestellt durch:

$$\psi(t) = f(t) + f(t+\tau) + f(t-\tau') = 3A_0 + \sum_1^\infty \left(a_m \cos 2\pi \frac{m(t-\vartheta_m)}{T}\right),$$

worin:

$$a_m^2 = \alpha_m^2 \left(3 + 2\cos 2\pi \frac{m\tau}{T} + 2\cos 2\pi \frac{m\tau'}{T} + 2\cos 2\pi \frac{m\tau''}{T}\right) \tag{11}$$

ist, wenn man $\tau'' = T - (\tau + \tau')$ setzt. In dieser Formel kommen nur die gegenseitigen Abstände der Erschütterungen vor, wie Fig. 12 schematisch zeigt; $AA' = T = \tau + \tau' + \tau''$.

Folgende beide Fälle sind speziell zu betrachten:

A. Von den drei gleichen Impulsen sind zwei äquidistante; dieser Fall entspricht dem achten Versuche[3]) von Seebeck. Dann ist $\tau = \tau'$, $\tau'' = T - 2\tau$, und:

$$a_m = \alpha_m \left(1 + 2\cos 2\pi \frac{m\tau}{T}\right). \tag{12}$$

---

[1]) I, p. 28—29. [2]) Tonempfindungen, 2. Ausg. p. 266. [3]) II, p. 15.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Hieraus ergeben sich folgende Resultate:

1) Für $\frac{\tau}{T} = 0$ wird $a_m = 3\alpha_m$, d. h. man hört den der Periode T entsprechenden Ton dreimal so stark.

2) Für $\frac{\tau}{T} = \frac{k}{m}$ wird $a_m = 3\alpha_m$; der Ton a_m wird unter den harmonischen Tönen deutlich unterschieden werden können, falls m nicht allzu grofs ist.

3) Für $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{2}$ sind alle graden harmonischen Töne dreimal so stark, die ungraden behalten ihre Stärke.

4) Für $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{3}$ wird nur $a_3 = 3\alpha_3$, alle übrigen Töne verschwinden.

5) Wenn $\frac{\tau}{T}$ von 0 bis $\frac{1}{3}$ zunimmt, so darf man mit Seebeck nicht behaupten, dafs der dritte harmonische Ton immer deutlich hörbar sein wird, denn er verschwindet für $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}$, grade so, wie alle harmonischen Töne, deren Ordnungszahlen Vielfache von 3 sind.

B. Von den drei gleichen Impulsen fallen zwei zusammen, und einer ist davon getrennt.

Setzt man in Formel (11) $\tau = 0$ und ersetzt dann τ' durch τ, so wird:

$$a_m^2 = \alpha_m^2 \left(5 + 4\cos 2\pi \frac{m\tau}{T}\right). \tag{13}$$

Hieraus folgt, dafs a_m niemals Null werden kann und stets zwischen den Grenzen α_m und $3\alpha_m$ liegen mufs; für $\frac{\tau}{T} = \frac{k}{m}$ wird $a_m = 3\alpha_m$, für $\frac{\tau}{T} = \frac{2k+1}{2m}$ wird $a_m = \alpha_m$. Für $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{2}$ werden alle graden harmonischen Töne verdreifacht, und die ungraden behalten ihren Wert.

2. Fall. Zwei von den gleichen Impulsen erfolgen in demselben, der dritte im entgegengesetzten Sinne.

Wird der Anfangspunkt der Zeit in den einzelnen entgegengesetzt gerichteten Impuls, und dieser selbst zwischen die beiden gleich gerichteten verlegt, dann sind die drei Erschütterungen der Periode T gegeben durch $-f(t)$, $+f(t+\tau)$ und $+f(t-\tau')$. Man erhält dann:

$$a_m^2 = \alpha_m^2 \left(3 - 2\cos 2\pi \frac{m\tau}{T} - 2\cos 2\pi \frac{m\tau'}{T} + 2\cos 2\pi \frac{m\tau''}{T}\right), \tag{14}$$

wo τ, τ', τ'' die Intervalle zwischen den drei auf einander folgenden Impulsen der Periode T sind.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Man hat drei besondere Fälle zu unterscheiden:

A. Der entgegengesetzt gerichtete Impuls liegt mitten zwischen den beiden gleich gerichteten.

Dann ist $\tau = \tau'$, und $a_m^2 = \alpha_m^2 \left(1 - 2\cos 2\pi \frac{m\tau}{T}\right)^2$, oder:

$$a_m = \alpha_m \left(2\cos 2\pi \frac{m\tau}{T} - 1\right). \tag{15}$$

Hieraus folgt:

1) Für $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{6}$ verschwindet der Grundton, und es ist:

$$a_2 = 2\alpha_2,\ a_3 = 3\alpha_3,\ a_4 = 2\alpha_4,\ a_5 = 0,\ a_6 = 3\alpha_6,\ a_7 = 0,\ a_8 = 2\alpha_8,\ a_9 = 3\alpha_9,\ \ldots$$

Es entstehen nur solche harmonische Töne, deren Ordnungszahlen Vielfache von 2 und 3 sind. Die harmonischen Töne $\alpha_2, \alpha_4, \alpha_8, \ldots$ sind verdoppelt, $\alpha_3, \alpha_6, \alpha_9, \ldots$ sind verdreifacht; man wird also die Quinte $a_2 | a_3$ hören.

2) Für $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{2}$ fallen die gleich gerichteten Impulse zusammen, und es wird:

$$a_1 = 3\alpha_1,\quad a_2 = \alpha_2,\quad a_3 = 3\alpha_3,\quad a_4 = \alpha_4,\quad a_5 = 3\alpha_5,\quad \ldots$$

Die ungraden harmonischen Töne sind verdreifacht, und die graden behalten ihren ursprünglichen Wert.

3) Für $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{3}$ wird $a_1 = 2\alpha_1$, $a_2 = 2\alpha_2$, $a_3 = \alpha_3$, $a_4 = 2\alpha_4$, ... Alle harmonischen Töne sind verdoppelt mit Ausnahme des dritten, welcher seinen ursprünglichen Wert behält.

B. Der entgegengesetzte Impuls ist von den beiden gleich gerichteten ungleich weit entfernt.

Man erhält in diesem Falle für $\tau'' = \tau'$ aus Formel (14):

$$a_m^2 = \alpha_m^2 \left(1 + 4\sin^2 2\pi \frac{m\tau}{T}\right) = \alpha_m^2 \left(5 - 4\cos^2 2\pi \frac{m\tau}{T}\right), \tag{16}$$

woraus erhellt, dafs der Koeffizient von α_m stets zwischen 1 und $\sqrt{5}$ liegen mufs. Daraus folgt:

1) Für $\frac{\tau}{T} = 0$ und $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{2}$ erhält man den Grundton mit seinen Obertönen.

2) Für $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{4}$ sind die ungraden harmonischen Töne mit dem Faktor $\sqrt{5}$ multipliziert, die graden bleiben unverändert.

C. Zwei Impulse fallen zusammen, der dritte ist entgegengesetzt gerichtet.

Setzt man in (14) $\tau'' = 0$ und $\tau' = T - \tau$, so erhält man:

$$a_m^2 = \alpha_m^2 \left(5 - 4\cos 2\pi \frac{m\tau}{T}\right), \tag{17}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

woraus erhellt, dafs der Koeffizient von α_m immer zwischen 1 und 3 liegt, und niemals Null wird. Daraus folgt:

1) Für $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{2}$ wird $a_1 = 3\,\alpha_1$, $a_2 = \alpha_2$, $a_3 = 3\,\alpha_3$, $a_4 = \alpha_4$, ...; die ungraden harmonischen Töne sind verdreifacht, die graden behalten ihren ursprünglichen Wert.

2) Für $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{4}$ wird $a_1 = \alpha_1\sqrt{5}$, $a_2 = 3\,\alpha_2$, $a_3 = \alpha_3\sqrt{5}$, $a_4 = \alpha_4$, ... Der zweite harmonische Ton wird deutlich hörbar sein.

3) Für $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{6}$ wird $a_1 = \alpha_1\sqrt{3}$, $a_2 = \alpha_2\sqrt{7}$, $a_3 = 3\,\alpha_3$, $a_4 = \alpha_4\sqrt{7}$. Es werden also aufser dem Grundton die ersten Obertöne hörbar sein.

„Par la théorie de Ohm, on peut expliquer tous les faits observés par Seebeck, relatifs à la production de sons par des ébranlements qui ne sont plus équidistants. Les résultats qu'on déduit de la série de Fourier sont plus complets que ceux qu'avait observés Seebeck“ [1]).

IV. Die Töne werden durch eine beliebige Anzahl nicht-äquidistanter Impulse erzeugt.

Unter der Annahme, dafs innerhalb der Schwingungsperiode T eine beliebige Anzahl gleichartiger Impulse erfolgen, kann man dieselben mit $F(t-\vartheta_1)$, $F(t-\vartheta_2)$, $F(t-\vartheta_3)$, ... $F(t-\vartheta_q)$ bezeichnen, wobei der Anfangspunkt der Zeit ganz willkürlich, und:

$$F(t) = A_0 + \sum_1^\infty \left(a_m \cos 2\pi \frac{m(t-p_m)}{T}\right)$$

ist. Dann erhält man für die resultierende Bewegung:

$$\psi(t) = r A_0 + \sum_1^\infty \left[a_m \cos 2\pi \left(\frac{m(t-p_m)}{T} - \frac{m\varphi}{T}\right)\right],$$

wo die Funktionen $F(t-\vartheta)$ mit positiven oder negativen Zeichen genommen werden müssen, je nachdem die Erschütterungen im gleichen oder entgegengesetzten Sinne erfolgen. Dann erhält man:

$$\left.\begin{aligned} a_m \cos 2\pi \frac{m\varphi}{T} &= \alpha_m \left(\cos 2\pi \frac{m\vartheta_1}{T} + \cos 2\pi \frac{m\vartheta_2}{T} + \ldots + \cos 2\pi \frac{m\vartheta_q}{T}\right) = \alpha_m \cdot S_1, \\ a_m \sin 2\pi \frac{m\varphi}{T} &= \alpha_m \left(\sin 2\pi \frac{m\vartheta_1}{T} + \sin 2\pi \frac{m\vartheta_2}{T} + \ldots + \sin 2\pi \frac{m\vartheta_q}{T}\right) = \alpha_m \cdot S_2, \\ a_m^2 &= \alpha_m^2 (S_1^2 + S_2^2). \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Der Wert von a_m ist von der Reihenfolge der Impulse unabhängig, wenn dieselben nur schnell genug auf einander folgen.

[1]) Ann. de l'École Norm. sup. t. VII, p. 363.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Der interessanteste spezielle Fall ist derjenige, wo die Impulse gleichgerichtet und äquidistant sind. Geht man von der Annahme aus, dafs innerhalb der Periode T q solcher Impulse erfolgen, und dafs δ das Intervall zwischen zwei auf einander folgenden Erschütterungen sei, so ist (Fig. 13):

$$T = (q-1)\,\delta + \vartheta.$$

Setzt man nun in (18) $\vartheta_1 = 0$, $\vartheta_2 = \delta$, $\vartheta_3 = 2\delta$, ... $\vartheta_q = (q-1)\,\delta$, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
a_m \cos 2\pi \frac{m\varphi}{T} &= \alpha_m \left(1 + \cos 2\pi \frac{m\delta}{T} + \ldots + \cos 2\pi \frac{m(q-1)\delta}{T}\right) \\
&= \alpha_m \cdot \frac{\sin \pi \frac{mq\delta}{T} \cos \pi \frac{m(q-1)\delta}{T}}{\sin \pi \frac{m\delta}{T}}, \\
a_m \sin 2\pi \frac{m\varphi}{T} &= \alpha_m \left(\sin 2\pi \frac{m\delta}{T} + \ldots + \sin 2\pi \frac{m(q-1)\delta}{T}\right) \\
&= \alpha_m \cdot \frac{\sin \pi \frac{mq\delta}{T} \sin \pi \frac{m(q-1)\delta}{T}}{\sin \pi \frac{m\delta}{T}},
\end{aligned}\right\}$$

$$a_m = \alpha_m \cdot \frac{\sin \pi \frac{mq\delta}{T}}{\sin \pi \frac{m\delta}{T}}. \tag{19}$$

Wenn man $\delta = \frac{T}{q}$ setzt, so wird $a_m = 0$, aufser für $m = q$, in welchem Falle $a_m = q\alpha_m$ wird; man erhält denselben Wert für a_m, als wenn man in den Formeln (3) die Gröfse T durch $\frac{T}{q}$ ersetzt[1]).

Wenn $\delta = \frac{T}{p}$, und $p - r = q$ eine gewisse Anzahl von Impulsen ist, so wird:

$$a_m = \alpha_m \cdot \frac{\sin \pi \frac{mq}{p}}{\sin \pi \frac{m}{p}} = \alpha_m \cdot \frac{\sin \pi \frac{m(p-r)}{p}}{\sin \pi \frac{m}{p}} = \pm \alpha_m \cdot \frac{\sin \pi \frac{mr}{p}}{\sin \pi \frac{m}{p}}. \tag{20}$$

Terquem hat diese Formel (20) zur Prüfung des Zahnradversuches von Savart[2]) benutzt, ein Versuch, den auch schon Ohm[3]) in den Kreis seiner theoretischen Betrachtungen gezogen hatte. Um die Anzahl der zur Entstehung eines vergleichbaren Tones erforderlichen Stöfse zu finden, hatte Savart ein mit 1000 äquidistanten, einsetzbaren Zähnen versehenes Zahnrad benutzt. Als Savart nach und nach die Zähne herausnahm, brauchte er schliefslich nur zwei benachbarte Zähne in ihrer ursprünglichen Ent-

[1]) Cfr. p. 22, 4). [2]) I, p. 27. [3]) II, p. 31. Pogg. Ann. LIX, p. 554—555.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

fernung stehen zu lassen, um den allerdings intermittierend gewordenen Ton von derselben Höhe zu erhalten, wie in dem Falle, wo sämtliche Zähne vorhanden waren.

Ist p die ursprüngliche Anzahl der auf dem Rade vorhandenen, r die Anzahl der fortgenommenen Zähne, so folgt aus der Formel (20) zunächst, dafs a_m, vom Zeichen abgesehen, denselben Wert hat, wenn man die Anzahl der weggenommenen Zähne durch die Anzahl der stehengebliebenen ersetzt, aufser für $p = m$, denn dann wird $a_m = \alpha_m (p - r)$.

Savart hatte bei seinen Versuchen seine Aufmerksamkeit nur demjenigen Tone zugewendet, welcher durch die auf dem Rade ursprünglich vorhandene Zahnanzahl erzeugt wird, und dessen harmonische Obertöne gar nicht beachtet. Da er das Rad verhältnismäfsig langsam drehte, so war der durch einen einzigen zurückgebliebenen Zahn erzeugte Grundton zu tief, um noch wahrgenommen werden zu können, und Savart bemerkte ausdrücklich, dafs er in diesem Falle statt eines Tones nur die einzelnen Schläge des Zahnes gegen das Kartenblatt gehört habe. Indem Terquem nun bei seinen theoretischen Untersuchungen von der Annahme ausging, dafs das zu dem Versuche benutzte Zahnrad nur eine kleine ursprüngliche Anzahl von Zähnen trägt und so schnell gedreht wird, dafs auch der Grundton dann noch gehört wird, wenn nur ein einziger Zahn stehen bleibt, gelangte er zu folgenden Resultaten:

1) Bei einem einzigen vorhandenen Zahne entstehen eine grofse Anzahl hörbarer harmonischer Töne mit den Amplituden $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_p, \alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_{2p}, \ldots$, Die höheren Obertöne haben eine beträchtliche Intensität, die selbst diejenige des Grundtones übertrifft.

2) Läfst man zwei benachbarte Zähne stehen, so ist $p - r = 2$ und $a_m = 2\,\alpha_m \cos \pi \frac{m}{p}$, eine Formel, die mit (7) übereinstimmt. Die Koeffizienten der Fourierschen Reihe sind dann $2\,\alpha_1 \cos \frac{\pi}{p}$, $2\,\alpha_2 \cos \frac{2\pi}{p}$, $3\,\alpha_3 \cos \frac{3\pi}{p}, \ldots$; $2\,\alpha_{p-1} \cos \frac{\pi}{p}$, $2\,\alpha_p$, $2\,\alpha_{p+1} \cos \frac{\pi}{p}, \ldots, 2\,\alpha_{2p}, \ldots$. Diejenigen Glieder verschwinden, für welche $m = \frac{p}{2}, \frac{3p}{2}, \frac{5p}{2}, \ldots$ ist; und diejenigen erreichen ein Maximum, für welche $m = p$, $2p, 3p, \ldots$ ist. Der Ton α_p wird also hörbar sein, wenn er nicht zu hoch ist, und wenn das Ohr darauf vorbereitet ist, wie es ja bei dem Versuche von Savart der Fall war.

3) Sind drei benachbarte Zähne vorhanden, so ist $p - r = 3$, und:

$$a_m = \alpha_m \frac{\sin \pi \frac{3m}{p}}{\sin \pi \frac{m}{p}} = \alpha_m \left(3 - 4 \sin^2 \pi \frac{m}{p}\right) = \alpha_m \left(1 + 2 \cos 2\pi \frac{m}{p}\right),$$

eine Formel, die mit (12) übereinstimmt. Es werden Glieder verschwinden für $m = \frac{(3k \pm 1)\,p}{3}$. Wenn p ein Vielfaches von 3 ist, werden diejenigen Glieder Null werden, deren Ordnungszahlen $\frac{p}{3}, \frac{2p}{3}, \frac{4p}{3}, \frac{5p}{3}, \ldots$ sind; wenn p nicht ein Viel-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

faches von 3 ist, so sind die Ordnungszahlen der verschwindenden Glieder $\frac{(3k \pm 1)p}{3}$ oder $\frac{(3k \pm 1)p}{3} + 1$. Die Glieder mit den Ordnungszahlen $p, 2p, 3p, \ldots$ sind verdreifacht, und die entsprechenden Töne werden hörbar sein.

4) Sind q benachbarte Zähne vorhanden, also $p - r = q$, so wird:

$$a_m = \alpha_m \frac{\sin \pi \frac{mq}{p}}{\sin \pi \frac{m}{p}}.$$

Für die Glieder $a_q, a_{2q}, a_{3q}, \ldots$ hat man:

$$a_q = q\alpha_q, \quad a_{2q} = q\alpha_{2q}, \quad a_{3q} = q\alpha_{3q}, \quad \ldots.$$

Dieser Ton a_q wird also sehr deutlich gehört werden müssen, wenn q einen einigermafsen grofsen Wert hat. Wenn p sehr grofs im Verhältnisse zu q ist, so ist annähernd $\sin \pi \frac{q}{p} = q \sin \frac{\pi}{p}$; wenn man also auf dem Rade eine verhältnismäfsig geringe Anzahl von Zähnen stehen läfst, so wächst der Grundton beinahe in demselben Verhältnisse wie sein p^{ter} harmonischer Ton.

Der Grundton $\alpha_1 \frac{\sin \pi \frac{q}{p}}{\sin \frac{\pi}{p}}$ erreicht sein Maximum für $q = \frac{p}{2}$, d. h. wenn die eine Hälfte der Zähne entfernt, und die andere Hälfte vorhanden ist; man kann in diesem Falle die erzeugte Gesamterschütterung als eine einzige, aus zwei gleichen Perioden bestehende Erschütterung auffassen.

Ein beliebiger Ton erreicht sein Maximum, wenn $q = \frac{(2k+1)p}{2m}$ ist; also für $m = 2$, wenn $q = \frac{p}{4}, \frac{3p}{4}$ ist; für $m = 3$, wenn $q = \frac{p}{6}, \frac{p}{2}, \frac{5p}{6}$ ist; für $m = 4$, wenn $q = \frac{p}{8}, \frac{3p}{8}, \frac{5p}{8}, \frac{7p}{8}$ ist. Wenn dagegen ein beliebiger Ton verschwinden soll, so mufs $q = \frac{kp}{m}$ sein, ausgenommen für $m = p$; also für $m = 1$, wenn $q = p$ ist; für $m = 2$, wenn $q = \frac{p}{2}$ ist; für $m = 3$, wenn $q = \frac{p}{3}, \frac{2p}{3}$ ist; für $m = 4$, wenn $q = \frac{p}{4}, \frac{p}{2}, \frac{3p}{4}$ ist. Wenn nun $q = \frac{p}{2}$ ist, haben aufser den Tönen $a_p, a_{2p}, a_{3p}, \ldots$, deren Amplituden mit $\frac{p}{2}$ multipliziert sind, der Grundton und die ungraden harmonischen Töne ihr Maximum, während die graden harmonischen Töne verschwinden.

Für einen gegebenen Wert von q verschwindet a_m, wenn $m = \frac{kp}{q}$ ist, aus-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

genommen, wenn $k = q, 2q, 3q, \ldots$ ist. Die Maxima finden für $m = p, 2p, 3p, \ldots$ statt. Endlich giebt es schwächere relative Maxima für $m = \frac{(2k+1)q}{2p}$. Wenn speziell p und q relative Primzahlen sind, so giebt es nur Minima, ohne dafs irgend ein Glied vollständig verschwindet. Wenn p und q einen gemeinsamen Faktor s haben, so dafs $p = p's$, $q = q's$ ist, so verschwindet a_m für $m = p', 2p', 3p', \ldots$. Wenn $p = qs$, also ein Vielfaches von q ist, so verschwindet a_m für $m = s, 2s, 3s, \ldots$, ausgenommen für $m = qs, 2qs, 3qs, \ldots$.

Auf diese Weise hat Terquem gezeigt, dafs aufser dem einzigen von Savart wahrgenommenen Tone noch zahlreiche andere Töne entstehen müssen, deren Intensität von der Anzahl der auf dem Rade belassenen Zähne abhängt. Er schliefst seine Untersuchungen mit den Worten[1]): „Ohm avait déjà discuté, en partie du moins, les conséquences si variées de ce cas intéressant; on voit, par les résultats auxquels conduit la discussion de cette formule, combien il serait important de reprendre et de compléter l'expérience que Savart avait faite dans un but particulier. On voit, en outre, comment cette théorie rend compte des faits que Savart avait découverts, et qu'il était difficile d'expliquer sans le secours de la série de Fourier, et l'interprétation qu'en ont donnée Ohm et M. Helmholtz".

Zweitens hat Terquem eine bemerkenswerte Anwendung auf die Sirene von Opelt[2]) gemacht, bei welcher sich auf dem 16. bis 24. Löcherkreise nicht-äquidistante Öffnungen befinden. Die Schwingungsperiode T sei durch den Bogen d eines Kreises dargestellt; auf diesem Bogen befinden sich, von einem und demselben Punkte an gezählt, einmal p, dann q, dann r, ... äquidistante Löcher[3]), wo p, q, r, ... relative Primzahlen sind. Da der erzeugte Ton von der Reihenfolge der Impulse unabhängig ist, so findet nach (18) folgende Beziehung statt:

$$\begin{aligned} a_m \cos 2\pi \frac{m\varphi}{T} = \alpha_m \Big(& 1 + \cos 2\pi \frac{m}{p} + \cos 2\pi \frac{2m}{p} + \ldots + \cos 2\pi \frac{(p-1)m}{p} \\ & + \cos 2\pi \frac{m}{q} + \cos 2\pi \frac{2m}{q} + \ldots + \cos 2\pi \frac{(q-1)m}{q} \\ & + \cos 2\pi \frac{m}{r} + \cos 2\pi \frac{2m}{r} + \ldots + \cos 2\pi \frac{(r-1)m}{r} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Big). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_m \sin 2\pi \frac{m\varphi}{T} = \alpha_m \Big(& \sin 2\pi \frac{m}{p} + \sin 2\pi \frac{2m}{p} + \ldots + \sin 2\pi \frac{(p-1)m}{p} \\ & + \sin 2\pi \frac{m}{q} + \sin 2\pi \frac{2m}{q} + \ldots + \sin 2\pi \frac{(q-1)m}{q} \\ & + \sin 2\pi \frac{m}{r} + \sin 2\pi \frac{2m}{r} + \ldots + \sin 2\pi \frac{(r-1)m}{r} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Big). \end{aligned}$$

[1]) Ann. de l'Ecole Norm. sup. VII, p. 350. [2]) II, p. 7—12. [3]) Ibid. p. 8.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Unter Benutzung der bekannten Formeln:

$$\left.\begin{aligned}\cos\gamma + \cos 2\gamma + \ldots + \cos(n-1)\gamma &= \frac{\sin\frac{(n-1)\gamma}{2}\cdot\cos\frac{n\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}},\\ \sin\gamma + \sin 2\gamma + \ldots + \sin(n-1)\gamma &= \frac{\sin\frac{(n-1)\gamma}{2}\cdot\sin\frac{n\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}\end{aligned}\right\}$$

erhält man:

$$a_m \cos 2\pi\frac{m\varphi}{T}$$

$$= \alpha_m\left(1 + \frac{\sin\pi\frac{m(p-1)}{p}\cdot\cos m\pi}{\sin\pi\frac{m}{p}} + \frac{\sin\pi\frac{m(q-1)}{q}\cdot\cos m\pi}{\sin\pi\frac{m}{q}} + \frac{\sin\pi\frac{m(r-1)}{r}\cdot\cos m\pi}{\sin\pi\frac{m}{r}} + \ldots\right), \quad (21)$$

$$a_m \sin 2\pi\frac{m\varphi}{T} = 0,$$

weil jedes Glied in der Klammer den Faktor $\sin m\pi = 0$ enthält, folglich:

$$\varphi = 0.$$

Wenn m einen von p, q, r, ... verschiedenen Wert hat, so wird jedes Glied von der Form $\dfrac{\sin\pi\frac{m(k-1)}{k}\cdot\cos m\pi}{\sin\pi\frac{m}{k}}$ gleich -1; bezeichnet man mit S die Anzahl der gleichzeitig vorhandenen Löcherfolgen, so wird in diesem Falle:

$$a_m = \alpha_m(1-1-1-1-\ldots) = -(S-1)\,\alpha_m. \quad (22)$$

Wenn dagegen $m = p$ ist, so wird das Glied $\dfrac{\sin\pi\frac{m(p-1)}{p}\cdot\cos m\pi}{\sin\pi\frac{m}{p}} = \dfrac{0}{0} = p-1$, und:

$$a_p = \alpha_p(1 + (p-1) - (S-1)) = \alpha_p(p - S + 1).$$

Analoge Ausdrücke erhält man, wenn $m = q$, $m = r$, ... ist, folglich hat man:

$$\left.\begin{aligned}a_p &= \alpha_p(p - S + 1),\\ a_q &= \alpha_q(q - S + 1),\\ a_r &= \alpha_r(r - S + 1).\end{aligned}\right\} \quad (23)$$

A. Diese Formeln sollen zunächst auf die Löcherkreise Nr. 16 bis 20 der Opeltschen Sirene angewendet werden, welche zur Erzeugung der Intervalle der grofsen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Terz, Quarte, Quinte, grofsen Sexte und natürlichen Septime dienen und resp. 48, 48, 48, 56 und 60 Öffnungen haben[1]). Jeder dieser fünf Kreise hat einmal 24 äquidistante Öffnungen; dazu treten auf dem Terzenkreise $\frac{5}{4} \times 24 = 30$, auf dem Quartenkreise $\frac{4}{3} \times 24 = 32$, auf dem Quintenkreise $\frac{3}{2} \times 24 = 36$, auf dem Sextenkreise $\frac{5}{3} \times 24 = 40$, auf dem Septimenkreise $\frac{7}{4} \times 24 = 42$ Öffnungen hinzu, wenn man jede beiden Folgen gemeinsame Öffnung doppelt zählt. Die Schwingungsperiode T des Grundtones eines jeden Löcherkreises entspricht einer verschiedenen Anzahl von Öffnungen; aber sie wird stets dargestellt durch denjenigen Bogen, welcher der sovielste Teil des Kreisumfanges ist, als der gröfste gemeinsame Faktor der beiden Löcherfolgen Einheiten enthält, wenn man jede gemeinschaftliche Öffnung zweimal zählt. Demgemäfs ist die Periode des Grundtones bei den fünf in Rede stehenden Kreisen durch Bogen gleich $\frac{1}{6}$, resp. $\frac{1}{8}, \frac{1}{12}, \frac{1}{8}, \frac{1}{6}$ des Kreisumfanges gegeben. Dann ist die Gesamtzahl der auf jedem Löcherkreise vorhandenen Öffnungen gleich der Summe der Öffnungen in beiden Folgen, vermindert um diesen gemeinsamen Faktor; also hat der Terzenkreis $24 + 30 - 6 = 48$, der Quartenkreis $24 + 32 - 8 = 48$, der Quintenkreis $24 + 36 - 12 = 48$, der Sextenkreis $24 + 40 - 6 = 56$, der Septimenkreis $24 + 42 - 6 = 60$ Öffnungen.

Bezeichnet man mit c_3 denjenigen Ton, welcher den 24 äquidistanten Öffnungen jedes Löcherkreises entspricht, so erhält man aus den Formeln (22) und (23) über die Intensität der erzeugten Töne folgende Resultate:

1) Für den Terzenkreis mit 24 und 30 Öffnungen, Verhältnis $\frac{5}{4}$:

$$\begin{array}{cccccc} -\alpha_1, & -\alpha_2, & -\alpha_3, & +3\,\alpha_4, & +4\,\alpha_5, & -\alpha_6, \quad \ldots \\ c_1 & c_2 & g_2 & c_3 & e_3 & g_3. \end{array}$$

Grundton c_1 und die grofse Terz $c_3|e_3$ deutlich hörbar.

2) Für den Quartenkreis mit 24 und 32 Öffnungen, Verhältnis $\frac{4}{3}$:

$$\begin{array}{cccccc} -\alpha_1, & -\alpha_2, & +2\,\alpha_3, & +3\,\alpha_4, & -\alpha_5, & -\alpha_6, \quad \ldots \\ f_1 & f_2 & c_3 & f_3 & a_3 & c_4. \end{array}$$

Grundton f_1 und die Quarte $c_3|f_3$ deutlich hörbar.

3) Für den Quintenkreis mit 24 und 36 Öffnungen, Verhältnis $\frac{3}{2}$:

$$\begin{array}{ccccc} -\alpha_1, & +\alpha_2, & +2\,\alpha_3, & -\alpha_4, & -\alpha_5, \quad \ldots \\ c_2 & c_3 & g_3 & c_4 & e_4. \end{array}$$

Die Duodezime $c_2|g_3$ deutlich hörbar.

---

[1]) II, p. 12, oben.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

4) Für den Sextenkreis mit 24 und 40 Öffnungen, Verhältnis $\frac{5}{3}$:

$$\begin{array}{cccccc} -\alpha_1, & -\alpha_2, & +2\,\alpha_3, & -\alpha_4, & +4\,\alpha_5, & -\alpha_6, \ldots \\ f_1 & f_2 & c_3 & f_3 & a_3 & c_4. \end{array}$$

Grundton f_1 und die Sexte $c_3|a_3$ deutlich hörbar.

5) Für den Septimenkreis mit 24 und 42 Öffnungen, Verhältnis $\frac{7}{4}$:

$$\begin{array}{cccccccc} -\alpha_1, & -\alpha_2, & -\alpha_3, & +3\,\alpha_4, & -\alpha_5, & -\alpha_6, & +6\,\alpha_7, & -\alpha_8. \\ c_1 & c_2 & g_2 & c_3 & e_3 & g_3 & b_3 & c_4. \end{array}$$

Grundton c_1 und die Septime $c_3|b_3$ deutlich.

Im allgemeinen wird man aufser dem Grundtone zwei stärkere harmonische Töne hören, deren Intervall durch das Verhältnis der Öffnungen beider Löcherfolgen eines Kreises bestimmt ist. Nur auf dem Quintenkreise hört man nicht den entsprechenden Akkord, sondern aufser dem Grundtone verstärkt nur seine Duodezime: eine Erscheinung, die Terquem schon früher beobachtet, aber vor seinen theoretischen Arbeiten einem Fehler seines Apparates zugeschrieben hatte.

Terquem hat noch zwei spezielle Fälle untersucht. Man kann sich nämlich die Opeltsche Sirene auch so eingerichtet denken, dafs auf jedem der fünf betrachteten Löcherkreise die beiden Löcherfolgen gemeinsamen Öffnungen nicht mehr durch eine einzige Öffnung dargestellt, sondern wirklich neben einander belassen werden. Wenn man dann die Sirenenscheibe anstatt durch ein Röhrchen durch einen schmalen Spalt anbläst, so wird an jeder dieser Stellen jetzt ein Doppelimpuls entstehen. In diesem Falle folgt aus den Formeln (22) und (23) $a_m = 0$, wenn m von p und q verschieden ist; und $a_p = p\,\alpha_p$, $a_q = q\,\alpha_q$, wenn m entweder gleich p oder gleich q ist. Man wird also nur die diesen beiden Folgen entsprechenden Töne hören.

Wenn man dagegen die beiden Löcherfolgen gemeinsamen Öffnungen beseitigt, indem man sie etwa mit Wachs verklebt, so wird:

$$a_m = -S\,\alpha_m, \text{ wenn m von p und q verschieden ist;}$$
$$a_p = (p - S)\,\alpha_p, \quad a_q = (q - S)\,\alpha_q, \quad \text{wenn m gleich p oder gleich q ist.}$$

Aus diesen Formeln ergiebt sich, dafs man durch diese Änderung den Grundton und seine meisten harmonischen Töne verstärkt, dagegen die dem gegebenen Intervalle entsprechenden früher verstärkten harmonischen Töne schwächt.

Die bisher über die Opeltsche Sirene entwickelten Resultate kann man folgendermafsen zusammenfassen:

1) Wenn man alle den beiden Löcherfolgen gemeinsamen Öffnungen fortbestehen läfst, so dafs an den beiden Folgen gemeinsamen Punkten ein Impuls von doppelter Stärke auftritt, so hört man nur die beiden Folgen entsprechenden Töne.

2) Wenn man von den gemeinsamen Öffnungen nur eine bestehen läfst, so hört man dieselben Töne wie in dem vorhergehenden Falle, und aufserdem den Grundton, von dem die beiden Löcherfolgen entsprechenden Töne harmonische Obertöne sind.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3) Wenn man die gemeinsamen Öffnungen beider Folgen unterdrückt, so wird der Grundton mit seinen harmonischen Tönen stärker; einer der beiden einer Folge entsprechenden Töne fällt mit diesen harmonischen Tönen zusammen, wird selbst vermindert oder verschwindet, während auch der andere Ton mit den übrigen harmonischen zusammenfallen kann.

„Les concéquences si simples, si nettes de la formule de Fourier, vérifiées par l'expérience, serviront à la démonstration complète de la théorie de Ohm et de Helmholtz; car on voit ici, pour ainsi dire, les harmoniques, par leur consistence, produire leur son fondamental“ [1]).

B. Die Löcherkreise Nr. 21 bis 24 der Opeltschen Sirene enthalten resp. 96, 96, 160, 144 Öffnungen [2]), welche die gemischten Rhythmen (3, 4, 5, 6) und (4, 5, 6, 8), sowie die zusammengesetzten hüpfenden Rhythmen (3, 4, 5) und (4, 5, 6) darstellen. Die Löcherfolgen des 21. und 22. Kreises wurden von Opelt [3]) in der Weise erhalten, dafs er zwei Kreise zuerst in 24 gleiche Teile teilte. Auf dem 21. Kreise, der zur Erzeugung des Akkordes c f a $\bar{c}$, Quartsextenakkord mit Verdoppelung des Grundtones, dienen sollte, wurde nun jedes Achtel des Kreisumfanges nach und nach in 4, 5 und 6 gleiche Teile geteilt, aber auf dem 22. Kreise, der zur Erzeugung des Durakkordes c e g $\bar{c}$ dienen sollte, wurde jedes Sechstel des Kreisumfanges nach und nach in 5, 6 und 8 gleiche Teile geteilt, und jetzt an den Teilpunkten die Löcher gestochen. Dann würden auf dem 21. Kreise $24 \times \frac{4}{3} + 24 \times \frac{5}{3} + 24 \times \frac{6}{3} = 32 + 40 + 48 = 120$ Öffnungen vorhanden sein, wenn nicht wegen des Zusammenfallens $3 \times 8 = 24$ in Abzug gebracht werden müfsten; folglich befinden sich auf diesem Kreise nur $120 - 24 = 96$ Öffnungen, und 3 Löcherfolgen, deren Zahlen sich wie 4 : 5 : 6 verhalten. Die Schwingungsperiode T ist gegeben durch $\frac{1}{8}$ des Kreisumfanges. Auf dem 22. Kreise würden $24 \times \frac{5}{4} + 24 \times \frac{6}{4} + 24 \times \frac{8}{4}$ $= 30 + 36 + 48 = 114$ Öffnungen vorhanden sein, wenn nicht $3 \times 6 = 18$ wegen des Zusammenfallens abgezogen werden müfsten, folglich befinden sich auf diesem Kreise nur $114 - 18 = 96$ Öffnungen und 3 Löcherfolgen, deren Zahlen sich wie 5 : 6 : 8 verhalten. Die Schwingungsperiode T ist gegeben durch $\frac{1}{6}$ des Kreisumfanges.

Der 23. und 24. Kreis dienen zur Erzeugung der Akkorde $\bar{c}\,\bar{f}\,\bar{a}$ und $\bar{c}\,\bar{e}\,\bar{g}$. Da diese Akkorde in der nächst höheren Oktave liegen sollen, werden die beiden Kreise zuerst mit 48 äquidistanten Öffnungen versehen. Nun wird für den 23. Kreis jedes Sechszehntel des Umfanges noch zweimal in 4 resp. 5 gleiche Teile geteilt, und an den Teilpunkten werden wieder Öffnungen gestochen. Dann würden auf diesem Kreise $48 + 48 \times \frac{4}{3} + 48 \times \frac{5}{3} = 48 + 64 + 80 = 192$ Löcher vorhanden sein müssen, wenn nicht wegen des Zusammenfallens $2 \times 16 = 32$ subtrahiert werden müfsten. Folglich befinden sich auf dem 23. Kreise nur $192 - 32 = 160$ Öffnungen und 3 Löcherfolgen,

---

[1]) Ann. de l'École Norm. sup. VII, p. 358.

[2]) II, p. 12, oben.

[3]) Allgemeine Theorie der Musik, p. 34.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

deren Zahlen sich wie 3 : 4 : 5 verhalten. Die Schwingungsperiode T ist gleich $\frac{1}{16}$ des Kreisumfanges. Für den 24. Kreis wird jedes Zwölftel des Umfanges noch einmal in 5, und dann in 6 gleiche Teile geteilt, und an den Teilpunkten Öffnungen angebracht. Dann würden auf diesem Kreise $48 + 48 \times \frac{5}{4} + 48 \times \frac{6}{4} = 48 + 60 + 72 = 180$ Löcher vorhanden sein müssen, wenn nicht $1 \times 12 + 1 \times 24 = 36$ zusammenfallende Öffnungen davon abgingen; folglich enthält der 24. Kreis $180 - 36 = 144$ Öffnungen und 3 Löcherfolgen, deren Zahlen sich wie 4 : 5 : 6 verhalten. Die Schwingungsperiode T ist $\frac{1}{12}$ des Kreisumfanges.

Die Grundlage der theoretischen Untersuchung bildet die Formel (21):

$$a_m = \alpha_m \left(1 + \frac{\sin \pi \frac{m(p-1)}{p} \cdot \cos m\pi}{\sin \pi \frac{m}{p}} + \frac{\sin \pi \frac{m(q-1)}{q} \cdot \cos m\pi}{\sin \pi \frac{m}{p}} + \frac{\sin \pi \frac{m(r-1)}{r} \cdot \cos m\pi}{\sin \pi \frac{m}{r}} - \cos m\pi \right),$$

in welcher wegen $\varphi = 0$ die linke Seite sich auf a_m reduziert, während auf der rechten Seite in der Klammer $\cos m\pi$ weggenommen werden mufs, weil in den Löcherkreisen Folgen vorkommen, in denen die Entfernungen gleich der durch grade Zahlen dividierten Periode T sind. Bezeichnet man die Anzahl der Folgen eines Löcherkreises wieder mit S — im vorliegenden Falle ist $S = 3$ —, so gehen die Formeln (22) und (23) in die folgenden über:

$$a_m = (1 - S \mp 1)\, \alpha_m = -(S \pm 1 - 1)\, \alpha_m, \tag{24}$$

wenn m von p, q, r verschieden ist, und in dem Doppelzeichen das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem m grade oder ungrade ist. Wenn aber $m = p, q, r$ ist, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} a_p &= (p - (S-1) \mp 1)\, \alpha_p, \\ a_q &= (q - (S-1) \mp 1)\, \alpha_q, \\ a_r &= (r - (S-1) \mp 1)\, \alpha_r, \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

wo für das Doppelzeichen dasselbe, wie vorhin, gilt.

Bezeichnet man den 48 äquidistanten Öffnungen entsprechenden Ton mit c_4, so entstehen in den vier Fällen folgende Töne:

1) 21. Löcherkreis mit dem Verhältnisse 4 : 5 : 6:

$-\alpha_1$,	$-3\alpha_2$,	$-\alpha_3$,	$+\alpha_4$,	$+4\alpha_5$,	$+3\alpha_6$,	$-\alpha_7$,	$-3\alpha_8$, ...
f_1	f_2	c_3	f_3	a_3	c_4	es_4	f_4.

Aufser dem hörbaren Grundtone f_1 sind die meisten graden und der fünfte harmonische Ton verstärkt.

2) 22. Löcherkreis mit dem Verhältnisse 5 : 6 : 8:

$-\alpha_1$,	$-3\alpha_2$,	$-\alpha_3$,	$-3\alpha_4$,	$+4\alpha_5$,	$+3\alpha_6$,	$-\alpha_7$,	$+5\alpha_8$,	$-\alpha_9$,	$-3\alpha_{10}$
c_1	c_2	g_2	c_3	e_3	g_3	b_3	c_4	d_4	e_4.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aufser dem hörbaren Grundtone c_1 sind alle graden und der fünfte harmonische Ton verstärkt.

3) 23. Löcherkreis mit dem Verhältnisse 3 : 4 : 5:

$$\begin{array}{ccccccc} -2\,\alpha_1, & -2\,\alpha_2, & +\alpha_3, & +2\,\alpha_4, & +3\,\alpha_5, & -2\,\alpha_6, & -2\,\alpha_7, \ldots \\ f_2 & f_3 & c_4 & f_4 & a_4 & c_5 & es_5. \end{array}$$

Fast alle harmonischen Töne sind verstärkt.

4) 24. Löcherkreis mit dem Verhältnisse 4 : 5 : 6:

$$\begin{array}{cccccccc} -\alpha_1, & -3\,\alpha_2, & -\alpha_3, & +\alpha_4, & +4\,\alpha_5, & +3\,\alpha_6, & -\alpha_7, & -3\,\alpha_8, \ldots \\ c_2 & c_3 & g_3 & c_4 & e_4 & g_4 & b_4 & c_5. \end{array}$$

Aufser dem hörbaren Grundtone c_2 sind alle graden und der fünfte harmonische Ton verstärkt.

Wie man hieraus ersieht, herrscht eine grofse Übereinstimmung der Klangbildung im ersten, zweiten und vierten Falle.

Terquem hat auch noch die beiden Fälle theoretisch untersucht, wo man erstens jede Öffnung unterdrückt, die zwei Folgen gemeinsam ist, aber diejenigen fortbestehen läfst, welche allen drei Folgen gemeinsam sind, und zweitens, wo man alle gemeinsamen Öffnungen vollständig beseitigt. Bei der ersten Annahme verschwinden die ungraden harmonischen Töne mit Ausnahme des fünften, während grade dieser ganz beträchtlich und fast alle graden harmonischen Töne, vom sechsten abgesehen, erheblich verstärkt werden; beim 21. und 24. Kreise entstehen genau dieselben harmonischen Töne. Bei der zweiten Annahme entstehen alle harmonischen Töne; von den ungraden ist nur der fünfte Ton stets erheblich verstärkt, desgleichen die meisten graden.

Wenn man alle den drei Löcherfolgen gemeinsamen Öffnungen jedes Kreises fortbestehen liefse, so würde man nur die diesen drei Folgen gemeinsamen Töne hören, genau so, wie wenn sie sich einzeln auf drei verschiedenen konzentrischen Kreisen befänden.

Hiermit schliefsen Terquems interessante Untersuchungen über die Sirenenklänge, und im Hinblick auf die rein theoretische Behandlung des Problems stellte er am Schlusse seiner grofsen Abhandlung auch noch entscheidende Experimente in Aussicht[1]):

„Ces résultats ne pourront toutefois être complètement admis que quand ils auront reçu la sanction de l'expérience, ce qui exige des appareils nombreux et convenablement disposés pour l'étude des sons produits; ce qu'il faut surtout chercher à réaliser, c'est une sirène ayant un mouvement de rotation parfaitement régulier, et produisant des sons purs et intenses; on pourrait employer utilement, dans ce but, les nouveaux régulateurs imaginés par Foucault pour obtenir des mouvements de rotation parfaitement réguliers et continus. Je me propose d'entreprendre cette étude expérimentale, complément du présent travail, quand les circonstances m'auront permis de me procurer les appareils nécessaires pour pouvoir la faire dans de bonnes conditions d'exactitude et de précision".

---

[1]) Ann. de l'École Norm. sup. VII, p. 365.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ob Terquem die hier in Aussicht gestellte Experimentaluntersuchung der Sirenenklänge ausgeführt hat, ist mir unbekannt; trotz aller Bemühungen habe ich in den mir zu Gebote stehenden litterarischen Quellen nicht die geringste Notiz darüber auffinden können.

Eine bequeme Methode zur **experimentellen Analyse der Sirenenklänge** hat Rudolf Koenig in seinen manometrischen Flammen[1]) gegeben, indem hierbei statt des Ohres das Auge die Zusammensetzung eines Klanges beurteilt. Die Einrichtung der manometrischen Kapseln und die Beobachtungsmethode der Flammenbilder in einem um eine vertikale Achse rotierenden Spiegel wird als bekannt vorausgesetzt. Unter Anwendung von Helmholtzschen Resonatoren hat nun Koenig einen zur Analyse beliebiger Klänge, also auch der Sirenenklänge geeigneten Apparat konstruiert, dessen Beschreibung hier kurz angegeben werden soll[2]).

Die benutzten Resonatoren bestehen aus einem Cylinder etwa von der Länge des Durchmessers, welcher von zwei in einander geschobenen Röhren gebildet wird. Das äufsere dieser Röhrenstücke läuft an dem einen Ende in eine Halbkugel aus, in welcher die Röhre für das Ohr ausgetrieben ist, wie bei den Kugelresonatoren. Das entgegengesetzte Ende der inneren Röhre ist durch eine Platte verschlossen, in deren Mitte sich die Öffnung für die Kommunikation der eingeschlossenen Luftmasse mit der äufseren Luft befindet. Diese Disposition gestattet, durch Ausziehen der Röhre die Luftmasse des Resonators zu vergröfsern und seinen Eigenton etwa um eine Terz herabzustimmen. Um den Resonatoren die erforderliche genaue Stimmung zu geben, stimmt man eine Saite des Sonometers auf den Grundton des zu untersuchenden Klanges und bringt auf derselben die harmonischen Töne einen nach dem andern hervor. Bei jedem setzt man dann den betreffenden Resonator, statt mit der manometrischen Kapsel, mit dem Ohre in Verbindung, indem man seinen Kautschukschlauch in dasselbe einführt; bei mehr oder weniger weitem Ausziehen der Röhre ist es dann leicht, die Stellung für die stärkste Resonanz zu finden. Von diesen 14 Resonatoren ist jeder mit einer manometrischen Flamme verbunden; diese 14 Flammen sind über einander in zwei schrägen parallelen Linien angebracht und lassen in dem um eine in gleicher Richtung befestigte Achse drehenden Spiegel 14 parallele Lichtstreifen sehen, wenn sie in Ruhe sind, und Wellenlinien, wenn sie vibrieren. Natürlich mufs hier jede Flamme von der anderen vollständig unabhängig

---

[1]) Der erste Apparat, bei welchem diese Methode angewendet wurde, wurde schon 1862 auf der Londoner Ausstellung vorgeführt (Fortsch. d. Phys. XVIII, p. 138); seit jener Zeit wurde eine ganze Reihe darauf begründeter Apparate konstruiert und zum Teil beschrieben (Pogg. Ann. CXXII, 242—245, 660; Fortsch. d. Phys. XX, p. 128—129). Eine zusammenfassende Abhandlung hat Koenig gegeben in Pogg. Ann. CXLVI (1872), p. 161—199 unter dem Titel: „Die manometrischen Flammen", welche auch in Koenig, Quelques expériences d'acoustique, „Les flammes manométriques" p. 49—83, veröffentlicht worden ist. (Fortsch. d. Phys. XXVIII, p. 220—225.) Eine Beschreibung und Abbildung sämtlicher hierauf bezüglichen Apparate finden sich in der Abhandlung von 1872 und in dem Catalogue des appareils d'acoustique construits par Rud. Koenig (Paris, 1889) p. 84—88. — Eine orientierende Übersicht über Flammenanalyse giebt Melde in Winkelmanns Handbuch der Physik, I, p. 839—851.

[2]) Catalogue p. 76—87, Fig. 116; Expér. d'acoust. p. 70—74, Fig. 31, 32; Pogg. Ann. CXLVI, p. 185—192, Fig. 12.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

sein, jede Flamme darf nur dann vibrieren, wenn der zu ihr gehörige Resonator durch einen Unisonoton erregt wird, und die nicht in der Resonatorreihe enthaltenen Töne müssen auf keine der Flammen irgend welche Wirkung äufsern. Will man nun einen Sirenenklang analysieren, so läfst man denjenigen Klang ertönen, dessen Grundton der Eigenton des gröfsten Resonators ist; die gezähnt erscheinenden Lichtstreifen zeigen dann an, von welchen harmonischen Obertönen der Grundton des Klanges begleitet ist, wie auch, mit welcher relativen Intensität diese Töne in dem Klange vorhanden sind.

Eine interessante Erscheinung läfst sich mittelst Flammenanalyse durch die Sirene konstatieren. Obertöne, welche sich in dem Klange eines tiefen Tones vorfinden, geraten für einen höheren Ton dann oft in eine so hohe Region, dafs sie nicht mehr, weder auf die Membran einer manometrischen Kapsel, noch auf das Ohr eine Wirkung ausüben können. Rud. Koenig hat dieses allmähliche Verschwinden der höheren Obertöne aus musikalischen Klängen mit zunehmender Erhöhung des Grundtones mittelst der Sirene nachgewiesen[1]). Zu diesem Zwecke fängt man die Impulse über der freien Löcherscheibe vermittelst einer bogenförmigen Spalte auf, die sich in eine kleine Röhre erweitert und genau über einem Teile der Löcher angebracht ist, und läfst dieselben auf eine manometrische Flamme wirken, während man durch immer mehr verstärkten Luftdruck die Scheibe von der kleinsten bis zu ihrer gröfsten Rotationsgeschwindigkeit treibt. Es erscheinen dann bei den tiefsten Tönen im Spiegel sehr grofse und verschwommene Flammengruppen, welche sich gegen die Mitte der grofsen Oktave schärfer gezeichnet zeigen und lange geschlitzte Wellen erst mit fünf, dann gegen c und d hin mit vier Flammengipfeln sehen lassen. Bis g und a sinkt die Zahl dieser Gipfel auf drei, bis $\bar{c}$ und $\bar{d}$ auf zwei, und bei $\bar{a}$ verschwindet die letzte Spur der Oktave aus dem Klange, worauf dann bei allen noch höheren Tönen nur noch einfache Flammenbilder sichtbar werden.

Sehr wesentlich ändert sich das Resultat dieses Experimentes, wenn über der Löcherscheibe ein Resonanzkasten befestigt ist. Der Eigenton dieses letzteren verstärkt dann erst höhere harmonische Töne des Klanges, darauf die tieferen und zuletzt den Grundton selbst, was zur Folge hat, dafs die Flammengruppen nicht ganz allmählich und regelmäfsig mit der Höhe des Tones einfacher werden, sondern ziemlich plötzlich auftretende und wieder verschwindende Umwandlungen zeigen. So zeichnete der Klang einer Sirene, über deren Löcherscheibe ein Resonanzkasten mit dem Eigenton $\bar{\bar{c}}$ angebracht war, bei langsamer Drehung der Scheibe erst einige komplizierte, aber verschwommene Bilder, aber bei der Tonhöhe c angelangt, deutlich eine grofse dem Grundtone zukommende Flamme mit vier Flammengipfeln, welche vom vierten Partialton, der mit dem Eigenton des Resonanzkastens zusammenfiel, herrührten. Bei noch schnellerer Drehung der Scheibe vereinfachte sich dieses Flammenbild bis f zu einer ganz einfachen Flamme, so dafs der Teilton 3 in diesem Sirenenklange f vollständig fehlen mufste. Nachdem die Tonhöhe von f kaum überschritten war, erschien zwischen je zwei grofsen Flammen eine erst ganz kleine, aber vollständig scharf gezeichnete Flamme, die dann schnell an Gröfse zunahm und gegen $\bar{c}$ fast die Höhe der Hauptflamme erreichte, wo sich also wieder die Wirkung

---

[1]) Pogg. Ann. CXLVI, p. 174—175; Expér. d'acoust. p. 59—61.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

des Resonanzkastens als zweiter Partialton bethätigte. Über $\bar{c}$ hinaus legte sich die etwas kleinere Flamme dann immer mehr an die gröfsere an, bis sie bei $\bar{a}$ in dieser vollständig verschwand, worauf nur noch einfache Flammenreihen erschienen. Um bei diesen Experimenten den Klang recht stark auf die Kapsel wirken zu lassen, hatte Koenig den Resonanzkasten mit einer Röhre versehen und seinen inneren Raum direkt mit dem kleinen Flammenapparate in Verbindung gesetzt. —

Dafs zur Analyse der Sirenenklänge auch die Helmholtzschen Resonatoren benutzt werden können, ist selbstverständlich; Resultate über darauf bezügliche Versuchsreihen habe ich in der mir zugänglichen Litteratur nirgends gefunden.

In den bis jetzt veröffentlichten vier Teilen der vorliegenden Monographie über die Sirenen dürfte wohl das Wichtigste von dem Inhalte der über die Zahnrad- und Lochsirenen erschienenen Originalarbeiten mitgeteilt worden sein. In der noch ausstehenden Schlufsabhandlung sollen die Wellen- und die elektrischen Sirenen, sowie einige besondere Formen der Besprechung unterzogen, sowie etwaige Verbesserungen und Nachträge hinzugefügt werden.

Druck von W. Pormetter in Berlin.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fig. 1.

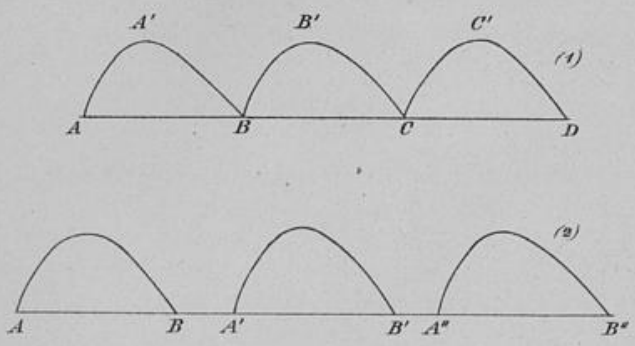


Fig. 2.

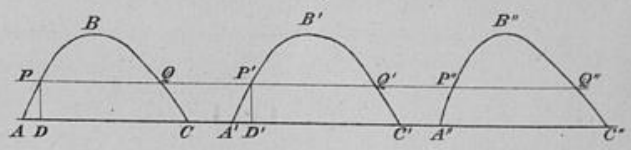


Fig. 3.

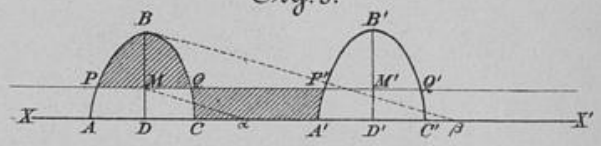


Fig. 4.

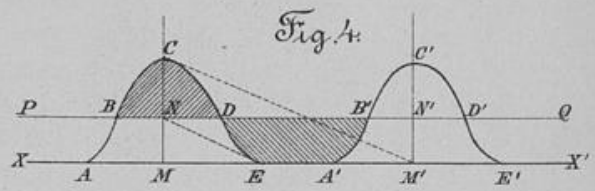


Fig. 5.

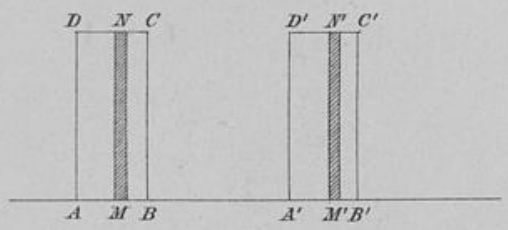


Fig. 6.

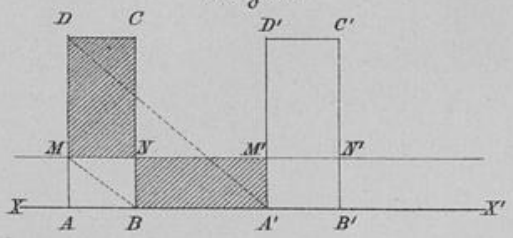


Fig. 7.

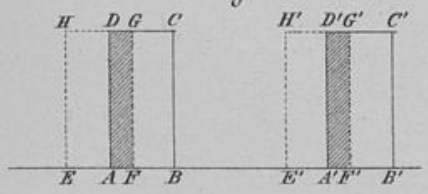


Fig. 8.

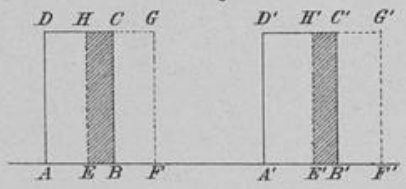


Fig. 9.

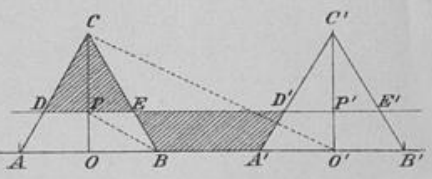


Fig. 10.

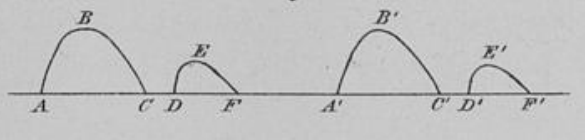


Fig. 11.

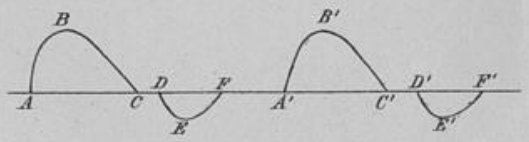


Fig. 12.

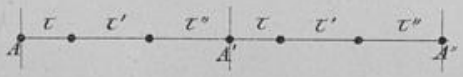
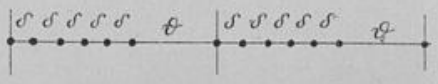


Fig. 13.



Lith. Anst. v. F. Kayser in Berlin.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Luisenstädt. Real-Gymnasium. 1900.

Fig.

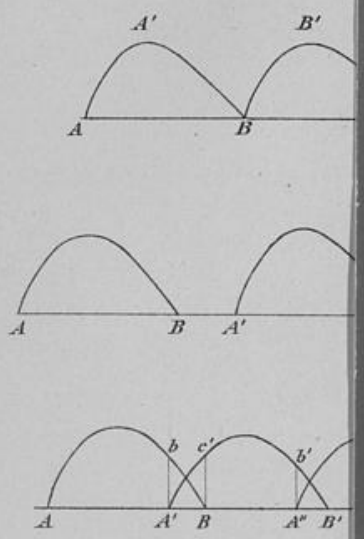


Fig. 2.

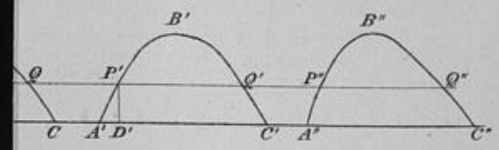


Fig. 3.

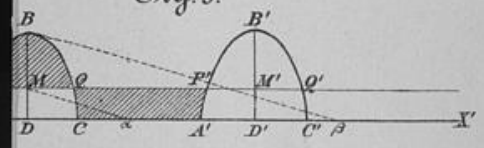


Fig. 4.

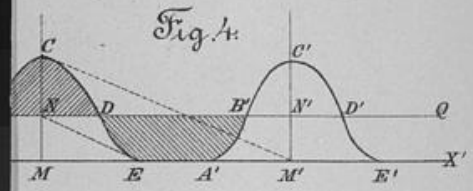


Fig.

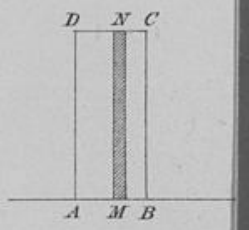


Fig. 6.

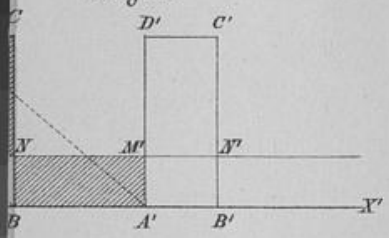


Fig. 7.

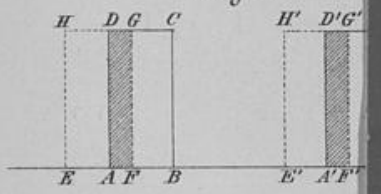


Fig. 9.

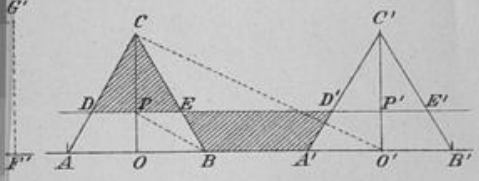


Fig.

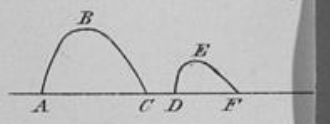


Fig. 11.

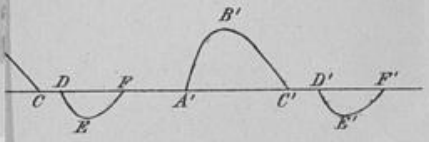


Fig.

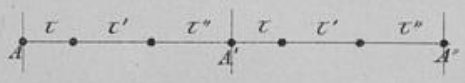
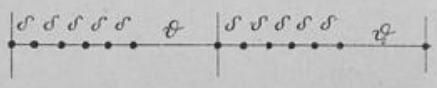


Fig. 13.



Lith. Anst. v. F. Kayser in Berlin.

B.I.G.
Grauskala #13
C Y M
A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf