Im Lehrplanentwurf für die Oberrealschulen ist in Stereometrie für Klasse VII neben anderem die Behandlung der halbregelmässigen Vielflache vorgeschlagen. Es mag daher näher darauf eingegangen werden.

Unsere Aufgabe soll sein

1) die Zusammenstellung der metrischen Beziehungen der halbregelmässigen gleicheckigen Vielflache (Archimedische),
2) die Berechnung der halbregelmässigen gleichflachigen Vielflache, welche den ersteren reziprok sind, hergeleitet als unbeschriebene Körper jener,
3) die Aufstellung einiger den ersteren einbeschriebenen Vielflache.

I. Halbregelmässige gleicheckige Vielflache.

§ 1. Allgemeine Eigenschaften.

1) Diese Vielflache können aus den 5 regelmässigen Vielflachen durch Entecken oder durch Entecken und Entkanten hergeleitet werden.

   Die Kante des ursprünglichen Körpers sei a.
2) Alle körperlichen Ecken sind kongruent oder symmetrisch, aber nicht gleichseitig.
3) Alle Eckpunkte liegen auf einer Kugel. Umkugelhalbmesser R.
4) Die Oberfläche besteht aus regelmässigen ebenen Vielecken, deren Inhalte seien F_3, F_4 u. s. w.
5) Alle Kanten sind gleich lang. Kante = b.
6) Alle gleichartigen Vielecke sind kongruent und werden von derselben Inkugel berührt. Es gibt soviel Inkugeln als verschiedene Vielecke (2 oder 3). Halbmesser der Inkugel ρ_3, ρ_4, je nach der Eckenzahl des berührten Vielecks.
7) Alle Kanten werden in ihrer Mitte von einer Kugel berührt; Halbmesser r.
8) Alle Keilwinkel, welche von denselben (unter sich gleichartigen oder nicht gleichartigen) Flächen gebildet werden, sind gleich. Bezeichnung z. B. w_{34} an der Kante zwischen Dreieck und Quadrat.

Berechnungen.

Die Rechnungen sind in Aufgaben eingekleidet, Andeutungen über möglichst elementare Herleitung und Proben wurden beigefügt; vgl. Brückner, Vielecke und Vielflache.

38flach und 92flach sind weggelassen. Allgemein sei noch bemerkt:

9) Da von den Flächen des ursprünglichen regelmässigen Vielflachs immer ein Teil stehen bleibt, so ergibt sich der dazu gehörige Inkugelhalbmesser unmittelbar.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

10) Aus diesem Inkugelhalbmesser lassen sich Umkugelradius und Halbmesser der kantenberührenden Kugel bestimmen; für letzteren gilt immer

$$r^2 = R^2 - \frac{b^2}{4}$$

11) Die übrigen Inkugelradien werden mit Hilfe von R bestimmt.
12) Die Oberfläche ergibt sich unmittelbar als Summe der Flächen.
13) Der Inhalt ist als Summe von Pyramideninhalten anzuschreiben.
14) Die Winkel sind zumeist aus der Figur abzulesen.

§ 2. Das Achtflach.

Herleitung aus dem reg. Vierflach durch Entecken, so dass aus dessen Dreiecksfläche ein Sechseck wird, Kombination von Tetraeder mit Gegentetraeder. $b = \frac{a}{3}$

Die Oberfläche besteht aus 4 Sechsecken und 4 Dreiecken; $0 = 7\, b^2 \sqrt{3}$
Ecken: 12 dreikantige mit den Seiten 60°, 120° u. 120°; 18 Kanten.

$R = \frac{b}{4} \sqrt{22}$

$\rho_6 = \frac{b}{4} \sqrt{6}$ (zugleich beim Vierflach) $\rho_3 = \frac{5\,b}{12} \sqrt{6}$

$r = \frac{3\,b}{4} \sqrt{2}$ (zugleich beim Vierfl.)

$J = \frac{23}{12} b^3 \sqrt{2}$ Probe: $3\,J = 4\,F_6\,\rho_6 + 4\,F_3\,\rho_3$

w_{66} = Vierflachwinkel = 70° 31′ 44″
w_{36} = Supplement des Vierflw. = 109° 28′ 16″.

Aufgaben.

1) Ein Achtflach schwimmt bis zur halben Höhe ins Wasser tauchend, so dass eine Sechsecksfläche unter u. // dem Wasserspiegel. Welches ist sein spezifisches Gewicht?

Inhalt des Achtflachs = Vierflach T mit Kante 3 b — 4 Vierfl. mit Kante b = $\frac{23}{27}$ T

Nichteingetauchter Teil = Vierfl. mit 2 b — Vierfl. mit b = $\frac{7}{27}$ T spez. Gewicht $s = \frac{16}{23}$.

2) Welchen Halbmesser muss eine Bleikugel haben, die an einer Dreiecksfläche des Achtflachs befestigt dieses im Schwimmen hält, so dass es zur halben Höhe eintaucht und die Dreiecksfläche // dem Wasserspiegel ist?

Kante des Achtflachs a, spez. Gew. s; des Bleis s, Radius x;

$$x = \frac{a}{2} \sqrt[3]{\frac{(7 - 23\,s)\sqrt{2}}{2\,\pi\,(s_1 - 1)}}$$

Es muss $s < \frac{7}{23}$ sein. $s = \frac{7}{23}$ Schwimmen ohne Kugel.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3) Aus einer Kugel vom Radius R wird das grösstmögliche Achtflach geschnitten. Wie gross der Abfall D?

$$D = \frac{4}{3} R^3 \left(\pi - \frac{46}{121} \sqrt{11}\right)$$

4) Wie gross ist der Teil der kantenberührenden Kugel des Achtflachs, der über das Sechseck, und der, welcher über das Dreieck hervorragt? Wieviel im ganzen?

Höhe der Haube über dem Sechseck $h_1 = r - \rho_6 = \frac{b}{4} \sqrt{6} (\sqrt{3} - 1)$ (auch für Vierflach); Haube $J_1 = \frac{\pi b^3}{16} \sqrt{6} (3 \sqrt{3} - 4)$

Höhe der Haube über dem Dreieck $h_2 = \frac{b}{12} \sqrt{6} (3 \sqrt{3} - 5)$

Inhalt der Haube $J_2 = \frac{\pi b^3}{432} (81 \sqrt{3} - 140) \sqrt{6}$

im ganzen: $\frac{\pi b^3}{54} (81 \sqrt{3} - 124) \sqrt{6}$

5) Wie gross ist die Oberfläche des von Achtflach und kantenberührender Kugel begrenzten Körpers?

$$O = b^2 \left\{ 7 \sqrt{3} + \pi \left(\frac{44}{3} - 8 \sqrt{3}\right) \right\}$$

Haubenhöhen wie in 4.

6) Welches sind die Winkel eines Dreikants, dessen Seiten ein reg. Dreieck u. 2 reg. Sechsecke sind?

Nach dem Pythagoräer der sphärischen Trigonometrie wird

$$\cos w_{36} = -\frac{1}{3} \qquad \cos w_{66} = \frac{1}{3}$$

§ 3. Das Vierzehnflach I.

Herleitung aus dem Würfel durch Entecken, so dass aus dem Quadrat ein Achteck entsteht; Kombination von Würfel mit Oktaeder. $b = a (\sqrt{2} - 1)$

Die Oberfläche besteht aus 6 Achtecken u. 8 Dreiecken

$$O = b^2 (12 + 12 \sqrt{2} + 2 \sqrt{3})$$

Ecken: 24 dreikantige mit den Seiten 90°, 135° u. 135°; 36 Kanten.

$$R = \frac{b}{2} \sqrt{7 + 4 \sqrt{2}}$$

$$\rho_8 = \frac{b}{2} (\sqrt{2} + 1) \text{ (Würfel)} \qquad \rho_3 = \frac{b}{6} (3 + 2 \sqrt{2}) \sqrt{3}$$

$$r = \frac{b}{2} 2 + \sqrt{2}) \text{ (Würfel)}$$

$$J = \frac{7}{3} b^3 (3 + 2 \sqrt{2}) \qquad \text{Probe: } 3 J = 6 F_8 \rho_8 + 8 F_6 \rho_6$$

w_{88} = Würfelwinkel = 90°

w_{38} = Supplem. des $\frac{1}{2}$ Oktaederwinkels = 125° 15′ 52″.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aufgaben.

1) Welches spezifische Gewicht hat das 14flach, das so im Wasser schwimmt, dass 4 der Dreiecksflächen ganz eintauchen?

Inhalt des 14flachs = Würfel — 8 Pyramiden, die zusammen ein Oktaeder mit mit Kante b

Eingetauchter Teil = Quader mit Höhe $\frac{b}{2}\sqrt{2}$ über dem Würfelquadrat — 4 Pyramiden. $= \frac{b^3}{3}(4 + 3\sqrt{2})\sqrt{2}$

spez. G. $s = \frac{2}{7}$

2) Wie gross ist das spez. Gew., wenn die 4 Dreiecksflächen gerade herausschauen?

$s = \frac{5}{7}$;

3) Wie verhalten sich die 3 Teile des 14flachs, die man durch den Schnitt desselben mit 2 Parallelebenen erhält, welche je durch 4 Ecken gehen und zu 2 Achtecksflächen // sind?

$J_1 : J_2 : J_3 = 2 : 3 : 2.$ $J_1 = J_3 =$ eingetauchter Teil in 1.

4) Wie § 2, 3.

$$D = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{56 R^3}{51}(5 + 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{7 - 4\sqrt{2}}{17}}$$

5) Entsprechend Aufg. 4. § 2.

Höhe der Haube über dem Achteck $h_1 = \frac{b}{2}$ (Würfel)

Inhalt $J_1 = \frac{\pi b^3}{24}(5 + 3\sqrt{2})$

Höhe über Dreieck $h_2 = \frac{b}{6}(\sqrt{3} - \sqrt{2})(2\sqrt{3} - 3)$

Inhalt $J_2 = \frac{\pi b^3}{216}(360 - 207\sqrt{3} - 146\sqrt{6} + 252\sqrt{2})$

im ganzen: $\frac{\pi b^3}{108}(1575 - 828\sqrt{3} - 584\sqrt{6} + 1089\sqrt{2})$

6) Wie § 2. Aufg. 5.

$$O = b^2(12 + 12\sqrt{2} + \sqrt{3}) - \frac{\pi b^2}{6}(149 + 48\sqrt{2} - 40\sqrt{3} - 28\sqrt{6})$$

7) Winkel eines Dreikants, das durch das Zusammenstossen von 2 Achtecken und einem Dreieck gebildet wird?

$\cos w_{88} = 0$, $\cos w_{38} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

§ 4. Das Vierzehnflach II.

Herleitung aus dem Oktaeder durch Entecken, so dass aus dem Dreieck ein Sechseck wird. Kombination von Oktaeder mit Würfel. $b = \frac{a}{3}$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Oberfläche besteht aus 8 Sechsecken und 6 Quadraten.

$$O = 6\,b^2\,(1 + 2\sqrt{3})$$

Ecken: 24 dreikantige mit den Seiten 90°, 120° u. 120°; 36 Kanten.

$$R = \frac{b}{2}\sqrt{10}$$

$\rho_6 = \sqrt{6}$ (Oktaeder) $\rho_4 = b\sqrt{2}$

$$r = \frac{3\,b}{2} \text{ (Oktaeder)}$$

$J = 8\,b^3\sqrt{2}$ Probe: $3\,J = 8\,F_6\,\rho_6 + 6\,F_4\,\rho_4$

w_{66} = Oktaederwinkel = 109° 28′ 16″

w_{46} = Supplem. des $\frac{1}{2}$ Oktw. = 125° 15′ 52″ (w_{38} § 3.)

Aufgaben.

1) Das 14flach wird durch eine Ebene, die // einer Sechseckfläche ist und durch 3 Quadratseiten hindurchgeht, geschnitten. Wie verhält sich der kleinere abgeschnittene Teil zum ganzen?

Inhalt des 14flachs = Inhalt des Oktaeders (Kante 3 b) — 3 Okt. mit b;

abgeschnittener Teil zerlegt in 6seitiges Prisma mit Höhe $\frac{b}{3}\sqrt{6}$,

3 dreiseitige Prismen (Querschnitt = rechtw. Dreieck mit $\frac{b}{3}\sqrt{6}$ u. $\frac{b}{6}\sqrt{3}$),

3 „ „ („ „ „ „ $\frac{b}{3}\sqrt{6}$ u. $\frac{b}{3}\sqrt{3}$)

und 6 Pyramiden mit Höhe $\frac{b}{3}\sqrt{6}$

$$J_1 = \frac{25}{12}\,b^3\sqrt{2} \quad \text{daher}$$

$$J_1 : J = 25 : 96 \quad \text{(ist auch spez. Gew.)}$$

2) Wie Aufg. 3.

$$D = R^3\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{32}{25}\sqrt{5}\right)$$

3) Entsprechend Aufg. 4.

Höhe über Sechseck $h_1 = \frac{b}{2}(3 - \sqrt{6})$ (auch Oktaeder)

Haubeninhalt $J_1 = \frac{\pi}{8}\,b^3\,(18 - 7\sqrt{6})$

Höhe über Quadrat $h_2 = \frac{b}{2}(3 - 2\sqrt{2})$

$$J_2 = \frac{\pi\,b^3}{12}\,(27 - 19\sqrt{2})$$

im ganzen: $\frac{\pi\,b^3}{2}\,(63 - 14\sqrt{6} - 19\sqrt{2})$

4) Wie Aufg. 5.

$$O = 6\,b^2\,(2\sqrt{3} + 1) - 3\,\pi\,b^2\left(\frac{29}{2} - 7\sqrt{6} - 3\sqrt{2}\right)$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

5) Ein Quadrat und 2 reg. Sechsecke stossen mit den in einer Ecke zusammenlaufenden Kanten zusammen. Welches sind die Winkel des Dreikants?

$$\cos w_{66} = -\frac{1}{3} \qquad \cos_1 w_{46} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

§ 5. Das Vierzehnflach III.

Herleitung aus dem Würfel durch Entecken, so dass die Würfelkante ganz wegfällt, (Oktaeder ähnlich); Kombination von Würfel mit Oktaeder im Gleichgewicht;

$$b = \frac{a}{2}\sqrt{2}, \quad \text{für Oktaeder } b = \frac{a^1}{2}$$

Oberfläche; 6 Quadrate und 8 Dreiecke; $O = 2b^2(3 + \sqrt{3})$

Ecken: 12 vierkantige mit Seiten 90°, 60°, 90° u. 60°; 24 Kanten.

$R = b$

$\rho_4 = \frac{b}{2}\sqrt{2}$ (Würfel) $\qquad \rho_3 = \frac{b}{3}\sqrt{6}$ (Oktaeder)

$r = \frac{b}{2}\sqrt{3}$

$J = \frac{5b^3}{3}\sqrt{2} \quad ; \quad 3J = 6 F_4 \rho_4 + 8 F_3 \rho_3$

$w_{34} = w_{46}$ des § 4 $= 125^0\ 15'\ 52''$

Aufgaben.

1) Berechne die Hälfte des 14flachs nach der Prismatoidformel!

Grundflächen 2 Quadrate mit Seiten b u. $b\sqrt{2}$; Höhe $\frac{b}{2}\sqrt{2}$

Mittelschnitt = Achteck = Quadrat — 4 Dreiecke $= \frac{7b^2}{4}$

2) Welches spec. Gew. hat das 14flach, das bis zu $\frac{3}{4}$ der Höhe im Wasser einsinkt, so dass 2 Quadrate // dem Wasserspiegel?

Eingetauchter Teil $= \frac{23b^3}{48}\sqrt{2}$; $s = \frac{23}{80}$

3) Wie Aufg. 3.

$$D = \frac{R^3}{3}(4\pi - 5\sqrt{2})$$

4) Entsprechend Aufg. 4.

Höhe über dem Dreieck $h_1 = \frac{b}{6}(3\sqrt{3} - 2\sqrt{6})$

$$J_1 = \frac{\pi b^3}{108}(27\sqrt{3} - 19\sqrt{6})$$

Höhe über dem Quadrat $h_2 = \frac{b}{2}(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

$$J_2 = \frac{\pi b^3}{12}(3\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

im ganzen: $\frac{5\pi b^3}{27}(27\sqrt{3} - 13\sqrt{2})$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

5) Inhalt und Oberfläche des vom 14flach und seiner kantenberührenden Kugel umgrenzten Körpers.

$$J = \frac{5}{6} b^3 \sqrt{2} + \frac{5 \pi b^3}{27} (27 \sqrt{3} - 13 \sqrt{2})$$

$$O = 2 b^3 (3 + \sqrt{3}) + \pi b^2 \left(\frac{271}{6} - 8 \sqrt{2} - 3 \sqrt{6}\right)$$

6) Wie verhält sich der Teil des Körpers zwischen der Umkugel und der kleineren Inkugel zu der von diesen gebildeten Kugelschale?

$$\text{Teil} = \frac{b^3}{3} (5 - \pi) \sqrt{2} \qquad \text{Schale} = \frac{\pi b^3}{3} (4 - \sqrt{2})$$

Verhältnis $(5 - \pi) : (2 \sqrt{2} - 1) \pi$

§ 6. Das Sechsundzwanzigflach I.

Herleitung aus dem Würfel durch Entecken und Entkanten, so dass vom Quadrat noch ein Achteck bleibt; Kombination von Würfel mit Oktaeder und Rhombendodekaeder;

$$b = \frac{a}{7} (2 \sqrt{2} - 1)$$

Oberfläche: 6 Achtecke, 8 Sechsecke und 12 Quadrate

$$O = 12 b^2 (2 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$$

Ecken: 48 dreikantige mit den Seiten 135, 120 u. 90°; 72 Kanten.

$$R = \frac{b}{2} \sqrt{13 + 6 \sqrt{2}}$$

$$\rho_8 = \frac{b}{2} (2 \sqrt{2} + 1) \text{ (Würfel)}, \rho_4 = \frac{b}{2} (3 + \sqrt{2}); \rho_6 = \frac{b}{2} \sqrt{3} (\sqrt{2} + 1)$$

$$r = \frac{b}{2} \sqrt{6 (2 + \sqrt{2})}$$

$$J = 2 b^3 (11 + 7 \sqrt{2}); \; 3 J = 6 F_8 \rho_8 + 8 F_6 \rho_6 + 12 F_4 \rho_4$$

$$w_{48} = 135^0, \; w_{68} = 125^0 \; 15' \; 52'' \text{ (vgl. } w_{34} \text{ § 5)}$$

$$w_{46} = 90 + \frac{1}{2} \text{ Oktwinkel} = 144^0 \; 44' \; 8''.$$

Aufgaben.

1) Welcher Teil wird vom 26flach durch eine Ebene weggeschnitten, die 4 Quadrate abschneidet?

Das 26flach zerlegt in ein 8seitiges Prisma mit $G = a^2 - b^2$, Höhe $b + b \sqrt{2}$, 2 achtseitige Prismen mit $G = b^2 (2 + 2 \sqrt{2})$ und Höhe $\frac{b}{2} \sqrt{2}$ und 8 3seitige Prismen (4 derselben $= b^3$), ähnlich

der abgeschnittene Teil $J_1 = \frac{b^3}{6} (18 + 7 \sqrt{2})$, daher

$$J_1 : J = (100 - 59 \sqrt{2}) : 276.$$

2) Wie gross ist der abgeschnittene Teil, wenn 4 Sechsecke durch die Ebene weggeschnitten werden?

$$J_2 = b^3 (7 + 5 \sqrt{2}); \quad J_2 : J = (7 + 6 \sqrt{2}) : 46.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3) Wie Aufg. 3.

$$D = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{16 R^3}{97}(59 + 25\sqrt{2})\sqrt{\frac{13 - 6\sqrt{2}}{97}}$$

5) Entsprechend Aufg. 4

Haubenhöhe über dem Quadrat $h_1 = \frac{b}{2}\sqrt{12 + 6\sqrt{2}} - \frac{b}{2}(3 + \sqrt{2})$

$$J_1 = \frac{\pi b^3}{3}\left\{(3 + 3\sqrt{2})\sqrt{6 + 3\sqrt{2}} - \frac{99 + 61\sqrt{2}}{8}\right\}$$

Haubeninhalt über dem Sechseck

$$J_2 = \pi b^3\left\{(1 + \sqrt{2})\sqrt{6 + 3\sqrt{2}} - \frac{(17 + 13\sqrt{2})\sqrt{3}}{8}\right\}$$

Haube über dem Achteck

$$J_3 = \pi b^3\left\{(1 + \sqrt{2})\sqrt{6 + 3\sqrt{2}} - \frac{55 + 68\sqrt{2}}{24}\right\}$$

6) Oberfläche des vom 26flach und seiner kantenberührenden Kugel gebildeten Körpers.

$$O = 12b^2(2 + \sqrt{2} + \sqrt{3}) +$$

$$\pi b^2\left\{\frac{283}{2} + 75\sqrt{2} - (21\sqrt{3} + 12\sqrt{6} + 12\sqrt{2} + 3)\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}\right\}$$

7) Winkel eines Dreikants, dessen Seiten 90°, 120° u. 135°.

$$\cos w_{48} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}; \quad \cos w_{68} = -\frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \cos w_{46} = -\sqrt{\frac{2}{3}}$$

§ 7. Das Sechsundzwanzigflach II.

Herleitung aus dem Würfel durch Entecken und Entkanten, so dass vom Quadrat noch ein Quadrat bleibt, Komb. von Würfel mit Oktaeder und Rhombendod. $b = a(\sqrt{2} - 1)$

Oberfläche: 18 Quadrate und 8 Dreiecke; $O = 2b^2(9 + \sqrt{3})$

Ecken: 24 vierkantige mit den Seiten 90°, 90°, 90° u. 60°; 48 Kanten.

$$R = \frac{b}{2}\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}$$

$$\rho_4 = \frac{b}{2}(1 + \sqrt{2}) \text{ (Würfel)}; \quad \rho_3 = \frac{b}{6}(3\sqrt{3} + \sqrt{6})$$

$$r = \frac{b}{2}\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$$

$$J = \frac{2b^3}{3}(6 + 5\sqrt{2}); \quad 3J = 18 F_4 \rho_4 + 8 F_3 \rho_3$$

$w_{44} = 135°$ (= w_{48}, § 6) $\quad w_{34} = 144° 44' 8''$ (= w_{46} § 6.)

Aufgaben.

1) Welches spez. Gewicht hat das 26flach, das im Wasser schwimmend gerade 4 Dreiecke eintaucht?

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

26flach zerlegt in 8seitiges Prisma, Höhe b, 2 quadr. Prismen mit Höhe $\frac{b}{2}\sqrt{2}$; 8 dreiseit. Pr. (zus. = 2 Würfel mit b) u. 8 dreiseit. Pyram. (zus. = Okt. mit b) der eingetauchte Teil ähnlich zerlegt $= \frac{b^3}{3}(3 + 2\sqrt{2})$, daher

$$s = \frac{2 + 3\sqrt{2}}{8}$$

2) Spez. Gewicht, wenn 4 Dreiecke gerade noch herausschauen?

$$s = \frac{26 - 3\sqrt{2}}{8}$$

3) Wie Aufg. 3.

$$D = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{16}{51} R^3 (10 + 13\sqrt{2}) \sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{2}}{17}}$$

4) Entsprechend Aufg. 4.

Ueber dem Dreieck $J_1 = \frac{\pi b^3}{216}\left\{72(1+\sqrt{2})\sqrt{2+\sqrt{2}} - (99 + 61\sqrt{2})\sqrt{3}\right\}$

Ueber dem Quadrat $J_2 = \frac{\pi b^3}{24}\left\{8(1+\sqrt{2})\sqrt{2+\sqrt{2}} - 17 - 13\sqrt{2}\right\}$

5) Oberfläche wie früher.

$$O = 2b^2(9 + \sqrt{3}) + \frac{\pi b^2}{6}\left\{281 + 156\sqrt{2} - (54 + 54\sqrt{2} + 24\sqrt{3} + 8\sqrt{6})\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}\right\}$$

§ 8. Das Zweiunddreissigflach I.

Herleitung durch Entecken des Dodekaeders, so dass aus dem Fünfeck ein Zehneck wird; $b = \frac{a}{\sqrt{5}}$

Oberfläche: 12 Zehnecke und 20 Dreiecke; $O = 5b^2(\sqrt{3} + 6\sqrt{5 + 2\sqrt{5}})$

Ecken: 60 dreikantige mit den Seiten 144°, 144° u. 60°; 90 Kanten.

$$R = \frac{b}{4}\sqrt{74 + 30\sqrt{5}}$$

$$\rho_{10} = \frac{b}{4}\sqrt{50 + 22\sqrt{5}} \text{ (Dodekaeder)} \quad \rho_3 = \frac{b}{12}(9 + 5\sqrt{5})\sqrt{3}$$

$$r = \frac{b}{4}(5 + 3\sqrt{5}) \text{ (Dodek.)}$$

$$J = \frac{5b^3}{12}(99 + 47\sqrt{5}); \quad 3J = 12 F_{10}\rho_{10} + 20 F_3 \rho_3$$

$w_{1010} = 116^0\ 33'\ 54''$ (Dodek.)

$w_{310} = 142^0\ 37'\ 23''$ (Supplement des Winkels zwischen R u. ρ des Dodek.)

Aufgaben.

1) Wie verhält sich der Inhalt des 32flachs zum Inhalt des ursprünglichen Dodekaeders?

Vom Dodekaeder werden 20 Pyramiden abgezogen, zus. $\frac{5}{6}b^3(3 - \sqrt{5})$

$$J : D = 311 : (45 + 120\sqrt{5})$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2) Wie gross ist der Teil des 32flachs, der durch eine Ebene abgetrennt wird, welche 5 Dreiecke abschneidet?

Der abgeschnittene Teil = Pyramidenrumpf, von dem 5 Eckpyramiden weggenommen werden; Kanten seiner Grundflächen $b\sqrt{5}$ und $\frac{b}{2}(3+\sqrt{5})$,

Höhe der Ergänzungspyramide $\frac{b}{2}\sqrt{110+38\sqrt{5}}$

$$J_1 = \frac{b^3}{24}\left\{5\sqrt{5} - 15 + (9\sqrt{5} - 5)\sqrt{186 + 82\sqrt{5}}\right\}$$

3) Wie Aufg. 3.

$$D = \frac{4\pi}{3}R^3 - \frac{5R^3(69 + 227\sqrt{5})}{183}\sqrt{\frac{74 - 30\sqrt{5}}{61}}$$

4) Entsprechend Aufg. 4.

Haube über dem Zehneck (wie Dodek.)

$$J_1 = \frac{\pi b^3}{48}\left\{980 + 440\sqrt{5} - (100 + 43\sqrt{5})\sqrt{50 + 22\sqrt{5}}\right\}$$

Haube über dem Dreieck

$$J_2 = \frac{\pi b^3}{432}\left\{4600 + 1620\sqrt{5} - 2079\sqrt{3} - 935\sqrt{15}\right\}$$

5) Welches Stück schneidet eine Ebene ab, welche // einer Zehnecksfläche durch die Mittelpunkte der 5 anstossenden Zehnecksflächen geht?

$$J_1 = \frac{b^3}{24}\left\{5\sqrt{5} - 15 + (15 + 16\sqrt{5})\sqrt{186 - 82\sqrt{5}}\right\} \quad \text{(vgl. 2.)}$$

6) Winkel eines gleichschenkligen sphär. Dreiecks, dessen Schenkel 144° und dessen Grundlinie 60°!

$$\cos w_{10\,10} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad ; \quad \cos w_{3\,10} = -\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}$$

§ 9. Das Zweiunddreissigflach II.

Herleitung aus dem Ikosaeder durch Entecken, dass aus dem Dreieck ein Sechseck wird; $b = \frac{a}{3}$

Oberfläche: 20 Sechsecke, 12 Fünfecke, $O = 3b^2(10\sqrt{3} + \sqrt{25 + 10\sqrt{5}})$

Ecken: 60 dreikantige mit den Seiten 120°, 120° und 108°; 90 Kanten.

$$R = \frac{b}{4}\sqrt{58 + 18\sqrt{5}}$$

$$\rho_6 = \frac{b}{4}(3 + \sqrt{5})\sqrt{3} \text{ (Ikos.)}; \quad \rho_5 = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{125 + 41\sqrt{5}}{10}}$$

$$r = \frac{3}{4}b(1 + \sqrt{5}) \text{ (Ikos.)}$$

$$J = \frac{b^3}{4}(125 + 43\sqrt{5}); \quad 3J = 20 \cdot F_6\,\rho_6 + 12\,F_5 \cdot \rho_5$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$w_{66} = 138^0\ 11'\ 23''$ (Ikos.)
$w_{56} = w_{310}$ (§ 8) $= 142^0\ 37'\ 23''$.

Aufgaben.

1) Welches ist das spez. Gewicht des 32flachs, das so schwimmt, dass 5 Sechsecke eintauchen?

Der eingetauchte Teil ist ein Pyramidenrumpf, dessen Inhalt

$$J_1 = \frac{7\,b^3}{24}\,(5 + \sqrt{5})$$

$$s = \frac{7\,(41 - 9\sqrt{5})}{3828}$$

2) Wie Aufg. 3.

$$D = \frac{4}{3}\,\pi\,R^3 - \frac{R^3}{109}\,(845 + 61\sqrt{5})\sqrt{\frac{58 - 18\sqrt{5}}{109}}$$

3) Entsprechend Aufg. 4.

Haube über dem Fünfeck

$$J_1 = \frac{\pi\,b^3}{120}\left\{590 + 270\sqrt{5} - (140 + 47\sqrt{5})\sqrt{\frac{125 + 41\sqrt{5}}{10}}\right\}$$

Höhe der Haube über dem Sechseck

$$h_2 = \frac{b}{4}\,(\sqrt{5} - \sqrt{3})\,(3 - \sqrt{3})$$

Haubeninhalt $J_2 = \frac{\pi\,b^3}{16}\,(72 + 36\sqrt{5} - 45\sqrt{3} - 19\sqrt{15})$

4) Winkel eines gleichschenkligen sphär. Dreiecks, dessen Grundlinie 108^0 und dessen Schenkel 120^0 betragen.

$$\cos w_{66} = -\frac{\sqrt{5}}{3}; \quad \cos w_{56} = -\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}$$

§ 10. Das Zweiunddreissigflach III.

Herleitung aus dem Ikosaeder durch Entecken bis zur Mitte der Kante oder aus dem Dodekaeder, dabei ist $b = \frac{a}{2}$ oder $b = \frac{a^1}{4}\,(1 + \sqrt{5})$

Oberfläche: 20 Dreiecke und 12 Fünfecke; $O = b^2\,(5\sqrt{3} + 3\sqrt{25 + 10\sqrt{5}})$
Ecken: 30 vierkantige mit Seiten 60^0, 105^0, 60^0 und 105^0; 60 Kanten.

$$R = \frac{b}{2}\,(1 + \sqrt{5})$$

$$\rho_3 = \frac{b}{2}\,\frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{3}} \text{ (Ikos.)} \qquad \rho_5 = \frac{b}{5}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \text{ (Dodek.)}$$

$$r = \frac{b}{2}\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$$

$$J = \frac{b^3}{6}\,(45 + 17\sqrt{5}); \quad 3\,J = 20\,\rho_3\,F_3 + 12\,F_5\,\rho_5$$

$$w_{35} = w_{310} \text{ (§ 8)} = 142^0\ 37'\ 23''.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aufgaben.

1) Wie verhält sich der Inhalt des 32flachs zu dem des ursprünglichen Ikosaeders? wie zum Dodekaeder?

Vom Ikosaeder J_1 werden 12 fünfs. Pyr. mit der Höhe $\frac{b}{10}\sqrt{50 - 10\sqrt{5}}$ abgeschnitten.

$$J : J_1 = 3\,(10 + \sqrt{5}) : 40.$$

Dodekaederinhalt sei J_2

$$J : J_2 = (7 + \sqrt{5}) : 12.$$

2) Wie gross ist der Teil, welcher durch eine Ebene abgeschnitten wird, die // der Fünfecksfläche ist und 5 Dreiecke wegschneidet?

$$J = \frac{b^3}{12}\left\{(35 - 13\sqrt{5})\sqrt{31} - \frac{25}{2} - \frac{5}{2}\sqrt{5}\right\}$$

3) Wie Aufg. 3.

$$D = \frac{R^3}{6}\left\{8\,\pi - 11\sqrt{5} + 5\right\}$$

4) Entsprechend Aufg. 4.

Haube über dem Fünfeck $h_1 = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}}$

$$J_1 = \frac{\pi\, b^3}{60}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\,;$$

über dem Dreieck $J_2 = \frac{\pi\, b^3}{36}\left(\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} - \frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right)$

5) Durch das 32flach lassen sich 6 Ebenen legen, welche den Körper nach von Kanten gebildeten regelmässigen Zehnecken schneiden.

Beweis. Man kann das Ikosaeder durch 2 zu einem Durchmesser senkrechte Ebenen in 2 fünfseitige Pyramiden und ein Prismatoid zerlegen. Zeichnet man den Mittelschnitt des Prismatoids, so ist dieser ein Zehneck; dessen Ecken die Mitten der Seitenkanten des Prismatoids, also Ecken des 32flachs sind, und dessen Seiten halb so gross als die Ikosaederkanten sind. Der Schnitt ist somit ein Zehneck mit gleichlangen Seiten. Die kantenberührende Kugel des Ikosaeders wird durch die Mittelschnittsebene nach einem Grosskreis geschnitten, welcher zugleich Umkreis des Zehnecks ist, das Zehneck ist also regelmässig. Da es 6 verschiedene Durchmesser durch je 2 Gegenecken des Ikosaeders gibt, so sind 6 solcher Schnitte vorhanden.

Probe: R ist zugleich der Umkreishalbmesser, r der Inkreishalbmesser eines Zehnecks mit Seite b, (R auch = dem Halbmesser der kantenberührenden Kugel eines Ikosaeders mit Kante 2 b).

Beim 14flach III gibt es 3 Ebenen, die nach regelmässigen Achtecken schneiden.

§ 11. Das Zweiundsechszigflach I.

Herleitung aus dem Dodekaeder durch Entecken und Entkanten, so dass vom Fünfeck ein Zehneck bleibt; $b = \frac{a}{10}(\sqrt{5} + 1)$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Oberfläche: 12 Zehnecke, 20 Sechsecke und 30 Quadrate;

$$O = 30\,b^2\,(1 + \sqrt{3} + \sqrt{5 + 2\sqrt{5}})$$

Ecken: 120 dreikantige mit den Seiten 144, 120 und 90; 180 Kanten.

$$R = \frac{b}{2}\sqrt{31 + 12\sqrt{5}}$$

$$\rho_{10} = \frac{b}{2}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \text{ (Dodek.)}; \quad \rho_6 = \frac{b}{2}(2\sqrt{3} + \sqrt{15}); \quad \rho_4 = \frac{b}{2}(3 + 2\sqrt{5}).$$

$$r = \frac{b}{2}\sqrt{30 + 12\sqrt{5}}$$

$$J = 5\,b^3\,(19 + 10\sqrt{5}) \text{ aus } 3\,J = 12\,F_{10}\,\rho_{10} + 20\,F_6\,\rho_6 + 30\,F_4\,\rho_4$$

$$w_{410} = 90 + \frac{1}{2}\text{ Dodekwinkel} = 148^0\ 16'\ 57''$$

$$w_{610} = 142^0\ 37'\ 23'' = w_{310}\ \S\ 8.$$

$$w_{46} = 90 + \frac{1}{2}\text{ Ikoswinkel} = 159^0\ 35'\ 41'' \text{ (vgl. } w_{46},\ \S\ 6)$$

Aufgaben.

1) Wie verhält sich das abgeschnittene 62flach zum ursprünglichen Dodekaeder seinem Inhalt und seiner Oberfläche nach?

J_1 Inhalt des Dodekaeders, dann

$$J : J_1 = (45 + 31\sqrt{5} : 125, \text{ ähnlich}$$

$$O : O_1 = \left[3\sqrt{5} + 5 + (1 + \sqrt{3})\sqrt{\frac{5}{2} + \sqrt{5}}\right] : \frac{25}{2}$$

2) Wie Aufg. 3.

$$D = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{40\,R^3}{41^3}(82\sqrt{5} - 11)\sqrt{31 - 12\sqrt{5}}$$

3) Entsprechend Aufgabe 4.

Höhe der Haube über dem Zehneck $h_1 = \frac{b}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{5})\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$

$$J_1 = \frac{\pi\,b^3}{24}(160\sqrt{6} + 64\sqrt{30} - 175\sqrt{5} - 310)\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$$

Haube über dem Sechseck

$$J_2 = \frac{\pi\,b^3\sqrt{3}}{8}\left\{(20 + 8\sqrt{5})\sqrt{10 + 4\sqrt{5}} - 82 - 37\sqrt{5}\right\}$$

Haube über dem Quadrat

$$J_3 = \frac{\pi\,b^3}{12}\left\{(30 + 12\sqrt{5})\sqrt{30 + 12\sqrt{5}} - \frac{423}{2} - 97\sqrt{5}\right\}$$

4) Winkel eines Dreikants, dessen Seiten 90°, 120° u. 144° betragen.

$$\cos w_{610} = -\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}; \qquad \cos w_{410} = -\frac{2}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$$

$$\cos w_{46} = -\frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 12. Das Zweiundsechzigflach II.

Herleitung aus dem Dodekaeder durch Entecken und Entkanten, so dass vom Fünfeck ein Fünfeck bleibt; $b = \frac{a}{6}(\sqrt{5} + 1)$

Oberfläche: 12 Fünfecke, 20 Dreiecke und 30 Quadrate

$$O = b^2 (30 + 5\sqrt{3} + 3\sqrt{25 + 10\sqrt{5}})$$

Ecken: 60 vierkantige mit den Seiten 90°, 108°, 90°, 60°; 120 Kanten

$$R = \frac{b}{2}\sqrt{11 + 4\sqrt{5}}$$

$$\rho_5 = \frac{3b}{10}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \text{ (Dodek.)} \quad \rho_3 = \frac{b}{6}(3 + 2\sqrt{5})\sqrt{3} \quad \rho_4 = \frac{b}{2}(2 + \sqrt{5})$$

$$r = \frac{b}{2}\sqrt{10 + 4\sqrt{5}}$$

$$J = \frac{b^3}{3}(60 + 29\sqrt{5}) \text{ aus } 3\,J = 12\,F_5\,\rho_5 + 20\,F_3\,\rho_3 + 30\,F_4\,\rho_4.$$

$w_{45} = 148^0\ 16'\ 57'' = w_{410}$ § 11.
$w_{34} = 159^0\ 35'\ 41'' = w_{46}$ § 11.

Aufgaben.

1) Aus einem Dodekaeder wird ein 62flach abgeschnitten. Wie gross ist das abgeschnittene Stück?

$$D = \frac{b^3}{3}(345 + 133\sqrt{5})$$

2) Wie verhält sich die Oberfläche des 62flachs zu der des Dodekaeders, aus dem jenes abgeleitet? Oberfl. des Dodek. O_1

$$O : O_1 = \left\{ 12 + \sqrt{30 - 6\sqrt{5}} + 3(\sqrt{5} + 1) \right\} : 27$$

3) Wie Aufg. 3.

$$D = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{8\,R^3}{123}(80 + 29\sqrt{5})\sqrt{\frac{11 - 4\sqrt{5}}{41}}$$

4) Entsprechend Aufg. 4

Haubenhöhe über dem Fünfeck $h_1 = \frac{b}{10}(5\sqrt{2} - 3\sqrt{5})\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$

$$J_1 = \frac{\pi b^3}{120}(100\sqrt{2} + 40\sqrt{10} - 126 - 63\sqrt{5})\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$$

Haube über dem Quadrat

$$J_2 = \frac{\pi b^3}{24}\left\{(20 + 8\sqrt{5})\sqrt{10 + 4\sqrt{5}} - 21 - \frac{19}{2}\sqrt{5}\right\}$$

Haube über dem Dreieck

$$J_3 = \frac{\pi b^3}{216}\left\{36(5 + 2\sqrt{5})\sqrt{10 + 4\sqrt{5}} - (423 + 194\sqrt{5})\sqrt{3}\right\}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

II. Halbregelmässige gleichflächige Vielflache.

§ 13. Allgemeine Eigenschaften.

1) Diese Körper sind den gleicheckigen reziprok und können den letzteren umbeschrieben werden.
2) Alle Flächen sind kongruent, aber nicht regelmässig.
3) Die Flächen werden von einer Kugel berührt; Halbmesser ρ.
4) Die Ecken werden gebildet von regelmässigen Vielkanten mit verschiedener Kantenzahl.
5) Alle Keilwinkel sind gleich gross, Winkel w. (vgl. 14.)
6) Die Vielkante mit derselben Kantenzahl sind entsprechendgleich, und ihre Spitzen liegen auf einer Kugel. Es gibt soviele konzentrische Umkugeln als Ecken mit verschiedener Kantenzahl. Halbmesser R_3 . .
7) Alle Kanten werden von einer Kugel berührt, welche mit der Inkugel und den Umkugeln konzentrisch ist.

Beweis.

Der Körper habe zweierlei Ecken. Fällt man vom Umkugelmittelpunkt Lote auf die Kanten, so sind alle Lote auf diejenigen Kanten, die in einer Ecke 1. Art zusammenstossen, gleich lang (aus 6), ebenso die Lote auf die Kanten nach den Ecken 2. Art. Betrachtet man eine Kante, welche eine Ecke der 1. Art mit einer Ecke der 2. Art verbindet, so gehört diese zu beiden Kantenarten und ihr Lot zu beiden Lotarten. Alle Lote sind somit gleichlang. Dasselbe gilt, wenn der Körper 3erlei Ecken hat.

Die Kanten werden von der berührenden Kugel in den Punkten berührt, in welchen sie vom Inkreis der Seitenfläche berührt werden.

8) Alle Kanten, welche 2 Ecken derselben Art oder 2 Ecken von denselben verchiedenen Arten verbinden, sind gleich lang. Bezeichnung z. B. k_{34}.

Berechnung.

9) Der Inkugelhalbmesser des gleichflächigen Körpers ist zugleich der Umkugelhalbmesser des gleicheckigen, von dem man ausgeht.
10) Der Umkugelradius einer n kantigen Ecke ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Kathete der Inkugelhalbmesser des Körpers und deren Projektion = dem Inkugelhalbmesser an die n Ecksfläche des ursprünglichen gleicheckigen Körpers ist; $R_n = \frac{\rho^2}{\rho_n}$
11) Die Kanten können aus 2 Umkugelhalbmessern und dem von diesen eingeschlossenen Winkel bestimmt werden.
12) Die Oberfläche ergibt sich sofort aus den einzelnen Flächen.
13) Der Inhalt wird durch Zerlegung des Körpers in die regulären Körper mit aufgesetzten Pyramiden oder in lauter kongruente dreiseitige Pyramiden berechnet.
14) Die Winkel sind die Supplemente der Winkel zwischen den Umkugelradien (R) nach 2 benachbarten Ecken des ursprünglichen gleicheckigen Körpers; $\cos \frac{w}{2} = \frac{b}{2R}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 14. Pyramidentetraeder.

Umbeschrieben um das Achtflach, also ein Achteck, nach der Flächenzahl Triakistetraeder.

Ecken: 4 sechskantige Tetraederecken, 4 dreikantige Pyramidenecken.

Flächen: 12 gleichschenklige Dreiecke; 18 Kanten, nämlich 6 längere Tetraederkanten k und 12 Pyramidenkanten k_{36}.

Man erhält nach § 13, 9 und 10

$$\rho = \frac{b}{4}\sqrt{22} \text{ und}$$

$$R_6 = \frac{11\,b}{12}\sqrt{6} \text{ und } R_3 = \frac{11}{20}\,b\sqrt{6}.$$

Nun ist R_6 der Umkugelhalbmesser eines Tetraeders mit der Kante $k_{66} = k$, daher

$$(1)\quad R_6 = \frac{k}{4}\sqrt{6},$$

und mit Hilfe der vorigen Werte

$$(2)\quad k = \frac{11}{3}\,b$$

$$(3)\quad R_3 = \frac{3\,k}{20}\sqrt{6}$$

$$(4)\quad \rho = \frac{3\,k}{44}\sqrt{22}$$

Um den Inhalt und die Pyramidenkante k_{36} zu berechnen, bestimmt man die Höhe h der Pyramide als Differenz von R_3 und Tetraederinkugelhalbmesser

$$h = \frac{k}{15}\sqrt{6}, \text{ dann}$$

$$(5)\quad J = \frac{3}{20}\,k^3\sqrt{2}$$

$$(6)\quad k_{36} = \frac{3}{5}\,k.$$

Die Oberfläche besteht aus 12 gleichschenkligen Dreiecken mit der Grundlinie k und der Höhe $h_1 = \frac{k}{10}\sqrt{11}$, daher

$$(7)\quad O = \frac{3}{5}\,k^3\sqrt{11}$$

Probe: $3\,J = O\,.\,\rho$.

Die kantenberührende Kugel berührt die Kante k in ihrer Mitte (zugleich für Tetraeder) und die Kante k_{36} im Berührungspunkt des Inkreises des Seitendreiecks. Man hat

$$r = \sqrt{R_6^2 - \frac{k^2}{4}} \text{ oder } r^2 = R_3^2 - \left(k_{36} - \frac{k}{2}\right)^2$$

$$(8)\quad r = \frac{k}{4}\sqrt{2}$$

Ist α der Winkel an der Spitze, $\beta\left(= 90 - \frac{\alpha}{2}\right)$ der Winkel an der Grundlinie eines Seitendreiecks, so erhält man für den Keilwinkel w aus einem gleichseitigen Dreikant oder aus einem Sechskant

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\sin\frac{w}{2} = \frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2\cos\frac{\beta}{4}} = \frac{3}{\sqrt{11}},$$

dabei $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{5}{6}$ $\quad \alpha = 112^0\ 53'$

Nach § 13, 14 $\quad \cos\frac{w}{2} = \frac{2}{\sqrt{22}}$, daher

(9) $w = 129^0\ 30'\ 50''$.

Probe: Ist γ der Winkel zwischen Pyramidengrundfläche und = seitenfläche, dann

$$w = \text{Tetraederwinkel} + 2\gamma$$
$$= 70^0\ 31'\ 44'' + 2 \text{ arc sin } \frac{h}{h_1}$$
$$w = 70^0\ 31'\ 44'' + 2 \text{ arc sin } \frac{2}{3}\sqrt{\frac{6}{11}}$$

§ 15. Pyramidenoktaeder.

Umbeschrieben um das 14flach I; Triakisoktaeder.
Ecken: 6 achtkantige Oktaederecken, 8 dreikantige Pyramidenecken.
Flächen: 24 gleichschenklige Dreiecke; 36 Kanten, darunter 12 lange Oktaederkanten $k_{88} = k$ und 24 kürzere Pyramidenkanten k_{38}.

Es ist $\quad \rho = \frac{b}{2}\sqrt{7 + 4\sqrt{2}}$

$$R_8 = \frac{b}{2}(3\sqrt{2} + 1), \quad R_3 = \frac{b}{2}(5 - 2\sqrt{2})\sqrt{3}$$

Da aber R_8 auch Umkugelhalbmesser eines Oktaeders

(1) $R_8 = \frac{k}{2}\sqrt{2}$, dann

(2) $k = \frac{b}{2}(6 + \sqrt{2})$

(3) $R_3 = \frac{k}{2}(2\sqrt{3} - \sqrt{6})$

(4) $\rho = \frac{k}{2}\sqrt{\frac{10 + 4\sqrt{2}}{17}}$

Höhe der Pyramide $h = \frac{k}{3}(3\sqrt{3} - 2\sqrt{6})$

(5) $J = k^3(2 - \sqrt{2})$

(6) $k_{38} = k(2 - \sqrt{2})$

Die Höhe der Seitenfläche $h_1 = \frac{k}{2}\sqrt{23 - 16\sqrt{2}}$

(7) $O = 6\,k^2\sqrt{23 - 16\sqrt{2}}$

Probe: $3\,J = O\,.\,\rho$

Für den Halbmesser der kantenberührenden Kugel ergibt sich aus dem Oktaeder

(8) $r = \frac{k}{2}$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dasselbe aus

$$r^2 = R^2_8 - \frac{k^2}{4} \text{ oder } r^2 = R_3{}^2 - \left(k_{3\,8} - \frac{k}{2}\right)^2$$

Für den Keilwinkel ist

$$\cos\frac{w}{2} = \sqrt{\frac{7 - 4\sqrt{2}}{17}}$$

und mit den früheren Bezeichnungen aus Dreikant und Achtkant

$$\sin\frac{w}{2} = \frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos 22\frac{1^0}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}} = \sqrt{\frac{10 + 4\sqrt{2}}{17}}$$

dabei $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$

$\alpha = 117^0\ 12'$, dann

(9) $w = 147^0\ 21'$

Probe: $w = \text{Oktaederwinkel} + 2 \text{ arc tg } \frac{h}{\frac{k}{6}\sqrt{3}}$

$= 109^0\ 28'\ 16'' + 2 \text{ arc tg } 2\ (3 - 2\sqrt{2})$

Bezieht man die Flächen auf die Oktaederachsen, so sind 2 Achsenabschnitte $R_8 = \frac{k}{2}\sqrt{2}$, für den 3. Abschnitt x hat man

$\text{tg}\frac{w}{2} = \frac{2x}{k}$, daher

$x = \frac{k}{2}(2+\sqrt{2})$, somit Achsenverhältnis:

$1 : 1 : (1+\sqrt{2})$

§ 16. Pyramidenwürfel.

Umbeschrieben um das 14flach II; Tetrakishexaeder.

Ecken: 8 sechskantige Würfelecken und 6 vierkantige Pyramidenecken.

Flächen: 24 gleichschenklige Dreiecke; 36 Kanten und zwar 12 lange Würfelkanten k und 24 kürzere Pyramiden k_{16}.

Man hat $\rho = \frac{b}{2}\sqrt{10}$,

$R_6 = \frac{5}{6} b\sqrt{6}$, $R_4 = \frac{5}{4} b\sqrt{2}$.

R_6 ist Umkugelhalbmesser des Würfels, daher

(1) $R_6 = \frac{k}{2}\sqrt{3}$ und

(2) $k = \frac{5}{3} b\sqrt{2}$, dann

(3) $R_4 = \frac{3}{4} k$ und

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$(4) \quad \rho = \frac{3}{10} k \sqrt{5}.$$

Die Höhe der Pyramide $h = \frac{k}{4}$, daraus

$$(5) \quad J = \frac{3}{2} k^3$$

$$(6) \quad k_{46} = \frac{3}{4} k \quad \text{(vgl. 3)}$$

Für die Höhe der Seitenfläche erhält man $h_1 = \frac{k}{4}\sqrt{5}$, also

$$(7) \quad O = 3 k^2 \sqrt{5},$$

Probe: $3 J = O . \rho$.

Aus dem Würfel ist

$$(8) \quad r = \frac{k}{2}\sqrt{2},$$

das gleiche aus $\quad r^2 = R^2_6 - \frac{k^2}{4} = R^2_4 - \frac{9}{16} k^2$

Weiter wird aus $\quad \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{k}{2\, k_{46}} = \frac{2}{3}, \quad \left(\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}\sqrt{5}\right)$

$$\alpha = 83^0\ 37'\ 20''$$

und der Keilwinkel ergibt sich aus

$\cos\frac{w}{2} = \sqrt{\frac{1}{10}}$ und aus Vierkant und Sechskant

$$\sin\frac{w}{2} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\cos\frac{\beta}{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$(9) \quad w = 143^0\ 7'\ 50'',$$

auch aus

$$w = 90^0 + 2 \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}.$$

das Verhältnis der 2 endlichen Achsenabschnitte wird angegeben durch $h : \frac{k}{2}$, daher ist für alle 3 Abschnitte $1 : 2 : \infty$.

§ 17. Rhombenzwölfflach.

Umbeschrieben um das 14flach III.
Ecken: 6 vierkantige Oktaederecken und 8 dreikantige Würfelecken.
Flächen: 12 Rhomben; 24 gleichlange Kanten k.

Man erhält $\quad \rho = b; \quad R_4 = b\sqrt{2}, \quad R_3 = \frac{b}{2}\sqrt{6}$

R_3 ist der Umkugelhalbmesser eines Würfels mit der Kante $b\sqrt{2}$, R_4 eines Oktaeders mit 2 b Würfel- und Oktaederkante sind die Diagonalen des Rhombus, daher

$$(1) \quad k = \frac{b}{2}\sqrt{6}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$(2) \quad \rho = \frac{k}{3}\sqrt{6}$$

$$(3) \quad R_4 = \frac{2k}{3}\sqrt{3}$$

$$(4) \quad R_8 = k.$$

Der Inhalt kann als der eines Pyramidenwürfels oder eines Pyramidenoktaeders berechnet werden

$$(5) \quad J = \frac{16}{9} k^3 \sqrt{3}$$

$$(6) \quad O = 8 k^2 \sqrt{2} \quad \text{wieder } 3 J = O . \rho$$

Weiter ist, da der Inkreishalbmesser des Rhombus $\frac{k}{3}\sqrt{2}$,

$$(7) \quad r = \frac{2k}{3}\sqrt{2}$$

Für den Winkel findet man $\cos \frac{w}{2} = \frac{1}{2}$, und wenn α der Rhombuswinkel an der Würfelecke

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{2} \quad \alpha = 109^0\ 28'\ 16''.$$

§ 18. Achtundvierzigflach.

Umbeschrieben um das 26flach I.
Ecken: 6 achtkantige, 8 sechskantige und 12 vierkantige.
Flächen: 48 ungleichseitige Dreiecke; 72 Kanten nämlich k_{46}, k_{48} u. k_{68}, je 24.

$$\rho = \frac{b}{2}\sqrt{13 + 6\sqrt{2}}; \quad R_8 = \frac{b}{14}(11 + 20\sqrt{2}) \quad R_4 = \frac{b}{14}(27 + 5\sqrt{2})$$

$$\text{und} \quad R_6 = \frac{b}{6}(7\sqrt{2} - 1)\sqrt{3}.$$

Die Kanten lassen sich nun aus den R und ihren Zwischenwinkeln berechnen, man hat

$$k^2_{48} = R^2_4 + R^2_8 - 2 R_4 R_8 \cos 45^0$$

$$(1) \quad k_{48} = k = \frac{b}{14}\sqrt{510 + 213\sqrt{2}}, \quad \text{weiter}$$

$$k^2_{68} = R^2_6 + R^2_8 - 2 R_6 R_8 \cos(R_6, R_8), \quad \cos(R_6, R_8) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$k_{68} = \frac{b}{7}\sqrt{\frac{962 - 41\sqrt{2}}{3}} \quad \text{und}$$

$$k^2_{46} = R^2_4 + R^2_8 - 2 R_4 R_8 . \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \angle(R_6, R_8) = 90 - \angle(R_4, R_8)$$

$$k_{46} = \frac{b}{14}\sqrt{\frac{2036 - 443\sqrt{2}}{3}}$$

Durch Einführung von k erhält man einfachere Zahlen:

$$(2) \quad k_{68} = \frac{2}{3} k (2\sqrt{2} - 1)$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$(3)\quad k_{46} = \frac{k}{3}(3\sqrt{2} - 2)$$

$$(4)\quad \rho = 7\,k\sqrt{\frac{4-\sqrt{2}}{582}}$$

$$(5)\quad R_8 = k\sqrt{\frac{10+\sqrt{2}}{6}}$$

$$(6)\quad R_4 = k\sqrt{\frac{10-\sqrt{2}}{6}}$$

$$(7)\quad R_6 = \frac{7}{3}\,k\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$$

Berechnet man aus den 3 Kanten den Dreiecksinhalt, so hat man

$$(8)\quad O = \frac{28}{3}\,b^2\sqrt{15 - 8\sqrt{2}}$$

Zerlegt man den Körper in dreiseitige Pyramiden, deren Spitze der Mittelpunkt ist, und deren Grundflächen die Dreiecke der Oberfläche bilden, so sind R_4, R_6 und R_8 die Pyramidenkanten, mit deren Hilfe man den Inhalt einer Pyramide bestimmen kann (vgl. Hammer, Trigonometrie S. 474.)

$$\frac{J}{48} = \frac{1}{6}\,R_4\,R_6\,R_8 \sin(R_4, R_8) \sin(R_6, R_8) \sin 45^0$$

$$(9)\quad J = \frac{98}{27}\,k^3\sqrt{6(2-\sqrt{2})} \qquad \text{Probe: } 3\,J = O\,.\,\rho.$$

Eine unmittelbare stereometrische Berechnung gibt § 30.

Aus $\quad r\,.\,k = R_8\,R_4$ ist

$$(10)\quad r = \frac{7\,k}{6}\sqrt{2}$$

Weiter ist $\quad \cos\frac{w}{2} = \frac{1}{\sqrt{13 + 6\sqrt{2}}}$ u.

$$(11)\quad w = 155^0\ 5'$$

Die Dreieckswinkel α und β an der 4kantigen und 6kantigen Ecke lassen sich aus den 3 Kanten berechnen oder aus w, und man hat

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\frac{1}{\sin\frac{w}{2}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{14-\sqrt{2}}{3}}$$

$$\cos\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\frac{1}{\sin\frac{w}{2}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{14-\sqrt{2}}{2}}$$

Sind OX, OY und OZ Achsenabschnitte einer Fläche, dann ist $OX = R_8$,

$OY = OX\,\mathrm{tg}\,(R_8, k_{84}) = OX\,(3 - \sqrt{2})$ und

$OZ = R_4\,\mathrm{tg}\,(R_4, k_{46}) = R_4\,(3 + \sqrt{2}) = OX\,(1 + 2\sqrt{2})$, daher

$$OX : OY : OZ = 1 : (3 - \sqrt{2}) : (1 + 2\sqrt{2})$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 19. Deltoidvierundzwanzigflach.

Dem 26flach II umbeschrieben.

Ecken: 18 vierkantige (6 Würfelecken) und 8 dreikantige (Oktaederecken)

Flächen: 24 symmetrische Vierecke (Deltoide); 48 Kanten, nämlich 24 längere k_{44} und 24 kürzere k_{34}.

$$\rho = \frac{b}{2}\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}$$

$$R_4 = \frac{b}{2}(3\sqrt{2} - 1) \text{ und } R_3 = \frac{b}{14}(11 + \sqrt{2})\sqrt{3}$$

Der Schnitt des Körpers mit einer Achsenebene ist ein regelmässiges Achteck mit dem Umkreishalbmesser R_4, also

$$(1) \quad R_4 = \frac{k}{2}\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$$

$$(2) \quad k = \frac{b}{2}(3\sqrt{2} - 1)\sqrt{2 - \sqrt{2}} = \frac{b}{2}\sqrt{50 - 31\sqrt{2}}$$

$$(3) \quad R_3 = \frac{k}{14}(4 + \sqrt{2})\sqrt{6 + 3\sqrt{2}}$$

$$(4) \quad \rho = k\sqrt{\frac{22 + 15\sqrt{2}}{34}}$$

Mit Hilfe des Pythagor. Lehrsatzes berechnet man nun

$$(5) \quad k_{34} = \frac{k}{7}(4 + \sqrt{2})$$

Diagonale $d_{34} = \frac{k}{7}\sqrt{46 + 15\sqrt{2}}$, während die Diagonale d_{44} sich aus der Figur ergibt als

$$d_{44} = R_4 = \frac{k}{2}\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}, \text{ daraus der Schluss:}$$

Die 3 nicht auf den Achsen liegenden 4kantigen Ecken des Körperoktanten und der Mittelpunkt sind die Ecken eines Tetraeders.

Aus den Diagonalen erhält man die Oberfläche

$$(6) \quad O = \frac{12}{7}k^2\sqrt{61 + 38\sqrt{2}}$$

r lässt sich wie im vorigen Fall berechnen oder als Inkreishalbmesser eines Achtecks

$$(7) \quad r = \frac{k}{2}(1 + \sqrt{2})$$

Der Inhalt wird erhalten wie in § 18

$$(8) \quad J = \frac{2k^3}{7}(6 + 5\sqrt{2})\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

oder aus $3J = O \cdot \rho$ oder indem man den Oktanten des Körpers in 3 Pyramiden zerlegt, deren Grundflächen $\frac{1}{4}$ eines Achtecks mit Kante $k\left(\frac{1}{2}R^2_4\sqrt{2}\right)$ und deren Höhen $R_3 \sin(R_3, R_4) = R_3\sqrt{\frac{1}{3}}$ sind.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Bestimmt man den Winkel wie in § 13, so ist

$$\cos\frac{w}{2} = \frac{1}{\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}}$$

$$(9) \qquad w = 138^0\ 7'$$

Ferner für α, den Winkel des Deltoids an der Oktaederecke, und β, den an der Würfelecke,

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} \text{ und } \sin\frac{\beta}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{10 + \sqrt{2}}$$

dann aus Vierkant oder Dreikant

$$\sin\frac{w}{2} = \frac{\cos 45}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2\cos\frac{\beta}{2}} = \sqrt{\frac{12 + 2\sqrt{2}}{17}}$$

Sind O X, O Y und O Z die Achsenabschnitte einer Fläche, dann ist $OX = R_4$ und $OY = OZ$ aus dem Achteck zu bestimmen, $OY = R_4\,(1 + \sqrt{2})$
daher die Achsenabschnitte $1 : (1 + \sqrt{2}) : (1 + \sqrt{2})$.

§ 20. Pyramidenikosaeder.

Dem 32flach I umbeschrieben.
Ecken: 12 zehnkantige Ikosaederecken und 20 dreikantige Pyramidenecken.
Flächen: 60 gleichschenklige Dreiecke; 90 Kanten, davon 30 lange $k_{10\,10} = k$ und 60 kurze $k_{3\,10}$.

$$\rho = \frac{b}{4}\sqrt{74 + 30\sqrt{5}}$$

$$R_{10} = \frac{b}{4}\sqrt{\frac{650 + 158\sqrt{5}}{5}}\,; \quad R_3 = \frac{b}{44}(21 + 25\sqrt{5})\sqrt{3}$$

Nun ist R_{10} Umkugelhalbmesser eines Ikosaeders mit Kante k, also

$$(1) \quad R_{10} = \frac{k}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}, \text{ daher}$$

$$(2) \quad k = \frac{b}{10}(35 + \sqrt{5})$$

$$(3) \quad R_3 = \frac{k}{44}(5 + 7\sqrt{5})\sqrt{3}$$

$$(4) \quad \rho = \frac{k}{488}(35 - \sqrt{5})\sqrt{74 + 30\sqrt{5}} = \frac{k}{8}\sqrt{\frac{66 + 26\sqrt{5}}{61}}$$

Die Höhe der Pyramide ergibt $h = \frac{k}{66}(5\sqrt{5} - 9)\sqrt{3}$ und

$$(5) \quad J = \frac{5}{44}k^3(5 + 7\sqrt{5})$$

$$(6) \quad k_{3\,10} = \frac{k}{22}(15 - \sqrt{5}),$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Diese Werte werden auch erhalten aus

$$k^2_{3\,10} = R^2_3 + R^2_4 - 2\,R_3\,R_4 \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{3\,(10 + 2\sqrt{5})}} \text{ und}$$

$$\frac{J}{10} = R^2_{10} \cdot R_3 \cdot \sin^2 (R_3\,R_{10}) \sin 120.$$

Mittelst der Höhe der Seitenfläche $h_1 = \frac{k}{22}\sqrt{109 - 30\sqrt{5}}$ erhält man

$$(7) \qquad O = \frac{15\,k^2}{11}\sqrt{109 - 30\sqrt{5}}$$

Aus dem Ikosaeder ist

$$(8) \qquad r = \frac{k}{4}(1 + \sqrt{5}) \text{ oder aus}$$

$$r^2 = R^2_{10} - \frac{k^2}{4} = R^2_3 - \left(k_{38} - \frac{k}{2}\right)^2$$

Ferner

$$\cos\frac{w}{2} = \frac{2}{\sqrt{74 + 30\sqrt{5}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{74 - 30\sqrt{5}}{61}}$$

$$(9) \qquad w = 160^0\ 36'$$

Zur Probe ist $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{h_1}{k_{38}} = \frac{\sqrt{109 - 30\sqrt{5}}}{15 - \sqrt{5}}$ und

$$\sin\frac{w}{2} = \frac{15 - \sqrt{5}}{2\sqrt{109 - 30\sqrt{5}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{170 + 30\sqrt{5}}{61}} \text{ oder auch}$$

$$w = 138^0\ 11'\ 23'' + 2 \text{ arc tg}\left(\frac{5\sqrt{5} - 9}{11}\right)$$

§ 21. Pyramidendodekaeder.

Dem 32flach II umbeschrieben.

Ecken: 20 sechskantige Dodekaederecken und 12 fünfkantige Pyramidenecken.

Flächen: 60 gleichschenklige Dreiecke mit 90 Kanten, 30 Ikosaederkanten k und 60 Pyramidenkanten k_{56}.

$$\rho = \frac{b}{4}\sqrt{58 + 18\sqrt{5}}$$

$$R_6 = \frac{b}{12}(21 - \sqrt{5})\sqrt{3}, \quad R_5 = \frac{b}{76}(29 + 9\sqrt{5})\sqrt{\frac{125 - 41\sqrt{5}}{2}}$$

aber

$$(1) \qquad R_6 = \frac{k}{4}(\sqrt{5} + 1)\sqrt{3}, \text{ daher}$$

$$(2) \qquad k = \frac{b}{6}(11\sqrt{5} - 13)$$

$$(3) \qquad R_5 = \frac{3\,k}{76}(2 + \sqrt{5})\sqrt{2\,(125 - 41\sqrt{5})} = \frac{3\,k}{76}\sqrt{610 + 262\sqrt{5}}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$(4) \qquad \rho = \frac{3\,k}{4}\sqrt{\frac{162 + 70\sqrt{5}}{109}}$$

Die Höhe der Pyramide ist $h = \frac{3}{76}\,k\sqrt{610 + 262\sqrt{5}} - \frac{3\,k}{4}\sqrt{\frac{162 + 70\sqrt{5}}{109}}$

$$(5) \qquad J = \frac{15\,k^3}{76}\,(23 + 11\sqrt{5})$$

leichter aus

$$\frac{J}{10} = R^2_6 \cdot R_5 \cdot \sin^2(R_5,\ R_6)\sin 72^0;\ \sin(R_5,\ R_6) = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{10 + 2\sqrt{5}}}$$

Weiter ist $k^2_{56} = R^2_6 + R^2_5 - 2\,R_5\,R_6 \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{30 + 6\sqrt{5}}}$

$$(6) \qquad k_{56} = \frac{3}{38}\,k\,(9 + \sqrt{5})$$

Die Höhe der Seitenfläche $h_1 = \frac{k}{38}\sqrt{413 + 162\sqrt{5}}$ und

$$(7) \qquad O = \frac{15\,k^2}{19}\sqrt{413 + 162\sqrt{5}}$$

Probe $J = \frac{1}{3}\,O \cdot \rho = \frac{15\,k^3}{76}\sqrt{1134 + 506\sqrt{5}}$ (wie oben)

$$(8) \qquad r = \sqrt{R_6 - \frac{k^2}{4}} = \frac{k}{4}\,(3 + \sqrt{5}) \quad \text{(vgl. Dodekaeder)}$$

$$(9) \qquad \cos\frac{w}{2} = \frac{2}{\sqrt{58 + 18\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{29 - 9\sqrt{5}}{218}}$$

oder aus $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{413 + 162\sqrt{5}}}{3\,(9 + \sqrt{5})}$

$$\sin\frac{w}{2} = \frac{\cos 36^0}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{3\sqrt{21 + \sqrt{5}}}{\sqrt{218}},$$

oder auch $w = 138^0\ 11'\ 23'' + 2\arccos\frac{1}{19}\sqrt{\frac{5\,(413 + 162\sqrt{5})}{5 + 2\sqrt{5}}}$

$$(10) \qquad w = 156^0\ 43'\ 10''$$

§ 22. Rhombendreissigflach.

Umbeschrieben um das 32flach III.
Ecken: 20 dreikantige Dodekaederecken und 12 fünfkantige Ikosaederecken
Flächen: 30 Rhomben mit 60 gleichlangen Kanten k.

$$\rho = \frac{b}{2}\,(1 + \sqrt{5})$$

$R_3 = b\sqrt{3}$, zugl. R des Dodek. mit Kante $b\,(\sqrt{5} - 1)$

$R_5 = \frac{b}{2}\,(3 + \sqrt{5})\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$, zugl. R des Ikos. mit Kante 2b.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dodekaeder- und Ikosaederkante sind die Diagonalen des Rhombus

$$(1) \quad k = \frac{b}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}},$$

$$(2) \quad \rho = k\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}},$$

$$(3) \quad R_3 = k\sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{5}}{10}},$$

$$(4) \quad R_5 = \frac{k}{2}(1 + \sqrt{5})$$

Der Inhalt kann als der eines Pyramidenikosaeders, dessen Pyr.-Höhe $\frac{b}{2}\frac{3 - \sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ oder eines Pyramidendodekaeders, dessen Pyramidenhöhe $\frac{b}{2}(3 - \sqrt{5})\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}$ ist, berechnet werden.

$$(5) \quad J = 4\,k^3\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$$

Aus den Diagonalen $d_{33} = \frac{k}{5}\sqrt{50 - 10\sqrt{5}}$ und $d_{55} = \frac{k}{5}\sqrt{50 + 10\sqrt{5}}$ ist die Oberfläche

$$(6) \quad O = 15\,d_{33} \cdot d_{55} = 12\,k^2\sqrt{5}$$

Der Inkreishalbmesser des Rhombus ist $\frac{1}{5}\,k\sqrt{5}$ und

$$(7) \quad r = \frac{k}{5}(5 + \sqrt{5})$$

Ist α der Winkel an der Dodekaederecke, so ist $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1)$

$$\alpha = 77^0\ 56'\ 50''$$

und

$$\cos\frac{w}{2} = \frac{1}{\sqrt{5} + 1};$$

$$(8) \quad w = 144^0.$$

§ 23. Hundertzwanzigflach.

Dem 62flach I umbeschrieben.

Ecken: 12 zehnkantige, 20 sechskantige und 30 vierkantige.

Flächen: 120 ungleichseitige Dreiecke; 180 Kanten und zwar $k_{610} = k$, k_{46} und k_{410} je 60.

$$\rho = \frac{b}{2}\sqrt{31 + 12\sqrt{5}},$$

$$R_4 = \frac{b}{22}(27 + 26\sqrt{5}), \qquad R_6 = \frac{b}{2\sqrt{3}}(7\sqrt{5} - 2)$$

$$R_{10} = \frac{b}{10}(31 + 12\sqrt{5})\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Mit Hilfe des Pythag. Satzes erhält man

$$(1) \quad k = \frac{b}{15} \sqrt{3\,(1385 - 389\sqrt{5})}$$

$$(2) \quad k_{46} = \frac{b}{66} \sqrt{3\,(25505 - 10099\sqrt{5})} = \frac{5\,k}{44}\,(7 - \sqrt{4}),$$

$$(3) \quad k_{410} = \frac{b}{110} \sqrt{40575 + 8733\sqrt{5}} = \frac{3\,k}{22}\,(4 + \sqrt{5}),$$

Ferner durch Umrechnung in k

$$(4) \quad \rho = \frac{k}{4} \sqrt{\frac{15\,(275 + 119\sqrt{5})}{241}}$$

$$(5) \quad R_4 = \frac{k}{44} \sqrt{15\,(145 + 61\sqrt{5})},$$

$$(6) \quad R_6 = \frac{k}{4} \sqrt{25 - 5\sqrt{5}} \text{ und}$$

$$(7) \quad R_{10} = \frac{k}{8}\,(3 + \sqrt{5})\sqrt{6}.$$

Aus den 3 Kanten ist die Grösse einer Dreiecksfläche

$$\Delta = \frac{1}{16} \left\{ (k_{410} + k_{46})^2 - k^2 \right\} \left\{ k^2 - (k_{410} - k_{46})^2 \right\}$$

$$(8) \quad O = \frac{15\,k^2}{44} \sqrt{4170 + 1070\sqrt{5}}$$

Durch Zerlegung in 120 Pyramiden wird (vgl. § 21)

$$(9) \quad J = \frac{25\,k^2}{88} \sqrt{3\,(370 + 164\sqrt{5})}$$

oder aus

$$3\,J = O\,.\,\rho$$

r lässt sich bestimmen als Höhe eines Dreiecks, dessen Seiten k, R_6 und R_{10} sind, und in welchem man noch Winkel (R_6, R_{10}) kennt.

$$rk = R_6 \,.\, R_{10} \,.\, \frac{4\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{15\,(1 + \sqrt{5})}}$$

$$(10) \quad r = \frac{k}{8}\,(5 + \sqrt{5})$$

$$(11) \quad \cos\frac{w}{2} = \frac{1}{\sqrt{31 + 12\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{31 - 12\sqrt{5}}{241}}$$

$$w = 179^0\ 48'$$

Die Dreieckswinkel sind aus den Seiten oder aus w bestimmbar.

§ 24. Deltoidsechzigflach.

Dem 62flach II umbeschrieben.

Ecken: 12 fünfkantige, 20 dreikantige und 30 vierkantige.

Flächen: 60 Deltoide; 120 Kanten, 60 längere k_{54} und 60 kürzere k_{34}

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\rho = \frac{b}{2}\sqrt{11 + 4\sqrt{5}}$$

$$R_5 = \frac{b}{6}\sqrt{125 + 38\sqrt{5}},\ R_4 = \frac{b}{2}(3\sqrt{5} - 2),\ R_3 = \frac{b}{22}(7 + 10\sqrt{5})\sqrt{3}$$

Dann wie im vorigen §.

$$(1)\quad k_{45} = k = \frac{b}{6}\sqrt{305 - 109\sqrt{5}}$$

$$(2)\quad k_{34} = \frac{b}{22}\sqrt{6025 - 2539\sqrt{5}} = \frac{3k}{22}(7 - \sqrt{5})$$

$$(3)\quad \rho = \frac{3k}{2}\sqrt{\frac{135 + 59\sqrt{5}}{205}}$$

$$(4)\quad R_5 = \frac{k}{4}(3 + \sqrt{5})\sqrt{2}$$

$$(5)\quad R_4 = \frac{3k}{2}\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{5}}$$

$$(6)\quad R_3 = \frac{3k}{110}\sqrt{15\,(145 + 61\sqrt{5})}$$

Wie (1) und (2) findet man auch die Diagonalen

$$d_{44} = \frac{b}{4}(17 - 5\sqrt{5}) = \frac{3k}{10}\sqrt{25 - 5\sqrt{5}} \text{ und}$$

$$d_{35} = \frac{b}{66}\sqrt{11666 - 730\sqrt{5}} = \frac{k}{55}\sqrt{10\,(235 + 78\sqrt{5})}, \text{ daraus}$$

$$(7)\quad O = \frac{9k^2}{11}\sqrt{10\,(157 + 31\sqrt{5})},$$

und wie früher

$$(8)\quad J = \frac{9k^3}{11}\sqrt{2\,(185 + 82\sqrt{5})} = \frac{1}{3}\,O\,.\,\rho.$$

Weiter ist

$$rk = R_4\,R_5 \sin(R_4, R_5)$$

$$(9)\quad r = \frac{3}{4}(3 + \sqrt{5})$$

Der Deltoidwinkel α an der dreikantigen Ecke ist bestimmt durch

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{25 + 2\sqrt{5}}{10}},\ \text{ähnlich } \sin\frac{\beta}{2} = \frac{3}{40}\sqrt{25 - 5\sqrt{5}}$$

$$\cos\frac{w}{2} = \frac{1}{\sqrt{11 + 4\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{11 - 4\sqrt{5}}{41}} \text{ und}$$

$$\sin\frac{w}{2} = \frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{30 + 4\sqrt{5}}{41}}$$

$$(10)\quad w = 154^0\ 10'.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

III. Einbeschriebene Vielflache.

§ 25. Allgemeine Eigenschaften.

1) Die Ecken dieser Vielflache sind die Mittelpunkte der Seitenflächen der gleicheckigen.
2) Alle Flächen sind kongruent.
   Beweis: Legt man durch je eine Kante des einbeschriebenen Körpers und den Mittelpunkt des ursprünglichen die Ebene, so wird der Körper in entsprechend gleiche dreiseitige Pyramiden zerlegt. Die Grundflächen der Pyramiden sind somit kongruent. Weiter sind die Abstände der Grundflächen von Mittelpunkt gleich gross, daher werden
3) alle Flächen von einer Inkugel berührt, Halbmesser ρ.
4) Die Ecken werden gebildet von regelmässigen oder symmetrischen Vielkanten.
5) Die Keilwinkel an den gleichartigen Kanten sind gleich, dies folgt ebenfalls aus der Zerlegung in 2. Bezeichnung w_{34} an der Kante k_{34}.
6) Die Vielkante mit derselben Kantenzahl sind entsprechend gleich, und ihre Spitzen liegen auf der nämlichen Umkugel. Es gibt soviele Umkugeln als bei den gleicheckigen Inkugeln.
7) Alle Kanten, welche dieselben Ecken verbinden, sind gleich lang.

Berechnung.

8) Die Inkugeln der gleicheckigen Körper sind zugleich die Umkugeln der einbeschriebenen.
9) Sind die Begrenzungsflächen des Körpers gleichschenklige Dreiecke, so kann man ihn als Pyramidenkörper auffassen, der durch Aufsetzen von Pyramiden auf die Flächen der regelmässigen Vielflache entsteht. Legt man durch den Körpermittelpunkt und eine Pyramidenspitze die Ebene senkrecht zur Pyramidengrundkante, so enthält diese Ebene den Jnkugelhalbmeser ρ und schneidet die Pyramidenseitenfläche nach ihrer Höhe h_1, die Pyramidengrundfläche nach ihrem Inkreishalbmesser p. Dann ist

$$\rho : R = p : h_1$$

   Bei den andern Körpern dient die Gleichung $3\ J = O \cdot \rho$ zur Berechnung von ρ.
10) Die Kanten können aus den mit ihnen in einer Ecke zusammenstossenden Umkugelhalbmessern berechnet werden.

§ 26. Einbeschriebene Körper des Achtflachs.

a) Pyramidentetraeder II.

Verbindet man die Mitten der Sechsecke des Achtflachs, so erhält man die Kanten eines Tetraeders, über dessen Flächen die Mittelpunkte der Dreiecke des Achtflachs liegen. Nimmt man diese Punkte als Spitzen von Pyramiden über den Tetraederflächen, so hat man ein Pyramidentetraeder.

Ecken: 4 sechskantige Tetraederecken und 4 dreikantige Pyramidenecken. 18 Kanten und zwar 6 k_{66} und 12 k_{36}.

Es ist sofort

$$R_6 = \frac{b}{4}\sqrt{6} \text{ und } R_3 = \frac{5\,b}{12}\sqrt{6}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dabei ist R_6 der Umkugelhalbmesser des Tetraeders mit Kante $k_{66} = k$

$$R_6 = \frac{k}{4}\sqrt{6} \quad \text{daher}$$

$$k = b \text{ und } R_3 = \frac{5\,k}{12}\sqrt{6}$$

Um die Kante k_{36} und den Inhalt zu berechnen, benützt man die Höhe der Pyramide $h = \frac{5\,k}{12}\sqrt{6} - \frac{k}{12}\sqrt{6} = \frac{k}{3}\sqrt{6}$.

Dies ist nichts anderes als die Höhe eines Tetraeders mit der Kante k, daher auch

$$k_{36} = k$$

Es sind also auf die Flächen des ersten Tetraeders noch 4 gleiche aufgesetzt.

$$J = \frac{5\,k^3}{12}\sqrt{2}$$

$$O = 3\,k^2\sqrt{3}, \quad (\text{Seitenhöhe } h_1 = \frac{k}{2}\sqrt{3})$$

Weiter $\rho : R_3 = \frac{k}{6}\sqrt{3} : h_1$ (vgl. § 25, 9)

$$\rho = \frac{5\,k}{36}\sqrt{6} = \frac{3\,J}{O}$$

$$w_{36} = 70^0\ 31'\ 44'' \text{ (Tetraederwinkel)}$$

$$w_{66} = 211^0\ 35'\ 11'' \text{ (3facher Tetrw.)}$$

Schneidet man das Achtflach mit einer Ebene, welche durch die Mittelpunkte dreier Sechsecksflächen geht, so ist die Schnittfigur ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite 2 b, dessen Ecken zugleich Ecken des Achtflachs sind. Verbindet man die Seitenmitten, so erhält man 3 Kanten des einbeschriebenen Körpers, ihre Länge ist also = b. Zu der Schnittebene sind nun der 4. Sechsecks- und ein Dreiecksmittelpunkt symmetrisch, daher Pyramide und inneres Tetraeder kongruent.

b) Pyramidentetraeder III.

Betrachtet man die Dreiecksmittelpunkte als Tetraederecken und die Sechsecksmittelpunkte als Pyramidenecken, so kann man ein zweites Pyramidentetraeder erhalten.

6 Kanten k_{33} und 12 Kanten k_{36}; sofort ist

$$R_6 = \frac{5\,b}{12}\sqrt{6} = \frac{k}{4}\sqrt{6}$$

$$k_{33} = k = \frac{5}{3}\,b$$

$$R_3 = \frac{3\,k}{20}\sqrt{6}$$

Die Pyramidenhöhe gibt $h = R_3 - \frac{k}{12}\sqrt{6} = \frac{k}{15}\sqrt{6}$, daher

$$k_{36} = \frac{3}{5}\,k = b \text{ (auch aus dem vorigen)}$$

$$J = \frac{3}{20}\,k^3\sqrt{2}$$

Die Seitenhöhe $h_1 = \frac{k}{10}\sqrt{11}$ und

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$O = \frac{3}{5} k^2 \sqrt{11} \text{ dann nach § 25, 9}$$

$$\rho = \frac{3}{44} k \sqrt{11} = \frac{3\,J}{O}$$

Ist α der Dreieckswinkel an der Pyramidenspitze, dann

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{5}{6}, \qquad \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{6} \sqrt{11}$$

$$\sin \frac{w_{36}}{2} = \frac{1}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{3}{\sqrt{11}}$$

$$w_{36} = 129^0\ 21'$$

Ist γ der Winkel zwischen Seitenfläche und Grundfläche der Pyramide, dann

$$\operatorname{tg} \gamma = h : \frac{k}{6} \sqrt{3} = \frac{2}{5} \sqrt{6}, \quad \text{dann } \gamma = 44^0\ 25'\ 46''$$

$$w_{33} = 159^0\ 22'\ 10''.$$

§ 27. Einbeschriebener Körper des Vierzehnflachs I.

a) Pyramidenoktaeder II.

Die Mitten der Achtecke werden Oktaederecken, die der Dreiecke Pyramidenecken; 6 achtkantige und 8 dreikantige Ecken.

36 Kanten, darunter 12 längere $k_{88} = k$ und 24 kürzere k_{38}.

$$R_8 = \frac{b}{2} (\sqrt{2} + 1) = \frac{k}{2} \sqrt{2}$$

$$k = \frac{b}{2} (\sqrt{2} + 2)$$

$$R_3 = \frac{b}{6} (3 + 2 \sqrt{2}) \sqrt{3} = \frac{k}{6} (2 \sqrt{3} + \sqrt{6})$$

Die Höhe der Pyramide ergibt $h = \frac{k}{3} \sqrt{3}$, und hieraus

$$k_{38} = \sqrt{h^2 + \frac{k^2}{3}} = \frac{k}{3} \sqrt{6}$$

$$J = \frac{k^3}{3} (2 + \sqrt{2})$$

Aus der Höhe der Seitenpyramide $h_1 = \frac{k}{6} \sqrt{15}$ ist

$$O = 2\, k^2 \sqrt{15}, \text{ und wie früher}$$

$$\rho = \frac{k}{30} (2 + \sqrt{2}) \sqrt{15} = \frac{3\,J}{O}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4} \sqrt{6} \quad \text{und} \quad \sin \frac{w_{38}}{2} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$w_{38} = 78^0\ 27'\ 40''$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{2} \text{ gibt } \gamma = 26^0\ 33'\ 54'' \text{ und}$$

$$w_{88} = 162^0\ 36'$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Sind wieder O X, O Y und O Z die Abschnitte, welche eine Fläche auf den Achsen abschneidet, dann ist $OX = OY = \frac{k}{2}\sqrt{2}$,

weiter

$$OZ : \frac{k}{2} = \rho : \sqrt{\frac{k^2}{4} - \rho^2}$$

$$OZ = \frac{k}{14}(6 + 5\sqrt{2}) \text{ und}$$

das Achsenverhältnis $1 : 1 : \frac{3\sqrt{2} + 5}{7}$

b) **Pyramidenwürfel II.**

Die Mitten der Dreiecke werden Würfelecken, die der Achtecke Pyramidenecken; man hat dann 8 sechskantige und 6 vierkantige Ecken; 12 längere Kanten $k_{66} = k$ und 24 kürzere k_{46}

$$R_8 = \frac{b}{6}(3 + 2\sqrt{2})\sqrt{3} = \frac{k}{2}\sqrt{3}$$

$$k = \frac{b}{3}(3 + 2\sqrt{2})$$

$$R_4 = \frac{b}{2}(\sqrt{2} + 1) = \frac{3}{2}k(\sqrt{2} - 1)$$

Aus $h = \frac{k}{2}(3\sqrt{2} - 4)$ erhält man

$$J = 3k^3(\sqrt{2} - 1) \text{ und}$$

$$k_{46} = k(\sqrt{2} - 1)\sqrt{3}$$

Die Höhe der Seitenfläche ist $h_1 = \frac{k}{2}\sqrt{35 - 24\sqrt{2}}$,

$$O = 6k^2\sqrt{35 - 24\sqrt{2}}$$

$$\rho = \frac{3k(\sqrt{2} - 1)}{2\sqrt{35 - 24\sqrt{2}}}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{(\sqrt{2} + 1)\sqrt{3}}{6} \text{ gibt } \sin\frac{w_{46}}{2} = \sqrt{\frac{54 + 12\sqrt{2}}{73}}$$

$$w_{46} = 160^0\ 47'\ 50'',$$

ferner aus $\operatorname{tg}\gamma = 3\sqrt{2} - 4$, $\gamma = 13^0\ 38'\ 28''$ und

$$w_{44} = 117^0\ 16'\ 50''.$$

Ist $OY = \infty$, dann verhält sich $OX : OZ = \frac{k}{2} : h_1$, daraus das Parameterverhältnis $1 : (3\sqrt{2} - 4) : \infty$.

§ 28 Ins Vierzehnflach II einbeschriebener Körper.

Rhombendodekaeder.

Verbindet man die Sechseckmittelpunkte, so erhält man die Kanten eines Würfels, über dessen Flächen liegen die Quadratmittelpunkte als Pyramidenspitzen. Der einbeschriebene Körper wäre also ein Pyramidenwürfel. Zieht man in 2 mit einer Kante zusammenstossen-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

den Sechsecken die zu dieser Kante parallelen Diagonalen und legt durch diese die Ebene, so enthält letztere die 2 Sechsecksmittelpunkte und 2 Quadratmittelpunkte, es fallen somit 2 Pyramidenflächen in eine Ebene; der Körper wird von Rhomben begrenzt, und zwar sind es zwölf, da soviele Ebenen möglich sind.

Dasselbe lässt sich durch Rechnung und Vergleichung mit § 17 zeigen, da aus

$$R_6 = \frac{b}{2}\sqrt{6} = \frac{1}{2}\, k_{66}\sqrt{3} \quad \text{und } R_6 = b\sqrt{2} = k_{66}$$

die Höhe der Pyramide $h = \frac{1}{2}\, k_{66}$ wird.

Für die Kante $k_{46} = k$ hat man $k = \frac{b}{2}\sqrt{6}$

Umgekehrt ist der umbeschriebene Körper des Rhombendodekaeders ein gleicheckiger Körper.

§ 29. Ins Vierzehnflach III einbeschriebene Körper.

a) Pyramidenoktaeder III.

Die Mitten der Quadrate werden Oktaederecken, die Quadratmittelpunkte Pyramidenspitzen. Man hat wieder 6 achtkantige und 8 dreikantige Ecken, 12 Oktaederkanten $k_{44} = k$ und 24 Pyramidenkanten k_{34}.

$$R_8 = \frac{b}{2}\sqrt{2} = \frac{k}{2}\sqrt{2}$$

$$k = b, \quad R_3 = \frac{k}{3}\sqrt{6}$$

Höhe der Pyramide $h = \frac{k}{6}\sqrt{6}$, daraus

$$k_{38} = \frac{k}{2}\sqrt{2} \quad \text{und}$$

$$J = \frac{2}{3}\, k^3\sqrt{2} \text{ (doppelt so gross als das Oktaeder.)}$$

Seitenfläche $h_1 = \frac{k}{2}$, hieraus und aus k_{38} folgt, dass die Dreiecke rechtwinklig sind.

$$O = 6\, k^2, \text{ weiter}$$

$$\rho = \frac{k}{3}\sqrt{2} = \frac{3\, J}{O}.$$

Da in der Pyramidenecke 3 rechtwinklige Dreiecke zusammenstossen, so ist

$$w_{38} = 90^0$$

$$w_{88} = 218^0\ 56'\ 33'' \ (= 2 \text{ Oktaedwinkel})$$

Die Achsenschnitte ergeben $O\,X = O\,Y = \frac{k}{2}\sqrt{2}$; für $O\,Z = z$ erhält man aus einem Schnitt durch die Z-achse senkrecht zur Kante X Y, (auch durch k_{38} und h_1)

$$\frac{k}{2} : \sqrt{z^2 + \frac{k^2}{4}} = k_{38} : (z + \frac{k}{2}\sqrt{2})$$

$$z = k\sqrt{2}, \quad \text{daraus}$$

das Achsenverhältnis 1 : 1 : 2

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Der kristallographische Körper mit demselben Parameterverhältnis ist der Kernkörper des eben behandelten.

Teilt man ein Oktaeder in seine Oktanten und setzt diese Teile als Pyramiden auf ein 2. kongruentes Oktaeder auf, so entsteht der Körper.

b) Pyramidenwürfel I.

Die Dreiecksmitten werden Würfelecken, die Quadratmitten zu Pyramidenspitzen; Kante $k_{66} = k$

$$R_6 = \frac{b}{3}\sqrt{6} = \frac{k}{2}\sqrt{3}$$

$$k = \frac{2}{3}\, b\sqrt{2}, \text{ dann}$$

$$R_4 = \frac{b}{2}\sqrt{2} = \frac{3\,k}{4}$$

Aus der Pyramidenhöhe $h = \frac{k}{4}$ wird

$$k_{46} = \frac{3}{4}k$$

$$J = \frac{3}{2}\,k^3 \text{ und } h_1 = \frac{k}{4}\sqrt{5}$$

$$O = 3\,k^2\sqrt{5}, \text{ ferner}$$

$$\rho : R_4 = \frac{k}{2} : h_1$$

$$\rho = \frac{3}{10}\,k\sqrt{5} = \frac{3\,J}{O}$$

Diese Zahlen sind aber die nämlichen wie in § 16.

Es ist wieder umgekehrt ein umbeschriebener Körper des Pyramidenwürfels ein Archimedischer.

§ 30. Ins Sechsundzwanzigflach I einbeschriebener Körper.

Achtundvierzigflach II.

Verbindet man die Mittelpunkte je zweier in einer Kante zusammenstossender Flächen des 26flachs, so sind dies die Kanten eines 48flachs, das von 48 ungleichseitigen Dreiecken begrenzt ist.

Projiciert man den Mittelpunkt eines Sechsecks auf ein anstossendes Achteck, so lässt sich k_{68} bestimmen. Die Berechnung von k_{68} kann auch aus einem Dreieck mit R_6 und R_8 als weitere Seiten erfolgen.

$$k_{68} = k = b\sqrt{2+\sqrt{2}} = R^2_6 + R^2_8 - 2\,R_6\,R_8 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

In ähnlicher Weise bekommt man

$$k_{48} = \frac{b}{2}\sqrt{6+3\sqrt{2}} = \frac{k}{2}\sqrt{3}\ \left(= R^2_4 + R^2_8 - 2\,R_4\,R_8 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \text{ und}$$

$$k_{46} = \frac{b}{2}\sqrt{4+2\sqrt{2}} = \frac{k}{2}\sqrt{2}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

dabei sind die Radien

$$R_4 = \frac{b}{2}(3 + \sqrt{2}) = \frac{k}{4}\sqrt{20 + 2\sqrt{2}}$$

$$R_6 = \frac{b}{2}(\sqrt{2} + 1)\sqrt{3} = \frac{k}{4}\sqrt{12 + 6\sqrt{2}}$$

$$R_8 = \frac{b}{2}(2\sqrt{2} + 1) = \frac{k}{4}\sqrt{20 - 2\sqrt{2}}$$

Ein Oktant des Körpers kann in 3 vierseitige Pyramiden zerlegt werden, deren gemeinschaftliche Spitze der Endpunkt von R_6, deren Grundfläche ein Viereck mit den senkrechten Diagonalen R_4 und $R_8\sqrt{2}$, und deren Höhe $= R_6\sqrt{\frac{1}{3}}$ ist, daher

$$\frac{J}{24} = \frac{1}{6} \cdot R_4 \cdot R_8 \cdot \sqrt{2} \cdot R_6 \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$J = \frac{7}{4} k^3 \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$$

Berechnet man aus den 3 Kanten eine Dreiecksfläche, so erhält man auch (vgl. § 18)

$$O = 3 k^2 \sqrt{23}, \quad \text{ferner}$$

$$\rho = \frac{3J}{O} = \frac{7}{4} k \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{2}}{23}}$$

Ist α der Dreieckswinkel an einer vierkantigen Ecke, β der an einer achtkantigen Ecke, so ist aus den Kanten

$$\cos\alpha = \frac{1}{12}\sqrt{6}, \qquad \cos\beta = \frac{5}{12}\sqrt{3}$$

Aus dem rechtwinkligen Dreikant, dessen Spitze eine vierkantige Ecke, dessen Kanten k_{46}, k_{48} und R_4, dessen Hypotenuse α und dessen Kathete $\delta = \llcorner (R_4, k_{48})$ erhält man, da

$$\sin\delta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{10 - \sqrt{2}}{3}}$$

$$\cos\frac{w_{48}}{2} = \frac{3 - \sqrt{2}}{\sqrt{23}} \qquad w_{48} = 121^0\ 23'$$

$$\sin\frac{w_{46}}{2} = \sqrt{\frac{20 - 2\sqrt{2}}{23}} \qquad w_{46} = 119^0\ 33'$$

Aus einem Dreikant, dessen Spitze eine achtkantige Ecke, wird

$$\sin\frac{w_{68}}{2} = \sqrt{\frac{20 + 2\sqrt{2}}{23}} \qquad w_{68} = 170^0\ 4'$$

Für die Achsenabschnitte hat man

$$OX = R_8 \quad \text{und}$$

$$OY = OX \operatorname{tg}(135 - \delta) = (3 + \sqrt{2})\, OX$$

$$OZ = R_4 \operatorname{tg}(R_4, k_{46}) = \frac{11 + 6\sqrt{2}}{7} \cdot OX,$$

daher Achsenverhältnis: $OX : OY : OZ = 1 : (3 + \sqrt{2}) : \frac{11 + 6\sqrt{2}}{7}$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 31. Achtundvierzigflach III.

Einbeschrieben ins 26flach II.

Die Mitten der Quadrate, welche Reste von Würfelflächen sind, geben achtkantige, die andern vierkantige, die Dreiecksmittelpunkte sechskantige Ecken.

Der Achsenschnitt ist ein regelmässiges Achteck und

$$R_4 = R_8 = \frac{b}{2}(1+\sqrt{2}) = \frac{k}{2}\sqrt{4+2\sqrt{2}},$$

$$k_{48} = k = \frac{b}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$R_6 = \frac{b}{6}(3+\sqrt{2})\sqrt{3} = k\sqrt{\frac{10+\sqrt{2}}{6}}$$

$$k_{46} = R_4^2 + R_6^2 - 2\,R_4\,R_6 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{k}{3}\sqrt{6}$$

$$k_{68} = \frac{k}{3}\sqrt{18-3\sqrt{2}}, \quad \text{dann}$$

$$O = 4\,k^2\sqrt{21+2\sqrt{2}}$$

und durch Zerlegung wie im § 30

$$J = \frac{2}{3}k^3(2+\sqrt{2})\sqrt{10+\sqrt{2}} \quad \text{und}$$

$$\rho = \frac{k}{2}(2+\sqrt{2})\sqrt{\frac{206+\sqrt{2}}{433}}$$

Zur Berechnung der Winkel wird

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{6}}, \quad \cos\beta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{278-33\sqrt{2}}{102}}, \quad \delta = 67^0\,30',$$

dann

$$\cos\frac{w_{48}}{2} = (1+\sqrt{2})\sqrt{\frac{71-48\sqrt{2}}{433}} \quad w_{48} = 156^0\,26'\,30''$$

$$\sin\frac{w_{46}}{2} = \sqrt{\frac{228+102\sqrt{2}}{433}} \quad w_{46} = 136^0\,0'\,20''$$

$$\sin\frac{w_{68}}{2} = \sqrt{\frac{291+84\sqrt{2}}{433}} \quad w_{68} = 153^0\,13'\,40''$$

Für die Achsenabschnitte hat man $OX = R_8$,

$$OY = OX \operatorname{tg}\delta = OX(1+\sqrt{2})$$

$$OZ = R_4 \operatorname{tg}(R_4, k_{46}) = OX \operatorname{tg}(R_4, k_{46}) = (3+\sqrt{2})\,OX$$

$$OX : OY : OZ = 1 : (1+\sqrt{2}) : (3+\sqrt{2}).$$

§ 32. Inkörper des Zweiunddreissigflachs I.

a) Pyramidenikosaeder II.

Die Mittelpunkte der Zehnecke sind Ikosaederecken, die der Dreiecke Pyramidenspitzen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$R_{10} = \frac{b}{4}\sqrt{50 + 22\sqrt{5}} = \frac{k}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

$$k = \frac{b}{2}(3 + \sqrt{5})$$

$$R_3 = \frac{b}{12}(9\sqrt{3} + 5\sqrt{15}) = \frac{k}{12}(3\sqrt{5} + 1)\sqrt{3}$$

Höhe der Pyramide $h = \frac{k}{6}(\sqrt{5} - 1)\sqrt{3}$

$$J = \frac{5}{12}k^3(3\sqrt{5} + 1) \quad \text{und} \quad k_{310} = \frac{k}{6}\sqrt{30 - 6\sqrt{5}}$$

Höhe der Seitenfläche $h_1 = \frac{k}{2}\sqrt{\frac{7 - 2\sqrt{5}}{3}}$, dann

$$O = 5k^2\sqrt{21 - 6\sqrt{5}}$$

Aus

$$\rho : R_3 = \frac{k}{6}\sqrt{3} : h_1$$

$$\rho = \frac{k}{12}\sqrt{\frac{1146 + 402\sqrt{5}}{29}} = \frac{3J}{O}$$

Ist α der Winkel an der Spitze der Pyramide, dann

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{7 - 2\sqrt{5}}{10 - 2\sqrt{5}}} \quad \text{und}$$

$$\sin\frac{w_{310}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{50 + 6\sqrt{5}}{29}}; \quad w_{310} = 95^0\ 21'\ 50''.$$

Ist γ wie früher der Winkel zwischen Seitenfläche und Grundfläche der Pyramiden, dann

$$\operatorname{tg}\gamma = \sqrt{5} - 1, \quad \gamma = 50^0\ 22'\ 50''$$

$$w_{1010} = 238^0\ 57'$$

b) Pyramidendodekaeder II.

Verbindet man zuerst die Mittelpunkte der Dreiecke, so erhält man Dodekaederecken, dazu sind die Zehnecksmittelpunkte Pyramidenspitzen.

$$R_6 = \frac{b}{12}(9 + 5\sqrt{5})\sqrt{3} = \frac{k}{4}(\sqrt{5} + 1)\sqrt{3}$$

$$k = \frac{b}{3}(4 + \sqrt{5})$$

$$R_5 = \frac{b}{4}\sqrt{50 + 22\sqrt{5}} = \frac{k}{12}\sqrt{170 + 62\sqrt{5}}$$

Pyramidenhöhe $h = \frac{k}{3}\sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{5}}$, daraus

$$J = \frac{5}{12}k^3(13 + 5\sqrt{5})$$

$$k_{56} = \frac{k}{3}\sqrt{\frac{13 + \sqrt{5}}{2}} = R_5^2 + R_6^2 - 2R_5R_6 \cdot \frac{2}{\sqrt{3} + \sqrt{15}}\sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\text{Seitenhöhe} \quad h_1 = \frac{k}{6}\sqrt{17 + 2\sqrt{5}}$$

$$O = 5\,k^2\sqrt{17 + 2\sqrt{5}}$$

$$\rho : R_5 = \frac{k}{2}\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}} : h_1$$

$$\rho = \frac{k}{4}(13 + 5\sqrt{5})\sqrt{\frac{17 - 2\sqrt{5}}{269}} = \frac{3\,J}{O}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{17 + 2\sqrt{5}}{26 + 2\sqrt{5}}} \quad \text{gibt}$$

$$\sin\frac{w_{56}}{2} = \sqrt{\frac{147 + 46\sqrt{5}}{269}} \qquad w_{56} = 149^0\ 3'\ 20''$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{1}{3}\sqrt{65 - 24\sqrt{5}} \quad \text{gibt } \gamma = 48^0\ 17'\ 45''$$

$$w_{66} = 213^0\ 9'\ 20''.$$

§ 33. Inkörper des Zweiunddreissigflachs II.

a) Pyramidendodekaeder III.

Die Mittelpunkte der Sechsecke geben Dodekaederecken, die der Fünfecke Pyramidenspitzen.

$$R_6 = \frac{b}{4}(3 + \sqrt{5})\sqrt{3} = \frac{k}{4}(\sqrt{5} + 1)\sqrt{3}$$

$$k_{66} = k = \frac{b}{2}(1 + \sqrt{5})$$

$$R_5 = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{125 + 41\sqrt{5}}{10}} = \frac{k}{4}\sqrt{\frac{170 - 2\sqrt{5}}{5}}$$

Die Pyramidenhöhe wird $h = k\sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}}$ und

$$J = \frac{k^3}{4}(15 + 11\sqrt{5}) = 4 \,.\, R_5 \,.\, F_5 \quad \text{(vgl. § 33 b.)}$$

$$k_{56} = k\sqrt{\frac{15 - 3\sqrt{5}}{10}}$$

dann die Höhe der Seitenfläche $h_1 = \frac{k}{2}\sqrt{\frac{25 - 6\sqrt{5}}{5}}$

$$O = 3\,k^2\sqrt{125 - 30\sqrt{5}}$$

und wie im vorigen §.

$$\rho = \frac{k}{20}(11\sqrt{5} + 15)\sqrt{\frac{25 + 6\sqrt{5}}{89}} = \frac{3\,J}{O}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{25 - 6\sqrt{5}}{30 - 6\sqrt{5}}} \quad \text{gibt}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\sin \frac{w_{56}}{2} = \sqrt{\frac{93 + 33\sqrt{5}}{178}}, \quad w_{56} = 150^0\ 55'\ 40''$$

ferner
$$\operatorname{tg} \gamma = (2\sqrt{5} - 4), \quad \gamma = 25^0\ 16'\ 18''$$
$$w_{66} = 167^0\ 6'\ 30''.$$

b) **Pyramidenikosaeder III.**

Die Mitten der Fünfecke geben 12 zehnkantige Ikosaederecken, die Sechsecksmitten 20 dreikantige Pyramidenecken.

$$R_{10} = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{125 + 41\sqrt{5}}{10}} = \frac{k}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

$$k_{10\,10} = k = \frac{b}{5}(10 + \sqrt{5})$$

$$R_3 = \frac{b}{4}(3 + \sqrt{5})\sqrt{3} = \frac{k}{76}(35 + 13\sqrt{5})\sqrt{3}$$

Den Inhalt erhält man am einfachsten durch Zerlegung des Körpers in 20 Doppelpyramiden, deren Grundfläche das Ikosaederdreieck und deren Gesamthöhe $= R_3$ ist (anwendbar auf alle seitherigen Pyramidenkörper)

$$J = \frac{20}{3} \cdot R_3 \cdot F_3 = \frac{5\,k^3}{76}(35 + 13\sqrt{5})$$

Die Pyramidenhöhe $h = \frac{k}{57}(12 + 5\sqrt{5})\sqrt{3}$ gibt eine Probe für J und

$$k_{3\,10} = \frac{k}{19}(2\sqrt{5} + 1)\sqrt{10}$$

dann
$$h_1 = \frac{k}{38}\sqrt{479 + 160\sqrt{5}}$$

$$O = \frac{15}{19}k^2\sqrt{479 + 160\sqrt{5}}$$

$$\rho : R_3 = \frac{k}{6}\sqrt{3} : h_1$$

$$\rho = \frac{k}{4}\,\frac{35 + 13\sqrt{5}}{\sqrt{479 + 160\sqrt{5}}} = \frac{3\,J}{O}$$

Zur Bestimmung der Winkel hat man

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{479 + 160\sqrt{5}}}{2(2\sqrt{5} + 1)\sqrt{10}}$$

$$\sin \frac{w_{3\,10}}{2} = \frac{(2\sqrt{5} + 1)\sqrt{10}}{\sqrt{479 + 160\sqrt{5}}} \quad w_{310} = 73^0\ 30'$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{24 + 10\sqrt{5}}{19}, \quad \gamma = 67^0\ 42'\ 53''$$

$$w_{1010} = 273^0\ 36'\ 50''.$$

§ 34. Inkörper des Zweiunddreissigflachs III.

a) **Pyramidenikosaeder IV.**

Die Mittelpunkte der 12 Fünfecke geben Ikosaederecken, die der Dreiecke Pyramidenspitzen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$R_{10} = \frac{b}{5}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} = \frac{k}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

$$k = \frac{b}{5}(5 + \sqrt{5})$$

$$R_3 = \frac{b}{6}(3 + \sqrt{5})\sqrt{3} = \frac{k}{12}(1 + \sqrt{5})\sqrt{15}$$

$$J = \frac{20}{3} R_3 \cdot F_3 = \frac{5\,k^3}{12}(5 + \sqrt{5})$$

Die Höhe der Pyramide ist noch $h = \frac{k}{6}\sqrt{3}$, dann

$$k_{310} = \frac{k}{6}\sqrt{15} \quad \text{und } h_1 = \frac{k}{6}\sqrt{6}$$

$$O = 5\,k^2\sqrt{6}$$

$$\rho = \frac{R_3}{\sqrt{2}} = \frac{k}{24}(1 + \sqrt{5})\sqrt{30} = \frac{3\,J}{O}$$

Zur Winkelberechnung hat man

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{2}{5}},$$

$$\sin\frac{w_{3\,10}}{3} = \frac{1}{4}\sqrt{10}, \quad w_{310} = 104^0\ 28'\ 40''$$

$$\operatorname{tg}\gamma = 1, \quad w_{1010} = 228^0\ 11'\ 23''$$

Um den Körper zu erhalten, errichtet man auf den Flächen eines Ikosaeders Pyramiden, deren Höhen = dem kleinern Abschnitt der Schwerlinien der Dreiecke sind.

b) Pyramidendodekaeder IV.

Die Mittelpunkte der Dreiecke geben die Dodekaederecken.

$$R_6 = \frac{b}{2}\,\frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{k}{4}(1 + \sqrt{5})\sqrt{3}$$

$$k = \frac{b}{3}(\sqrt{5} + 1)$$

$$R_5 = \frac{b}{5}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} = \frac{3\,k}{20}\sqrt{10\,(5 + \sqrt{5})}$$

$$J = 4 \,.\, R_5 \,.\, F_5 = \frac{3}{4}k^3(3\sqrt{5} + 5)$$

Ferner ist

$$h = \frac{3}{20}k\sqrt{10\,(5 + \sqrt{5})} - \frac{k}{20}\sqrt{10\,(25 + 11\sqrt{5})} = \frac{k}{10}\sqrt{5\,(5 - 2\sqrt{5})}$$

$$k_{56} = \frac{k}{2}\sqrt{3} \text{ und } h_1 = \frac{k}{2}\sqrt{2}$$

$$O = 15\,k^2\sqrt{2} \text{ und}$$

$$\rho = \frac{3\,k}{40}(3\sqrt{10} + 5\sqrt{2}) = \frac{3\,J}{O}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ gibt } \sin\frac{w_{56}}{2} = \frac{1}{8}(\sqrt{5} + 1)\sqrt{6}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$w_{56} = 164^0\ 27';$
$\operatorname{tg} \gamma = \sqrt{10 - 4\sqrt{5}}$ liefert $\gamma = 45^0\ 46'\ 40''$ und
$w_{66} = 208^0\ 7'\ 10''.$

§ 35. Hundertzwanzigflach II.

Einbeschrieben ins 62flach I.

Die Mittelpunkte der Zehnecke werden zehnkantige Ecken, die der Sechsecke sechskantige und die der Quadrate vierkantige.

Der Körper besitzt dreierlei Kanten und ist von 120 ungleichseitigen Dreiecken begrenzt.

Aus den Halbmessern R_4, R_{10} und R_6 wird

$$k_{610} = k = \frac{b}{2}(1 + \sqrt{5})\sqrt{2},$$

$$k_{110} = \frac{b}{4}(1 + \sqrt{5})\sqrt{6} = \frac{k}{2}\sqrt{3},$$

$$k_{46} = \frac{b}{2}\sqrt{5 + \sqrt{5}} = \frac{k}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}},$$ und in k ausgedrückt

$$R_4 = \frac{b}{2}(3 + 2\sqrt{5}) = \frac{k}{8}(7 + \sqrt{5})\sqrt{2}$$

$$R_6 = \frac{b}{2}(2 + \sqrt{5})\sqrt{3} = \frac{k}{8}(3 + \sqrt{5})\sqrt{6}$$

$$R_{10} = \frac{b}{2}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} = \frac{k}{4}\sqrt{25 + 5\sqrt{5}}$$

Durch Zerlegung des Körpers in 120 Pyramiden wird der Inhalt erhalten zu

$$J = \frac{5}{8}k^3(10 + 3\sqrt{5})\sqrt{2}$$

Aus den Kanten ergibt sich

$$O = \frac{15}{4}k^2\sqrt{106 - 18\sqrt{5}},$$ und weiter

$$\rho = \frac{3J}{O} = \frac{k}{2}\,\frac{10 + 3\sqrt{5}}{\sqrt{53 - 9\sqrt{5}}}$$

§ 36. Hundertundzwanzigflach III.

Dem 62flach II einbeschrieben.

Die Mitten der Fünfecke geben 12 zehnkantige, die der Dreiecke 20 sechskantige und die der Quadrate 30 vierkantige Ecken des Hundertundzwanzigflachs, das von ungleichseitigen Dreiecken, deren Seiten $k_{110} = k$, k_{46} und k_{610} sind, begrenzt ist.

$$k = \sqrt{R_4^2 + R_{10}^2 - 2R_4R_{10}\cdot\frac{2}{3 + \sqrt{5}}}\sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}} = \frac{b}{4}(1 + \sqrt{5})\sqrt{2}$$

$$k_{46} = \frac{b}{6}\sqrt{3(5 + \sqrt{5})} = k\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{6}}$$

$$k_{610} = b\sqrt{\frac{35 + 9\sqrt{5}}{30}} = k\sqrt{\frac{30 - 4\sqrt{5}}{15}}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$R_4 = \frac{b}{2}(2 + \sqrt{5}) = \frac{k}{4}(3 + \sqrt{5})\sqrt{2}$$

$$R_6 = \frac{b}{6}(3 + 2\sqrt{5})\sqrt{3} = \frac{k}{12}(7 + \sqrt{5})\sqrt{6}$$

$$R_{10} = \frac{3}{10} b \sqrt{25 + 10\sqrt{5}} = \frac{3}{2} k \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{5}}$$

$$\rho = \frac{b^3}{2}(35 + 16\sqrt{5}) = k^3 (10 + 3\sqrt{5})\sqrt{2}$$

Da ein Dreieck in den Kanten

$$\left(\frac{O}{120}\right)^2 = \frac{1}{16}\left\{(k_{610} + k_{46})^2 - k\right\}\left\{k^2 - (k_{610} - k_{46})^2\right\}$$

$$O = k^2 \sqrt{1930 - 570\sqrt{5}} \quad \text{und}$$

$$\rho = 3k \frac{3 + 2\sqrt{5}}{\sqrt{193 - 57\sqrt{5}}}$$

Dass der Körper kein Deltoidsechzigflach ist, kann analytisch gezeigt werden, indem man das Lot vom Mittelpunkt des Körpers auf die Kante k_{610} berechnet. Die letztere müsste Diagonale und Symmetrieachse des Deltoids werden, das durch Zusammenfallen zweier Dreiecksflächen in eine Ebene gebildet würde, und sie würde von der Inkugel des Körpers berührt. Da jenes Lot und ρ verschieden sind, so können die Seitenflächen keine Deltoide sein.

Da die Figuren, auf welche gelegentlich verwiesen worden, leicht zu zeichnen sind, so wurde auf ihre Wiedergabe verzichtet.

Modelle der Körper lassen sich herstellen, wenn man die angegebenen Kantenlängen zur Konstruktion der Seitenflächen benützt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf