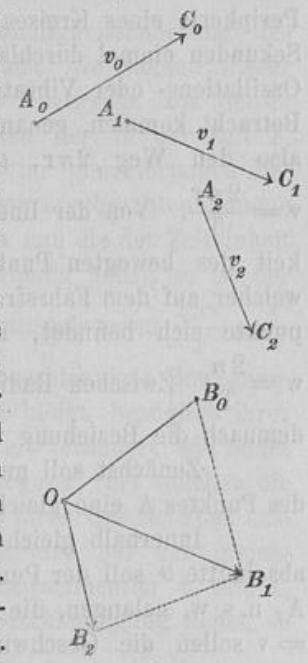
Einleitung.

Wenn ein bewegter materieller Punkt zur Zeit t_0 an einer Stelle A_0 des Raumes eine durch die Strecke v_0, zur Zeit t_1 in A_1 die durch v_1, im Moment t_2 in A_2 die durch v_2 u. s. w. der Gröfse und Richtung nach dargestellte Geschwindigkeit hat, so findet man nach dem Satze vom Parallelogramm der Geschwindigkeiten die Geschwindigkeitsänderungen, welche in den Zwischenzeiten $t_1 - t_0$, $t_2 - t_1 \ldots$ stattgefunden haben, dadurch, dafs man von einem beliebigen Punkte des Raumes O aus Strecken $OB_0 \# v_0$, $OB_1 \# v_1$, $OB_2 \# v_2 \ldots$ zieht und deren Endpunkte verbindet, diese Verbindungslinien $B_0 B_1$, $B_1 B_2 \ldots$ stellen dann die in den Zwischenzeiten $t_1 - t_0$, $t_2 - t_1 \ldots$ erfolgten Geschwindigkeitsänderungen ihrem Gesamtbetrage nach dar. Wenn nun die Geschwindigkeitsänderung eines in regelmäfsiger Bahn sich bewegenden materiellen Punktes ebenso gesetzmäfsig und kontinuierlich erfolgt wie die Lagenänderung, so ist der Weg des Punktes B eine Kurve, welcher Hamilton den Namen „Hodograph" gegeben hat. Der Hodograph ist demnach eine Linie, durch die man in den Stand gesetzt wird, die Geschwindigkeiten eines gesetzmäfsig bewegten materiellen Punktes für jeden Punkt seiner Bahn ihrer relativen Gröfse und Richtung nach anzugeben, sowie das Gesetz nach dem sich seine Geschwindigkeiten ändern, anschaulich darzustellen.



Die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Geschwindigkeit ändert, wird in der Naturlehre Beschleunigung genannt. Wenn es demnach gelingt, den Hodographen bezüglich einer bestimmten Bewegung zu konstruieren, so geben dessen Tangenten für jeden Punkt der Bahn die Richtung der Geschwindigkeitsänderung, also die Richtung der Beschleunigung des bewegten Punktes an.

Da es nun, wie bald gezeigt werden soll, eine grofse Zahl alltäglicher Bewegungsvorgänge giebt, bei welchen die sie veranlassenden Umstände an jeder Stelle des Raumes ihrer relativen Gröfse nach, mit andern Worten die Kräfte, bei bekannter Masse, also auch die Beschleunigungen, bekannt sind, so kennt man für solche Fälle auch die relativen Gröfsen der Hodographentangenten γ_0, γ_1, $\gamma_2 \ldots$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

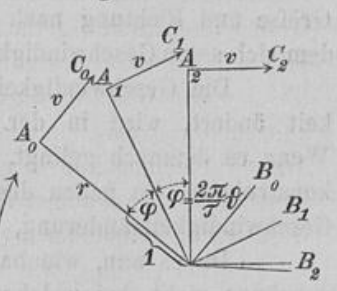
Zieht man von einem Punkte P die Strecken $PD_0 \# \gamma_0$, $PD_1 \# \gamma_1$, $PD_2 \# \gamma_2 \ldots$, so bilden die Punkte D_0, D_1, $D_2 \ldots$ wiederum eine Kurve, auf welcher jeder Punkt D zum entsprechenden Punkte A auf der Bahn des materiellen Punktes in der Beziehung steht, dafs seine Verbindungslinie mit P, also der Fahrstrahl PD, die Gröfse und Richtung der Beschleunigung darstellt, diese Linie mag die Beschleunigungskurve für den Punkt P als Pol heifsen.

Am einfachsten gestaltet sich die Darstellung dieser Beziehungen bei der gleichförmigen Kreisbewegung, welche auch harmonische Bewegung oder, wie jede andere sich regelmäfsig wiederholende Bewegung, von Helmholtz zyklische Bewegung genannt worden ist.

II. Die gleichförmige Kreisbewegung.

Vorausgesetzt ist ein materieller Punkt A, der beliebig oft hintereinander die Peripherie eines Kreises vom Radius r mit gleichbleibender Geschwindigkeit innerhalb T Sekunden einmal durchläuft. T wird Umlaufszeit, Rotationsdauer auch Schwingungsdauer, Oszillations- oder Vibrationszeit je nach den besonderen Umständen, die sonst noch in Betracht kommen, genannt. Da der Punkt in der Zeit T den Kreis mit dem Radius r, also den Weg $2\pi r$, gleichförmig durchläuft, so ist seine lineare Geschwindigkeit $v = \frac{2\pi r}{T}$. Von der linearen Geschwindigkeit unterscheidet man die Winkelgeschwindigkeit des bewegten Punktes, d. h. die Geschwindigkeit eines Punktes der Kreisebene, welcher auf dem Fahrstrahl des bewegten Punktes in der Entfernung „eins“ vom Mittelpunkte sich befindet, also ist die Winkelgeschwindigkeit des bewegten Punktes A $w = \frac{2\pi}{T}$. Zwischen Radius, Winkelgeschwindigkeit und linearer Geschwindigkeit besteht demnach die Beziehung $v = wr$.

Zunächst soll nun gezeigt werden, dafs mit der gleichförmigen Ortsveränderung des Punktes A eine gleichförmige Richtungsänderung seiner Geschwindigkeit verbunden ist.



Innerhalb gleich grofser aufeinanderfolgender Zeitabschnitte ϑ soll der Punkt A von A_0 nach A_1, von A_1 nach A_2 u. s. w. gelangen, die Strecken $A_0 C_0 = A_1 C_1 = A_2 C_2 \ldots = v$ sollen die Geschwindigkeit der Gröfse und Richtung nach darstellen, d. h. die Längeneinheit, welche r mal genommen den Radius vorstellt, soll v mal auf den Strecken AC hintereinander von A aus abgetragen sein, um die Geschwindigkeit der Gröfse nach zu versinnbildlichen. Die Strecken AC stehen auf den zugehörigen Radien in den Endpunkten senkrecht, weil sie die Tangenten des Kreises in den Punkten A sind. Stehen aber zwei Geraden auf den Schenkeln eines Winkels nach einerlei Seite senkrecht, so schliefsen sie denselben Winkel ein wie die Schenkel, also ist der Richtungsunterschied

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

zwischen A_0C_0 und A_1C_1, zwischen A_1C_1 und A_2C_2 derselbe wie zwischen MA_0 und MA_1 und bezw. MA_1 und MA_2, dieselbe Beziehung bleibt bestehen für beliebig klein gewählte Zwischenzeiten und Wege, also ändert die Geschwindigkeit des Punktes A gleichförmig ihre Richtung mit derselben Winkelgeschwindigkeit wie der Fahrstrahl des Punktes A.

Als Hodographen-Pol kann man jeden beliebigen Punkt wählen, für die Erkenntnis des Zusammenhangs der Beziehungen zwischen Ortsveränderung und Geschwindigkeitsänderung ist es aber von besonderem Vorteil, den Mittelpunkt der Bahn des Punktes A als Pol seines Hodographen zu wählen. Um letzteren zu zeichnen, zieht man also durch M die Strecken $MB_0 \perp MA_0$, $MB_1 \perp MA_1$, $MB_2 \perp MA_2, \ldots$ und macht sie alle gleich lang, indem man mit v um M einen Kreis beschreibt, dieser Kreis ist der Hodograph des Punktes A für M als Pol; denn wie MA die relative Lage des Punktes A bezüglich M in einem bestimmten Augenblick darstellt, so stellt der auf MA im Punkte M senkrechte Radius $MB = v$ Gröfse und Richtung seiner Geschwindigkeit in demselben Zeitmoment dar und mit derselben Winkelgeschwindigkeit, mit welcher der Punkt A den Kreis mit dem Radius r durchläuft, durchläuft der Punkt B den Hodographen, also ist die Geschwindigkeit des Punktes B gleich $\frac{2\pi v}{T}$. Der Weg des Punktes B stellt aber in seinen Elementen die gleichförmig vor sich gehende Geschwindigkeitsänderung des Punktes A für aufeinanderfolgende Lagen dar, das Stück B_0B_1 also die Summe dieser Geschwindigkeitsänderungen des Punktes A für die Zeit ϑ seines Übergangs aus seiner Lage in A_0 zu der in A_1, daher der ganze Kreis $2\pi v$ die Gröfse der in der Zeit T, innerhalb welcher der Punkt von A_0 ausgehend wieder nach A_0 im gleichförmigen Bewegungszustande verharrend zurückgekehrt ist, kontinuierlich hervorgebrachten Summe der gleichförmig erfolgten Geschwindigkeitsänderung darstellt. Da nun die der Zeiteinheit entsprechende Geschwindigkeitsänderung einer Bewegung Beschleunigung heifst, so ist der numerische Wert derselben unter den vorstehend gemachten Voraussetzungen $\frac{2\pi v}{T} = \frac{v^2}{r}$ Die gleichförmige Kreisbewegung ist demnach eine gleichförmig beschleunigte Bewegung, bei welcher die Geschwindigkeit zwar der Gröfse nach unverändert bleibt, bezüglich ihrer Richtung aber sich fortdauernd mit gleichbleibender Geschwindigkeit verändert; sie bildet den Gegensatz zur gleichförmig beschleunigten geradlinigen Bewegung, bei welcher die Geschwindigkeit der Richtung nach unverändert bleibt, bezüglich ihrer Gröfse aber sich fortdauernd mit gleichbleibender Geschwindigkeit verändert. Wie also bei der gleichförmig beschleunigten geradlinigen Bewegung die zwischen den Zeitmomenten t_0 und t_1 erfolgte Geschwindigkeitszunahme $v_1 - v_0$ durch $t_1 - t_0$ dividiert Beschleunigung heifst, so dafs, wenn dieselbe mit a bezeichnet wird, die Beziehung stattfindet, $a = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0}$, so ist, wenn die Mafszahl der Beschleunigung einer gleichförmigen Kreisbewegung durch γ ausgedrückt wird, diese Zahl an die Mafszahlen der übrigen Bewegungsdaten r, v, w und T durch die Beziehungen: $\gamma = \frac{2\pi v}{T} = \frac{v^2}{r} = w.v = \frac{4\pi^2}{T^2}\, r = w^2 \cdot r$ geknüpft.

In der geometrischen Darstellung dieser Beziehungen ergeben sich die Richtungen von γ als die der Tangenten des Kreises, welchen B der Endpunkt der Geschwindigkeit beschreibt, ihre Gröfse als dritte Proportionale zu v und r. Zieht man nun um M einen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

dritten Kreis, welcher $\gamma = MD$ zum Radius hat, so stellt derselbe die Beschleunigungskurve des bewegten Punktes für M als Pol dar. Für einen Punkt A auf der Peripherie des Kreises, der die zeitlich aufeinanderfolgenden Örter räumlich darstellt, ist also durch Gröfse und Richtung von MA die Lage des materiellen Punktes für einen bestimmten Augenblick dargestellt. Durch den auf MA im Punkte M nach der Seite, nach der die Bewegung von A erfolgt, senkrecht errichteten Radius MB des mit v um M beschriebenen Kreises ist der Gröfse und Richtung nach die Geschwindigkeit des Punktes A dargestellt. Durch den auf MB im Punkte M nach der Seite, nach der sich B bewegt, senkrecht errichteten Radius des mit $MD = \gamma = \frac{v^2}{r}$ um M beschriebenen Kreises ist der Gröfse und Richtung nach die Beschleunigung dargestellt; denn diese Linie ist gleichgerichtet parallel der im Sinne der Bewegung gezogenen Tangente in B an den Hodographen.

Diese Darstellung, welche der von Maxwell in seinem gemeinverständlichen Werkchen „Matter and Motion" gegebenen im Wesentlichen nachgebildet ist, zeigt, meiner Ansicht nach, einfacher, klarer und in einer sachentsprechenderen Weise, wie die beiden andern, von denen die eine in anderer Weise wie hier, das Parallelogramm der Geschwindigkeiten, die andere das der Wege zur Grundlage hat, wie die Elemente einer gleichförmigen Kreisbewegung untereinander zusammenhängen, insbesondere die Beschleunigung als die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Geschwindigkeit des bewegten Punktes ändert und als eine vom bewegten Punkte nach dem Mittelpunkte des Kreises hingerichtete Wirkung einer zentralen Kraft.

III. Die Kräfte.

Diese geometrischen und numerischen Beziehungen gelten selbstversändlich nur unter der Voraussetzung, dafs die in Betracht kommenden Mafszahlen sich auf dasselbe Mafssystem beziehen. Es gehen aber sofort neue hervor, wenn man die Mafszahl der bewegten Masse, bezogen auf eine dem System angepafste Einheit, mitberücksichtigt; denn Masse mal Beschleunigung = Kraft. Bezeichnet man letztere mit k, so folgt:

$$k = m\gamma = m \cdot \frac{v^2}{r} = m w \cdot v = m \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r = m w^2 \cdot r.$$

Bewegt sich somit eine Masse mit der Winkelgeschwindigkeit w im Kreise mit dem Radius r, so mufs auf einen Umstand geschlossen werden, der dieselbe in ihrer Bahn erhält. Diesen Umstand kennen wir aus der vorausgesetzten Bewegung für jede Lage der Masse m auch der Richtung nach; denn diese geht in Richtung der Beschleunigung, also nach dem Mittelpunkt des Kreises hin; man nennt diese Kraft „Zentripetalkraft", zu deutsch Mittelpunkthinziehkraft, und entsprechend die der Masseneinheit entsprechende Wirkung die Zentripetalbeschleunigung. Eine Wirkung kann nicht ohne Gegenwirkung bestehen; denn sowie die Umgebung auf den Körper, genau mit der gleichen aber ent-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

gegengesetzt gerichteten Kraft wirkt der Körper auf seine Umgebung. Durchläuft also der Körper seine Bahn infolge einer Zugkraft, nach dem Innern einer geschlossenen Bahn, so zieht er an dem Gegenstande, von welchem diese Kraft ausgeht nach aufsen und zwar mit einer Kraft, welche dieselbe Gröfse wie jene hat. Diese Kraft zu deutsch Mittelpunktfliehkraft spannt die Schnur, durch welche der kreisförmig bewegte Körper mit dem Mittelpunkt zusammenhängt, sie wirkt der Kohäsion entgegen, wenn ein homogener Körper um eine Axe rotiert, auch der Adhäsion, wenn verschiedene Stoffe aneinanderhaften oder den rotierenden Körper zusammensetzen. Bei einem gleichförmig rotierenden Körper werden also die Molekularkräfte Adhäsion und Kohäsion um so mehr in Anspruch genommen, je relativ schwerer der betreffende Massenteil bei gleichem Abstande von der Axe ist, daher bei der Rotation verschieden schwerer, nicht mischbarer Flüssigkeiten, wie Quecksilber und Wasser in demselben Gefäfse, die schwerere Flüssigkeit sich nach aufsen drängt. Betrachtet man aber Massenteile eines gleichförmig rotierenden Körpers, welche in verschiedenen Abständen von der Rotationsaxe sich befinden, so erkennt man, dafs jedes einzelne im allgemeinen durch Bruchteile der Kräfte, welche seinen Zusammenhang mit den benachbarten bedingen, gezwungen wird, an deren Rotationsbewegung teilzunehmen, dafs diese Teile der Molekularkräfte, wenn man um gleiche Strecken von der Ahhse aus fortschreitet, zunehmen wie die Glieder einer arithmetischen Reihe, deren Anfangsglied für die Entfernung eins $\varepsilon = \frac{4\pi^2}{T^2}$ ist. Von der Seite der Zentrifugalkräfte betrachtet, erkennt man, dafs diese als Reaktionen gegen die den Molekularkräften entnommenen Zentripetalkräfte ebenfalls dem Abstande von der Rotationsaxe proportional wachsen, also von der Gröfse $k = m\frac{4\pi^2}{T^2}$ im Abstande eins von der Axe bis zu $kr = m\frac{4\pi^2}{T^2}r$ im Abstande r, wenn m die Masse der Molekel eines homogen gedachten Körpers bedeutet, beim nichthomogenen Körper ändert sich die Kraft, wie oben bereits erwähnt, auch noch proportional der Masse der Molekeln. Das Flüssigkeitsteilchen auf der Wäsche in der Zentrifuge drängt somit an allen Stellen des Zentrifugeninhaltes nach aufsen, überwindet infolge der aus seiner Kreisbewegung hervorgehenden Zentrifugalkraft, mit welcher es auf seine Umgebung, die dieseu Zwang herbeiführt, drückt alle Hindernisse, die in Gestalt von Adhäsion und Reibung an den zu passierenden Wäscheteilen seinem Streben nach Aufsen entgegentreten, in immer stärkerem Mafse, so dafs es an die siebartig durchlöcherte Aufsenwand der Trommel gelangend endlich in tangentialer Richtung abfliegt. In der dem Abflug folgenden Zeit beschreibt nun das Wasserteilchen, durch sein Gewicht veranlafst, mit der Peripheriegeschwindigkeit der Trommel als Anfangsgeschwindigkeit diejenige Wurflinie, welche die Stelle des Abflugs zum Scheitel, die durch die Anfangsrichtung gelegte Vertikalebene als Ebene und, wenn r der Radius, w die Winkelgeschwindigkeit der Trommel im Moment des Abflugs ist, $\frac{w^2 r^2}{g}$ zum Parameter hat.

Diese Beziehungen zeigen sich klar und deutlich, wenn man auf einen um eine senkrechte Achse rotierenden Kreisel einen Strahl Wasser oder Sand herabfallen läfst, wobei die auf der umgebenden Tischplatte entstehenden Liniensysteme die Beachtung und Erwägung des Beschauers sowie die Erörterung unter mehreren unwillkürlich herausfordern.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Macht man sich in Gedanken eine Vorstellung von diesen Verhältnissen bei einer homogenen mit der Winkelgeschwindigkeit w rotierenden starren Kugel, so leuchtet ein, dafs die Molekeln im Innern in umso stärkerem Mafse an den bezüglich zur Axe vor ihnen liegenden ziehen und auf die hinter ihnen liegenden drücken, je weiter sie von der Rotationsaxe entfernt sind, die aber an der Oberfläche umso stärker nach aufsen ziehen, je mehr man sich dem Aequator, d. h. dem Kreise, welchen der Endpunkt eines auf der Rotationsaxe senkrechten Kugelradius bei der Rotation beschreibt, nähert, ohne dafs jedoch trotz aller Zug- und Druckkräfte eine merkliche Formänderung erfolgt.

Wollen wir uns also ein plastisches Bild von diesen Beziehungen verschaffen, so müssen wir einen Körper rotieren lassen, dessen Molekeln im Gegensatz zu denen eines starren Körpers durch Kräfte zusammengehalten werden, die eine merkbare Verschiebung derselben infolge der Zentrifugalkräfte bei hinreichend schneller Rotation gestatten, mit andern Worten einen Körper, bei dem Kohäsion und Zentrifugalkraft sich als vergleichbare Gröfsen durch einen Versuch darstellen lassen. Einen solchen Körper verschafft man sich am besten aus dem weichen Ton, von der Beschaffenheit, wie ihn der Töpfer, der bei seinen Manipulationen an der Drehscheibe von den hier behandelten Beziehungen umfangreichen Gebrauch macht, verarbeitet. Das Nähere hierüber findet sich in Weinholdts Demonstrationen Seite 84 der 1. Auflage.

Eine in der dort angeführten Weise hergerichtete und in Rotation versetzte Kugel zeigt durch ihre nachherige Gestalt, insbesondere durch ihre Anschwellung am Aequator und ihre Applattung an den Polen, in welcher Weise die Zentrifugalkräfte sich mit den zentripetalen Kohäsionskräften zusammengesetzt haben.

Da nun anderweitig feststeht, dafs ein Körper, dessen Molekeln zwar keiner gegenseitigen Verschiebung, wohl aber einer Volumänderung einen erheblichen Widerstand entgegensetzen, im Zustande der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung, d. h. im Gleichgewichtszustande, eine seine Masse begrenzende Oberflächenform annimmt, für welche die den einzelnen Punkten entsprechenden Normalen die Kraftrichtungen angeben, so giebt also eine solche Kugel aus weichem Thon, nachdem sie während einer Rotation soviel von ihrer Feuchtigkeit verloren hat, dafs sie nach dem Aufhören der Bewegung keine wesentliche Formänderung infolge des Druckes der höher liegenden Teile auf die untern erleidet, uns ein bleibendes plastisches Bild von der Art und Weise wie die zur Axe senkrechten Zentrifugalkräfte sich mit den allseitig wirksamen Kohäsionen zu Kräften vereinigt haben, deren relative Gröfsen und Richtungen an der Aufsenfläche von der Oberflächengestalt des entstandenen abgeplatteten Rotationselipsoids in aller Ruhe abgelesen werden können.

Eine etwas andere Form nimmt die Demonstration dieser Beziehungen und ihre Diskussion an, wenn statt der Thonkugel der bequemere aus elastischen Bändern hergegerichtete Apparat benutzt wird, wie er als Nebenapparat der Schwungmaschine in den meisten Sammlungen vorhanden ist.

Schwieriger und mit weniger leicht zu beschaffenden Mitteln anzustellen sind die auf denselben Gegenstand bezüglichen Plateau'schen Versuche mit der Oelkugel in der Wasser-Alkohol-Mischung.

Der Hauptzweck dieser Demonstrationen ist bekanntlich den Schülern zu zeigen, dafs bei der Rotation einer plastischen Masse analoge Formen auftreten, wie sie durch

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Messungen an der Erde und an anderen Weltkörpern erkannt worden sind, so dafs von diesen Formen umgekehrt auf deren relativer Weichheit, vor allem aber auf ihre Rotation geschlossen werden kann, die ja meist auch durch andere Umstände ihre Bestätigung erfährt, wodurch sich dann zeigt, dafs dieselben Beziehungen, die auf der Erde zwischen den Kräften und ihren Reaktionen auftreten, auch im Weltall Gültigkeit haben.

IV. Die Kraftfelder.

Der um eine Axe gleichförmig rotierende oder rotierend vorgestellte Körper ist aber noch in anderer Hinsicht einer eingehenden Betrachtung wert, insofern uns nämlich seine Masse von einem System von Kraftlinien durchsetzt erscheinen mufs, die senkrecht zur Rotationsaxe verlaufend einen kräftigen Gegensatz zu den Kraftlinien bilden, deren Vorhandensein, Form und Eigenschaften wir durch Eisenfeile oder feiner und vollendeter durch Eisenpulver im magnetischen Felde nachweisen. Während diese in ihrer Richtung sich zu verkürzen, senkrecht zu ihrer Richtung sich von einander zu entfernen streben, zeigt eine Überlegung der Kraftlinien, von welchen das Feld im Innern eines rotierenden Körpers durchzogen ist, dafs dieselben in ihrer Richtung eine Erweiterung der molekularen Zwischenräume, senkrecht zu ihrer Richtung deren Verkleinerung erstreben, dafs also Abstofsung in Richtung und Anziehung senkrecht zur Richtung der Kraftlinien vorgestellt werden mufs. Anderseits stimmt das Feld des rotierenden Körpers mit dem des magnetischen in der Beziehung überein, dafs die Wirkung den von den Kraftlinien ergriffenen Massen proportional erfolgt, dafs also die Beschleunigung an jeder Stelle des Feldes von der Masse der betreffenden Molekel unabhängig ist und nur von dem Abstande der Molekel von der Axe, dem sie proportional ist, abhängt. Anders liegen die Verhältnisse im magnetischen Felde, das an seinen verschiedenen Stellen umgekehrt proportional dem Quadrate des Abstandes vom Pol seine Stärke verändert. Das leicht vorstellbare Feld der Zentralkräfte eines rotierenden Körpers kann also das Verständnis der magnetischen Kraftlinien vorbereiten und im Verein mit diesen behülflich sein, die schwer darstellbaren elektrischen Kraftliniensysteme vorstellbar zu machen. Ohne ein einigermafsen ausgebildetes Vorstellungsvermögen in dieser Beziehung ist es gegenwärtig kaum möglich, ein elemementar verständliches anschauliches Bild von den Beziehungen zwischen Elektrizität und Magnetismus zu erlangen.

Erwägen wir aber, ob es nicht einfachere räumlich ausgedehnte Felder mit kontinuierlich zusammenhängender Wirkung von Kräften giebt, ob sich uns nicht einfachere Kraftliniensysteme darbieten, so finden wir ein solches bald allüberall auf der Erde; denn ein einfaches Feld dieser Art ist das Feld der irdischen Schwere, welches in mäfsigen Entfernungen von der Oberfläche der Erde und bezüglich eines mäfsig grofsen Kreises rings um den Ort, an welchem Fall oder andere Versuche angestellt werden, als ein von geraden, gleichgerichtet parallelen und gleichstarken Kraftlinien durchzogenes Feld aufgefafst werden kann. Ein Feld dessen Kraftlinien dieselben Eigenschaften haben, wie das

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

der Erdschwere am selben Orte, heifst ein homogenes Feld. Ein zweites homogenes Feld von Kraftlinien ist das des Erdmagnetismus ebenfalls in mäfsigen Entfernungen rings um denselben Ort der Erde.

In einer Menge flüssigen Wassers werden durch den Druck der obern Schichten auf die untern die Reaktionen der letzteren geweckt, die in Beziehung auf einen eingetauchten Körper ein in entgegengesetzter Richtung verlaufendes System von Kraftlinien darstellen, irgend ein Körper, der in dies Feld gerät, wird von den Kraftlinien zweier übereinandergelagerter Felder ergriffen, von denen die einen senkrecht nach unten gehend, der Masse des eingetauchten Körpers, das andere mit Kraftlinien, welche senkrecht nach oben wirken, der verdrängten Wassermasse proportionale Wirkungen hervorruft, so dafs eine Wirkung gleich der Differenz der Stärke beider Felder hervortritt. Es ergiebt sich hieraus ferner, dafs ein reines homogenes Gravitationsfeld nur in einem Vakuum vorhanden ist, während in der Luft Auftrieberscheinungeu wie im Wasser notwendig vorhanden und nachweisbar sind, die aber bei Körpern von grofser Dichtigkeit nicht hervortreten, weil das Gewicht der verdrängten Luftmenge klein im Vergleich zu dem des schwereu Körpers ist, andrerseits bei spezifisch leichteren Körpern der Luftwiderstand mithilft durch seinen überwiegenden Einflufs die Auftriebwirkung, wie sie am Luftballon klar hervortritt, zu verdecken. Das dem Auftrieb in der Luft entsprechende Feld ist noch in der Hinsicht beachtbar, insofern seine Stärke von dem jeweiligen Barometerstande, der Temperatur und der Höhe über dem Erdboden abhängt, mit diesen Elementen sich ändert und daher auch bezüglich desselben Körpers kein homogenes, sondern ein Feld darstellt, das räumlich und zeitlich und zwar unregelmäfsig veränderlich ist.

Zur Demonstration der homogenen Felder eignen sich alle Vorrichtungen, welche gleich der Fallmaschine oder der Galileischen Fallrinne ein eng begrenztes homogenes lineares Feld mit mäfsiger Stärke der Kraftlinie darstellen; denn hier giebt es bezüglich derselben Versuchsreihe nur eine der Gröfse und Richtung nach deutlich bestimmte Kraftlinie, deren Stärke bei der Fallmaschine von dem Quotienten aus Uebergewicht durch Mafse, bei der Fallrinne von deren Neigung abhängt.

V. Die harmonischen Felder.

Die Besprechung des unfreien Falles der Körper im Wasser, an der Fallmaschine und auf der Fallrinne vom Gesichtspunkte der Kraftfelder erweist sich besonders nützlich als Vorbereitung auf die harmonischen Bewegungen.

Die harmonischen Bewegungen gehen in Feldern vor sich, deren Stärke von einem Nullniveau beginnend nach einem einfachen Gesetze veränderlich ist. Dieses Gesetz lautet: Innerhalb der Grenzen eines harmonischen Feldes ist die Stärke der Kraftlinien dem Abstande eines bestimmten Punktes des von den Kraftlinien ergriffenen Körpers vom Nullniveau proportional.

Ein lineares eng begrenztes Feld dieser Art ist leicht bezüglich eines Aräometers,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

das etwa bis zur Mitte seiner gleichförmigen Spindel im Wasser eintaucht, nachweisbar. Die Spindelaxe giebt die Lage des Feldes an, das Wasserniveau, das Nullniveau des Feldes, und der Punkt, in welchem das Nullniveau die ruhende Spindelaxe schneidet, darf als Angriffspunkt der Kraftlinie festgesetzt werden; denn innerhalb eines als starr vorauszusetzenden Körpers kann man jeden Punkt einer ihn durchsetzenden Kraftgeraden als Angriffspunkt der in ihr thätigen Kraft wählen. Dieser Punkt soll hier Schwingungspunkt des Körpers genannt werden.

Zur Demonstration dieses Feldes habe ich mir eine oben offene Aräometerspindel verschafft, dieselbe durch Eingiefsen von Quecksilber so beschwert, dafs der Schwingungspunkt ungefähr in der Mitte der 20 cm langen Spindel liegt. Ein dünnes mit einer groben Teilung in Zentimeter versehenes Holzstäbchen von der Länge der Spindel trägt an seinem oberen Ende ein ebenes Messingplättchen von der Gröfse eines Zweipfennigstückes und wird nach der Füllung mit Quecksilber in die Spindel gesteckt, so dafs das Messingplättchen die Spindelöffnung bedeckt. Letzteres dient zur Aufnahme von Gewichtstücken, durch welche die Stärke des Feldes gemessen werden soll. Mein Aräometer wiegt 54 g, bei Belastung mit 1 g sinkt der Schwingungspunkt um 4 cm, bei Belastung mit 2 g um 8 cm, im Abstande 1 cm von dem Nullniveau ist also die Kraft $\frac{1}{4}$ g = 981 : 4 dyn, daher die Beschleunigung $\varepsilon = 981:(4\cdot 54) = 4{,}5\,\text{sek}^{-2}$. Diese Zahl ε, also die Beschleunigung, welche der im Abstande eins vom Nullniveau befindliche Schwingungspunkt durch die ihn hier ergreifende Kraftlinie erfährt, heifst die Stärke des harmonischen Feldes. Die Lage von Kraftlinie, Nullniveau, Schwingungspunkt und die Feldstärke ε bestimmen die im linearen harmonischen Felde möglichen Bewegungen, welche zu den sogenannten harmonischen Bewegungen gehören bezüglich der Aahängigkeit zwischen Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung des Schwingungspunktes an jeder Stelle des Feldes, in welche er nach der Störung des Gleichgewichts gekommen ist. Die Stärke des Aräometerfeldes ergiebt sich bei bekanntem Spindelquerschnitt Q auch aus der Erwägung, dafs der Auftrieb oder Hinabtrieb um das dem Zuwachs bezw. der Abnahme an eingetauchter Spindellänge entsprechende Gewicht der verdrängten Wassermenge zunimmt bezw. abnimmt. Wenn also x in cm den veränderlichen Abstand des Schwingungspunktes vom Niveau, Q in qcm den Querschnitt der Spindel bezeichnet, so ist $x\cdot Q\cdot 981$ dyn die Kraft in x cm Abstand vom Nullniveau, also $Q\cdot 981$ dyn in der Entfernung eins und, wenn M die Mafse des Aräometers in g darstellt, ist $Q\cdot 981 : M\,\text{sek}^{-2}$ die Beschleunigung im Abstande eins oder die Stärke des Feldes ε.

Ein anderes lineares Kraftfeld ergiebt eine Uförmige Röhre von überallgleichem Querschnitt bezüglich einer darin befindlichen Flüssigkeit. Das Nullniveau ist der Punkt der Röhren Axe, in welcher dieselbe vom Niveau der ruhenden Flüssigkeit bei vertikaler Schenkelstellung geschnitten wird, als Schwingungspunkt soll der höchste Punkt auf der Axe der Flüssigkeitssäule in einem der Schenkel, z. B. im rechten Schenkel, festgesetzt sein, dieser ändert also seine Lage mit den Verschiebungen der Flüssigkeit im Rohr, während das Nullniveau ein fester Punkt ist. Nach diesen Festsetzungen ist klar, dafs ein Höherstehen des Schwingungspunktes im rechten Schenkel um x cm über dem Nullniveau gleichzeitig mit einem Tieferstehen des Flüssigkeitsniveaus um x cm unter dem Nullniveau im linken Schenkel stattfindet, dafs also, wenn s das spec. Gew. der Flüssig-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

keit und Q den Querschnitt des Rohres bezeichnet, $2xQs \cdot 981$ dyn die Kraft ist, mit welcher die Flüssigkeitssäule in die Gleichgewichtslage zurück strebt, folglich ist in 1 cm Abstand vom Nullniveau der Antrieb der Säule $2Qs \cdot 981$ dyn und, wenn 2 L die Länge, also $2LQs$ die Masse in g ist, so ist $\varepsilon = \frac{981}{L}$ sek^{-2} die Beschleunigung im Abstande 1 cm vom Nullniveau d. h. die Stärke des vorstehend behandelten Feldes.

Bringt man an den beiden Verzögerungsgewichten einer Atwood'schen Fallmaschine vermittelst passend gebogener Drähte zwei gleichschwere Haken oder Ösen an und verbindet dieselben durch eine homogene Kette, so erhält man wiederum ein lineares harmonisches Kraftfeld von leicht zu ermittelnder Stärke. Das Nullniveau ist der Punkt am Maafsstabe der Fallmaschine, welcher dem Anschlufs der Kette gegenüber liegt, der Schwingungspunkt der Anschlufs der Kette auf dieser Seite. Das Längeneinheitgewicht der Kette sei p_1 g ihre Länge L cm, so ist $2 p_1 981$ dyn die Kraft, welche bei 1 cm Abstand des Schwingungspunktes vom Nullniveau die an der Fallmaschine beweglich verbundenen Massen in die Gleichgewichtslage zurücktreibt. Wiegen die beiden Verzögerungsgewichte mit den angebrachten Drähten und dem Faden zusammen p_2 g und beträgt die auf die Peripherie des Rades reduzierte Masse desselben p_3 g, so wird durch die oben erwähnte Kraft eine Masse gleich $p_1 L + p_2 + p_3$ in beschleunigte Bewegung versetzt, also ist die Beschleunigung des Schwingungspunktes in der Entfernung eins vom Nullniveau oder die Stärke dieses Feldes $\varepsilon = 2 p_1 \cdot 981 : (p_1 L + p_2 + p_3)$ sek^{-2}.

Das einfache Pendel bestehend aus einer kleinen Kugel am langen dünnen Faden kann für kleine Abweichungen von der Gleichgewichtslage als eine Vorrichtung gebraucht werden, durch welche ein ebenes harmonisches Kraftfeld demonstriert wird. Der Schwingungspunkt ist der Mittelpunkt der Kugel am L cm langen Faden, das Nullniveau der Punkt des Raumes, mit welchem in der Gleichgewichtslage der Schwingungspunkt zusammenfällt. Sind die Abweichungen des Schwingungspunktes von der Gleichgewichtslage oder die Flongationen sehr klein, so dafs man hier Sehnen und Bogen der bei allen möglichen Lagenänderungen vom Schwingungspunkte um den Aufhängepunkt beschriebenen gröfsten Kugelkreise als in die Tangentialebene des tiefsten Punktes fallend ansehen darf, so ist $\varepsilon = \frac{g}{L}$ sek^{-2} die Stärke dieses ebenen harmonischen Feldes; denn die Lage des Schwingungspunktes auf der Peripherie eines Kreises, der in 1 cm Entfernung das Nullniveau umgiebt, hat diese Beschleunigung zur Folge, in jeder andern Entfernung x aber ist die Beschleunigung $x \varepsilon$ cm sek,$^{-2}$ natürlich nur innerhalb der oben angegebenen Grenzen bis etwa 5° Abweichung von der Gleichgewichtslage. Das Nullniveau dieses Feldes ist also von einer Schar konzentrischer Kreise umgeben zu denken, so dafs der Schwingungspunkt in jedem Punkte ein und desselben Kreises den gleichen Antrieb nach dem Nullniveau hin erfährt.

Bei den vorher behandelten linearen Feldern ist durch den Abstand des Schwingungspunktes vom Nullniveau die Beschleunigung und ihre Richtung, nämlich die der einzigen Kraftlinie des Feldes, bestimmt. Bei dem flächenhaft ausgedehnten Felde des Fadenpendels kann man die Kreise, welche das Nullniveau als Linien gleicher Kraft umgeben, Niveaulinien nennen und da die Richtung der Beschleunigung stets nach dem Mittelpunkte, also senkrecht zu den kreisförmigen Niveaulinien erfolgt, so kann man das

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nullniveau als Mittelpunkt eines Strahlenbündels von Kraftlinien, welche in Richtung der Radien zu ihm hinlaufen ansehen. Ein ähnlich von konzentrischen Kreisen als Niveaulinien und den Radien derselben als Kraftlinien durchzogenes Feld breitet sich um das Nullniveau im äufsersten Punkte auf der Axe eines einseitig befestigten elastischen Stabes von gleichförmigem kreisrunden Querschnitt, während andere Querschnittsformen verwickeltere Felder ergeben.

Eine lang herabhängende Spiralfeder, deren Masse gegen die eines sie spannenden unten befestigten Gewichtes gering ist, führt ihre auf- und abgehenden Bewegungen in einem linearen harmonischen Felde aus, dessen Stärke leicht dadurch bestimmbar ist, dafs man nach Zulage von bestimmten Gewichten zur spannenden Masse die senkrechten Verschiebungen des Punktes, den man als Schwingungsunkt am spannenden Gewichte gewählt hat, dessen Ruhelage also das Nullniveau des Feldes angiebt, in Zentimeter mifst. Man überzeugt sich bald, ob die Feder zweckdienlich d. h. so gut gearbeitet ist, dafs bei nicht zu starker Belasung die Dehnungen den zugelegten Gewichten proportional sind. In diesem Fall hat man in Richtung der Axe der Feder ein lineares harmonisches Feld, dessen Stärke ε gleich der Zulage mal 981 dividiert durch die mit der Mafszahl der Masse in g multiplizierte Mafszahl der Dehnung ist. Man kann jedoch die Feder auch als Pendel schwingen lassen, hat also für diesen Fall, rings um die Ruhelage des mit Hülfe eines Fadenpendels leicht bestimmbaren Schwingungspunktes auch noch ein ebenes harmonisches Feld mit den oben erörterten Beziehungen neben dem linearen. Bleibt man innerhalb der Grenzen der vollkommenen Elastizität der Feder und kleiner Abweichungen von der Gleichgewichtslage, so ist, wenn man den Schwingungspunkt des Pendels auch als Angriffspunkt der in Richtung der Axe wirkenden elastischen Kräfte wählt, zwar die Gröfse und Richtung der Resultante beider Wirkungen an allen Stellen des Feldes elementar bestimmbar, die Niveauflächen aber, welche die Punkte gleicher Kraftwirkung umfassen, so verwickelt, dafs sie einer elementaren Behandlung widerstreben.

Ein ideales kugelförmiges harmonisches Kraftfeld liefert uns die Vorstellung einer homogenen nach dem Newton'schen Prinzip anziehend wirkenden kugelförmigen Masse mit leicht ausweichenden Molekeln, innerhalb welcher also von ihr angezogene Massen sich widerstandslos bewegen können; denn da sich leicht beweisen läfst, dafs nur der kugelförmige Massenteil bezüglich eines angezogenen Punktes im Innern der anziehenden Masse in Betracht kommt, der den Abstand des betreffenden Punktes von ihrem Mittelpunkt zum Radius hat, so ist die anziehende Kraft einerseits dem Kubus des Abstandes direkt, anderseifs dem Quadrate dieses Abstandes umgekehrt, also dem einfachen Abstande direkt proportional. Für Massen innerhalb dieses Feldes ist also der Mittelpunkt der Kugel das von kugelförmigen Niveauflächen umgebene Nullniveau. Die nach dem Mittelpunkt hin gehenden Wirkungen bilden ein räumliches Strahlenbüschel von Kraftlinien, die auf den Niveauflächen senkrecht stehen, da sie in Richtung der Radien nach dem Mittelpunkte hinlaufen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

VI. Die Arbeit im homogenen Felde.

Die Kraftlinien im homogenen Felde sind alle gleichgerichtet parallel und an allen Stellen gleich stark. Eine ihrer Einwirkung unterworfene freie Masse denke man sich von denselben erfafst und mit einer gleichbleibenden der Gröfse der Masse proportionalen Kraft in Richtung der Kraftlinien fortgetrieben, dieselben leisten an der Masse eine Arbeit, indem sie dieselbe in eine gleichförmig beschleunigte Bewegung versetzen, also an allen Punkten der Bahn des Schwerpunktes der Masse in jedem Augenblick den relativen Trägheitswiderstand derselben gegen eine Geschwindigkeitsänderung kontinuierlich überwinden. Ist die Stärke des Feldes a, mit andern Worten die der Masse eins entsprechende Kraftwirkung $k_1 = a$ dyn, die der Masse m entsprechende $k = ma$ dyn, also die Beschleunigung der Masse a cm sek^{-2}, so ist die am Ende des Weges von der Länge s cm erarbeitete Geschwindigkeitsänderung mit dem Felde durch die Beziehung verbunden $v^2 = 2as$ cm^2 sek^{-2}, also folgt: $\frac{m}{2}v^2 = mas$, da aber $ma = k$, so ist $\frac{m}{2}v^2 = ks$.

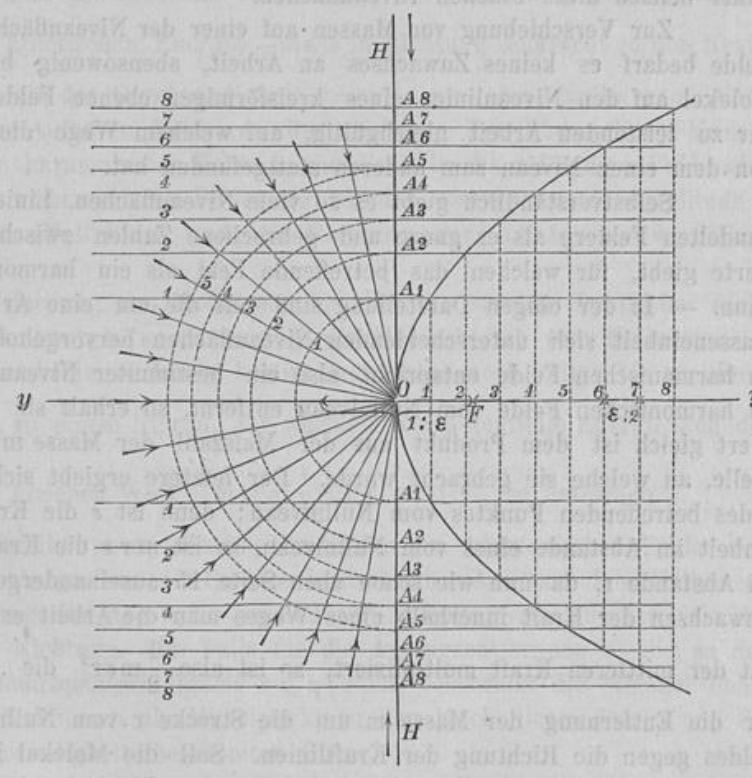
Soll aber die Masse m den Kraftlinien entgegen um die Strecke s verschoben werden, so mufs auf diesem ganzen Wege ein Widerstand in Richtung der Kraftlinien durch eine der vorher betrachteten Kraft k gleiche Kraft überwunden werden, das Produkt aus dieser Kraft mal dem Wege also ks heifst Arbeit. Es ist also bei gleichen parallel den Kraftlinien gemessenen Wegen in einem homogenen Felde die Widerstandsarbeit entgegen den Kraftlinien gleich der Beschleunigungsarbeit in Richtung der Kraftlinien, durch die erste erhält der Körper Arbeitsfähigkeit durch Lage oder sogenannte potentielle Energie, die andere Arbeit giebt ihm Arbeitsfähigkeit durch Bewegung oder sogenannte kinetische Energie. Im homogenen Felde wählt man den Umständen entsprechend ein Niveau als Nullniveau, für das homogene Gravitationsfeld also die Oberfläche der Erde oder den Boden des Versuchsraumes, oder eine horizontale Ebene oberhalb dieses Raumes, wodurch sodann alle einfachen Beziehungen zwischen in Wechselwirkung tretenden Massen, soweit ihr Gewicht und Gegenwirkungen gegen dssselbe in Betracht kommen, im durchsichtigen Zusammenhang darstellbar werden, insbesondere ist durch die Differenzen der Niveauabstände der eine Faktor des Produkts, welches dem Wert der Arbeit beim Übergang aus dem tieferen Niveau in das höhere entspricht, gegeben, während der andere Faktor, die Kraft, aus einer Wägung seinem numerischen Werte nach hervorgeht. Das wesentliche bei dieser Art der Darstellung ist, dafs bezüglich des Arbeitsbetrages nur der Niveauunterschied, nicht die Form des Weges in Rechnung gestellt zu werden braucht.

VII. Die Arbeit im harmonischen Felde.

Soll die Arbeit in einem harmonischen Felde, also in einem Raume dargestellt werden, in welchem die Stärke (oder Zahl) der Kraftlinien proportionel ihrem Abstande vom Nullniveau wächst, so ist naeh derselben Methode wie die Wegeformel bei der gleich-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

förmig beschleunigten geradlinigen Bewegung leicht zu beweisen, dafs bei einer einfachen Verschiebung der Masse m die Gröfse der Verschiebungsarbeit in Richtung entgegen den Kraftlinien dieselbe ist, als wäre die Masse um dieselbe Strecke in einem homogenen Felde verschoben, dessen Stärke der mittleren Stärke des harmonischen Feldes zwischen dem Anfangs- und Endniveau der Verschiebung entspricht. Wenn also im Niveau mit dem Abstande x, vom Nullniveau die Kraft $k_1 = m \cdot x_1 \cdot \varepsilon$, in dem mit dem Abstande x_2, $k_2 = m x_2 \varepsilon$ ist, so ist die mittlere Kraft $k_2 = m\varepsilon \cdot (x_1 + x_2) : 2$, also die Arbeit $A = k \cdot 3 = m\varepsilon(x_2 + x_1)(x_2 - x_1) : 2 = \frac{m}{2}\varepsilon(x_2^2 - x_1^2)$, für x_1 gleich Null stellt ohne Index $A = \frac{m}{2}\varepsilon x^2$ die Gröfse der Arbeit, welche an der Masse m bei ihrer Verschiebung vom Nullniveau bis zum beliebigen Abstande x im harmonischen Felde von der Stärke ε geleistet wird, numerisch dar. Also auf die Masseneinheit bezogen ist $A = \frac{\varepsilon}{2}x^2$, folglich $x^2 = \frac{2}{\varepsilon} \cdot A$. Um zu einer graphischen Darstellung dieser Beziehung im harmonischen Felde zu gelangen, legen wir durch den Punkt O im Nullniveau zwei auf einander senkrechte Geraden, von denen die eine OH entgegen der Richtung der Kraftlinien verläuft und zeichnen eine Parabel mit dem Scheitel O, dem Parameter $1 : \varepsilon$ und der Scheiteltangente parallel den Kraftlinien, schneiden wir dann auf der Axe dieser Parabel vom Scheitelpunkt aus aufeinanderfolgend gleiche Strecken ab, deren Länge gleich $\frac{\varepsilon}{2}$ ist, so stellen die Abscissen der Parabel die sich um die Einheit unterscheidenden aufeinanderfolgenden Werte der Arbeiten dar, welche bei einer Verschiebung im harmonischen Felde entgegen den Kraftlinien um eine Strecke, welche von O bis zum Endpunkte der Ordinate reicht, geleistet werden mufs. Ist das harmonische Feld ein lineares, so zieht man durch die Endpunkte der Ordinaten auf beiden Seiten vom Nullpunkte Parallelen zur Axe, diese schneiden die Kraftlinie beiderseits vom Nullniveau in Punkten A_1, A_2, A_3, ..., deren aufeinanderfolgende Abstände vom Nullniveau sich um den gleichen Arbeitswert eins unterscheiden; diese Punkte heifsen Niveaupunkte.



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ist das Feld ein harmonisch ebenes rings um einen Punkt mit dem Niveau 0 ausgebreitetes Feld, so führt die vorige Konstruktion bezüglich einer beliebigen Kraftlinie dieses Feldes zu den Niveaupunkten derselben und die Kreise mit diesen Niveauabständen um den Mittelpunkt 0 des Feldes zur Darstellung der Linien, welche die Kraftlinien senkrecht durchschneiden. Die Verschiebung der Massenheit von einem dieser Kreise zum folgenden stellt die Arbeitseinheit dar, so dafs also je zwei aufeinanderfolgende Kreise um die Arbeitseinheit von einander getrennt sind, diese Linien heifsen Niveaulinien. Ist das Feld ein kugelförmiges, so schneidet eine durch den Mittelpunkt gelegte Ebene dieses räumliche Feld in einem ebenen Felde, in welchem die vorige Konstruktion zu den Niveaulinien führt. Denkt man sich nun diese Ebene mit ihren Niveaulinien um eine der durch 0 gehenden Kraftlinien um 180° gedreht, so werden die vom Mittelpunkte, dem Nullpunkte des Feldes, ausgehenden Kraftgeraden von Kugelflächen senkrecht durchschnitten und bei einer Verschiebung der Masseneinheit entgegen den Kraftlinien von einer dieser Flächen bis zur nächsten ist die Arbeitseinheit geleistet, daher heifsen diese Flächen Niveauflächen.

Zur Verschiebung von Massen auf einer der Niveauflächen im kugelförm. harmon. Felde bedarf es keines Zuwachses an Arbeit, ebensowenig bei der Fortführung einer Molekel auf den Niveaulinien eines kreisförmigen ebenen Feldes, daher ist es bezüglich der zu leistenden Arbeit gleichgültig, auf welchem Wege die Verschiebung der Masse von dem einen Niveau zum anderen stattgefunden hat.

Selbstverständlich giebt es so viele Niveauflächen, Linien und Punkte in den behandelten Feldern als es ganze und gebrochene Zahlen zwischen Null und dem Grenzwerte giebt, für welchen das betreffende Feld als ein harmonisches betrachtet werden kann. — In der obigen Darstellung sind nur die um eine Arbeitseinheit bezüglich der Masseneinheit sich unterscheidenden Niveauflächen hervorgehoben worden. Jeder Stelle im harmonischen Felde entspricht also ein bestimmter Niveauwert. Wird eine Molekel im harmonischen Felde vom Nullniveau entfernt, so erhält sie eine Arbeitsladung, deren Wert gleich ist dem Produkt aus der Mafszahl der Masse m mal dem Niveauwert der Stelle, an welche sie gebracht wurde. Der letztere ergiebt sich auch aus dem Abstande r des betreffenden Punktes vom Nullniveau; denn ist ε die Kraft bezüglich der Masseneinheit im Abstande eines vom Nullniveau, so ist $m r \varepsilon$ die Kraft bezüglich der Masse m im Abstande r, da nun wie schon oben Seite 15 auseinandergesetzt beim gleichförmigen Anwachsen der Kraft innerhalb eines Weges man die Arbeit erhält, indem man den Weg mit der mittleren Kraft multipliziert, so ist also $\frac{1}{2} m \varepsilon r^2$ die betreffende Arbeitsladung für die Entfernung der Masse m um die Strecke r vom Nullniveau eines harmonischen Feldes gegen die Richtung der Kraftlinien. Soll die Molekel in dieser Entfernung vom Nullniveau verharren, so bedarf es entweder einer hinreichend starken Stütze beziehungsweise Gegenwirkung, welche sie gerade verhindert in Richtung der Kraftlinien zum Nullniveau zurückkehren, oder einer kinetischen Energie senkrecht zur Richtung der Kraftlinien im Betrage von $E = \frac{1}{2} m \varepsilon r^2$, mit andern Worten einer Anfangsgeschwindigkeit von der Gröfse $v = \sqrt{\varepsilon r^2}$, so dafs also die Lagenenergie vermehrt um die kinetische Energie oder die Gesamtenergie $m \varepsilon r^2$ ist. Man erkennt leicht, dafs wenn die beiden Energien diese

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

einander gleichen Werte unverändert behalten eine Kreisbewegung erfolgt, deren Zentripetalbeschleunigung gleich $r\varepsilon$ der potentiellen Energie, deren Zentrifugalbeschleunigung $r\varepsilon$ als Reaktion aus der gleichgrofsen kinetischen Energie $\frac{m}{2}\varepsilon r^2$ entspringt.

VIII. Die Bewegungen im harmonischen Felde.

Wenn die Bewegung im widerstandslosen Raume innerhalb eines harmonischen Feldes vor sich geht, so dafs bei einer Bewegung auf einer Niveaulinie keine Energieverluste durch den Widerstand des Mediums vorkommen, so wird die in der Entfernung a vom Nullniveau mit der kinetischen Energie $\frac{1}{2}ma^2\varepsilon$ in Richtung senkrecht zu den Kraftlinien versehenen Molekel mit der Geschwindigkeit $v = a\sqrt{\varepsilon}$ um das Nullniveau einen Kreis beschreiben und ohne Aufhören fortfahren dies zu thun. Die Ebene dieses Kreises fällt im kreisförmig ebenen harmonischen Felde in das Feld, im kugelförmigen Felde wird die Ebene, in welcher diese harmonische Bewegung mit der vorausgesetzten Amplitude a vor sich geht, durch das Nullniveau und die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit bestimmt.

Ist die Anfangsentfernung von Nullniveau b, aber die zu den Kraftlinien senkrechte Anfangsgeschwindigkeit $v > b\sqrt{\varepsilon}$, so vermag die Molekel sich vom Nullniveau in der durch letzteres und die Anfangsrichtung bestimmten Ebene noch weiter bis zu einem Abstande $a = \frac{v}{\sqrt{\varepsilon}}$, also bis zu einem Niveau, auf welchem die potentielle Energie den der kinetischen Anfangsenergie gleichen Wert $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ma^2\varepsilon$ erreicht, zu entfernen.

Die Molekel beschreibt unter diesen Umständen im harmonischen Felde eine Ellipse mit der Strecke a als grofser, der Strecke b als kleiner Axe und dem Nullniveau als Mittelpunkt, die Richtung der Axe a ist parallel zur Anfangsgeschwindigkeit, die der Axe b senkrecht zu dieser Richtung. Im Falle für die Anfangsentfernung a, die zu den Kraftlinien senkrechte Anfangsgeschwindigkeit $v < a\sqrt{\varepsilon}$ ist, beschreibt die Molekel ebenfalls eine Ellipse um das Nullniveau als Mittelpunkt in der durch diesen Punkt und die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit bestimmten Ebene.

Bildet die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit v mit der Kraftlinienrichtung den Winkel α, so dafs die in Richtung der Kraftlinie fallende Komponente den Wert $p = v \cdot \cos\alpha$, die senkrecht zu derselben, den Wert $q = v \cdot \sin\beta$ hat, so beschreibt die Molekel eine Ellipse, für welche $q : \sqrt{\varepsilon}$ die Länge der einen Axe senkrecht zur Richtung der Kraftlinie und, wenn r die Anfangsentfernung vom Nullniveau, $r + p : \sqrt{\varepsilon}$ die andere Axe in Richtung der Kraftlinie ist, im übrigen ist von der Ellipse der Mittelpunkt, nämlich das Nullniveau, ein Punkt der Peripherie, nämlich die Anfangslage der

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Molekel und die durch diesen Punkt gehende Tangente in Richtung des Anfangsgeschwindigkeit gegeben, dieselbe also vollständig und eindeutig bestimmt. Wird die Molekel in der Entfernung r vom Nullniveau ohne Anfangsgeschwindigkeit einfach losgelassen, so verwandelt das Feld die anfängliche potentielle Energie $\frac{1}{2} m r^2 \varepsilon$ fortschreitend in soviel kinetische Energie als dem Niveauunterschiede zwischen der neuen und der Anfangslage entspricht, sie kommt im Nullniveau also mit der kinetischen Energie $\frac{1}{2} m r^2 \varepsilon$ an, die sie in derselben Kraftlinie auf der andern Seite vom Nullniveau um die Strecke r der Richtung der Kraftlinie entgegen fortführt, so dafs ihre potentielle Energie am Ende dieses Weges den Wert $\frac{1}{2} m r^2 \varepsilon$ erreicht, während die kinetische bis auf 0 abgenommen hat. Auf dem ganzen Wege ist also zunächst die Summe der Energieen konstant, gleich dem ursprünglichen Betrage, derselbe kann auch dadurch erlangt sein, dafs im Nullniveau der Molekel die Geschwindigkeit v erteilt wurde, so dafs sie sich ohne Änderung des Gesamtbetrages ihrer Energie bis $r = \frac{v}{\sqrt{\varepsilon}}$ zu entfernen vermag.

Es wurde vorher dargestellt, dafs eine Molekel, die in der Entfernung r von dem Nullniveau mit einer zu den Kraftlinien senkrechten Anfangsgeschwindigkeit $v = r \cdot \sqrt{\varepsilon}$ versehen worden ist, um dasselbe einen Kreis mit dem Radius r beschreiben mufs, weil nur unter dieser Voraussetzung im widerstandslosen Medium der Gesamtbetrag an kinetischer und potentieller Energie unverändert dem ursprünglich vorhandenen Energiewerte $m r^2 \cdot \varepsilon$ gleich bleibt. Wir denken uns nun in diesem selben harmonischen Felde aufser der gleichförmig im Kreise mit dem Radius r, also mit der Gesamtenergie $m r^2 \varepsilon$, bewegten Molekel eine zweite, welche im Durchmesser dieses Kreises dadurch zur Bewegung angetrieben wurde, dafs sie ruhend im Nullniveau befindlich durch einen Stofs die kinetische Energie $\frac{m}{2} r^2 \varepsilon$ in der Richtung gleichzeitig empfängt, welche mit der momentanen Richtung der Geschwindigkeit der im Kreise bewegten Molekel übereinstimmt. Diese beiden führen nun harmonische Bewegungen von gleicher Schwingungsdauer aus $T = 2\pi : \sqrt{\varepsilon}$ aus. Für die kreisförmig bewegte Molekul ist solches ohne weiteres klar da ihre kinetische Anfangsenergie $\frac{1}{2} m r^2 \varepsilon$, ihre Geschwindigkeit konstant $v = r \sqrt{\varepsilon}$, also ihre Umlaufszeit $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\varepsilon}}$ ist. Um für die geradlinig im Durchmesser bewegte Molekul, die ihre Bewegung ohne Lagenenergie mit der Anfangsgeschwindigkeit $r \sqrt{\varepsilon}$ begonnen hat, zu zeigen, dafs auch ihrer Bewegung dieselbe Dauer einer Periode $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\varepsilon}}$ vom Anfangszustand bis zur Rückkehr in denselben Anfangszustand entspricht, denken wir uns im Nullniveau senkrecht auf der Bahn der zweiten Molekel einen Durchmesser errichtet, welcher also durch die Anfangslage der ersten Molekel geht.

Die Kreisbewegung soll nun als Resultante aus zwei in diesen Durchmessern vor sich gehenden Bewegungen dargestellt werden. In jedem Moment denkt man sich die

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Elemente der Kreisbewegung, also Lage, Geschwindigkeit und Beschleunigung auf jeden der beiden Durchmesser projiziert, dann sind diese Projektionen die Elemente der geradlinigen Bewegungen von 2 Molekulen mit der Masse m, die in ihre Anfangszustände in derselben Zeit T zurückkehren, wie die kreisförmig bewegte Molekel. Die eine geht aus vom Nullniveau mit der potentiellen Energie Null, der kinetischen Energie $\frac{m}{2} \cdot r^2 \varepsilon$, die andere geht mit der kinetischen Energie Null von einem Punkte aus, der um r vom Nullniveau entfernt ist, hat also zu Anfang die potentielle Energie $\frac{m}{2} r^2 \varepsilon$.

Zur Zeit t hat die Molekel auf dem Kreise einen Bogen von der Länge $r\varphi = r\frac{2\pi}{T}t$ zurückgelegt, die Molekel auf dem ersten Durchmesser sich also um die Strecke $x = r \cdot \sin\varphi$ vom Nullniveau entfernt, ihre Geschwindigkeit ist $u = v \cdot \cos\varphi$, ihre Beschleunigung $\eta = -r \cdot \varepsilon \cdot \sin\varphi$, die auf dem zweiten Durchmesser hat in derselben Zeit nach dem Nullniveau hin die Strecke $r - y = r - r \cdot \cos\varphi$ zurückgelegt, ihre Geschwindigkeit ist $u' = -v \cdot \sin\varphi$ und ihre Beschleunigung $\eta' = -r\varepsilon \cdot \cos\varphi$. Die Summe von kinetischer und Lagenenergie ist für die erste $\frac{1}{2} m \varepsilon x^2 + \frac{1}{2} m u^2 = \frac{1}{2} m \varepsilon r^2 \sin^2\varphi + \frac{1}{2} m \varepsilon \cdot r^2 \cdot \cos^2\varphi = \frac{1}{2} m \varepsilon r^2$ und für die zweite $\frac{1}{2} m \varepsilon y^2 + \frac{1}{2} m u'^2 = \frac{1}{2} m \varepsilon r^2 \cdot \cos^2\varphi + \frac{1}{2} m \varepsilon r^2 \sin^2\varphi = \frac{1}{2} m \varepsilon r^2$. Es ist nun leicht zu erkennen, wie bei jeder der geradlinigen Bewegungen der Gesamtbetrag der Energie unverändert bleibt; denn ihre Summanden, die kinetische und die potentielle Energie, haben in jeder von beiden Summen als gemeinsamen Faktor die halbe Energie der im Kreise bewegten Molekel, multipliziert im einen Summanden mit dem Cosinusquadrat, im anderen mit dem Sinusquadrat desselben Arguments $\varphi = \frac{2\pi}{T}t$, welches die Phase der Bewegung genannt wird.

Die Bewegung in dem ersten Durchmesser stellt uns somit diejenige einer Molekel vor, die mit kinetischer Energie vom Nullniveau aus ihre Bewegung beginnt, die zweite diejenige einer Molekel, die von einer Anfangslage im Abstande r vom Nullniveau aus ihre Bewegung ohne Anfangsgeschwindigkeit anfängt.

Jede der Komponenten hat unverändert in allen Lagen halb soviel Energie wie eine Molekel, die im selben harmonischen Felde eine Bewegung im Kreise deshalb ausführt, weil sie aus ihrer Gleichgewichtslage um eine Strecke r entfernt wurde und dann zu der dadurch erlangten Lagenenergie $\frac{m}{2} \varepsilon r^2$ einen gleichen Betrag an kinetischer Energie senkrecht zur Richtung der durch ihre Anfangslage gehenden Kraftlinie empfing.

Wenn aber auch im übrigen die gleichzeitigen Zustände der beiden geradlinigen Bewegungen bezüglich ihrer Entfernung vom Nullniveau, ihrer Geschwindigkeit und Beschleunigung denselben Gegensatz aufweisen wie Sinus und Cosinus desselben Arguments, so stimmen sie doch darin überein, dafs alle Zustände der einen in derselben Reihenfolge bei der andern innerhalb derselben Zeit T wiederkehren. Für alle gleichzeitigen Zustände unterscheiden sich die Argumente ihrer Winkelfunktionen um $\frac{\pi}{2}$, vergleicht man aber die

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Reihenfolge der Zustände der zweiten mit den um $\frac{T}{4}$ späteren der ersten, so stimmen beide überein. Somit kann man die gleichförmige Kreisbewegung im harmonischen Felde als zusammengesetzt aus zwei um den Phasenunterschied $\frac{\pi}{2}$ verschiedene harmonische Bewegungen betrachten, welche in zwei aufeinander senkrechten Durchmessern vor sich gehen. Denkt man sich nun die im Kreise bewegte Molekel ihrer zweiten Bewegung beraubt, so bleibt die im ersten Durchmesser übrig, deren kinetische Anfangsenergie und Anfangslage mit der im Nullniveau angenommenen Molekel übereinstimmt, daher letztere in ihrer Bewegung mit ihr übereinstimmen mufs, also auch dieselbe Zeit $T=\frac{2\pi}{\sqrt{\varepsilon}}$ wie jene gebraucht, um aus ihrer Anfangslage im Nullniveau in die Entfernung r, von da zurück in das Nullniveau, darüber hinaus bis in die Entfernung r auf der andern Seite und von hier wieder in das Nullniveau mit der unveränderten Anfangsenergie zurück zu gehen.

Man erkennt ferner, dafs das einfache Loslassen einer Molekul in der Entfernung r vom Nullniveau dieselbe Folge von Bewegungszuständen hervorbringt, welche die Bewegung im zweiten Durchmesser enthält. Endlich ist leicht einzusehen, dafs jede Durchmesser-Bewegung, also jede geradlinige Bewegung, wie grofs oder klein auch ihre Amplitude, d. h. ihre äufserste Entfernung vom Nullniveau sein mag, bezüglich ihrer Schwingungsdauer T mit der Umlaufszeit einer Kreisbewegung, die im harmonischen Felde mit ihrer Amplitude als Radius ausgeführt wird, übereinstimmt. Da nun alle Kreisbewegungen isochron d. h. von gleicher Dauer der Umlaufszeit sind, so müssen auch alle geradlinigen Bewegungen im harmonischen Felde isochrone Schwingungen sein. Ja wie zwei zu einander senkrechte harmonische Schwingungen mit dem Phasenunterschied $\frac{\pi}{2}$ eine Kreisbewegung zusammensetzen, wenn sie gleiche Amplitude haben, so setzen sie eine elliptische Bewegung zusammen, wenn sie ungleiche Amplituden a und b haben und zwar sind die beiden Amplituden die Halbaxen der Ellipse. Um dieses einzusehen, denkt man sich die Bewegungen im kugelförmig harmonischen Felde vor sich gehend, die Ebene der beiden Komponenten durch eine zweite Ebene geschnitten, die durch die gröfsere Amplitude a geht, und mit der ersten einen Winkel α bildet, so dafs $b=a\cdot\cos\alpha$ ist. In dieser zweiten Ebene denkt man sich senkrecht zur gemeinsammen Schnittlinie eine Seitenbewegung mit der Amplitude a und der Phasendifferenz $\frac{\pi}{2}$, die also mit der in der gemeinsamen Schnittlinie sich zu einer Kreisbewegung zusammensetzt. Die Projektion dieser Seitenbewegung auf die erste Ebene giebt die harmonische Bewegung mit der Amplitude b innerhalb der ersten Ebene, also die Projektion der ganzen Kreisbewegung von der zweiten Ebene auf die erste stellt die Summe der beiden in der ersten Ebene vor sich gehenden Bewegungen dar. Es resultiert also eine Bewegung in elliptischer Bahn mit den Halbaxen a und b und der Umlaufszeit $T=\frac{2\pi}{\sqrt{\varepsilon}}$. Von der Form der Bahn läfst sich in den meisten Fällen absehen, das Wesentliche ist, dafs alle diese geradlinigen, kreisförmigen und elliptischen Bewegungen, welche in demselben einfachen harmonischen Felde vor sich

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

gehen, dieselbe Schwingungsdauer haben, dafs diese nur von der Stärke ε des Feldes abhängt und in allen Fällen die Gröfse $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\varepsilon}}$, hat, wie vordem bewiesen wurde.

Eine theoretische Erörterung von möglichen Vorgängen in der Natur hat nur dann Gültigkeit, wenn ihre Ergebnisse sich durch Versuche bewahrheiten lassen. Als einfachstes Mittel bietet sich das Fadenpendel dar, dessen geradlinige Doppelschwingungen unabhängig von der Amplitude mit seinen kreisförmigen und elliptischen der Dauer nach übereinstimmen, wenn bei allen diesen Schwingungen die Abweichung des Fadens von der Gleichgewichtslage nur wenige Grade beträgt. Ein anderes Mittel die Unabhängigkeit der Schwingungsdauer von der Form der Bahn zu demonstrieren, ist ein runder Stahlstab, der einseitig festgeklemmt wird und genügend lang sein mufs, damit seine Schwingungen langsam genug erfolgen, um gezählt werden zu können.

IX. Die harmonischen Felder in der Natur.

Akustische Vorgänge, die durch einseitig harmonische Felder der beteiligten Molekeln ihre Erklärungen finden, zeigen die Helmholtz'schen Resonatoren oder Klanganalysatoren und die Kundtschen Röhren, bei denen die eingeschlossenen Gasmoleküle durch äufsere Umstände gezwungen werden, sich nach ihrer Umgebung zu richten und genau in der Periode eine Schwingung zu vollenden, welche die Umhüllung vorschreibt. Die Felder der Luftmolekule in den Orgelpfeifen erscheinen insofern weniger beschränkt, als sie neben dem vorwiegenden Grundton einen kleinen Teil der mitgeteilten Energie auf Obertöne zu verwenden vermögen. Dasselbe gilt in verstärktem Mafse von anderen Blasinstrumenten, sowie von den Saiteninstrumenten, bei denen sich die harmonischen Felder durch willkürliche Handgriffe zweckentsprechend gestalten lassen. Vielseitiger als diese sind die Felder der Molekeln in elastischen Platten, wie Telephon, Mikrophon und Phonograph beweisen.

Von dieser Vielseitigkeit bis zu der einer freien Luftmolekel, die alle möglichen Schallschwingungen in die Ferne trägt, oder der einer Äthermolekel im durchsichtigen Medium ist nur ein Schritt. Bezüglich der Erklärung der optischen Erscheinungen durch die Annahme von Äthermolekeln in der Umgebung eines harmonischen Feldes verdienen die Linienspektra der Stoffe im gasförmigen Zustande erwähnt zu werden, und um ein solches hervorzuheben, dessen Äthermolekeln in einem durch den Stoff sehr beschränkten Felde zu schwingen gezwungen sind, mag das des glühenden Natriumdampfes genannt werden.

Der Wasserfaden im U-förmigen Rohr, das Aräometer und die Kette an der Fallmaschine illustrieren das einseitig harmonische Feld einer Molekel. Ein schweres Kügelchen am elastischen Faden kann ein dreiseitiges Feld verkörpern, insofern an demselben Longitudinalschwingungen, transversale Pendelschwingungen und Torsionsschwingungen dargestellt werden können. Vielseitigere Bilder von Feldern einer Molekel lassen sich leicht ersinnen und herstellen, indem man an einem Pendel der vorbeschriebenen Art ein

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

zweites, an dieses ein drittes u. s. w. anknüpft; denn jeder folgende Schwingungskörper hat ein Feld, das aus denen seiner Vorgänger zusammengesetzt ist. Dasselbe läfst sich durch Stahlstäbe erreichen, welche nach verschiedenen Richtungen verschiedene Dicke haben, sowie durch federnde Stahlstreifen, von denen der folgende schwächer als der vorhergehende an das obere Ende des gröfseren mit einer Klemme so befestigt ist, dafs seine Ebene auf der des vorangehenden senkrecht steht. Also durch Vorrichtungen, wie sie zur Herstellung der Lissajousschen Figuren von Wheatstone und Lippich in die physikalische Praxis eingeführt worden sind.

X. Das harmonisch gebaute Medium.

Denken wir uns ein räumlich weit ausgedehntes Volumen, welches nach drei aufeinander senkrechten Richtungen mit gleichweit von einander entfernten Molekeln angefüllt ist, deren jede ein einfaches kugelförmig harmonisches Feld von gleicher Stärke besitzt, so stellt diese Anordnung ein reguläres einfaches harmonisches Medium im Raume vor. Ein ebener Schnitt durch dasselbe soll so gelegt werden können, dafs die Molekeln nach zwei auf einander senkrechten Richtungen sich in gleichen Entfernungen von einander befinden, also parallele Reihen äquidistanter materieller Punkte bilden. Eine dieser harmonischen Punktreihen betrachten wir zunächst als wäre sie ohne die übrigen allein vorhanden und setzen fest, dafs die Molekeln in der dynamischen Beziehung zu einander stehen, dafs ein Betrag an Energie, der in Richtung der Punktreihe irgendwoher ankommend die erste Molekul der Reihe erfafst und dieselbe zur Zeit t_0 aus dem Nullniveau ihres Feldes verschoben hat, dieselbe zu einer harmonischen Bewegung veranlafst, deren Schwingungsdauer der Stärke des Feldes, deren Amplitude der ankommenden Energiemenge entspricht, dafs aber nach Verlauf einer sehr kleinen der Konstitution des Mediums entsprechenden Zeit τ die ersterfafste Molekel anfängt, den vorher erhaltenen Energiebetrag vollständig an die nächste Nachbarin abzugeben, wodurch diese veranlafst wird, innerhalb des gleichen folgenden Zeitteilchens τ die Phase einer harmonischen Bewegung in ihrem Felde nachzuahmen, welche die erste durchlaufen hat. Diese Gesetze sollen für die ganze Reihe verbindlich sein, so dafs bei fortdauernder Energiezufuhr in Richtung der Reihe im beliebig erfafsten Moment $t_0 + 6\tau$ die erste Molekel die 6. Phase ihrer Schwingung, die 2. Molekel die 5. Phase, die 3. die 4. Phase, die 5. die 2. Phase, die 6. die 1. Phase hinter sich hat und die 7. Molekel der Reihe im Begriff ist, ihre harmonische Bewegung zu beginnen.

Es entsteht so die einfache Wellenbewegung in einer Molekelreihe. Über die Form der Bahnen haben wir im Vorstehenden keine Voraussetzungen gemacht, wissen aber, dafs dieselbe einer unendlichen Mannigfaltigkeit in einem räumlich ausgedehnten Felde fähig ist; hierzu kommt, dafs die Stellung der Bahnebene einer jeden einzelnen Molekel zur Richtung ihrer Aufeinanderfolge ebenfalls mannigfach verschieden sein kann,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ohne dafs hiervon das Wesen der Energieübertragung in Form einer Wellenbewegung abhängt.

Nur wird die Vorstellbarkeit dieser Beziehungen und vor allem ihre objektive Darstellung an passenden Modellen erleichtert, wenn wir die Molekeln kongruente parallele Bahnen durchlaufen lassen, sie also entweder in parallelen Kreisen schwingen lassen, deren Ebenen von der Fortpflanzungsrichtung zentral durchschnitten werden, oder in gleichlangen Strecken, die mit der Fortpflanzungsrichtung zusammenfallen, oder auch in derselben Ebene auf ihr senkrecht stehen. Da viele Vorgänge in der Natur vorkommen, die aus den beiden letzten Annahmen erklärt werden können, so hat man diese Wellenformen mit besonderen Namen versehen und die eine die transversale die andere die longitudinale Wellenbewegung genannt. Wellen, in denen die Molekeln nahezu in Kreisen schwingen, pflanzen sich auf der erschütterten Oberfläche einer schweren Flüssigkeit fort. Da hier die Bahnen bei der vorausgesetzten Gleichheit der Kreise alle mit derselben gleichförmigen Geschwindigkeit durchlaufen werden, so führt die Demonstration an dieser Form der Bahn am leichtesten in das, was zur Erfassung des Wesens einer Wellenbewegung notwendig ist, ein.

XI. Demonstration der Wellenbewegungen.

Um die Wellen mit aller Ruhe Schritt vor Schritt vor den Augen der Schüler entstehen zu lassen, habe ich Kreise aus millimeterstarker Pappe von 7 cm Radius ausgeschnitten und aus jeder nahe der Peripherie 12 gleichweit von einander entfernte kreisrunde Löcher von 7 mm Durchmesser mit einem Locheisen ausgeschlagen. Damit diese Scheiben auch zur Demonstration der longitudinalen und transversalen Wellen benutzt werden können, habe ich, nachdem ein Paar diamentral gegenüberstehende Lochmittelpunkte durch eine Grade verbunden waren, je zwei von den Mittelpunkten der übrigen, deren Verbindungslinie auf dem erstgezogenen Durchmesser senkrecht steht, verbunden, und um die entstehenden Schnitte zwischen Durchmesser und Sehnen Löcher mit demselben Locheisen ausgeschlagen. Wenn die erste dieser Scheiben fertig ist, kann man sie zur schnellen Herstellung der Zeichnungen auf den übrigen benutzen; denn legt man diese Scheibe auf eine undurchlochte so, dafs die Peripherieen sich decken; so genügen Punkte, welche mit einem Stahl- oder Bleistift durch die Lochmitten auf der unten liegenden aufgezeichnet werden, zu ihrer Vorbereitung für die Durchlochung.

Um nun mit einer Reihe so vorgerichteter Scheiben die Entstehung einer Wellenbewegung in einer Punktreihe zu erklären, lege ich 16 dieser Scheiben nebeneinander oder durch gleiche Zwischenräume getrennt auf den Experimentiertisch, der nötigenfalls zu verlängern ist. Hierbei fallen die durchlochten Durchmesser in die Gerade, welche die Mittelpunkte der Scheiben verbindet, also in die Fortpflanzungsrichtung der Wellenbewegung. Dann werden auf die Löcher in der Mitte als Symbole der Molekeln Glaskugeln, wie sie in Spielsachläden zu haben sind, gelegt. Die Pappscheibe stellt das

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

harmonische Feld dar, auf welchem sich die Molekel vor Beginn der Bewegung im Nullniveau befindet.

Denken wir uns nun, von der ersten Molekel angefangen, in aufeinanderfolgenden Zeitteilchen τ schrittweise in Richtung der Reihe jeder von den aufeinanderfolgenden Molekeln soviel an Energie mitgeteilt, als sie zu ihrer momentanen Entfernung aus der Gleichgewichtslage, zu ihrer Geschwindigkeit und zur Abgabe an ihre Nachbarin gebraucht, so möge hierdurch nach drei dieser Schritte auf dem durchlochten Durchmesser jede Molekel an der Grenze ihres Feldes die Kreisbahn, welche sie dann von Loch zu Loch fortschreitend zu durchlaufen beginnt, erreicht haben.

Die erste Molekel bekommt zur Zeit t_0 ihren ersten Impuls, zur Zeit $t_0 + 3\tau$ ist sie nach drei Schritten an der Peripherie, die zweite hat nach dieser hin zwei Schritte, die dritte einen Schritt gemacht und die vierte Molekel ist im Begriff dahin den ersten Schritt zu thun. Läfst man nun weitere Impulse eintreffen, so beginnt nach dem dritten Schritt der ersten Molekel erst die eigentliche Wellenbewegung von dieser aus fortzuschreiten. Die ersten Schritte sind den ungeordneten und schwer kontrollierbaren Anfangszuständen zu vergleichen, welche den meisten stationären Bewegungen vorangehen, man denke an den Anlauf der Maschinen. Will man den Sprung in der Energiezufuhr, der beim plötzlichen Übergang in die Kreisbewegung bei obiger Darstellung sich ergiebt, vermeiden, so kann dies dadurch geschehen, dafs man die erwähnten ersten drei Schritte auf drei Löchern in einer Schneckenlinie, welche im ersten Quadranten von der Mitte zur Peripherie läuft, thun läfst.

Nachdem die Entstehung der Welle Schritt vor Schritt vor sich gegangen, betrachten wir den Zustand der Reihe im Moment, wo der 15. Impuls beendet ist. Also zur Zeit $t_0 + 15\tau$. Zu dieser Zeit hat sich die Bewegung bis zur 16. Molekel fortgepflanzt, diese in ihrem Nullniveau befindlich, steht auf dem Sprung ihre Bewegung zu beginnen, die 15. hat den ersten Schritt, die 14. den zweiten, die 13. den dritten Schritt zur Peripherie hin gethan, so dafs letztere eben auf der Peripherie angekommen ist. Die 12. hat auf der Peripherie bereits einen, die 11. Molekel 2 Schritte, die 10. deren 3 u. s. w., jede vorhergehende einen Schritt mehr als die ihr folgende Nachbarin gethan, so dafs also die 12. Molekul 12 Schritte auf dem Kreise zurückgelegt hat, sich also wieder auf dem Punkte befindet, von dem aus sie ihre Kreisbahn begann. Nach abermal 12 Zeitabschnitten τ bei unverminderter Energiezufuhr befinden sich die vorbetrachteten Molekeln vom 1. bis 13. wieder in denselben relativen Lagen wie vorher, setzen wir in Gedanken die Reihe fort, so zeigen die folgenden 12 dieselbe Konfiguration, die folgenden 3 aber markieren die ungeordneten Anfangszustände zur Zeit $t_0 + 27\ \tau$.

Eine Strecke zwischen je zwei dieser Molekeln, welche durch 12 Zwischenräume getrennt sind, sich also in gleicher oder um 2π verschiedener Phase befinden, heifst Wellenlänge, die mit einem Phasenunterschied von $\pi = 180°$ behafteten stehen um eine halbe, die um $\frac{\pi}{2}$ in ihrer Bewegungsphase verschiedenen um $\frac{1}{4}$ Wellenlänge auseinander. Diese Umstände zeigen sich deutlich und in aller Ruhe den Augen der Schüler. Sie lernen vor allem leicht begreifen, dafs die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c der Energie, die Schwingungsdauer T der Molekel und die Länge λ der Welle mit einander durch die Beziehung $\lambda = cT$ verknüpft sein müssen. Auch kann leicht eingesehen werden, dafs c

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

von den Kräften, die zwischen den aufeinanderfolgenden Molekeln wirksam sind, abhängt, während T nur von der Stärke des Feldes abhängen kann, λ aber als Produkt aus beiden hervorgeht, wie es die mathematische Formel darstellt.

Hat man diese Welle mit kreisförmigen Schwingungsbahnen sich bilden lassen, so ist der Übergang von dieser zu den Longitudinalwellen, wie sie dem Fortschreiten von Verdichtungen und Verdünnungen in einem lufterfüllten Kanal entsprechen würden, sehr leicht, wenn man sich etwa 1 cm breite Papierstreifen verschafft, welche man den Molekel-Symbolen der vorher dargestellten Welle senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung gegenüber legt.

Die Demonstration der Entstehung longitudinaler und transversaler Wellen mit den Glaskugeln auf den durchlochten Durchmessern der Pappscheiben ist von der bei kreisförmig bewegten Molekeln kaum verschieden, ja nach einer kurzen Einleitung ist ein Schüler im Stande, die Arbeit des Lehrers fortsetzend, diese Wellen vor den Augen der Mitschüler schrittweise entstehen zu lassen.

XII. Die Bewegungsgleichungen.

Wenn φ_0 den Bogen des Winkels bezeichnet, den der vom Mittelpunkt der Kreisbahn nach der bewegten Anfangsmolekel gedachte Fahrstrahl innerhalb t Sekunden, vom Nullmomente an gerechnet, beschrieben hat, so ist, weil die Geschwindigkeit $v = \frac{2\pi r}{T}$ konstant ist, der durchlaufene Weg $s = r\varphi_0 = r \cdot \frac{2\pi}{T} t$, der absolute Wert der nach dem Mittelpunkt hin gerichteten Beschleunigung $\gamma = \frac{4\pi^2}{T^2} r$, die Lagenenergie $L = \frac{m}{2} \frac{4\pi^2}{T^2} r^2$, ebenso grofs die kinetische Energie, also die Gesamtenergie $E = m \frac{4\pi^2}{T^2} r^2$. Bedenkt man aber, dafs die konstante Gröfse T mit der Stärke ε des Feldes durch die Gleichung $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\varepsilon}}$ verknüpft ist, so ergeben sich, wenn $\varepsilon = k^2$ gesetzt wird, die einfacheren Formen der Bewegungsgleichungen $s = r \cdot kt$, $v = rk$, $\gamma = rk^2$, $L = B = \frac{m}{2} k^2 \cdot r^2$ und $E = mk^2 r^2$.

Für eine um die beliebige Strecke x von der Anfangsmolekel entfernte andere Molekel, welche bei der Fortpflanzungsgeschwindigkeit c der Energie um $\frac{x}{c}$ Sekunden später als erstere ihre Bewegung begonnen hat, ist die Gleichung für den von ihr durchlaufenen Weg $s = r \cdot \varphi x = rk\left(t - \frac{x}{c}\right)$; die übrigen Gleichungen sind dieselben wie für die Anfangsmolekel, wenn vorausgesetzt wird, dafs sich die der Anfangsmolekel mitgeteilte Energie mit unverminderter Intensität von Molekel zu Molekel fortpflanzt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Bezüglich einer longitudinal fortschreitenden Wellenbewegung ergiebt die Demonstration, dafs die auf sie bezüglichen Gleichungen für die Elemente der Bewegung einer beliebigen Molekel, aus denen für die Bewegung in einer kreisförmig schwingenden Punktreihe dadurch hervorgehen, dafs man die Gleichungen für die Projektionen der betreffenden Elemente auf den Durchmesser der Kreisbahn, welcher in die Fortpflanzungsrichtung fällt, aufstellt. Also sind für die um x von der Anfangsmolekel entfernte Molekel die Bewegungsgleichungen, wenn y die Elongation, u die Geschwindigkeit, η die Beschleunigung, α die Lagenenergie und β die kinetische Energie darstellt: $y = r \cdot \cos\varphi_x$, $u = kr \cdot \sin\varphi_x$, $\eta = -k^2 \cdot r\cos\varphi x = -k^2 y$, $\alpha = \frac{m}{2} k^2 r^2 \cdot \cos^2\varphi x$, $\beta = \frac{m}{2} k^2 r^2 \sin^2\varphi x$, $E = \frac{m}{2} k^2 r^2$.

Hierbei ist also vorausgesetzt, dafs der Beginn der Bewegung von einem Momente gerechnet wird, in welchem sich die Anfangsmolekel in der Amplitudenlage befindet.

Die analogen Gleichungen für die Bewegung der Molekeln in einer senkrecht zur Schwingungsrichtung fortschreitenden transversalen Welle erhält man dadurch, dafs man die Gleichungen für die Projektionen der Bewegungselemente der Kreisschwingungen auf den senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung stehenden Durchmesser bildet, also ist bei gleichen Bezeichnungen wie vorher für die longitudinale Welle:

$$y = r \cdot \sin\varphi_x,\quad u = kr\cos\varphi_x,\quad \eta = -k^2 r \sin\varphi_x = -k^2 y,\quad \alpha = \frac{m}{2} k^2 r^2 \sin^2\varphi_x,\quad \beta = \frac{m}{2} k^2 r^2 \cos^2\varphi_x,$$

$$E = \frac{m}{2} k^2 r^2, \text{ worin } k^2 = \varepsilon \text{ und } \varphi_x = \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{c}\right) = 2\pi \frac{ct - x}{\lambda} \text{ ist.}$$

Hierbei ist vorausgesetzt, dafs die Anfangsmolekel beim Beginn der Bewegung, also zur Zeit $t = 0$, sich in dem Nullniveau ihres Feldes befunden hat.

Legt man nun mehrere Reihen der Pappscheiben, etwa 3, parallel nebeneinander, so ergiebt sich ein Bild für die Fortpflanzung der Energie in drei Strahlen, welche einander parallel in derselben Ebene fortschreiten. Hieran knüpft sich leicht die Vorstellung von einer Anzahl solcher Ebenen übereinander, in welchen dieselben Bewegungen vor sich gehen, und es ist leicht einzusehen, dafs die oben abgeleiteten Bewegungsgleichungen auch für Bündel paralleler Strahlen gelten, wenn man alle Molekeln einer Schicht senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung in gleichen Anfangszuständen voraussetzt.

Nach Darstellung der Wellen auf dem vorbeschriebenen Wege werden die Bewegungszustände an einer Machschen Wellenmaschine gezeigt und erörtert.

Wie dieselbe Methode zur Demonstration der stehenden Wellen und der Interferenz-Erscheinungen benutzt werden kann, mag einer späteren Veröffentlichung vorbehalten bleiben.

Druck von W. Pormetter in Berlin.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Bezüglich einer wegung ergiebt die Demon-
stration, dafs die auf si emente der Bewegung einer
beliebigen Molekel, aus förmig schwingenden Punkt-
reihe dadurch hervorgeh rojektionen der betreffenden
Elemente auf den Durch Fortpflanzungsrichtung fällt,
aufstellt. Also sind für entfernte Molekel die Be-
wegungsgleichungen, wer gkeit, η die Beschleunigung,
α die Lagenenergie und $y = r \cdot \cos\varphi_x$, $u = kr \cdot \sin\varphi_x$,

$\eta = -k^2 \cdot r\cos\varphi x = -k^2 y$ $= \frac{m}{2} k^2 r^2$.

Hierbei ist also wegung von einem Momente
gerechnet wird, in welch mplitudenlage befindet.
Die analogen Gl keln in einer senkrecht zur
Schwingungsrichtung for ält man dadurch, dafs man
die Gleichungen für die der Kreisschwingungen auf
den senkrecht zur Fort nesser bildet, also ist bei
gleichen Bezeichnungen e:

$y = r \cdot \sin\varphi_x$, $u = kr\cos\varphi$ $r^2 \sin^2\varphi_x$, $\beta = \frac{m}{2} k^2 r^2 \cos^2\varphi_x$,

$E = \frac{m}{2} k^2 r^2$ $2\pi \frac{ct - x}{\lambda}$ ist.

Hierbei ist vora eim Beginn der Bewegung,
also zur Zeit $t = 0$, sich nden hat.
Legt man nun va 3, parallel nebeneinander,
so ergiebt sich ein Bild n drei Strahlen, welche ein-
ander parallel in dersel ft sich leicht die Vorstellung
von einer Anzahl solch dieselben Bewegungen vor
sich gehen, und es n abgeleiteten Bewegungs-
gleichungen auch für B n man alle Molekeln einer
Schicht senkrecht zur E angszuständen voraussetzt.
Nach Darstellu enen Wege werden die Be-
wegungszustände an ein t und erörtert.
Wie dieselbe M nden Wellen und der Inter-
ferenz-Erscheinungen b äteren Veröffentlichung vor-
behalten bleiben.

Grauskala #13 B.I.G.
A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19
C Y M

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf