Einige

allgemeine barycentrische Beziehungen

nebst Anwendungen auf die Geometrie.

Die Berührungspunkte zwischen den Gebieten der Mechanik und Geometrie sind beinahe ebenso alt, wie die beiden Wissenschaften selbst. Schon Pappos hat in der Einleitung zum 7. Buch der collect. math. eine Beziehung ausgesprochen, wonach die Fläche oder der Körper, die durch Drehung einer Linie oder einer Figur um eine Axe erzeugt werden, durch das Product aus der erzeugenden Linie oder Fläche in die Bahn ihres Schwerpunktes dargestellt werden. Diese als Guldinsche Regel[1]) in der Mechanik bekannte Thatsache ist der erste Versuch, die Fragen der Geometrie mit den barycentrischen Eigenschaften der Körper zu verknüpfen.

Der zweite Schritt in dieser Richtung geschah durch Carnot. In seiner Geometrie der Stellung[2]) führte dieser große französische Mathematiker zum erstenmale den Schwerpunkt gleicher Massen als Punkt der mittlern Entfernungen in die Geometrie ein und leitete daraus eine Menge interessanter, allgemeiner Beziehungen ab. Ja er steht nicht an zu behaupten, «dass dieser Punkt der Geometrie angehört».[3]) Über das Verhältnis der Geometrie zur Mechanik macht er daselbst die beachtenswerte Bemerkung: «Vielleicht sollte die Geometrie nicht einmal da stehen bleiben (den Schwerpunkt in ihren Bereich zu ziehen), sondern auch die Bewegung umfassen . . . *denn Mechanik ist eigentlich nicht die Wissenschaft der Bewegungen, sondern die Wissenschaft der Mittheilung der Bewegung.* Der Begriff der Bewegung ist eben so einfach wie der Begriff der Dimensionen und vielleicht sind beide unzertrennlich.» «Wäre die Theorie der geometrischen Bewegung ergründet, so würde die Mechanik und Hydraulik unendlich vereinfacht werden».

---

[1]) P. Guldin aus St. Gallen, Jesuit und Professor in Graz, hat bekanntlich in seinem Werke de centro gravitatis (1635—1642) jenen Satz von Pappos ausführlich erörtert und auf zahlreiche Fälle angewandt, doch ist ihm der allgemeine Beweis nicht gelungen.

[2]) Carnot, Geometrie der Stellung, übersetzt von Schuhmacher, Altona 1810, S. 67.

[3]) Carnot, l. c. S. 92 ff.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Diese Worte sind prophetisch geworden, gerade wie jener ewig denkwürdige Brief des großen Leibniz an Huygens[1]), worin er, nicht zufrieden mit den Leistungen der Algebra und der Cartesischen Coordinaten, eine rein geometrische Analysis fordert und in seiner «Charakteristik» gefunden zu haben glaubt. Er sagt: «Je croy qu'il nous faut encor une autre analyse proprement geometrique ou lineaire, qui nous exprime directement situm, comme l'Algebre exprime magnitudinem . . . je croy qu'on pourroit manier par ce moyen la mécanique presque comme la Géometrie».

Was diese beiden großen Männer mit nur zweifelhaftem oder theilweisem Erfolg angestrebt haben, das ist heute zur That geworden: durch die Theorie der Äquipollenzen von Bellavitis, die Quaternionen von Hamilton und vor Allem durch die Arbeiten unserer deutschen Mathematiker Möbius und Grassmann sind wir im Besitze von Methoden, die nicht nur für die Physik und ihre Zukunft wichtig zu sein scheinen[2]), sondern auch die Mathematik in mancher Hinsicht zu befruchten und neuzugestalten imstande sind. Jeder Satz der Mechanik eröffnet da neue Ausblicke in die Geometrie und jedes geometrische Gesetz bietet, mechanisch gedeutet, eine Bereicherung der Physik.

Auch die folgenden Untersuchungen werden diese Thatsachen bestätigen. Es wird sich zeigen, dass u. a. ein bekannter Satz der Mechanik im Verein mit einem neuen, allgemeinen Satz, den wir dazu abgeleitet haben, für die Geometrie von der größten Fruchtbarkeit sich erweist. Außerdem wird sich, wie wir hoffen, noch Manches finden, was dem Physiker sowohl als dem Mathematiker von Interesse sein dürfte.

Möge diese Arbeit dazu beitragen, die herrlichen Methoden unserer großen deutschen Mathematiker Möbius und Grassmann immer mehr ins Licht zu setzen; möge sie wenigstens den Erfolg haben, dass neue und bessere Kräfte sich ihnen zuwenden! denn wir sind der Überzeugung, dass gerade die Elementarmathematik von diesen Methoden nur gewinnen kann.

Zum Schlusse fühle ich mich gedrungen, dem Herrn Prof. Dr. V. Schlegel für manche wertvolle Winke hier öffentlich meinen Dank auszusprechen, desgleichen meinem Collegen, Herrn Prof. P. J. Paffrath, der die Freundlichkeit hatte, das Manuscript einer Durchsicht zu unterziehen.

---

[1]) Beilage zu einem Briefe von Leibniz an Huygens am 8. Sept. 1679. (Christ. Hugenii aliorumque saeculi XVII. virorum celebrium exercit. etc. Ed. Uylenbroek. Hagae comitum, 1833. Fasc. I. p. 9)

[2]) Prof. Föppl meint (Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektricität. Leipzig. Teubner 1894, Einleitung.), dass sie zweifellos die mathematische Zeichensprache der Physik der Zukunft sein werden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 1. Erweiterung eines Satzes von Lagrange-Möbius-Carnot.

Es seien $A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$ beliebige Punkte im Raume mit den resp. Gewichten: $m_1, m_2, m_3 \ldots m_n$ und S ihr gemeinsamer Schwerpunkt. Sodann sei S′ der Schwerpunkt derselben Punkte mit den Gewichten $m'_1, m'_2, m'_3 \ldots m'_n$. Einzelne Gewichte sowohl von m_i als m'_i können auch den Wert Null haben. Dann ist nach Möbius-Grassmann

$$sS = m_1A_1 + m_2A_2 + m_3A_3 + \ldots + m_nA_n, \tag{1}$$
$$s = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n.$$

Ebenso

$$s'S' = m'_1A_1 + m'_2A_2 + m'_3A_3 + \ldots + m'_nA_n, \tag{2}$$
$$s' = m'_1 + m'_2 + m'_3 + \ldots + m'_n.$$

Subtrahiert man in Gl. (1) beiderseits sO, und in Gl. (2) s′O, wo O ein beliebiger Punkt des Raumes ist, so wird

$$s\,(S-O) = m_1\,(A_1-O) + m_2\,(A_2-O) + m_3\,(A_3-O) + \ldots + m_n\,(A_n-O)$$
$$s'(S'-O) = m'_1\,(A_1-O) + m'_2\,(A_2-O) + m'_3\,(A_3-O) + \ldots + m'_n\,(A_n-O);$$

daraus

$$ss'(S-S') = (s'm_1-sm'_1)(A_1-O) + (s'm_2-sm'_2)(A_2-O) + \ldots$$
$$+ (s'm_{n-1} - sm'_{n-1})(A_{n-1}-O) + (s'm_n - sm'_n)(A_n-O).$$

Setzt man der Kürze halber: $(s'm_i - sm'_i) = \delta_i$ $(i = 1,2,3,\ldots n)$ und erhebt zum innern Quadrat[1]), so ist

$$(ss')^2(S-S')^2 = \delta_1{}^2(A_1-O)^2 + \delta_2{}^2(A_2-O)^2 + \delta_3{}^2(A_3-O)^2 + \ldots + \delta_n{}^2(A_n-O)^2$$
$$+2[\delta_1\delta_2(A_1-O)|(A_2-O) + \delta_1\delta_3(A_1-O)|(A_3-O) + \ldots$$
$$+\delta_2\delta_3(A_2-O)|(A_3-O) + \delta_2\delta_4(A_2-O)|(A_4-O) + \ldots$$
$$+\delta_i\delta_k(A_i-O)|(A_k-O) + \ldots + \delta_{n-1}\delta_n(A_{n-1}-O)|(A_n-O)].$$

---

[1]) Aus typographischen Rücksichten ist der Strich unter dem innern Quadrat weggelassen, da eine Verwechslung wohl nicht zu befürchten ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nun ist

$$(A_1-A_2) = (A_1-O)-(A_2-O),$$
$$(A_1-A_2)^2 = (A_1-O)^2 + (A_2-O)^2-2(A_1-O) \mid (A_2-O),$$
$$(A_i-A_k)^2 = (A_i-O)^2 + (A_k-O)^2-2(A_i-O) \mid (A_k-O),$$

und

$$2(A_i-O)|(A_k-O) = -(A_i-A_k)^2+(A_i-O)^2+(A_k-O)^2.$$

Diese Werte in die allgemeine Gleichung eingesetzt geben:

$$\begin{aligned}(ss')^2(S\text{-}S')^2 = {} & \delta_1{}^2(A_1-O)^2+\delta_1\delta_2(A_1-O)^2+\delta_1\delta_3(A_1-O)^2+\ldots+\delta_1\delta_n(A_1-O)^2\\ & +\delta_2{}^2(A_2-O)^2+\delta_2\delta_1(A_2-O)^2+\delta_2\delta_3(A_2-O)^2+\ldots+\delta_2\delta_n(A_2-O)^2\\ & +\delta_i{}^2(A_i-O)^2+\delta_i\delta_1(A_i-O)^2+\delta_i\delta_2(A_i-O)^2+\ldots+\delta_i\delta_n(A_i-O)^2\ldots\\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ & -[\delta_1\delta_2(A_1-A_2)^2+\delta_1\delta_3(A_1-A_3)^2+\ldots+\delta_i\delta_k(A_i-A_k)^2+\ldots\\ & +\delta_{n-1}\delta_n(A_{n-1}-A_n)^2],\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}(ss')^2(S-S')^2 = {} & [\delta_1+\delta_2+\delta_3+\ldots\delta_n][\delta_1(A_1-O)^2+\delta_2(A_2-O)^2+\ldots+\delta_n(A_n-O)^2]\\ & -[\delta_1\delta_2(A_1-A_2)^2+\delta_1\delta_3(A_1-A_3)^2+\ldots+\delta_i\delta_k(A_i-A_k)^2\ldots\\ & +\delta_{n-1}\delta_n(A_{n-1}-A_n)^2].\end{aligned} \tag{3}$$

In dieser allgemeinen Formel sind zunächst die Sätze von Lagrange, Möbius und Carnot als Specialfälle enthalten. Wenn nämlich S' nicht der Schwerpunkt des Systems $A_1\ A_2\ A_3\ldots A_n$, sondern ein beliebiger anderer Punkt O ist mit dem Gewichte $s' = 1$, und $m'_1 = m'_2 = m'_3 = \ldots = m'_n = 0$, so wird $\delta_1 = m_1$, $\delta_2 = m_2\ldots\delta_n = m_n$, und

$$\begin{aligned}s^2(S-O)^2 = {} & s[m_1(A_1-O)^2+m_2(A_2-O)^2+m_3(A_3-O)^2+\ldots+m_n(A_n-O)^2]\\ & -[m_1m_2(A_1-A_2)+m_1m_3(A_1-A_3)+\ldots+m_im_k(A_i-A_k)+\ldots\\ & +m_{n-1}m_n(A_{n-1}-A_n)].\end{aligned} \tag{4}$$

Dies ist die bekannte Formel von Lagrange[1]) deren Bedeutung vielleicht nicht weniger in der Geometrie, als in der Mechanik[2]) zu suchen ist.

Wenn O_1 ein zweiter beliebiger Punkt im Raume ist, so erhält man leicht aus der Gleichung von Lagrange die von Möbius:[3])

---

[1]) Oeuvres de Lagrange, T. 11. p. 66. ff. Man vergleiche auch: Oeuvres de Lagrange T. 5; Poinsot, Statique, Cap. 3; Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, Vorles. 4; desgl. Baltzer, Elemente der Mathem. 7. Aufl. V. Buch, § 11: von den Schwerpunkten.

[2]) Schell, Theorie der Bewegung und Kräfte, 2. Aufl., I. Band, VI. Cap. behandelt den obigen Satz von Lagrange unter dem Gesichtspunkt polarer quadratischer Momente eines Punktsystems.

[3]) Möbius, Ges. Werke, Bd. I. S. 580 (Crelles Journal 1843 Bd. 26, S. 26—31). Dort findet man eine Reihe recht interessanter Anwendungen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$s[(S-O)^2-(S-O_1)^2]=m_1[(A_1-O)^2-(A_1-O_1)^2]+m_2[(A_2-O)^2-(A_2-O_1)^2]+\ldots$$
$$+m_{n-1}[(A_{n-1}-O)^2-(A_{n-1}-O_1)^2]+m_n[(A_n-O)^2-(A_n-O_1)^2]. \qquad (5)$$

Für die Werte $m_1 = m_2 = m_3 \ldots = m_n = 1$ gehen die obigen barycentrischen Gleichungen über in die zuerst von Carnot)[1] aufgestellten Formeln für Punkte mittlerer Entfernung, wenn n die Anzahl der Punkte bedeutet:

$$n^2(S-O)^2 = n[(A_1-O)^2+(A_2-O)^2+A_3-O)^2+\ldots\ldots+(A_n-O)^2] \qquad (6)$$
$$-[(A_1-A_2)^2+(A_1-A_3)^2\ldots+(A_i \quad A_k)^2+\ldots(A_{n-1}-A_n)^2],$$

und (7)

$$n[(S-O)^2-(S-O_1)^2]=[(A_1-O)^2-(A_1-O_1)^2]+\ldots+[(A_n-O)^2-(A_n-O_1)^2].$$

Ist endlich im allgemeinsten Fall S′ ein Schwerpunkt des Systems $(A_1, A_2, A_3, \ldots A_n; m'_1, m'_2, m'_3, \ldots m'_n)$, so vereinfacht sich Gl. (3), indem dann, wie man leicht sieht,

$$\delta_1+\delta_2+\delta_3+\ldots+\delta_n=0,$$

somit

$$\begin{aligned}(ss')^2[S-S']^2 = & -(s'm_1-sm'_1)(s'm_2-sm'_2)\,.\,(A_1-A_2)^2\\ & -(s'm_1-sm'_1)(s'm_3-sm'_3)\,.\,(A_1-A_3)^2\\ & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ & -(s'm_2-sm'_2)(s'm_3-sm'_3)\,.\,(A_2-A_3)^2\\ & -(s'm_2-sm'_2)(s'm_4-sm'_4)\,.\,(A_2-A_4)^2\\ & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ & -(s'm_i-sm'_i)(s'm_k-sm'_k)\,.\,(A_i-A_k)^2\\ & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ & -(s'm_{n-1}-sm'_{n-1})(s'm_n-sm'_n)\,.\,(A_{n-1}-A_n)^2.\end{aligned} \qquad (8)$$

Diese Formel ist ebenso symmetrisch als allgemein, da beliebige Gewichte m_i und m'_i verschwinden dürfen.

Wenn also zwei beliebige Systeme von Punkten mit bekannten Massen im Raume gegeben sind, so lässt sich aus den Gewichten und den Entfernungen der Punkte untereinander die Entfernung ihrer Schwerpunkte berechnen.

Die Gewichte m_i, m'_i lassen sich übrigens, wie bereits Möbius[2]) für 5 Punkte gezeigt hat, *eliminieren.* Es sei:

---

[1]) Carnot, Geometrie der Stellung, übers. v. Schuhmacher. 2. T. S. 68 ff.

[2]) Möbius, Ges. W. Bd. I. S. 585 ff. Die Methode der Ableitung ist bei Möbius gegründet auf den barycentr. Calcul, während sich mit Hilfe von Grassmanns äußern Producten die Resultate allgemeiner und einfacher ableiten lassen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$m_1A_1+m_2A_2+m_3A_3+\ldots+m_nA_n=0,$$
$$m_1+m_2+m_3+\ldots+m_n=0.$$

Multipliciert man äußerlich mit: $A_1A_2A_3\ldots A_{i-1}A_{i+1}\ldots A_{n-1}$, so ist

$$m_i\,.\,(A_1A_2A_3\ldots A_{n-1})=m_n\,.\,(A_1A_2A_3\ldots A_{i-1}A_{i+1}\ldots A_{n-1}A_n), \qquad (9)$$

woraus sich das Verhältnis $m_i:m_n$ berechnen lässt. Das Vorzeichen des Verhältnisses soll sich bestimmen nach der Anzahl der Punktvertauschungen, die nöthig sind, um die cyklische Reihenfolge in den Endproducten herzustellen.

So ist für *drei Punkte in einer Geraden*:

$$m_1A_1+m_2A_2+m_3A_3=0,\ m_1+m_2+m_3=0,$$
$$m_1:m_3=-A_2A_3:A_2A_1\ ;\ m_2:m_3=-A_1A_3:A_1A_2,$$

somit

$$A_2A_3\,.\,A_1+A_3A_1\,.\,A_2+A_1A_2\,.\,A_3=0,$$
$$A_2A_3+A_3A_1+A_1A_2=0. \qquad (10)$$

Ähnlich für *4 Punkte in einer Ebene*:

$$m_1A_1+m_2A_2+m_3A_3+m_4A_4=0,\ m_1+m_2+m_3+m_4=0,$$
$$A_2A_3A_4\,.\,A_1-A_3A_4A_1\,.\,A_2+A_4A_1A_2\,.\,A_3-A_1A_2A_3\,.\,A_4=0,$$
$$A_2A_3A_4-A_3A_4A_1+A_4A_1A_2-A_1A_2A_3=0. \qquad (11)$$

Ebenso für *5 Punkte im Raume*:

$$m_1A_1+m_2A_2+m_3A_3+m_4A_4+m_5A_5=0,\ m_1+m_2+m_3+m_4+m_5=0$$
$$A_2A_3A_4A_5.A_1+A_3A_4A_5A_1.A_2+A_4A_5A_1A_2\,A_3+A_5A_1A_2A_3.A_4+A_1A_2A_3A_4.A_5=0$$
$$A_2A_3A_4A_5+A_3A_4A_5A_1+A_4A_5A_1A_2+A_5A_1A_2A_3+A_1A_2A_3A_4=0 \qquad (12)$$

u. s. w.

Das Gesetz in Bezug auf die Zeichen lässt sich sofort überschauen. Höhere Producte von *Punkten* im Raume mit 3 Dimensionen verschwinden identisch. Dagegen hindert nichts die Formeln auf Producte nicht von Punkten, sondern von *Curven und Flächen* auch im 3 dimensionalen Raume anzuwenden.

Da die Gleichungen von Lagrange, Möbius und Carnot einen, bezw. zwei, beliebige Punkte O, O_1 enthalten, so gestatten sie eine Specialisierung.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ist in Gl. (4) $O = S$, so erhält man

$$s[m_1(S-A_1)^2+m_2(S-A_2)^2+m_3(S-A_3)^2+\ldots+m_n(S-A_n)^2]$$
$$= m_1m_2(A_1-A_2)^2+m_1m_3(A_1-A_3)^2+\ \ldots\ +m_im_k(A_i-A_k)^2. \quad (13)$$

Dies giebt eine bekannte Beziehung zwischen der Summe *aller Entfernungen* des Schwerpunkts von den Massenpunkten, und den Entfernungen der Massenpunkte unter einander.

Aus Gl. (4) und (13) erhält man noch eine weitere Relation:[1])

$$s(S-O)^2 = m_1(A_1-O)^2+m_2(A_2-O)^2+m_3(A_3-O)^2+\ \ldots+m_n(A_n-O)^2$$
$$-[m_1(S-A_1)^2+m_2(S-A_2)^2+m_3(S-A_3)^2+\ldots+m_n(S-A_n)^2]. \quad (14)$$

Für $O = A_i$, ist $(A_i-O)^2 = 0$ und

$$s^2(S-A_i)^2 = s[m_1(A_1-A_i)^2+m_2(A_2-A_i)^2+\ldots+m_n(A_n-A_i)^2] \quad (15)$$
$$-[m_1m_2(A_1-A_2)^2+m_1m_3(A_1-A_3)^2+\ldots+m_im_k(A_i-A_k)^2].$$

Diese Formel bestimmt die Entfernung des Schwerpunkts von *einer Ecke* A_i durch die Entfernungen der Massenpunkte unter einander.

Auch aus Gl. (5) und (6) lassen sich durch Specialisierung der Lage der Punkte O, O_1 noch weitere Beziehungen ableiten.

Es sei ferner allgemein

$$m_1A_1+m_2A_2+m_3A_3+\ldots+m_nA_n = 0, \quad m_1+m_2+m_3+\ldots+m_n = 0.$$

Führt man hier $(m_1+m_2+m_3+\ldots+m_n)O$ in die Gleichung ein, quadriert und ordnet, so fällt O wieder fort, und man hat die einfache Beziehung:[2])

$$m_1m_2(A_1-A_2)^2+m_2m_3(A_2-A_3)^2+m_3m_4(A_3-A_4)^2+\ldots+m_im_k(A_i'-A_k)^2 = 0$$
$$(i, k = 1, 2, 3\ldots(n-1), n). \quad (13a)$$

---

[1]) In der Mechanik lautet dieser Satz: «Das polare quadratische Moment eines Massenpunktsystems in Bezug auf irgend einen Punkt O des Raumes als Pol ist die Summe aus dem polaren quadratischen Momente desselben Punktes auf den Mittelpunkt S und dem polaren quadratischen Moment des Massenmittelpunktes S in Bezug auf O, wenn dem Punkte S die Masse des Systems beigelegt wird.» Schell. l. c. S. 77 ff. Man vergleiche auch den in der Mechanik nach Steiner benannten Satz.

[2]) Diese Gleichung ist identisch mit Gl. (13), aber symmetrischer.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 2. Allgemeine Sätze über Punkte mittlern Abstandes.

Der Begriff der mittlern Entfernung ist wohl zuerst von Carnot in die Mechanik und Geometrie eingeführt worden. Seine Fruchtbarkeit ist von Carnot selbst und Andern an vielen Beispielen gezeigt worden, und die folgenden Ausführungen werden vielleicht noch einen kleinen Beitrag dazu liefern. Der Kürze halber soll der Punkt mittlerer Entfernung: *mittlerer Punkt* (englisch: mean point) heißen.

Es sei M der mittlere Punkt eines Systems von n Punkten: $A_1 A_2 \ldots A_n$, M_1 und M_2 die mittlern Punkte zweier Partialsysteme, die sich zusammen zum Gesammtsysteme ergänzen (Ergänzungssysteme). Wenn nun

$$nM = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n,$$
$$n_1 M_1 = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_{n_1},$$
$$n_2 M_2 = A_{n_1} + A_{n_1+1} + \ldots + A_{n_2},$$

so ist, da $n = n_1 + n_2$,

$$(n_1 + n_2)M = n_1 M_1 + n_2 M_2 \,;\; n_1(M - M_1) = n_2(M_2 - M) \,;\; MM_1 : M_2 M = n_2 : n_1 \qquad (16)$$

«Der mittlere Punkt M von n Punkten liegt mit den mittlern Punkten «M_1 und M_2 der beiden Ergänzungssysteme auf einer Geraden, und zwar «so, dass M_1 M_2 von M im Verhältnis $n_2 : n_1$ getheilt wird.»

Analog ist für drei Ergänzungssysteme: $M_1 M_2 M_3$ mit den Gewichten: n_1, n_2, n_3

$$(n_1 + n_2 + n_3)M = n_1 M_1 + n_2 M_2 + n_3 M_3. \qquad (17)$$

«Der mittlere Punkt M von n Punkten im Raume liegt mit den drei «mittleren Punkten $M_1 M_2 M_3$ der drei Ergänzungssysteme in einer Ebene.»

u. s. w.

Diese und ähnliche Sätze[1]), welche für die Mechanik nicht neu sind, gestatten eine sehr einfache und fruchtbare Anwendung in der Geometrie. Ein paar Andeutungen, die allerdings für jeden selbstverständlich sind, der mit den ersten Anfangsgründen der Methoden von Möbius und Grassmann vertraut ist, mögen die Thatsache beleuchten.

Im Dreieck ist

$$3M = A_1 + A_2 + A_3$$
$$2M_1 = A_2 + A_3,\; 2M_2 = A_3 + A_1,\; 2M_3 = A_1 + A_2,$$

somit

$$3M = 2M_1 + A_1 = 2M_2 + A_2 = 2M_3 + A_3.$$

---

[1]) Es ist klar, dass diese Sätze mutatis mutandis auch für beliebige Schwerpunkte gelten.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

«Der Schwerpunkt (mittl. Punkt) M des Dreiecks liegt mit dem mittlern «Punkte M_i je einer Seite und der gegenüberliegenden Ecke A_i auf einer «Geraden und theilt die Strecke M_iA_i im Verhältnis 1 : 2.»

Im ebenen und räumlichen Viereck ist, wenn 1) $n_1 = 3$, $n_2 = 1$

$$4M = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

$$3M_1 = A_2 + A_3 + A_4, 3M_2 = A_3 + A_4 + A_1, 3M_3 = A_4 + A_1 + A_2, 3M_4 = A_1 + A_2 + A_3,$$

somit

$$4M = 3M_1 + A_1 = 3M_2 + A_2 = 3M_3 + A_3 = 3M_4 + A_4.$$

«Der Schwerpunkt M des Tetraeders (mittlerer Punkt beim ebenen Vier-«eck) liegt mit dem Schwerpunkte M_i der Seitenflächen und der gegen-«überliegenden Ecke A_i auf einer Geraden, und theilt die Strecke M_iA_i «im Verhältnis 1 : 3.

Wenn 2) $n_1 = 2$, $n_2 = 2$, so ist

$$2M_1 = A_1 + A_2, 2M_2 = A_2 + A_3, 2M_3 = A_3 + A_4, 2M_4 = A_4 + A_1,$$

$$2M_5 = A_1 + A_3, 2M_6 = M_2 + M_4$$

somit

$$2M = M_1 + M_3 = M_2 + M_4 = M_5 + M_6.$$

«Die Verbindungslinien der Mitten von je 2 gegenüberliegenden Kanten «(Seiten, Diagonalen) beim Tetraeder (ebenen Viereck) schneiden sich «alle im mittleren Punkte M und werden von diesem halbiert».

Wenn 3) $n_1 = 2$, $n_2 = 1$, $n_3 = 1$, so ist

$$4M = A_1 + A_2 + 2M_3 = A_2 + A_3 + 2M_4 = \ldots$$

«Der Schwerpunkt M eines Tetraeders liegt mit je 2 Ecken und dem «Mittelpunkte der den 2 Ecken gegenüberliegenden Kante in einer Ebene. «Alle diese Ebenen schneiden sich somit in einem Punkte, dem Schwerpunkte».

Im Fünfeck ist mit leicht verständlicher Bezeichnung:

$$5M = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$$

und

1) $5M = 3M_1 + 2M_2 + = 3M_3 + 2M_4 = .$

2) $5M = 4M_1 + M_2 = 4M_3 + A_3 = ..$

3) $5M = 3M_1 + A_4 + A_5 = ..$ u. s. w.

«Im Fünfeck liegt der mittlere Punkt M mit dem Schwerpunkte von je «drei Ecken und dem Mittelpunkte der beiden übrigen Ecken in einer

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

«Geraden und theilt die Strecke im Verhältnis 2 : 3. Alle diese Geraden «schneiden sich also in einem Punkte M».

«Im Fünfeck liegt der mittlere Punkt M mit dem Schwerpunkte von «je vier Ecken und der gegenüberliegenden Ecke in einer Geraden und «theilt die Strecke im Verhältnis 1 : 4 Alle diese Geraden schneiden sich «ebenfalls im Punkte M».

«Im Fünfeck liegt der mittlere Punkt M mit dem Schwerpunkte von «je 3 Punkten und den beiden übrigen Punkten in einer Ebene. Alle «diese Ebenen schneiden sich also im Punkte M».

Man sieht, wie man hier leicht zu einer endlosen Anzahl von Beziehungen gelangt. So lässt sich leicht zeigen, dass im *vollständigen Vierseit* der mittlere Punkt des 6 Punktesystems mit den Mitten der drei Diagonalen in einer Geraden liegt und zugleich der Schwerpunkt dieser drei Mittelpunkte ist; u. s. w.

«Wenn man in einem geschlossenen Streckenzug von n Strecken «im Raume diese der Reihe nach in derselben Ordnung und im selben «Verhältnisse $m_1 : m_2$ theilt, so entsteht durch Verbindung der n Theil-«punkte: $M_1 M_2 \ldots M_n$ ein n-Eck, welches mit dem Ureck denselben mittlern «Punkt hat, d. h. concentrisch ist».

Denn es ist

$$nM = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n,$$

$$nM' = M_1 + M_2 + M_3 + \ldots + M_n.$$

Nun ist

$$M_1 = \frac{m_1 A_1 + m_2 A_2}{m_1 + m_2},\quad M_2 = \frac{m_1 A_2 + m_2 A_3}{m_1 + m_2},\quad M_3 = \frac{m_1 A_3 + m_2 A_4}{m_1 + m_2} \ldots$$

somit, wenn eingesetzt[1])

$$nM' = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n,$$

oder

$$M = M'.$$

Schon Carnot hat bewiesen, was sich allerdings mit Hilfe der Punktrechnung leichter zeigen lässt, dass die Polygone und Polyeder über den partiellen mittleren Punkten derselben Ordnung eines n-Ecks mit dem n-Eck selbst concentrisch sind. Eine bemerkenswerte Eigenschaft in Bezug auf die Polygone und Polyeder über den *mittlern Punkten n—1er Ordnung* mag hier noch beigefügt werden. Es sei:

---

[1]) Gergonne hat (Ann. de Math. 1. p. 313) gezeigt, dass die Parallelogramme, die bei der Verbindung der Mitten von ebenen und räumlichen Vierecken entstehen, welche zum selben System von 4 Punkten gehören, alle concentrisch sind. Vgl. Baltzer Elem. d. Math. 4 B. S. 55. 7. Aufl.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$nM = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n,$$

und da es n mittlere Punkte $M_1 M_2 M_3 \ldots M_n$ giebt, *die aus der Combination von je (n—1) Punkten (mittlerer Punkt n—1er Ordnung)* entstehen, so ist, wenn M' der mittlere Punkt von $M_1 M_2 \ldots M_n$ ist:

$$nM' = M_1 + M_2 + M_3 + \ldots + M_n$$

und

$$(n-1)M_1 = 0 + A_2 + A_3 + A_4 + \ldots + A_n,$$
$$(n-1)M_2 = A_1 + 0 + A_3 + A_4 + \ldots + A_n,$$
$$(n-1)M_2 = A_1 + A_2 + 0 + A_4 + \ldots + A_n,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$(n-1)M_n = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_{n-1} + 0,$$

somit

$$(n-1)[M_1 + M_2 + M_3 + \ldots + M_n] = (n-1)[A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n],$$

oder

$$M = M'.$$

Subtrahiert man je zwei $M_i M_k$ von einander, so ist:

$$(n-1)(M_1 - M_2) = (A_2 - A_1)\,;\ (n-1)(M_2 - M_3) = A_3 - A_2 \ldots$$

«Das n-Eck über den mittlern Punkten (n — 1)Ordnung: $M_1 M_2 M_3 \ldots M_n$ «eines n-Ecks ist mit letztern concentrisch und ähnlich. Und zwar ist der «gemeinsame mittlere Punkt M innerer Ähnlichkeitspunkt und die Seiten «des Ursystems sind (n—1)mal so groß, als die des eingeschriebenen «n-Ecks».

So ist *beim Dreieck*: Das Dreieck über den Mitten der Seiten mit dem Urdreieck concentrisch und ähnlich, und die Seiten des Urdreiecks zweimal so groß; beim *Tetraeder* ist das Viereck über den Schwerpunkten der Seitenfläche mit dem erstern concentrisch, ähnlich u. s. w.

Noch eine *bemerkenswerte Beziehung mag hier Platz finden, da sie eine Erweiterung* bekannter Sätze bietet

1.) «Wenn man einen beliebigen Punkt O im Raume mit den Ecken «$A_1 A_2 A_3 \ldots A_n$ eines n-Ecks verbindet und aus den mittlern Punkten (n—1) «Ordnung: $M_1 M_2 \ldots M_n$ zu den Strecken OA_1, OA_2, $OA_3 \ldots OA_n$ Parallele «zieht, so schneiden sich auch diese Parallelen in einem Punkte O_1, und «zwar so, dass MOO_1 auf einer Geraden liegen und die Strecke OO_1 «durch M im Verhältnisse: 1 : n—1 getheilt wird. Die Strecke OA_i ist «das (n-1)fache der Strecke $M_i O_1$».

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2.) «Verbindet man dagegen den Punkt O direct mit den mittlern «Punkten $M_1 M_2 M_3 \ldots M_n$ und zieht aus den Ecken $A_1 A_2 A_3 \ldots A_n$ Parallele «zu $M_1O, M_2O \ldots M_nO$, so schneiden sich auch diese Strecken in einem «Punkte O_2, der in Bezug auf MO analoge Eigenschaften hat wie O_1 in «Bezug auf M und O. Auch ist die Strecke A_iO das (n—1)fache von «M_iO.»

Diese zwei zu O und M gehörigen Punkte wollen wir *aggregierte Punkte* nennen. Es wird sich zeigen, dass nicht nur die sog. merkwürdigen Punkte des Dreiecks ein aggregiertes System zum Schwerpunkt und den Mittelpunkten des Inkreises und Umkreises bilden, sondern dass auch ein analoges System für das Tetraeder und Polyeder besteht.

Der Beweis dieser Sätze ergiebt sich leicht sowohl mit Hilfe der Punktrechnung, als auch aus der Ähnlichkeit der Dreiecke, u. s. w.

§ 3. Verwandte Größensysteme.

1.) Zwei feste Elemente.

Harmonische und involutorische Punktreihen.

a). *Die Conjugierten zu* $A_1 A_2 A_3$ *und* $K_1 K_2 K_3$

Über harmonische und involutorische Beziehungen nach den Principien von Grassmann findet man eine treffliche Abhandlung von V. Schlegel (Raumlehre. Leipzig. Teubner. Bd. 2. S. 65 ff.). Hier sollen die Gleichungen entwickelt werden, insofern sie sich auf *zwei* gegebene Punkte mit gegebenen Massen beziehen. *Verwandt* nennen wir einen Punkt P mit einem andern Punkte M, wenn beide sich aus denselben Punkten $A_1 A_2 A_3 \ldots A_n$ mit denselben Gewichten $m_1 m_2 m_3 \ldots m_n$ nach bestimmten Gesetzen der Größe und Lage nach ableiten lassen. Wir wollen zunächst die drei Conjugierten $K_1 K_2 K_3$ zu drei auf einer Geraden liegenden Punkten $A_1 A_2 A_3$ bestimmen.

Es sei:

$$m_1 A_1 + m_2 A_2 + m_3 A_3 = 0, \quad m_1 + m_2 + m_3 = 0,$$

dann ist offenbar:

$$\begin{aligned}
\frac{A_1 - A_2}{A_3 - A_1} &= \frac{m_3}{m_2}, & \frac{K_1 - A_2}{A_3 - K_1} &= -\frac{m_3}{m_2}, \\
\frac{A_2 - A_3}{A_1 - A_2} &= \frac{m_1}{m_3}, & \frac{K_2 - A_3}{A_1 - K_2} &= -\frac{m_1}{m_3}, \\
\frac{A_3 - A_1}{A_2 - A_3} &= \frac{m_2}{m_1}, & \frac{K_3 - A_1}{A_2 - K_3} &= -\frac{m_2}{m_1}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Setzt man für $m_3 = -(m_1 + m_2)$, und für $m_1 : m_2 = \mu$, so erhält man die bekannte, aber wenig symmetrische Form für conjugierte Streckenverhältnisse.

Daraus lassen sich für die 6 Punkte folgende vier Gleichungen, bezogen auf A_1, A_2 als Fundamentalpunkte, ableiten:

$$\begin{aligned} (m_1+m_2)A_3 &= m_1A_1+m_2A_2, \\ (m_1-m_2)K_3 &= m_1A_1-m_2A_2, \\ (2m_1+m_2)K_2 &= 2m_1A_1+m_2A_2, \\ (m_1+2m_2)K_1 &= m_1A_1+2m_2A_2. \end{aligned} \tag{19}$$

Multipliciert man diese und ähnliche Gleichungen der Reihe nach mit den beliebigen Raumpunkten: O_1, (O_1O_2), $(O_1O_2O_3)$, so erhält man die entsprechenden Gleichungen für Strecken, Ebenen, Räume. Was die Lage der Punkte $A_3K_3K_1K_2$ gegen A_1A_2 anlangt, so liegen sie nach Gl. (19) insgesammt zwischen A_1A_2, mit Ausnahme von K_3, das für $m_1 > m_2$ über A_1 und für $m_1 < m_2$ über A_2 hinaus liegt.

Bestimmt man für

$$(m_1+2m_2)K_1+(m_1-m_2)K_3-(2m_1+m_2)K_2 = 0$$

nach Gl. (18) die Conjugierten, so findet man, dass es $A_1A_2A_3$ ist.

b). *Die abgeleiteten conjugierten Punktsysteme.*

Wie den drei Punkten $A_1A_2A_3$ das conjugierte System $K_1K_2K_3$ entspricht, so lässt sich auf für jede Combination der 6 Punkte $A_1A_2A_3K_1K_2K_3$ ein conjugiertes System finden, welches wir zum Unterschied vom ersten: das *abgeleitete (derivierte), conjugierte System* nennen wollen. Zu diesem Zwecke stellt man zwischen den 3 in Frage kommenden Punkten aus Gl. (19) eine Beziehung her, woraus sich dann, ebenfalls nach Gl. (19), die Gleichungen der abgeleiteten Conjugierten durch A_1A_2 ausdrücken lassen. Die folgende Tabelle giebt eine Zusammenstellung des gesammten Systems. Da das Gewicht des Summenpunktes gleich der Summe der Gewichte der Summanden ist, so konnten wir des Raumes halber die betreffenden Gewichte fortlassen. Die vollkommene Analogie der Derivierten von $A_1A_2A_3$ und $K_1K_2K_3$ ersieht man leicht aus den Tabellen.

Aus dem neugewonnenen Punktsystem ließen sich Derivierte höherer Ordnung ableiten und die Verwandtschaft harmonisch gelegener Punkte beliebig erweitern.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Tabelle der derivierten harmonischen Punktgruppen.

$A_1A_2A_3$	$(m_1+m_2)A_3 = m_1A_1+m_2A_2$	K_3	K_1	K_2
$K_1A_1A_2$	$K_1 = m_1A_1+2m_2A_2$	$D_1 = m_1A_1-2m_2A_2$	$D_2 = m_1A_1+4m_2A_2$	$D_3 = A_3$
$K_1A_2A_3$	$K_1 = (m_1+m_2)A_3+m_2A_2$	$E_1 = A_1$	$E_2 = 2m_1A_1+3m_2A_2$	$E_3 = m_1A_1+3m_2A_2$
$K_1A_3A_1$	$K_1 = 2(m_1+m_2)A_3-m_1A_1$	$F_1 = 3m_1A_1+2m_2A_2$	$F_2 = A_2$	$F_3 = 3m_1A_1+4m_2A_2$
$K_2A_1A_2$	$K_2 = 2m_1A_1+m_2A_2$	$D_1 = 2m_1A_1-m_2A_2$	$D_2 = A_3$	$D_3 = 4m_1A_1+m_2A_2$
$K_2A_2A_3$	$K_2 = 2(m_1+m_2)A_3-m_2A_2$	$E_1 = 2m_1A_1+3m_2A_2$	$E_2 = 4m_1A_1+3m_2A_2$	$E_3 = A_1$
$K_2A_3A_1$	$K_2 = (m_1+m_2)A_3+m_1A_1$	$F_1 = A_2$	$F_2 = 3m_1A_1+m_2A_2$	$F_3 = 3m_1A_1+2m_2A_2$
$K_3A_1A_2$	$K_3 = m_1A_1-m_2A_2$	$D_1 = A_3$	$D_2 = m_1A_1-2m_2A_2$	$D_3 = 2m_1A_1-m_2A_2$
$K_3A_2A_3$	$K_3 = (m_1+m_2)A_3-2m_2A_2$	$E_1 = m_1A_1+3m_2A_2$	$E_2 = A_1$	$E_3 = m_1A_1-3m_2A_2$
$K_3A_3A_1$	$K_3 = -(m_1+m_2)A_3+2m_1A_1$	$F_1 = 3m_1A_1+m_2A_2$	$F_2 = 3m_1A_1-m_2A_2$	$F_3 = A_2$
$K_1K_2K_3$	$(m_1+2m_2)K_1-(2m_1+m_2)K_2 = (m_2-m_1)K_3$			
$A_1K_1K_2$	$A_1 = 2(2m_1+m_2)K_2-(m_1+2m_2)K_1$	$\mathfrak{D}_1 = 5m_1A_1+4m_2A_2$	$\mathfrak{D}_2 = 7m_1A_1+2m_2A_2$	$\mathfrak{D}_3 = K_3$
$A_1K_2K_3$	$A_1 = (2m_1+m_2)K_2+(m_1-m_2)K_3$	$\mathfrak{E}_1 = K_1$	$\mathfrak{E}_2 = 4m_1A_1-m_2A_2$	$\mathfrak{E}_3 = 5m_1A_1+m_2A_2$
$A_1K_3K_1$	$A_1 = (m_1+2m_2)K_1+2(m_1-m_2)K_3$	$\mathfrak{F}_1 = m_1A_1-4m_2A_2$	$\mathfrak{F}_2 = K_2$	$\mathfrak{F}_3 = 5m_1A_1-2m_2A_2$
$A_2K_1K_2$	$A_2 = 2(m_1+2m_2)K_1-(2m_1+m_2)K_2$	$\mathfrak{D}_1 = 4m_1A_1+5m_2A_2$	$\mathfrak{D}_2 = K_3$	$\mathfrak{D}_3 = 2m_1A_1+7m_2A_2$
$A_2K_2K_3$	$A_2 = (2m_1+m_2)K_2-2(m_1-m_2)K_3$	$\mathfrak{E}_1 = 4m_1A_1-m_2A_2$	$\mathfrak{E}_2 = 2m_1A_1-5m_2A_2$	$\mathfrak{E}_3 = K_1$
$A_2K_3K_1$	$A_2 = (m_1+2m_2)K_1-(m_1-m_2)K_3$	$\mathfrak{F}_1 = K_2$	$\mathfrak{F}_2 = m_1A_1+5m_2A_2$	$\mathfrak{F}_3 = m_1A_1-4m_2A_2$
$A_3K_1K_2$	$A_3 = (2m_1+m_2)K_2+(m_1+2m_2)K_1$	$\mathfrak{D}_1 = K_3$	$\mathfrak{D}_2 = 5m_1A_1+4m_2A_2$	$\mathfrak{D}_3 = 4m_1A_1+5m_2A_2$
$A_3K_2K_3$	$A_3 = 2(2m_1+m_2)K_2-(m_1-m_2)K_3$	$\mathfrak{E}_1 = 5m_1A_1+m_2A_2$	$\mathfrak{E}_2 = K_1$	$\mathfrak{E}_3 = 7m_1A_1+5m_2A_2$
$A_3K_3K_1$	$A_3 = 2(m_1+2m_2)K_1+(m_1-m_2)K_3$	$\mathfrak{F}_1 = m_1A_1+5m_2A_2$	$\mathfrak{F}_2 = 5m_1A_1+7m_2A_2$	$\mathfrak{F}_3 = K_2$

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

2) Systeme mit mehreren Grundeinheiten.

Es ist hier nicht unsere Absicht eine eingehende Betrachtung verwandtschaftlicher Beziehungen im allgemeinen anzustellen. Nur einige specielle verwandtschaftliche Typen mögen kurz vorgeführt werden.

a) *Adjungierte Größensysteme.*

Die harmonischen und involutorischen Systeme gestatten eine nicht uninteressante Erweiterung. In Gl. (18) hätten wir statt der Punktdifferenzen auch Punktproducte einführen können, und zwar mit demselben Erfolg.

Es wäre dann $A_1A_2 : A_1A_3 = -m_3 : m_2$ u. s. w. oder

$$\frac{A_1A_2}{A_3A_1} = \frac{m_3}{m_2}, \quad \frac{A_2A_3}{A_1A_2} = \frac{m_1}{m_3}, \quad \frac{A_3A_1}{A_2A_3} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Auch hätte man für die Conjugierten aus Gl. (18) folgendes Gleichungssystem entwickeln können:

$$\begin{aligned} m_1A_1 + m_2A_2 + m_3A_3 &= 0, & m_1 + m_2 + m_3 &= 0, \\ m'_1K_1 + m_2A_2 - m_3A_3 &= 0, & m'_1 + m_2 - m_3 &= 0, \\ -m_1A_1 + m'_2K_2 + m_3A_3 &= 0, & -m_1 + m'_2 + m_3 &= 0, \\ m_1A_1 - m_2A_2 + m'_3K_3 &= 0, & m_1 - m_2 + m'_3 &= 0. \end{aligned}$$

Von diesem Gesichtspunkte aus lassen sich die conjugierten Punktsysteme auf 3, 4 . . n Einheiten erweitern. Das aus dem ursprünglichen, durch *bloßen Zeichenwechsel der Gewichte* abgeleitete, verwandte System möge das *adjungierte System* heißen. Es ist dann, wenn

$$m_1A_1 + m_2A_2 + m_3A_3 + m_4A_4 = 0, \quad m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 0, \tag{20}$$

$$\frac{A_1A_2A_3}{A_4A_2A_3} = -\frac{m_4}{m_1}, \quad \frac{A_2A_3A_4}{A_1A_3A_4} = -\frac{m_1}{m_2}, \quad \frac{A_3A_1A_4}{A_2A_1A_4} = -\frac{m_2}{m_3},$$

$$\frac{A_4A_1A_2}{A_3A_1A_2} = -\frac{m_3}{m_4}, \quad \frac{A_2A_1A_3}{A_4A_1A_3} = -\frac{m_4}{m_2}, \quad \frac{A_1A_2A_4}{A_3A_2A_4} = -\frac{m_3}{m_1}.$$

Durch Einsetzung der Werte $-m_4 = m_1 + m_2 + m_3$, und $m_1 : m_3 = \mu_1$, $m_2 : m_3 = \mu_2$ würde man analoge Verhältnisse wie oben bekommen. Das adjungierte System erhält man durch Zeichenwechsel der Verhältnisse; die entsprechenden Punktgleichungen nach Analogie von 3 Punkten. Es seien $A_1A_2A_3A_4$ vier beliebige Punkte einer Ebene, so ist:

$$m_1A_1 + m_2A_2 + m_3A_3 + m_4A_4 = 0, \quad m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 0,$$

somit

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$-m_1A_1+m_2A_2+m_3A_3+m'_4\mathfrak{A}'_4=0,\quad -m_1+m_2+m_3+m'_4=0,$$
$$m_1A_1-m_2A_2+m_3A_3+m''_4\mathfrak{A}''_4=0,\quad m_1-m_2+m_3+m''_4=0,$$
$$m_1A_1+m_2A_2-m_3A_3+m'''_4\mathfrak{A}'''_4=0,\quad m_1+m_2-m_3+m'''_4=0.$$

Stellt man für $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3$ analoge Gleichungen auf und eliminiert m_4A_4, so ergeben sich 6 Gleichungen in $A_1A_2A_3$, während die übrigen adjungierten Punkte sich als Derivierte in Bezug auf je 2 der Elemente $A_1A_2A_3$ herausstellen. Wir haben also Gl. (19) entsprechend:

$$\begin{aligned}
(m_1+m_2+m_3)A_4 &= m_1A_1+m_2A_2+m_3A_3,\\
(-m_1+m_2+m_3)\mathfrak{A}'_4 &= -m_1A_1+m_2A_2+m_3A_3,\\
(m_1-m_2+m_3)\mathfrak{A}''_4 &= m_1A_1-m_2A_2+m_3A_3,\\
(m_1+m_2-m_3)\mathfrak{A}'''_4 &= m_1A_1+m_2A_2-m_3A_3,\\
(m_1+2m_2+2m_3)\mathfrak{A}_1 &= m_1A_1+2m_2A_2+2m_3A_3,\\
(2m_1+m_2+2m_3)\mathfrak{A}_2 &= 2m_1A_1+m_2A_2+2m_3A_3,\\
(2m_1+2m_2+m_3)\mathfrak{A}_3 &= 2m_1A_1+2m_2A_2+m_3A_3.
\end{aligned}\tag{21}$$

Natürlich ließen sich auch hier derivierte Systeme herstellen, doch wollen wir vorläufig davon abstehen. Was die Lage der adjungierten Punkte anlangt, so liegen $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3$ offenbar innerhalb des Dreiecks $A_1A_2A_3$ und bestimmen *das innere adjungierte* Dreieck, während die drei Punkte $\mathfrak{A}'_4\mathfrak{A}''_4\mathfrak{A}'''_4$ *das äußere adjungierte* Dreieck bilden.

Ganz analog lässt sich das entsprechende adjungierte System für das Tetraeder $A_1A_2A_3A_4$ herstellen, und für beliebige n-Punkte im Raume. Für das Tetraeder und höhere Punktgruppen entstehen überdies noch adjungierte Systeme höherer Ordnung, indem man jedesmal 2, 3 . . k Zeichen in den Elementen wechselt. Es sollen hier noch einige Sätze angedeutet werden, die sich auf *adjungierte Systeme mit n Einheiten* beziehen.

Wenn S der Schwerpunkt des Systems der Punkte $m_1A_1, m_2A_2 \ldots m_nA_n$, und $S_1S_2 \ldots S_n$ die adjungierten Systeme erster Ordnung, so ist:

$$\begin{aligned}
(m_1+m_2+m_3+\ldots m_n)S &= m_1A_1+m_2A_2+m_1A_3+\ldots+m_nA_n,\\
(-m_1+m_2+m_3+\ldots m_n)S_1 &= -m_1A_1+m_2A_2+m_3A_3+\ldots+m_nA_n,\\
(m_1-m_2+m_3+\ldots m_n)S_2 &= m_1A_1-m_2A_2+m_3A_3+\ldots+m_nA_n,\\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad &\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
(m_1+m_2+m_3+\ldots-m_n)S_n &= m_1A_1+m_2A_2+m_3A_3+\ldots-m_nA_n.
\end{aligned}$$

u. s. w.

Subtrahiert man S_i von S, so ist

$$(m_1+m_2+m_3+\ldots m_2)S-(-m_1+m_2+\ldots m_n)S_i = 2m_iA_i.$$

Die drei Punkte S, S_i, A_i liegen also auf einer Geraden. Ebenso findet man leicht, dass $S_iS_kA_iA_k$ in einer Ebene liegen, dass die Adjungierten $S_1S_2S_3 \ldots S_n$ mit ihren Gewichten denselben Schwerpunkt S haben, wie das Ursystem $A_1A_2 \ldots A_n$, u. s. w.

Nullsysteme. Die n Systeme von n Punkten:

$$\begin{aligned}
S_1 &\equiv m_{11}A_1 + m_{12}A_2 + m_{13}A_3 + \ldots + m_{1n}A_n,\\
S_2 &\equiv m_{21}A_1 + m_{22}A_2 + m_{23}A_3 + \ldots + m_{2n}A_n,\\
S_3 &\equiv m_{31}A_1 + m_{32}A_2 + m_{33}A_3 + \ldots + m_{3n}A_n,\\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\\
S_n &\equiv m_{n1}A_1 + m_{n2}A_2 + m_{n3}A_3 + \ldots + m_{nn}A_n,
\end{aligned}$$

seien ein Nullsystem, wenn das äußere Product der Punkte $S_1S_2S_3 \ldots S_n$ verschwindet, oder was dasselbe ist[1]), wenn

$$a_1S_1 + a_2S_2 + a_3S_3 + \ldots + a_nS_n = 0,$$

dann ist auch die Determinante:

$$\begin{vmatrix}
m_{11}, & m_{12}, & m_{13}, & \ldots & m_{1n}\\
m_{21}, & m_{22}, & m_{23}, & \ldots & m_{2n}\\
m_{31}, & m_{32}, & m_{33}, & \ldots & m_{3n}\\
\cdot & \cdot & \cdot & & \cdot\\
m_{n1}, & m_{n2}, & m_{n3}, & \ldots & m_{nn}
\end{vmatrix} = 0.$$

Bildet man nun von jedem der n Punkte $S_1S_2S_3 \ldots S_n$ die äußern und innern adjungierten Punkte aller Ordnungen, so folgt aus den bekannten Eigenschaften der Determinanten, dass alle adjungierten Systeme $S^i_1S^i_2 \ldots S^i_n$ derselben Ordnung ein Nullsystem bilden. Sodann bilden alle jene Gruppen ein Nullsystem, welche durch Vertauschung der Indices in den Verticalreihen und Horizontalreihen entstehen, oder endlich alle jene Systeme, die durch Multiplication mit einem Factor u. s. w. aus dem Ursystem entstanden sind.

b) *Commutative Systeme.*

Alle jene Systeme, die aus den Punkten $m_1A_1, m_2A_2, \ldots m_nA_n$ durch cyklische Vertauschung der Gewichte entstehen, sind mit einander verwandt. Die Verwandtschaft soll eine commutative heißen. Es sei:

---

[1]) Die Coefficienten $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ sind gewisse Zahlenfactoren, die sich entweder mit Hilfe der Determinantentheorie oder direct nach Grassmann leicht bestimmen lassen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$
\begin{aligned}
s &= m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n\,, \\
sS &= m_1 A_1 + m_2 A_2 + m_3 A_3 + \ldots + m_n A_n\,, \\
sS_1 &= m_2 A_1 + m_3 A_2 + m_4 A_3 + \ldots + m_1 A_n\,, \\
sS_2 &= m_3 A_1 + m_4 A_2 + m_5 A_3 + \ldots + m_2 A_n\,, \\
&\;\;\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
sS_{n-1} &= m_n A_1 + m_1 A_2 + m_2 A_3 + \ldots + m_{n-1} A_n\,;
\end{aligned}
$$

dann ist offenbar: $s[S + S_1 + S_2 + \ldots S_{n-1}] = s[A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n]$.

Das commutative System hat also mit dem Ursystem *denselben mittlern Punkt.* Multipliciert man die n Punkte $SS_1 \ldots S_{n-1}$, so ergiebt sich:

$$
\frac{(SS_1 S_2 \ldots S_{n-1})}{(A_1 A_2 A_3 \ldots A_n)} = \frac{\begin{vmatrix} m_1, m_2, m_3, \ldots m_n \\ m_2, m_3, m_4, \ldots m_1 \\ m_3, m_4, m_5, \ldots m_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ m_n, m_1, m_2, \ldots m_{n-1} \end{vmatrix}}{[m_1 + m_2 + m_3 + \ldots m_n]^n}.
$$

Diese Andeutungen mögen genügen, um zu zeigen, wie leicht man zu neuen verwandtschaftlichen Beziehungen gelangen kann. Wir wollen nun unsere allgemeinen Sätze auf das *Dreieck* und *Tetraeder* anwenden.

§ 4. Die Sätze von Carnot und Ceva am Dreieck und Tetraeder.

Bevor wir zur Untersuchung der harmonischen Beziehungen am Dreieck und Tetraeder gehen, wollen wir kurz die bekannten Sätze von Carnot-Menelaos und Ceva am Dreieck und Tetraeder ableiten.

1) *Satz von Carnot am Dreieck.* Das Dreieck $A_1 A_2 A_3$ werde von einer Geraden in den Punkten $S_1 S_2 S_3$ geschnitten. Wir sagen die Seiten werden *innerhalb geschnitten,* wenn zwei Schnittpunkte $(S_1 S_2)$ zwischen den Punkten $A_2 A_3$, $A_3 A_1$ liegen; S_3 sei auf der Verlängerung von $A_1 A_2$. Dann ist, wenn m_i, m'_i die Abschnitte auf den Seiten sind:

$$S_1 \equiv m_1 A_3 + m'_1 A_2\,;\; S_2 \equiv m_2 A_1 + m'_2 A_3\,;\; S_3 \equiv m_3 A_2 - m'_3 A_1.$$

Da nun das äußere Product von drei Punkten auf einer Geraden verschwindet, so ist $(S_1 S_2 S_3) = 0$. Rechts verschwinden alle Punktproducte, worin je zwei gleiche Punkte sind, somit ist:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$(S_1S_2S_3) = 0 = m_1m_2m_3(A_3A_1A_2) - m'_1m'_2m'_3(A_2A_3A_1),$$
$$= (m_1m_2m_3 - m'_1m'_2m'_3) \,.\, (A_1A_2A_3);$$

somit, da $(A_1A_2A_3) \neq 0$,

$$m_1m_2m_3 = m'_1m'_2m'_3.$$

Werden alle Seiten *außerhalb*, d. h. in ihrer Verlängerung geschnitten, so ist:

$$m_1m_2m_3 = -m'_1m'_2m'_3.$$

Der Satz lässt sich sofort auf ein beliebiges Polygon ausdehnen (Carnot).

2) *Satz von Ceva am Dreieck.* Durch einen beliebigen Punkt O *innerhalb eines Dreiecks* $A_1A_2A_3$ sollen aus den Ecken an die gegenüberliegenden Seiten Transversalen gezogen werden, welche die Seiten in $S_1S_2S_3$ schneiden. Ferner sei die Transversale $A_iS_i = T_i$, und $A_1A_2 = G_3$, $A_2A_3 = G_1$, $A_3A_1 = G_2$.

Nun sei:

$$S_1 \equiv m_1A_2 + m'_1A_3\,;\; S_2 \equiv m_2A_3 + m'_2A_1\,;\; S_3 \equiv m_3A_1 + m'_3A_2.$$

Multipliciert man der Reihe nach mit A_1, A_2, A_3, und führt die obige Bezeichnung ein, so ist:

$$T_1 \equiv m_1G_3 + m'_1G_2\,;\; T_2 \equiv m_2G_1 + m'_2G_3\,;\; T_3 \equiv m_3G_2 + m'_3G_1.$$

Da nun $(T_1T_2T_3) = 0$, dagegen $(G_1G_2G_3) \neq 0$, so erhält man:

$$(T_1T_2T_3) = 0 = (m_1m_2m_3 + m'_1m'_2m'_3) \,.\, (G_1G_2G_3),$$
$$m_1m_2m_3 = -m'_1m'_2m'_3.$$

Desgleichen $\qquad m_1m_2m_3 = +m'_1m'_2m'_3.$

Die zweite Gleichung ist zu nehmen, wenn der Punkt O außerhalb liegt.[1]) Auch hier ist die Verallgemeinerung auf ein beliebiges Polygon leicht zu bewerkstelligen.

3) *Der Satz von Carnot am Tetraeder.* Vier Strecken, wovon keine drei in einer Ebene liegen, bestimmen durch einen *in sich selbst geschlossenen Zug* ein Tetraeder oder *geschlossenes Vierkant*[2]); ähnliches gilt von einem beliebigen Polyeder. Dieser Strecken- oder Kantenzug bildet die *Haupt-*

---

[1]) Eine etwas andere Erwägung hätte das Endproduct $m_1\,m_2\,m_3 = \pm\, m'_1\,m'_2\,m'_3$ gegeben. Nehmen wir die Seiten in der Reihenfolge A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 positiv, so wäre der eine Summand von T_i jedesmal negativ geworden, somit auch $m_1m_2m_3 - m'_1m'_2m'_3 = 0$. Allein wir ziehen es vor den Transversalen die Vorzeichen der entsprechenden Punkte zu geben, welche sie auf den Seiten treffen. Damit ist eine größere Übereinstimmung zwischen den Punkten und Transversalen erzielt.

[2]) Im Gegensatz zur vierseitigen oder n—seitigen Pyramide, die ein *offenes Vierkant* oder *n—Kant* bilden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

kanten eines Polyeders, alle übrigen mögen *Nebenkanten* heißen. Schneidet man nun ein Tetraeder mit den Hauptkanten: A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 durch eine Ebene, so entstehen auf den 4 Hauptkanten oder in ihrer Verlängerung vier Schnittpunkte $S_1S_2S_3S_4$ mit der Ebene. Werden alle Hauptkanten in ihrer Verlängerung geschnitten, so heiße der Schnitt ein *äußerer*, sonst ein *innerer*.

Es sei nun beim *innern Schnitt*:

$$S_1 \equiv m_1A_1 + m'_1 A_2,\ S_2 \equiv m_2A_2 + m'_2 A_3,$$
$$S_3 \equiv m_3A_3 + m'_3 A_4,\ S_4 \equiv m_4A_4 + m'_4 A_1.$$

Da das Product von vier Punkten einer Ebene verschwindet, dagegen $(A_1A_2A_3A_4) \neq 0$ ist, so hat man, wie früher:

$$(S_1S_2S_3S_4) = 0 = m_1m_2m_3m_4 \,.\, (A_1A_2A_3A_4) + m'_1m'_2m'_3m'_4 \,.\, (A_2A_3A_4A_1),$$
$$= [m_1m_2m_3m_4 - m'_1m'_2m'_3m'_4] \,.\, (A_1A_2A_3A_4),$$

somit

$$m_1m_2m_3m_4 = m'_1m'_2m'_3m'_4.$$

Analoges gilt für *äußere Schnittpunkte*.

4) *Der Satz von Ceva am Tetraeder.* Durch die vier Hauptkanten: A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 und einen beliebigen Punkt O *innerhalb* eines Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$ sollen 4 Transversalebenen gezogen werden, welche die gegenüberliegenden Hauptkanten in den Punkten $S_1S_2S_3S_4$ schneiden. Die Transversalebenen seien: $A_1A_2S_1 = T_1$, $A_2A_3S_2 = T_2$, $A_3A_4S_3 = T_3$, $A_4A_1S_4 = T_4$; sodann $A_1A_2A_3 = E_4$, $A_2A_3A_4 = E_1$, $A_3A_4A_1 = E_2$, $A_4A_1A_2 = E_3$.

Nun sei:

$$S_1 \equiv m_1A_4 + m'_1A_3,\ S_2 \equiv m_2A_1 + m'_2A_4,$$
$$S_3 \equiv m_3A_2 + m'_3A_1,\ S_4 \equiv m_4A_3 + m'_4A_2.$$

Multipliciert man diese Gleichungen der Reihe nach mit den vier Hauptkanten: A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1, so ist:

$$T_1 \equiv m_1E_3 + m'_1E_4,\ T_2 \equiv m_2E_4 + m'_2E_1,$$
$$T_3 \equiv m_3E_1 + m'_3E_2,\ T_4 \equiv m_4E_2 + m'_4E_3.$$

Da das Product von 4 Ebenen, die sich in einem Punkte schneiden, verschwindet, so ist, weil $(E_1E_2E_3E_4) \neq 0$:

$$(T_1T_2T_3T_4) = 0 = [-m_1m_2m_3m_4 + m'_1m'_2m'_3m'_4] \,.\, (E_1E_2E_3E_4),$$

somit

$$m_1m_2m_3m_4 = m'_1m'_2m'_3m'_4.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Statt der Abschnitte auf den Hauptkanten, kann man die Abschnitte der Transversalebenen auf den gegenüberliegenden Seitenflächen einführen, indem $m_i : m'_i = \Delta_i : \Delta'_i$. Somit, wenn Δ_i die betreffenden Dreiecke sind,

$$\Delta_1 \,.\, \Delta_2 \,.\, \Delta_3 \,.\, \Delta_4 = \Delta'_1 \,.\, \Delta'_2 \,.\, \Delta'_3 \,.\, \Delta'_4.$$

«Wenn man also durch die vier Hauptkanten eines Tetraeders und einen «innerhalb (oder außerhalb) gelegenen Punkt Transversalebenen legt bis «zum Durchschnitt mit den gegenüberliegenden Hauptkanten oder Seiten-«flächen, so ist das Product der einen Gruppe nicht anliegender Abschnitte «auf den Hauptkanten, bezw. nicht anliegender Dreiecke auf den Seiten-«flächen, dem Producte der andern Gruppe gleich».

Auch diese Sätze gelten für beliebige geschlossene Vielkante. Statt der Abschnitte auf den Hauptkanten hätte man auch die Flächensinusse einführen können.

Zusatz. Die Punkte $S_1S_2S_3S_4$ liegen auf einer Ebene, da ihr äußeres Product verschwindet.

§ 5. Conjugierte harmonische Systeme am Dreieck und Tetraeder.

Die sogenannten *harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierseits* fassen wir als Eigenschaft des Dreiecks auf: einmal weil die Ableitung sich bedeutend einfacher, die Resultate sich symmetrischer gestalten, und dann, weil in dieser Auffassung eine Erweiterung auf den Raum ermöglicht wird, die unseres Wissens in dieser Allgemeinheit und Vollständigkeit bisher nicht gemacht wurde[1]).

1. Das Dreieck.

a) *Conjugierte Punktgruppen und ihre Derivierten.*

Beweis mittelst äußerer Producte.

In dem Dreieck $A_1A_2A_3$ sollen durch einen Punkt O *im Innern* aus den Ecken die Transversalen $T_1T_2T_3$ gezogen werden, welche die gegenüberliegenden Seiten in den entsprechenden Punkten $S_1S_2S_3$ schneiden. Auf jeder Seite des Dreiecks sollen zu den zwei Eckpunkten und dem

---

[1]) Die Erweiterung des obigen Problems auf den n-dimensionalen Raum, wie sie V. Schlegel im Bulletin de la Société math. de France (1882) Bd. X in der Abhandlung: Quelques théorèmes de géometrie à n dimensions gegeben hat, berührt unsere Untersuchung nicht, da sie in ganz anderer Richtung sich bewegt. Immerhin ist jene Abhandlung bemerkenswert, indem sie zeigt, wie einfach die Probleme höherer Raumgebiete sich mit Hilfe der Grassmannschen Principien behandeln lassen. Durch Projection aus höheren Raumgebieten auf niedere können die Probleme auch für den dreidimensionalen Raum verwertbar werden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

zwischen ihnen liegenden Schnittpunkt S_i die drei involutorisch gelegenen Puncte $K^i_1 K^i_2 K^i_3$ construiert werden. Es gelten dann für die involutorische Punktreihe auf den drei Seiten folgende Gleichungssysteme, wobei das Gewicht des Summenpunktes, wie immer, gleich der Summe der Gewichte der Summanden zu nehmen ist:

$$
\begin{aligned}
1)\ S_1 &= m_1 A_2 + m'_1 A_3\,;\ K'_3 = m_1 A_2 - m'_1 A_3\,;\ K'_1 = m_1 A_2 + 2m'_1 A_3\,;\\
&\qquad K'_2 = 2m_1 A_2 + m'_1 A_3.\\
2)\ S_2 &= m_2 A_3 + m'_2 A_1\,;\ K''_3 = m_2 A_3 - m'_2 A_1\,;\ K''_1 = m_2 A_3 + 2m'_2 A_1\,;\\
&\qquad K''_2 = 2m_2 A_3 + m'_2 A_1. \qquad\qquad (22)\\
3)\ S_3 &= m_3 A_1 + m'_3 A_2\,;\ K'''_3 = m_3 A_1 - m'_3 A_2\,;\ K'''_1 = m_3 A_1 + 2m'_3 A_2\,;\\
&\qquad K'''_2 = 2m_3 A_1 + m'_3 A_2.
\end{aligned}
$$

Weil nach dem Satze von Ceva hier $m_1 m_2 m_3 - m'_1 m'_2 m'_3 = 0$, so sieht man, da alle Punktproducte mit gleichen Factoren verschwinden, dass folgende Producte Null werden[1]), d. h. *folgende Punkte zu dreien combiniert auf einer Geraden liegen*:

$$
\begin{gathered}
K'_3 K''_3 K'''_3,\\
K'''_3 S_1 S_2\,,\ K''_3 S_3 S_1\,,\ K'_3 S_2 S_3,\\
K'_3 K''_1 K'''_2\,,\ K''_3 K'_1 K'''_2\,,\ K'''_3 K'_1 K''_2.
\end{gathered}
$$

In Bezug auf die Dreiecke $A_\lambda S_\mu S_\nu$ liegt der Punkt O außerhalb. Da aber auch für diesen Fall der Satz von Ceva gilt, so findet man weitere analoge Systeme.

Was die abgeleiteten conjugierten Systeme anlangt, so zeigt ein Blick auf die frühere Tabelle, dass alle Punktsysteme von der Form:

$$
\begin{aligned}
P_1 &= m_1 A_1 \pm m'_1 A_2,\\
P_2 &= \lambda m_2 A_2 \pm \mu m'_2 A_3,\\
P_3 &= \mu m_3 A_3 \pm \lambda m'_3 A_1,
\end{aligned}
$$

verschwinden, wenn das Endproduct die Form hat:

$$(P_1 P_2 P_3) = \lambda\mu(m_1 m_2 m_3 - m'_1 m'_2 m'_3)\,.\,(A_1 A_2 A_3).$$

---

[1]) So ist z. B. $(K'_3 K''_3 K'''_3) = m_1 m_2 m_3 (A_2 A_3 A_1) - m'_1 m'_2 m'_3\,.\,(A_3 A_1 A_2) = (m_1 m_2 m_3 - m'_1 m'_2 m'_3)\,.\,(A_1 A_2 A_3) = 0.$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

b) *Conjungierte Streckengruppen und ihre Derivierten.*

Multipliciert man Gl. (22) 1) mit A_1, Gl. (22) 2) mit A_2 und Gl. (22) 3) mit A_3, so erhält man die entsprechenden Streckengleichungen $A_1S_1 = T_1$, $A_1K_3 = K'_3$ etc.

Wenn wir noch $A_1A_2 = G_3$, $A_2A_3 = G_1$, $A_3A_1 = G_2$ setzen und annehmen, dass sich die drei Transversalen $T_1T_2T_3$ in einem Punkte schneiden, so erhalten wir:

$$1)\ T_1 = m_1G_3 + m'_1G_2\,;\ K'_3 = m_1G_3 - m'_1G_2\,;\ K'_1 = m_1G_3 + 2m_1G_2\,;$$
$$K'_2 = 2m_1G_3 + m'_1G_2,$$
$$2)\ T_2 = m_2G_1 + m'_2G_3\,;\ K''_3 = m_2G_1 - m'_2G_3\,;\ K''_1 = m_2G_1 + 2m'_2G_3\,;$$
$$K''_2 = 2m_2G_1 + m'_2G_3,$$
$$3)\ T_3 = m_3G_2 + m'_3G_1\,;\ K'''_3 = m_3G_2 - m'_3G_1\,;\ K'''_1 = m_3G_2 + 2m'_3G_1\,;$$
$$K'''_2 = 2m_3G_2 + m'_3G_1.$$

Da nun nach der Voraussetzung $(T_1T_2T_3) = 0$, so ist nach dem Satze von Ceva $m_1m_2m_3 + m'_1m'_2m'_3 = 0$; und da alle Streckenproducte mit gleichen Factoren verschwinden, so sieht man, dass *folgende Strecken zu dreien sich in einem Punkte schneiden*:

$$T_1T_2T_3,$$
$$T_1K''_3K'''_3,\ T_2K'_3K'''_3,\ T_3K'_3K''_3,$$
$$T_1K''_1K'''_2,\ T_2K'''_1K'_2,\ T_3K'_1K''_2.$$

In Bezug auf die Dreiecke $A_\lambda S_\mu S_\nu$ liegt der Punkt O außerhalb und man findet analoge Beziehungen. Man beachte das vollkommene Entsprechen der Transversalen $T_1T_2T_3$, die sich in einem Punkte schneiden und der Punkte $K'_1K''_2K'''_3$, die auf einer Geraden liegen. — Für die abgeleiteten conjugierten Systeme gilt hier eine ähnliche Bemerkung, wie bei Punkten.

c) *Adjungierte Punkt- und Streckengruppen am Dreieck.*

Was oben mittelst äußerer Producte abgeleitet wurde, kann auch durch Punktaddition und Streckenaddition ebenso leicht geschehen. Dabei haben diese Gleichungen den Vortheil, dass sie neben den Lagenbeziehungen der Punkte zueinander, auch ihre relativen Abstände angeben.

Ist S ein beliebiger Punkt im Dreieck $A_1A_2A_3$, so lassen sich immer Gewichte (Abschnitte) finden, derart dass

$$(m_1 + m_2 + m_3)S = m_1A_1 + m_2A_2 + m_3A_3.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Und da ferner zwei Punkte mit gegebenem Gewichte immer einen bestimmten Schwerpunkt haben, so setzen wir

$$(m_2+m_3)\,S_1 = m_2A_2+m_3A_3\,;\;\; (m_3+m_1)\,S_2 = m_3A_3+m_1A_1\,;$$
$$(m_1+m_2)\,S_3 = m_1A_1+m_2A_2,$$

somit

$$(m_1+m_2+m_3)S = m_1A_1+(m_2+m_3)S_1 = m_2A_2+(m_3+m_1)S_2 = m_3A_3+(m_1+m_2)S_3.$$

Da nun drei Punkte, deren einer der Schwerpunkt der beiden andern ist, auf einer Geraden liegen, so schneiden sich die Geraden A_1S_1, A_2S_2, A_3S_3 in ihrem gemeinschaftlichen Schwerpunkt S. Um die involutorischen Punktreihen zu $S_1S_2S_3$ und $A_1A_2A_3$ aufzustellen und ihre Beziehungen zueinander kennen zu lernen, genügen uns auch die Gewichte der betreffenden Punkte. Es ist

$$(m_2+m_3)S_1\,;\; (m_2-m_3)K'_3\;\;;\; (m_2+2m_3)K'_1\;\;;\; (2m_2+m_3)K'_2\,;$$
$$(m_3+m_1)S_2\,;\; (m_3-m_1)K''_3\;;\; (m_3+2m_1)K''_1\;;\; (2m_3+m_1)K''_2\,;$$
$$(m_1+m_2)S_3\,;\; (m_1-m_2)K'''_3\,;\; (m_1+2m_2)K'''_1\,;\; (2m_1+m_2)K'''_2.$$

Daraus entstehen folgende Gleichungen von *Punkten, die auf einer Geraden liegen*[1]*:*

$$\begin{aligned}
(m_2-m_3)K'_3+(m_3-m_1)K''_3-(m_1-m_2)K'''_3 &= 0,\\
(m_2+m_3)S_1-(m_3+m_1)S_2-(m_1-m_2)K'''_3 &= 0,\\
(m_3+m_1)S_2-(m_1+m_2)S_1-(m_2-m_3)K''_3 &= 0,\\
(m_1+m_2)S_3-(m_2+m_3)S_3-(m_3-m_1)K'_3 &= 0,\\
(m_2+2m_3)K'_1-(2m_3+m_1)K''_2-(m_1-m_2)K'''_3 &= 0,\\
(m_3+2m_1)K''_1-(2m_1+m_2)K'''_2-(m_2-m_3)K'_3 &= 0,\\
(m_1+2m_2)K'''_1-(2m_2+m_3)K'_2-(m_3-m_1)K''_3 &= 0.
\end{aligned}\tag{25}$$

Außerdem findet man durch Auflösung reiner Identitäten noch:

$$\begin{aligned}
(m_1+m_2+m_3)S-(2m_1+m_3)K''_1-(m_1-m_2)K'''_3 &= 0,\\
(m_1+m_2+m_3)S-(2m_3+m_2)K'_1-(m_3-m_1)K''_3 &= 0,\\
(m_1+m_2+m_3)S-(2m_2+m_1)K'''_1-(m_2-m_3)K'_3 &= 0.
\end{aligned}\tag{26}$$

---

[1]) Diese Gleichungen bieten eine *einfache Methode die drei Conjugierten* $K'_3K''_3K'''_3$ *zu construieren.* Denn die Conjugierten liegen auf dem Durchschnitt der Seiten A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1, und S_1S_2, S_2S_3, S_3S_1. Mit Hilfe dieser Conjugierten lassen sich dann leicht alle anderen verwandten Punkte bestimmen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Punkte $D_1 D_2 D_3$, in denen *das eingeschriebene Dreieck* $S_1 S_2 S_3$ von den Transversalen $A_i S_i$ geschnitten werden, haben, wie man leicht sieht, folgende Gewichte:

$$(2m_1+m_2+m_3)D_1\,;\,(2m_2+m_3+m_1)D_2\,;\,(2m_3+m_1+m_2)D_3\,; \tag{27}$$

somit ist auch:

$$\begin{aligned}
&(2m_1+m_2+m_3)D_1-(2m_3+m_1+m_2)D_3-(m_3-m_1)K''_3 = 0,\\
&(2m_2+m_3+m_1)D_2-(2m_1+m_2+m_3)D_1-(m_1-m_2)K'''_3 = 0,\\
&(2m_3+m_1+m_2)D_3-(2m_2+m_3+m_1)D_2-(m_2-m_3)K'_3 = 0.
\end{aligned} \tag{28}$$

Nehmen wir nun noch die zu $SA_1A_2A_3$ *adjungierten Punktsysteme*, so gelangen wir zu sechs weitern, sehr bemerkenswerten Punkten. Gl. (21) geben mit Berücksichtigung der obigen Gewichte folgende Relationen:

$$\begin{aligned}
(-m_1+m_2+m_3)\mathfrak{A}'_4 &= -m_1A_1+(m_2+m_3)S_1 = m_2A_2+(m_3-m_1)K''_3\\
&= m_3A_3-(m_1-m_2)K'''_3 = -2m_1A_1+(m_1+m_2+m_3)S,\\
&= 2(m_2+m_3)S_1-(m_1+m_2+m_3)S,\\
&= (m_2+2m_3)K'_1-(m_3+m_1)S_2,\\
&= (m_3+2m_2)K'_2-(m_1+m_2)S_3 = 2m_3A_3-(m_1-m_2+m_3)\mathfrak{A}''_4
\end{aligned} \tag{29}$$

u. s w.[1])

Analoge Gleichungen lassen sich für die zwei andern *äußern adjungierten Punkte* aufstellen.

Betrachten wir noch kurz die Punkte, welche das *innere adjungierte Dreieck* darstellen. Es ist:

$$\begin{aligned}
(m_1+2m_2+2m_3)\mathfrak{A}_1 &= (m_1+2m_2)K'''_1+2m_3A_3 = (m_1+2m_3)K''_2+2m_2A_2,\\
&= (m_1+m_2+m_3)S+(m_2+m_3)S_1,\\
&= (m_2+2m_3+2m_1)\mathfrak{A}_2-(m_1-m_2)K'''_3
\end{aligned}$$

u. s. w.

Für die zwei andern *innern adjungierten Punkte* gelten entsprechende Beziehungen.

---

[1]) Da alle diese Punkte zu zweien mit $\mathfrak{A}'_4$ auf einer Geraden liegen, somit alle diese Geraden sich in $\mathfrak{A}'_4$ schneiden, so ergiebt sich leicht *eine Construction der adjungierten Punkte.*

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ist ferner G eine beliebige, durch das Dreiseit $G_1 G_2 G_3$ gezogene Gerade, so lassen sich immer Gewichte finden, derart dass

$$(m_1+m_2+m_3)G = m_1 G_1 + m_3 G_2 + m_3 G_3.$$

Und da zwei Gerade mit gegebenem Gewicht immer eine bestimmte «Schwerlinie» haben, so kann man analog zum obigen Punktsystem ein System von Geraden herstellen:

$$(m_1+m_2+m_3)G = m_1 G_1 + (m_2+m_3)G' = m_2 G_2 + (m_3+m_1)G'' = m_3 G_3 + (m_1+m_2)G'''.$$

Auf ganz dieselbe Weise, wie bei Punkten, kommt man zu einem System von Geraden, das den Punktsystemen dual entspricht. Doch mögen diese Andeutungen genügen.

Wir sehen also, wie man mit Hilfe der Theorien von Möbius-Grassmann auf die einfachste Weise Punkte und Linien nach Lage und Maßverhältnissen bestimmen kann. Es erübrigt noch unsere Ausführungen auf das Tetraeder kurz auszudehnen.

2) Das Tetraeder.

Dem Dreieck in der Ebene entspricht im Raume nicht nur die dreiseitige Pyramide (offenes Dreikant), sondern auch das Tetraeder oder geschlossene Vierkant, das durch einen sich schließenden räumlichen Streckenzug gebildet wird.[1]) — Es soll nun gezeigt werden, dass sich auch für das Tetraeder eine Gruppe von Beziehungen herstellen lässt, die jenen des Dreiecks vollkommen entspricht.

a) *Conjugierte Punktgruppen und ihre Derivierten.* — Punktproducte.

Durch die vier Hauptkanten des Tetraeders $A_1 A_2 A_3 A_4$ und einen im *Innern* gelegenen Punkt S sollen die vier Haupttransversalebenen: $T_1 T_2 T_3 T_4$ gelegt werden, welche die gegenüberliegenden Hauptkanten in den Punkten $S_1 S_2 S_3 S_4$ schneiden. Construiert man auf den Hauptkanten zu je zwei Ecken und einem dazwischenliegenden Schnittpunkte S_i das involutorische Punktsystem K_i, so erhält man folgende *Punktgleichungen:*

$$\begin{aligned}
&1)\ S_1 = m_1 A_1 + m'_1 A_2;\ K^1_3 = m_1 A_1 - m'_1 A_2;\ K^1_1 = m_1 A_1 + 2m_1 A_2;\\
&\qquad K^1_2 = 2m_1 A_1 + m_2 A_2;\\
&2)\ S_2 = m_2 A_2 + m'_2 A_3;\ K^2_3 = m_2 A_2 - m'_2 A_3;\ K^2_1 = m_2 A_2 + 2m'_2 A_3;\\
&\qquad K^2_2 = 2m_2 A_2 + m'_2 A_3;\\
&3)\ S_3 = m_3 A_3 + m'_3 A_4;\ K^3_3 = m_3 A_3 - m'_3 A_4;\ K^3_1 = m_3 A_3 + 2m'_3 A_4;\\
&\qquad K^3_2 = 2m_3 A_3 + m'_3 A_4; \qquad\qquad (30)\\
&4)\ S_4 = m_4 A_4 + m'_4 A_1;\ K^4_3 = m_4 A_4 - m'_4 A_1;\ K^4_1 = m_4 A_4 + 2m'_4 A_1;\\
&\qquad K^4_2 = 2m_4 A_4 + m'_4 A_1.
\end{aligned}$$

[1]) Wenngleich das offene Dreikant (Trieder) und das geschlossene Vierkant (Tetraeder) in Wirklichkeit identisch sind, so können sie doch auf verschiedene Weise entstanden gedacht werden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Da hier nach dem Satze von Ceva $m_1 m_2 m_3 m_4 - m'_1 m'_2 m'_3 m'_4 = 0$, und $(A_1 A_2 A_3 A_4) \neq 0$, so folgt leicht, dass folgende *Producte verschwinden oder folgende Punkte zu vieren auf einer Ebene liegen*:

$$\begin{gathered} S_1 S_2 S_3 S_4; \quad S_\lambda S_\mu K_1^\nu K_1^\varrho; \quad S_\lambda S_\mu K_2^\nu K_3^\varrho; \\ K^1_3 K^2_3 K^3_3 K^4_3; \quad K^\lambda_1 K^\mu_1 K^\nu_2 K^\varrho_3; \quad K^\lambda_2 K^\mu_2 K^\nu_3 K^\varrho_3. \\ (\lambda, \mu, \nu, \varrho = 1,2,3,4; \lambda \neq \mu \neq \nu \neq \varrho). \end{gathered} \tag{31}$$

Durchlaufen die Indices λ, μ, ν, ϱ, alle Werte von 1 bis 4 und ist dabei kein Index der Punktreihe im selben Product gleich, so findet man, dass die obigen 16 Punkte zu vieren combiniert auf 26 Ebenen liegen. In Bezug auf die derivierten Punkte gilt eine ähnliche Bemerkung wie beim Dreieck.

b) *Conjugierte Ebenengruppen und ihre Derivierten.*

Legt man durch jede der vier Hauptkanten nicht nur die entsprechende Transversalebene, sondern auch die conjungierten Ebenen durch dieselben Hauptkanten und die auf der gegenüberliegenden Hauptkante construierten involutorischen Punkte K_i, so erhält man zu jeder Transversalebene noch drei conjugierte Ebenen $K^i_1 K^i_2 K^i_3$. Auf die Seitenflächen des Tetraeders bezogen erhalten wir dann folgende vier Gleichungssysteme:

$$\begin{aligned} &1)\ T_1 = m_1 E_4 + m'_1 E_3, && K^1_3 = m_1 E_4 - m'_1 E_3, && K^1_1 = m_1 E_4 + 2m'_1 E_3, \\ & && K^1_2 = 2m_1 E_4 + m'_1 E_3, \\ &2)\ T_2 = m_2 E_1 + m'_2 E_4, && K^2_3 = m_2 E_1 - m'_2 E_4, && K^2_1 = m_2 E_1 + 2m'_2 E_4, \\ & && K^2_2 = 2m_2 E_1 + m'_2 E_4, \\ &3)\ T_3 = m_3 E_2 + m'_3 E_1, && K^3_3 = m_3 E_2 - m'_3 E_1, && K^3_1 = m_3 E_2 + 2m'_3 E_1, \\ & && K^3_2 = 2m_3 E_2 + m'_3 E_1, \\ &4)\ T_4 = m_4 E_3 + m'_4 E_2, && K^4_3 = m_4 E_3 - m'_4 E_2, && K^4_1 = m_4 E_3 + 2m'_4 E_2, \\ & && K^4_2 = 2m_4 E_3 + m'_4 E_2. \end{aligned} \tag{32}$$

Da hier $(T_1 T_2 T_3 T_4) = 0$, so ist nach Ceva $m_1 m_2 m_3 m_4 - m'_1 m'_2 m'_3 m'_4 = 0$, somit ergeben sich folgende *Nullproducte bezw. folgende Ebenen, die zu vieren sich in einem Punkte schneiden*:

$$\begin{gathered} T_1 T_2 T_3 T_4; \quad T_\lambda T_\mu K^\nu_3 K^\varrho_3; \quad T_\lambda T_\mu K^\nu_1 K^\varrho_2; \\ K^1_3 K^2_3 K^3_3 K^4_3; \quad K^\lambda_3 K^\mu_3 K^\nu_1 K^\varrho_2; \quad K^\lambda_2 K^\mu_2 K^\nu_1 K^\varrho_1. \\ (\lambda, \mu, \nu, \varrho = 1,2,3,4). \end{gathered} \tag{33}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die 16 Ebenen schneiden sich also zu vieren combiniert in 26 Punkten. Ähnliches gilt für die Derivierten.

c) *Conjugierte und adjungierte Punkt- und Ebenengruppen.* Addition.

Ähnlich wie beim Dreieck können wir auch hier durch bloße Punkt- bezw. Ebenen-Addition zu den obigen und noch weitern Resultaten gelangen. Wenn nämlich S ein beliebiger Punkt im Tetraeder, so ist immer:

$$(m_1+m_2+m_3+m_4)S = m_1A_1+m_2A_2+m_3A_3+m_4A_4,$$

und

$$\begin{aligned}(m_1+m_2+m_3+m_4)S &= (m_1+m_2)S_1+(m_3+m_4)S_3 = (m_2+m_3)S_2+(m_4+m_1)S_4,\\ &= (m_1+m_3)S_5+(m_2+m_4)S_6,\\ &= m_1A_1+(m_2+m_3+m_4)S' = m_2A_2+(m_3+m_4+m_1)S_2\end{aligned}$$

u. s. w

Dabei sind offenbar $S_1S_2S_3S_4$ die Schnittpunkte der durch die Hauptkanten und S gelegten Ebenen; S_5, S_6 die entsprechenden Schnittpunkte auf den Nebenkanten. Construiert man wieder auf den Kanten zu je zwei Ecken und einem dazwischenliegenden Schnittpunkt das conjugierte System, und bedenkt, dass vier Punkte auf einer Ebene liegen, wenn die algebraische Summe ihrer Gewichte verschwindet, so findet man leicht die obigen Beziehungen bestätigt. Mit Einschluss der conjugierten Systeme zu den Nebenkanten ist beispielsweise für die K^i_3:

$$\begin{aligned}(m_1-m_2)K^1_3+(m_2-m_3)K^2_3+(m_3-m_4)K^3_3-(m_4-m_1)K^4_3 &= 0,\\ (m_1-m_3)K^5_3+(m_3-m_4)K^3_3+(m_4-m_2)K^6_3-(m_2-m_1)K^1_3 &= 0,\\ (m_1-m_4)K^4_3+(m_4-m_2)K^6_3+(m_2-m_3)K^2_3-(m_3-m_1)K^5_3 &= 0.\end{aligned}$$

Diese 6 conjugierten Punkte liegen also alle auf einer Ebene und da sie, wie leicht zu zeigen, noch zu dreien auf einer Geraden sind, so bilden sie ein vollständiges Vierseit u. s. w. Auch sonst findet man noch analoge Gleichungen, wie beim Dreieck, zumal wenn man die adjungierten Systeme berücksichtigt. Doch würde es uns hier zuweit führen, alle Gleichungen aufzustellen. Wir bemerken nur, dass es vermittelst unserer allgemeinen Formel Gl. (8) über Schwerpunktsentfernungen möglich ist, die absoluten Entfernungen jedes dieser Punkte von jedem andern allein durch die Gewichte m_1, m_2, m_3, m_4 und die Entfernungen der Fundamentalpunkte auszudrücken.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 6. Die merkwürdigen Punkte des Dreiecks und Tetraeders.

Während die frühern Gleichungen jeden beliebigen Punkt in der Ebene eines Dreiecks durch drei Fundamentalpunkte ausdrückten und jeden Punkt im Raume durch das Fundamentaltetraeder, sollen jetzt die Gleichungen einiger bekannterer Punkte zusammengestellt werden. Dabei wird sich dann ergeben, dass von den sog. merkwürdigen Punkten nur der Schwerpunkt, der Mittelpunkt des Inkreises und der Inkugel, sowie der Mittelpunkt des Umkreises und der Umkugel von einander unabhängige, also nicht direct verwandte Punkte sind.

1. Dreieck.

a) Die *drei unabhängigen Punkte.*

Der *Schwerpunkt und mittlere Punkt.* Im Dreieck fällt, wie leicht zu sehen, der Schwerpunkt der Fläche mit dem Schwerpunkte gleicher Gewichte in den Ecken zusammen. Der Schwerpunkt ist also hier zugleich mittlerer Punkt. Somit

$$3S = A_1 + A_2 + A_3. \tag{34}$$

Der *Mittelpunkt I des Inkreises.* Dieser Punkt liegt auf dem Durchschnitt der Winkelsymmetralen. Da sich aber nach Gl. (9) ff. die Gewichte $m_1 m_2 m_3$ verhalten wie die den Punkten $A_1 A_2 A_3$ nicht anliegenden Dreiecke: $A_2 A_3 I$, $A_3 A_1 I$, $A_1 A_2 I$, und die Dreiecke bei gleicher Höhe sich verhalten wie die Seiten, so ist, wenn a_1, a_2, a_3 die den Punkten $A_1 A_2 A_3$ gegenüberliegenden Seiten bedeuten:

$$(a_1 + a_1 + a_3) I = a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3,$$

oder auch (35)

$$(\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \sin \alpha_3) I = \sin \alpha_1 A_1 + \sin \alpha_2 A_2 + \sin \alpha_3 A_3.$$

Der *Mittelpunkt U des Umkreises.* Dieser Punkt liegt auf dem Durchschnitt der Seitensymmetralen. Die den Ecken nicht anliegenden Dreiecke: $A_2 A_3 U$, $A_3 A_1 U$, $A_1 A_2 U$ geben die Coordinaten: $a_1 \cos \alpha_1$, $a_2 \cos \alpha_2$, $a_3 \cos \alpha_3$ u. s. w. somit:

$$(a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 + a_3 \cos \alpha_3) U = a_1 \cos \alpha_1 A_1 + a_2 \cos \alpha_2 A_2 + a_3 \cos \alpha_3 A_3,$$

$$(\sin 2\alpha_1 + \sin 2\alpha_2 + \sin 2\alpha_3) U = \sin 2\alpha_1 A_1 + \sin 2\alpha_2 A_2 + \sin 2\alpha_3 A_3,$$

oder

$$[2(a^2_1 a^2_2 + a^2_2 a^2_3 + a^2_3 a^2_1) - (a^4_1 + a^4_2 + a^4_3)] U \tag{36}$$

$$= a^2_1 (a^2_2 + a^2_3 - a^2_1) A_1 + a^2_2 (a^2_3 + a^2_1 - a^2_2) A_2 + a^2_3 (a^2_1 + a^2_2 - a^2_3) A_3.$$

b) Die *aggregierten Punkte.*

Da der mittlere Punkt S sich selbst als aggregierter Punkt entspricht, so haben wir nur die Aggregierten zu I und U zu bestimmen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die *Agreggierten zum Mittelpunkte des Inkreises.* Diese Punkte erhält man, wenn man (S. 13. ff.) 1) aus den Mittelpunkten $M_1 M_2 M_3$ der Seiten $a_1\ a_2\ a_3$ Parallele zu $A_1 I$, $A_2 I$, $A_3 I$ zieht; 2) aus den Ecken $A_1 A_2 A_3$ Parallele zu $M_1 I$, $M_2 I$, $M_3 I$. Es ist dann:

$$3(a_1+a_2+a_3)S = 2(a_1+a_2+a_3)I + (a_1+a_2+a_3)I',$$
$$3(a_1+a_2+a_3)S = 2(a_1+a_2+a_3)I'' + (a_1+a_2+a_3)I,$$

oder wenn $2s = a_1+a_2+a_3$,

$$sI' = (s-a_1)A_1 + (s-a_2)A_2 + (s-a_3)A_3, \tag{37}$$

und analog

$$4sI'' = (a_2+a_3)A_1 + (a_3+a_1)A_2 + (a_1+a_2)A_3. \tag{38}$$

Gl. (37) giebt aber, wie man leicht findet, den Punkt, in dem sich die Transversalen an die *innern Berührungspunkte der äußern Berührungskreise* schneiden; Gl. (38) *den Schwerpunkt des Umfanges* des Dreiecks u. s. w. Man sieht zugleich, dass I″ der Mittelpunkt von I I′ ist, wei

$$2I'' = I + I'.$$

Die *Aggregierten zum Mittelpunkte des Umkreises.* Es ist analog, wie oben, wenn H und F die beiden aggregierten Punkte bedeuten,

$$3(a_1\cos\alpha_1 + a_2\cos\alpha_2 + a_3\cos\alpha_3)\,.\,S = 2(a_1\cos\alpha_1 + a_2\cos\alpha_2 + a_3\cos\alpha_3)\,.\,U$$
$$+(a_1\cos\alpha_1 + a_2\cos\alpha_2 + a_3\cos\alpha_3)\,.\,H,$$

oder

$$(a_1\cos\alpha_1 + a_2\cos\alpha_2 + a_3\cos\alpha_3)\,.\,H = (a_3\cos\alpha_3 + a_2\cos\alpha_2 - a_1\cos\alpha_1)\,.\,A_1$$
$$+(a_1\cos\alpha_1 + a_3\cos\alpha_3 - a_2\cos\alpha_2)\,.\,A_2 + (a_1\cos\alpha_1 + a_2\cos\alpha_2 - a_3\cos\alpha_3)\,.\,A_3\,;$$

desgleichen (39)

$$[2(a_1^2a_2^2 + a_2^2a_3^2 + a_3^2a_1^2) - (a_1^4 + a_2^4 + a_3^4)]\,.\,H = (a_1^2 + a_3^2 - a_2^2)(a_2^2 + a_1^2 - a_3^2)\,.\,A_1$$
$$+(a_2^2 + a_3^2 \quad a_1^2)(a_2^2 + a_1^2 - a_3^2)\,.\,A_2 + (a_2^2 + a_3^2 - a_1^2)(a_1^2 + a_3^2 - a_2^2)\,.\,A_3\,,$$

u. s. w.

Dies giebt die bekannte Gleichung[1]) für den *Höhenschnittpunkt,* dessen Coordinaten auch sind:

[1]) Über diese und andere Gleichungen des Höhenpunktes und der merkwürdigen Punkte überhaupt vergleiche man: V. Schlegel, Einige geometrische Anwendungen der Grassmannschen Ausdehnungslehre. Programm, Waren, 1882.; C.-A. Laisant, Théorie et applications des Équipollences. Paris. 1887. S. 122.; A. Müller, Untersuchungen über die merkwürdigen Punkte und Linien des Dreiecks. Programm, Kempten. 1888/89. S. 7. ff.; desgleichen das treffliche Werk von E. W. Hyde, The Directional Calculus, based upon the methods of Hermann Grassmann. Boston. U. S. A. Ginn et Co. 1890.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$a_1 \cos\alpha_2 \cos\alpha_3,\ a_2 \cos\alpha_1 \cos\alpha_3,\ a_3 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2.$$

Für den zweiten aggregierten Punkt hat man:

$$3(a_1 \cos\alpha_1 + a_2 \cos\alpha_2 + a_3 \cos\alpha_3).S$$
$$= 2(a_1 \cos\alpha_1 + a_2 \cos\alpha_2 + a_3 \cos\alpha_3) . F + (a_1 \cos\alpha_1 + a_2 \cos\alpha_2 + a_3 \cos\alpha_3).U.$$

$$2(a_1 \cos\alpha_1 + a_2 \cos\alpha_2 + a_3 \cos\alpha_3).F \tag{40}$$
$$= (a_2 \cos\alpha_2 + a_3 \cos\alpha_3) . A_1 + (a_3 \cos\alpha_3 + a_1 \cos\alpha_1) . A_2 + (a_1 \cos\alpha_1 + a_2 \cos\alpha_2).A_3.$$

Gl. (40) stellt den Mittelpunkt F *des Feuerbachschen Kreises* dar. Zugleich sieht man, dass

$$2F = U + H.$$

Damit sind die Gleichungen der 7 merkwürdigen Punkte aufgestellt. Sie sind nichts anderes als zwei Gruppen aggregierter Punkte, deren es im Dreieck noch beliebig viele giebt; denn jeder Punkt innerhalb oder außerhalb des Dreiecks bestimmt mit dem Schwerpunkt eine solche Punktgruppe.

Ferner giebt es in jedem beliebigen n-Eck zu jedem Punkte und dem mittlern Punkte eine solche Punktgruppe, die eine «Eulersche Gerade» bestimmt, und alle diese Geraden schneiden sich im mittlern Punkte des Systems.

c) *Conjugierte und adjungierte Systeme.*

Die conjugierten Punktsysteme zu den merkwürdigen Punkten des Dreiecks lassen sich ohne Schwierigkeiten herstellen; die adjungierten Systeme bieten vielleicht ein größeres Interesse. Für die äußern adjungierten Punkte zu S,I,I″,I′ findet man ohne weiters:

$$S_1 = -A_1 + A_2 + A_3,$$
$$(-a_1 + a_2 + a_3)I_1 = -a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3,$$
$$[-(a_2 + a_3) + (a_3 + a_1) + (a_1 + a_2)]I''_1 = -(a_2 + a_3)A_1 + (a_3 + a_1)A_2 + (a_1 + a_2)A_3.$$

Addiert man die Gleichungen und setzt $a_1 + a_2 + a_3 = 2s$, so ist:

$$sS_1 = (s - a_1)I_1 + a_1 I''_1,\ (s - a_1) : a_1 = I''_1 S_1 : S_1 I_1. \tag{41}$$

Für I'_1 ist, wenn $2(s - a_1) = \alpha_1$ gesetzt wird, entsprechend:

$$sS_1 = (s - \alpha_1)I'_1 + \alpha_1 I_1,\ (s - \alpha_1) : \alpha_1 = I_1 S_1 : S_1 I'_1. \tag{42}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ähnliche Gleichungen lassen sich für die übrigen Ecken ableiten; desgleichen für H und F. Für die innern adjungierten Dreiecke gelten analoge Beziehungen.

«Es giebt also jeder Ecke des Dreiecks entsprechend zu den 7 «merkwürdigen Punkten des Dreiecks *jedesmal ein System von 7* «*äußern und innern adjungierten Punkten.* Diese 7 Punkte liegen «zu vier auf Geraden, die sich in den entsprechenden adjungierten «Schwerpunkten schneiden, so dass die 6.7 adjungierten Punkte «wie ein 6faches Spiegelbild das ursprüngliche System umgeben. «Die relativen Abstände der Punkte von einander sind durch die «Gewichte des Ursystems gegeben».

Es ist wohl überflüssig zu bemerken, dass für jeden beliebigen Punkt ähnliche Relationen bestehen.

2) Das Tetraeder.

a) *Die drei unabhängigen Punkte.*

Der Schwerpunkt und der mittlere Punkt. Auch im Tetraeder fällt der Schwerpunkt des Volums mit dem Schwerpunkte gleicher Gewichte in den Ecken zusammen: der Schwerpunkt ist also zugleich mittlerer Punkt, somit

$$4S = A_1 + A_2 + A_3 + A_4. \tag{43}$$

Der Mittelpunkt I der Inkugel. Dieser Punkt ist der Schnittpunkt der körperlichen Winkelsymmetralen. Da sich aber nach Gl. (9) ff. die Gewichte m_1, m_2, m_3, m_4 verhalten wie die den Ecken $A_1 A_2 A_3 A_4$ nicht anliegenden Tetraeder $A_2A_3A_4I$, $A_3A_4A_1I$, $A_4A_1A_2I$, $A_1A_2A_3I$, und diese Pyramiden bei gleicher Höhe sich verhalten wie die Seitenflächen, so ist, wenn a_1, a_2, a_3, a_4 die den Ecken $A_1A_2A_3A_4$ gegenüberliegenden Seitenflächen des Tetraeders bedeuten:

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)I = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 + a_4A_4. \tag{44}$$

Der Mittelpunkt U der Umkugel. Dieser Punkt ist der Schnittpunkt der Seitenflächensymmetralen. Bedeuten nun m_1, m_2, m_3, m_4 die Inhalte der den Ecken $A_1A_2A_3A_4$ gegenüberliegenden Pyramiden $A_2A_3A_4U$, $A_3A_4A_1U$, $A_4A_1A_2U$, $A_1A_2A_3U$, so ist:

$$(m_1 + m_2 + m_3 + m_4)U = m_1A_1 + m_2A_2 + m_3A_3 + m_4A_4. \tag{45}$$

b) *Die aggregierten Punkte.*

Auch hier kommen zunächst die Aggregierten von I und U in Betracht. Ganz wie beim Dreieck findet man für die beiden aggregierten Punktepaare, wenn man $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 3s$, und $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 3\sigma$ setzt:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$sI' = (s - a_1)A_1 + (s - a_2)A_2 + (s - a_3)A_3 + (s - a_4)A_4, \tag{46}$$

$$9sI'' = (a_2 + a_3 + a_4)A_1 + (a_3 + a_4 + a_1)A_2 + (a_4 + a_1 + a_2)A_3 + (a_1 + a_2 + a_3)A_4.$$

und

$$\sigma U' = (\sigma - m_1)A_1 + (\sigma - m_2)A_2 + (\sigma - m_3)A_3 + (\sigma - m_4)A_4; \tag{47}$$

$$9\sigma U'' = (m_2 + m_3 + m_4)A_1 + (m_3 + m_4 + m_1)A_2 + (m_4 + m_1 + m_2)A_3 + (m_1 + m_2 + m_3)A_4.$$

Ohne uns hier auf eine eingehende Untersuchung dieser 7 Punkte des Tetraeders einlassen zu können, sieht man doch sofort, dass sie *ein Analogon zu den merkwürdigen Punkten des Dreiecks bilden.* Dies beweist nicht nur die Gleichheit ihrer Entstehungsweise, sondern auch die Übereinstimmung ihrer wesentlichen Eigenschaften. So ist I″ im Dreieck Mittelpunkt desjenigen Kreises, welcher dem Dreieck aus den mittlern Punkten $M_1M_2M_3$ der Seiten eingeschrieben ist[1]); und ebenso ist beim Tetraeder I″ der Mittelpunkt der Kugel, die dem Tetraeder aus den mittlern Punkten $M_1M_2M_3M_4$ der Seitenflächen eingeschrieben ist. Sodann ist I″ beim Dreieck Schwerpunkt des Umfanges, beim Tetraeder Schwerpunkt der Seitenflächen, u. s. w. Auch für das U-System existiert die Analogie: so ist F der Mittelpunkt des Kreises über $M_1M_2M_3$, wie U″ Mittelpunkt der Kugel um $M_1M_2M_3M_4$; für die Radien ergeben sich aus der Ähnlichkeit entsprechende Beziehungen, u. s. w.[2])

c) *Die conjugierten und adjungierten Systeme.*

Der Raum gestattet es nicht, hier näher auf diese Systeme einzugehen; übrigens genügt es zu bemerken, dass die Behandlung ganz wie beim Dreieck ist. Auch hier haben wir das 4fache innere und äußere Punktesystem, das wie ein 8faches Spiegelbild das Ursystem umgiebt.

Aus dem Vorhergehenden ist ersichtlich, dass zu *zwei beliebigen Punkten eines Dreiecks und Tetraeders und ihrem Schwerpunkte* die aggregierten Punkte sich bestimmen lassen, und zu diesen «7 merkwürdigen Punkten» das äußere und innere adjungierte Punktsystem existiert. Es ist also in diesem Sinne die Zahl der «7 merkwürdigen Punkte» unbegrenzt. Ähnliches gilt von jedem Polygon und Polyeder.

---

[1]) Dieser Kreis wird zuweilen auch nach Spieker benannt.

[2]) Am klarsten tritt die Übereinstimmung der Punkte wohl hervor, wenn man die Steinersche Auffassung über die merkwürdigen Punkte des Dreiecks zu Grunde legt. Vergl. Baltzer, Elem. d. Math. 4. B. S. 91. ff., J. Lange, Geschichte des Feuerbachschen Kreises, Programm d. Friedrichs-Werderschen Ober-Realschule. Berlin. 1894. S. 11. ff.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 7. Inhaltsbeziehungen.

1. Das Dreieck.

Erste Aufgabe. Gegeben seien drei beliebige Punkte $S_1S_2S_3$ auf den Seiten (oder ihren Verlängerungen) eines Dreiecks $A_1A_2A_3$: man soll den Inhalt dieses den Seiten des Dreiecks $A_1A_2A_3$ eingeschriebenen Dreiecks bestimmen aus dem Inhalt des Urdreiecks und den Abständen der Punkte S_i von den Ecken desselben.

Wenn $a_1 = A_1S_1$, $a_1 = A_2S_1$, $b_1 = A_2S_2$, $b_2 = A_3S_2$, $c_1 = A_3S_3$, $c_2 = A_1S_3$, so ist

$$(a_1+a_2)S_1 = a_2A_1 + a_1A_2,\ (b_1+b_2)S_2 = b_1A_2 + b_2A_3,\ (c_1+c_2)S_3 = c_1A_3 + c_2A_1,$$

oder wenn man äußerlich multipliciert:

$$(a_1+a_2)(b_1+b_2)(c_1+c_2)\,.\,S_1S_2S_3 = [a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2]\,.\,A_1A_2A_3. \qquad (48)$$

Dies ist die ebenso einfache als allgemeine Beziehung zwischen dem Inhalt der Dreiecke $S_1S_2S_3$ und $A_1A_2A_3$.[1]) Wir wollen noch einige Sonderfälle anführen.

a) S_1, S_2, S_3 seien die Fußpunkte der Ecktransversalen, die sich in einem Punkte schneiden. Dann ist:

$$(m_1+m_2)S_3 = m_1A_1 + m_2A_2,\ (m_2+m_3)S_1 = m_2A_2 + m_3A_3,$$
$$(m_3+m_1)S_2 = m_3A_3 + m_1A_1,$$

somit

$$(m_1+m_2)(m_2+m_3)(m_3+m_1)\,.\,S_1S_2S_3 = 2m_1m_2m_3\,.\,A_1A_2A_3,$$
$$(m_1+2m_2)(m_2+2m_3)(m_3+2m_1)\,.\,K'_1K''_1K'''_1 = 9m_1m_2m_3\,.\,A_1A_2A_3, \qquad (49)$$
$$(2m_1+m_2)(2m_2+m_3)(2m_3+m_1)\,.\,K'_2K''_2K'''_2 = 9m_1m_2m_3\,.\,A_1A_1A_3,$$

u. s. w.

b) S_1, S_2, S_3 seien noch specieller die Fußpunkte der Transversalen durch die sogen. merkwürdigen Punkte, $K^i_1K^i_2$ die Fußpunkte ihrer Conjungierten. Dann ist, wenn $S_1S_2S_3$ die Fußpunkte der betreffenden Transversalen sind, nach Gl. (49):

1) Für den Schwerpunkt:

$$2^2S_1S_2S_3 = A_1A_2A_3,\ 3K'_1K''_1K'''_1 = A_1A_2A_3 = 3K'_2K''_2K'''_2,\ \text{u. s. w.},$$

---

[1]) Ist der Inhalt des Dreiecks $S_1S_2S_3$ gleich Null, so liegen die Punkte auf einer Geraden und man hat wieder die Bedingungsgleichung: $a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2 = 0$. Gl. (47) löst auch die Aufgabe einem Dreieck $A_1A_2A_3$ ein zweites $S_1S_2S_3$ einzuschreiben von gegebenem Inhalt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2) Für den Inkreis ist, wenn $S_1S_2S_3$ die Fußpunkte der Winkelsymmetralen und $a_1a_2a_3$ die Seiten,

$$(a_1+a_2)(a_2+a_3)(a_3+a_1) \,.\, S_1S_2S_3 = 2a_1a_2a_3 \,.\, A_1A_2A_3\text{[1]},$$
$$(a_1+2a_2)(a_2+2a_3)(a_3+2a_1) \,.\, K'_1K''_1K'''_1 = 9a_1a_2a_3 \,.\, A_1A_2A_3, \tag{50}$$
$$(2a_1+a_2)(2a_2+a_3)(2a_3+a_1) \,.\, K'_2K''_2K'''_2 = 9a_1a_2a_3 \,.\, A_1A_2A_3.$$

3) Für das Fußpunktdreieck der Transversalen durch U hat man:

$$(a_1\cos\alpha_1+a_2\cos\alpha_2)(a_2\cos\alpha_2+a_3\cos\alpha_3)(a_3\cos\alpha_3+a_1\cos\alpha_1) \,.\, S_1S_2S_3$$
$$= 2a_1a_2a_3\cos\alpha_1\cos\alpha_2\cos\alpha_3 \,.\, A_1A_2A_3. \tag{51}$$

4) Für die Fußpunktdreiecke der Transversalen durch I′ und I″:

$$a_1a_2a_3 \,.\, S_1S_2S_3 = 2(s-a_1)(s-a_2)(s-a_3) \,.\, A_1A_2A_3, \tag{52}$$

$$(a_1+a_2+2a_3)(a_2+a_3+2a_1)(a_3+a_1+2a_2) \,.\, S_1S_2S_3$$
$$= 2(a_1+a_2)(a_2+a_3)(a_3+a_1) \,.\, A_1A_2A_3. \tag{53}$$

5) Um das Fußpunktdreieck der Transversalen durch H zu bestimmen, wollen wir etwas bequemere Gleichungen ableiten.

Wenn $H_1H_2H_3$ die Fußpunkte der Transversalen durch $A_1A_2A_3$ und H sind, so ist:

$$a_3H_3 = a_1\cos\alpha_2A_1+a_2\cos\alpha_1A_2,\quad a_2H_2 = a_2\cos\alpha_3A_2+a_3\cos\alpha_2A_3,$$
$$a_1H_1 = a_3\cos\alpha_1A_3+a_1\cos_3A_1,$$

somit

$$H_1H_2H_3 = 2\cos\alpha_1\cos\alpha_2\cos\alpha_3 \,.\, A_1A_2A_3.\text{[2]} \tag{54}$$

Ebenso für die Fußpunkte von F:

$$(a_1\cos\alpha_1+a_2\cos\alpha_2+2a_3\cos\alpha_3)(a_2\cos\alpha_2+a_3\cos\alpha_3+2a_1\cos\alpha_1)$$
$$(a_3\cos\alpha_3+a_1\cos\alpha_1+2a_2\cos\alpha_2) \,.\, F_1F_2F_3 \tag{55}$$
$$= 2(a_1\cos\alpha_1+a_2\cos\alpha_2)(a_2\cos\alpha_2+a_3\cos\alpha_3)(a_3\cos\alpha_3+a_1\cos\alpha_1) \,.\, A_1A_2A_3.$$

Auf diese Weise kann man den Inhalt eines jeden Dreiecks, das einem zweiten eingeschrieben ist, durch das letztere ausdrücken, wenn das Verhältnis der Abschnitte auf den Seiten bekannt ist.

---

[1]) Klügel, Math. Wörterb. Supplementband: «Dreieck», S. 712.
[2]) Klügel, l. c. S. 713.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zweite (allgemeinere) Aufgabe. Gegeben seien drei ganz beliebige Punkte $P_1P_2P_3$ in der Ebene eines Dreiecks $A_1A_2A_3$: man soll den Inhalt dieses Dreiecks $P_1P_2P_3$ durch den Inhalt des Dreiecks $A_1A_2A_3$ ausdrücken, wenn die Gewichte der Punkte $A_1A_2A_3$ in Bezug auf $P_1P_2P_3$ gegeben sind. Dabei kann man statt der Gewichte in der Mechanik gewisse Dreiecksinhalte oder Längenabschnitte in der Geometrie einführen.

Es sei:

$$(a_1+a_2+a_3)P_1 = a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3,$$
$$(b_1+b_2+b_3)P_2 = b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3,$$
$$(c_1+c_2+c_3)P_3 = c_1A_1+c_2A_2+c_3A_3.$$

Dann ist

$$(a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2+b_3)(c_1+c_2+c_3) \,.\, P_1P_2P_3 = \begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \\ c_1, & c_2, & c_3 \end{vmatrix} \,.\, A_1A_2A_3. \quad (56)$$

So ist z. B. das Dreieck über dem Schwerpunkte und den Mittelpunkten des In- und Umkreises:

$$6s(a_1\cos\alpha_1+a_2\cos\alpha_2+a_3\cos\alpha_3)SIU = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, \\ a_1, & a_2, & a_3, \\ a_1\cos\alpha_1, & a_2\cos\alpha_2, & a_3\cos\alpha_3 \end{vmatrix} \,.\, A_1A_2A_3. \quad (57)$$

Sind speciell die Punkte $P_1P_2P_3$ die Adjungierten eines Punktes

$$(a_1+a_2+a_3)P = a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3,$$

so ist:

$$(a_1+a_2-a_3)(a_1-a_2+a_3)(-a_1+a_2+a_3) \,.\, P_1P_2P_3 = -4a_1a_2a_3 \,.\, A_1A_2A_3. \quad (58)$$

Beispiele:

Das adjungierte äußere Schwerpunktdreieck: $P_1P_2P_3 = -4A_1A_2A_3$.

Das adjungierte äußere Dreieck in Bezug auf den Mittelpunkt des Inkreises ist das Dreieck über den Mittelpunkten der äußern Ankreise, somit:

$$2(s-a_1)(s-a_2)(s-a_3) \,.\, P_1P_2P_3 = -a_1a_2a_3 \,.\, A_1A_2A_3\,^{1)}$$

u. s. w.

2. Das Tetraeder.

Erste Aufgabe. Gegeben seien vier beliebige, nicht in einer Ebene liegende Punkte $S_1S_2S_3S_4$ auf den vier Hauptkanten (oder ihren Verlängerungen) eines Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$: man soll den Inhalt dieses den Hauptkanten eingeschriebenen Tetraeders durch den Inhalt

---

[1] Klüge[1], M. W. l. c. S. 735.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

des Urtetraeders und die Abstände der Punkte S_i von je zwei der Ecken $A_\varkappa A_\lambda$ ausdrücken.

Es sei:

$$(a_1+a_2)S_1 = a_1A_1+a_2A_2\,;\ (b_1+b_2)S_2 = b_1A_2+b_2A_3$$
$$(c_1+c_2)S_3 = c_1A_3+c_2A_4\,;\ (d_1+d_2)S_4 = d_1A_4+d_2A_1.$$

Dann ist:

$$(a_1+a_2)(b_1+b_2)(c_1+c_2)(d_1+d_2).S_1S_2S_3S_4=[a_1b_1c_1d_1-a_2b_2c_2d_2]A_1A_2A_3A_4, \quad (59)$$

wobei $S_1S_2S_3S_4$ und $A_1A_2A_3A_4$ den Inhalt der betreffenden Tetraeder geben. Specielle Fälle findet man genug, wenn man z. B. die früheren Gleichungen von Punkten am Tetraeder benützt. Verschwindet die Gl. (59), so liegen $S_1S_2S_3S_4$ auf einer Ebene.

Zweite Aufgabe. Gegeben seien vier beliebige, nicht in einer Ebene liegende Punkte $S_1S_2S_3S_4$ auf den vier Flächen (oder ihren Verlängerungen) eines Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$: man soll den Inhalt dieses den Seitenflächen eingeschriebenen Tetraeders durch den Inhalt des Urtetraeders und die durch die Gewichte der Punkte dargestellten Dreiecke oder Abschnitte auf den Kanten ausdrücken.

Es ist mit leicht ersichtlicher Bezeichnung:

$$(a_2+a_3+a_4)(b_3+b_4+b_1)(c_4+c_1+c_2)(d_1+d_2+d_3)\,.\,S_1S_2S_3S_4$$
$$= \begin{vmatrix} 0, & a_2, & a_3, & a_4, \\ b_1, & 0, & b_3, & b_4, \\ c_1, & c_2, & 0, & c_4, \\ d_1, & d_2, & d_3, & 0, \end{vmatrix}\,.\,A_1A_2A_3A_4. \quad (60)$$

Wir wollen einige Specialfälle anführen:

a) $S_1S_2S_3S_4$ seien die Fußpunkte der Ecktransversalen, die sich in einem Punkte schneiden, oder der vier Transversalebenen, die, durch die vier Hauptkanten gelegt, durch einen Punkt gehen.

Es sei:

$$(m_1+m_2+m_3+m_4)S = m_1A_1+m_2A_2+m_3A_3+m_4A_4,$$

und die Fußpunkte der Transversalen (oder Transversalebenen):

$$(m_1+m_2+m_3)S_4=m_1A_1+m_2A_2+m_3A_3\,;\ (m_2+m_3+m_4)S_1=m_2A_2+m_3A_3+m_4A_4\,;$$
$$(m_3+m_4+m_1)S_2=m_3A_3+m_4A_4+m_1A_1\,;\ (m_4+m_1+m_2)S_3=m_4A_4+m_1A_1+m_2A_2.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dann ist, wenn man ausmultipliciert:

$$(m_1+m_2+m_3)(m_2+m_3+m_4)(m_3+m_4+m_1)(m_4+m_1+m_2) \,.\, S_1S_2S_3S_4$$
$$= 3m_1m_2m_3m_4 \,.\, A_1A_2A_3A_4, \tag{61}$$

u. s. w.

b) Sind noch specieller die Punkte $S_1S_2S_3S_4$ die Fußpunkte der Transversalen durch die sogen. merkwürdigen Punkte, so ist für das Tetraeder über den Schwerpunkten der Flächen:

$$3^3 S_1S_2S_3S_4 = A_1A_2A_3A_4. \tag{62}$$

Für die Fußpunkte der Winkelsymmetralen ist, wenn $a_1a_2a_3a_4$ die Seitenflächen,

$$(a_1+a_2+a_3)(a_2+a_3+a_4)(a_3+a_4+a_1)(a_4+a_1+a_2) \,.\, S_1S_2S_3S_4$$
$$= 3a_1a_2a_3a_4 \,.\, A_1A_2A_3A_4. \tag{63}$$

Analog für die übrigen merkwürdigen Punkte.

Dritte (allgemeinere) Aufgabe. Vier ganz beliebige Punkte im Raume seien aus vier gegebenen Punkten abgeleitet: die Relationen ihres gegenseitigen Inhalts zu bestimmen.

Die Gleichung lässt sich nach dem Gesagten sofort hinschreiben. Auch der specielle Fall für das adjungierte Tetraeder löst sich analog zum Dreieck.

Es liegt auf der Hand, dass die Probleme für den n-dimensionalen Raum sich analog gestalten.

Als Nachtrag wollen wir noch das Dreieck und Tetraeder aus den Schwerlinien bestimmen.

1) *Das Dreieck aus den Schwerlinien.*

Es sei:

$$3S = A_1+A_2+A_3,$$

dann ist:

$$(S-A_1)+(S-A_2)+(S-A_3) = 0.$$

Aus den Schwerlinien SA_1, SA_2, SA_3 nach Länge und Richtung genommen lässt sich also eine Dreieck beschreiben. Dasselbe gilt natürlich auch, wenn man die Schwerlinien bis zum Durchschnitt mit der gegenüberliegenden Seite nimmt. Wenn nun Δ der Inhalt des Dreiecks $A_1A_2A_3$ und Δ' derjenige des Schwerliniendreiecks ist, so hat man:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$2\Delta = (A_1 - A_2)(A_1 - A_3) = A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_1,$$
$$2\Delta' = (S - A_1)(S - A_2) = {}^1/_9[(A_2 + A_3 - 2A_1)(A_1 + A_3 - 2A_2)],$$
$$= {}^1/_3[A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_1],$$

somit

$$3\Delta' = \Delta.$$

Für das Dreieck Δ'' aus den Schwerlinien bis zum Durchschnitt mit den Seiten findet man entsprechend:

$$4\Delta'' = 3\Delta.$$

2) *Das Tetraeder aus den Schwerlinien.*

Es sei:

$$4S = A_1 + A_2 + A_3 + A_4,$$

dann ist:

$$(S - A_1) + (S - A_2) + (S - A_3) + (S - A_4) = 0.$$

Aus dem Schwerlinien SA_1, SA_2, SA_3, SA_4 nach Länge und Richtung genommen lässt sich also ein Tetraeder beschreiben. Dasselbe gilt natürlich auch, wenn man die Schwerlinien bis zum Durchschnitt mit den gegenüberliegenden Seitenflächen nimmt. Wenn nun Π der Inhalt des Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$, Π' derjenige des Schwerlinientetraeders, SA_1, SA_2, SA_3, SA_4 und Π'' der Inhalt von S_1A_1, S_2A_2, S_3A_3, S_4A_4 ist, wo $S_1S_2S_3S_4$ die Schnittpunkte der Schwerlinien auf den gegenüberstehenden Seitenflächen sind, so ist:

$$6\Pi = (A_1 - A_2)(A_1 - A_3)(A_1 - A_4) = A_1A_2A_3 - A_2A_3A_4 + A_3A_4A_1 - A_4A_1A_2;$$
$$6\Pi' = (S - A_1)(S - A_2)(S - A_3)$$
$$= \frac{1}{4^3}[(A_2 + A_3 + A_4 - 3A_1)(A_3 + A_4 + A_1 - 3A_2)(A_4 + A_1 + A_2 - 3A_3)]$$
$$= {}^1/_4[A_1A_2A_3 - A_2A_3A_4 + A_3A_4A_1 - A_4A_1A_2],$$

somit

$$4\Pi' = \Pi,$$

und

$$27\Pi'' = 16\Pi. \tag{64}$$

§ 8. Längenbeziehungen.

Schnittverhältnisse von Strecken. Bevor wir an die Untersuchung der metrischen Beziehungen gehen, wie sie sich aus den allgemeinen Sätzen ergeben, mag noch eine kurze Bemerkung über Streckenverhältnisse am Platze sein, um so mehr, als wir eine Bekanntschaft mit den Methoden von Möbius-Grassmann leider nur vereinzelt voraussetzen dürfen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Gleichung

$$(m_1+m_2)S = m_1A_1+m_2A_2$$

giebt:

$$m_1(S-A_1) = m_2(A_2-S),\ A_2S : SA_1 = m_1 : m_2. \tag{65}$$

Sodann

$$(m_1+m_2+m_3)S = m_1A_1+m_2A_2+m_3A_3$$
$$= m_1A_1+(m_2+m_3)S_1,$$

oder

$$m_1(S-A_1) = (m_2+m_3)(S_1-S),\ S_1S : SA_1 = m_1 : m_2+m_3. \tag{66}$$

Endlich

$$(m_1+m_2+m_3)(S-A_1) = (m_2+m_3)(S_1-A_1),$$
$$SA_1 : S_1A_1 = m_2+m_3 : m_1+m_2+m_3. \tag{67}$$

Ähnlich für:

$$(m_1+m_2+m_3+m_4)S = m_1A_1+m_2A_2+m_3A_3+m_4A_4,$$
$$(m_1+m_2+m_3+m_4)S = m_1A_1+(m_2+m_3+m_4)S_1,$$

oder

$$m_1(S-A_1) = (m_2+m_3+m_4)(S_1-S),\ S_1S:SA_1=m_1 : m_2+m_3+m_4, \tag{68}$$

$$(m_1+m_2+m_3+m_4)(S-A_1) = (m_2+m_3+m_4)(S_1-A_1),$$
$$SA_1 : S_1A_1 = m_2+m_3+m_4 : m_1+m_2+m_3+m_4. \tag{69}$$

Unsere frühern Gleichungen über Conjugierte, Adjungierte, merkwürdige Punkte geben also zugleich an, in welchem Verhältnisse die Strecken getheilt werden. Specielle Beispiele anzuführen halten wir für überflüssig, da man nur die betreffenden Gewichte in diese allgemeinen Beziehungen einzusetzen hat.

Metrische Streckenbeziehungen.

Die Gleichungen (4)—(15) gelten allgemein für beliebige Punkte im Raume. Es soll nun an einzelnen Beispielen die Fruchtbarkeit jener Sätze erläutert werden, wobei wir allerdings des Raumes halber nur andeutungsweise vorgehen können.

1) Dreieck (und Gerade).

a) Gegeben seien die Punkte $A_1A_2S_3$ auf einer Geraden und ein beliebiger Punkt A_3 außerhalb: man soll die Längenbeziehungen zwischen diesen angeben.

Wenn

$$(m_1+m_2)S_3 = m_1A_1+m_2A_2,$$

so ist nach Gl. (4), wenn $A_iA^2_k = A_iA^2_k$,

$$(m_1+m_2)^2 . S_3A^2_3 = (m_1+m_2)[m_1A_1A^2_3+m_2A_2A^2_3]-m_1m_2A_1A^2_2. \tag{70}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Beispiele. 1) *Schwerlinie und ihre Verwandten.*

$$2S_3 = A_1 + A_2, \qquad 2^2 S_3 A^2_3 = 2A_1 A^2_3 + 2A_2 A^2_3 - A_1 A^2_2,$$

$$0K_3 = A_1 - A_2, \qquad K_3 A_3 = \infty,$$

$$3K_1 = A_1 + 2A_2, \qquad 3^2 K_1 A^2_3 = 3A_1 A^2_3 + 6A_2 A^2_3 - 2A_1 A^2_2,$$

$$3K_2 = 2A_1 + A_2, \qquad 3^2 K_2 A^2_3 = 6A_1 A^2_3 + 3A_2 A^2_3 - 2A_1 A^2_2,$$

u. s. w.

2) *Winkelsymmetrale und ihre Verwandten.*

$$(a_1 + a_2) I_3 = a_1 A_1 + a_2 A_2, \qquad (a_1 + a_2)^2 I_3 A^2_3 = (a_1 + a_3)[a_1 a^2_2 + a_2 a^2_1] - a_1 a_2 a^2_3$$

$$= a_1 a_2 [a_1 + a_2 + a_3] . [a_1 + a_2 - a_3];$$

$$(a_1 - a_2) K_3 = a_1 A_1 - a_2 A_2, \qquad (a_1 - a_2)^2 K_3 A^2_3 = a_1 a_2 [a_1 - a_2 + a_3] [-a_1 + a_2 + a_3];$$

$$(a_1 + 2a_2) K_1 = a_1 A_1 + 2a_2 A_2, \quad (a_1 + 2a_2)^2 K_1 A^2_3 = a_1 a_2 [(a_2 + 2a_1)(a_1 + 2a_2) - 2a^2_3];$$

$$(2a_1 + a_2) K_2 = 2a_1 A_1 + a_2 A_2, \quad (2a_1 + a_2)^2 K_2 A^2_3 = a_1 a_2 [(a_2 + 2a_1)(a_1 + 2a_2) - 2a^2_3];$$

u. s. w.

Diese Beispiele mögen genügen. Es ist klar, dass man für jede Ecktransversale durch einen der merkwürdigen Punkte, und ihre Verwandten sofort eine Gleichung erhält. Die Gleichung der Fußpunkte dieser Transversalen aufzustellen, wird nach dem Vorhergehenden selbst für den, welcher mit den Principien von Möbius-Grassmann nicht vertraut ist, keine Schwierigkeit haben.

Gl. (70) gilt auch für Punkte auf einer Geraden.

b) Gegeben drei Punkte $A_2 A_3 S_3$ auf einer Geraden und zwei beliebige Punkte $O_1 O_2$. Dann ist nach Gl. (5), (10):

$$(m_1 + m_2)[S_3 O^2_1 - S_3 O^2_2] = m_1 [A_1 O^2_1 - A_1 O^2_2] + m_2 [A_2 O^2_1 - A_2 O^2_2] \quad (71)$$

$$A_1 A_2 . [S_3 O^2_1 - S_3 O^2_2] + A_2 S_3 . [A_1 O^2_1 - A_1 O^2_2] + S_3 A_1 [A_2 O^2_1 - A_2 O^2_2] = 0 \quad (72)$$

Die letzte Gleichung giebt noch einen Specialfall von a), nämlich den Satz von Stewart. Wenn $O_2 = S_3 = A_3$, $O_1 = 0$, so ist:

$$A_1 A_2 . A_3 O^2 + A_2 A_3 . A_1 O^2 + A_3 A_1 . A_2 O^2 + A_1 A_2 . A_2 A_3 . A_3 A_1 = 0. \quad (73)$$

Der Satz (72) von Möbius ist um ebensoviel allgemeiner und symmetrischer als der von Stewart, als er weniger bekannt zu sein scheint. Die Anwendung dieser Sätze auf das (gleichschenklige, rechtwinklige) Dreieck, Viereck u. s. w. sind bekanntlich sehr mannigfaltig. Auch diese Sätze gelten für 5 Punkte einer Geraden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

c) Gegeben 4 Punkte $A_1A_2A_3S$ einer Ebene und ein beliebiger Punkt O.

Wenn

$$sS = m_1A_1 + m_2A_2 + m_3A_3, \quad s = m_1 + m_2 + m_3,$$

dann ist nach Gl. (4), (13), (14):

$$s^2SO^2 \tag{74}$$
$$= s[m_1A_1O^2 + m_2A_2O^2 + m_3A_3O^2] - [m_1m_2A_1A^2_2 + m_2m_3A_2A^2_3 + m_3m_1A_3A^2_1],$$

$$sSO^2 = m_1A_1O^2 + m_2A_2O^2 + m_3A_3O^2 - [m_1SA^2_1 + m_2SA^2_2 + m_3SA^2_3], \tag{75}$$

$$s[m_1SA^2_1 + m_2SA^2_2 + m_3SA^2_3] = m_1m_2A_1A^2_2 + m_2m_3A_2A^2_3 + m_3m_1A_3A^2_1, \tag{76}$$

u. s. w.

Auch aus diesen Formeln könnten viele Beziehungen als Specialfälle abgeleitet werden; wir wollen bloß einige einfachere und bekanntere andeuten.

1) *Schwerpunkt und seine Verwandten.*
Es sei

$$3S = A_1 + A_2 + A_3\,; \quad 5\mathfrak{A}_1 = A_1 + 2A_2 + 2A_3\,; \quad \mathfrak{A}_3 = -A_1 + A_2 + A_3 \text{ u. s. w.}$$

Dann ist:

$$9SO^2 = 3[A_1O^2 + A_2O^2 + A_3O^2] - A_1A^2_2 + A_2A^2_3 + A_3A^2_1],$$
$$3SO^2 = A_1O^2 + A_2O^2 + A_3O^2 - [SA^2_1 + SA^2_2 + SA^2_3],$$
$$3[SA^2_1 + SA^2_2 + SA^2_3] = A_1A^2_2 + A_2A^2_3 + A_3A^2_1,$$
$$5[\mathfrak{A}_1A^2_1 + 2\mathfrak{A}_1A^2_2 + 2\mathfrak{A}_1A^2_3] = 2A_1A^2_2 + 4A_2A^2_3 + 2A_3A^2_1,$$
$$-\mathfrak{A}_3A^2_1 + \mathfrak{A}_3A^2_2 + \mathfrak{A}_3A^2_3 = -A_1A^2_2 + A_2A^2_3 - A_3A^2_1,$$

u. s. w.

2) *Mittelpunkt des Inkreises und verwandte Punkte.*

$$(a_1 + a_2 + a_3)I = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3\,; \quad a_1IA^2_1 + a_2IA^2_2 + a_3IA^2_3 = a_1a_2a_3\,;$$
$$(a_1 + a_2 - a_3)I_3 = a_1A_1 + a_2A_2 - a_3A_3\,; \quad a_1I_3A^2_1 + a_2I_3A^2_2 - a_3I_3A^2_3 = -a_1a_2a_3\,;$$

u. s. w.

Entsprechende Gleichungen findet man für die übrigen mit I und U verwandten Punkte.

d) Gegeben 4 Punkte $A_1A_2A_3S$ einer Ebene und zwei beliebige Punkte O_1O_2.

Es ist

$$s[SO^2_1 - SO^2_2] \tag{77}$$
$$= m_1[A_1O^2_1 - A_1O^2_2] + m_2[A_2O^2_1 - A_2O^2_2 + m_3[A_3O^2_1 - A_3O^2_2],$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$A_1A_2A_3 . [SO^2_1 - SO^2_2] - A_2A_3S . [A_1O^2_1 - A_1O^2_2]$$
$$+ A_3SA_1 . [A_2O^2_1 - A_2O^2_2] - SA_1A_2 . [A_3O^2_1 - A_3O^2_2] = 0. \qquad (78)$$

Die Anwendungen sind hier sowohl in der Ebene als im Raume leicht.

e) Gegeben 5 Punkte $A_1A_2A_3SS'$ einer Ebene.

Es sei

$$(m_1+m_2+m_3) . S = m_1A_1+m_2A_2+m_3A_3, \quad s = m_1+m_2+m_3,$$
$$(m'_1+m'_2+m'_3) . S' = m'_1A_1+m'_2A_2+m'_3A_3, \quad s' = m'_1+m'_2+m'_3.$$

Dann ist nach Gl. (8):

$$(ss')^2SS'^2 = (sm'_1 - s'm_1)(s'm_2 - sm'_2) . A_1A^2_2$$
$$+ (sm'_2 - s'm_2)(s'm_3 - sm'_3) . A_2A^2_3 \qquad (79)$$
$$+ (sm'_3 - s'm_3)(s'm_1 - sm'_1) . A_3A^2_1.$$

Hierbei können einzelne der Gewichte m_i, m'_i verschwinden. Diese Gleichung führt auch dann noch zum Ziele, wenn die übrigen versagen. Es kann somit die Entfernung eines ganz beliebigen Punktes der Ebene von jedem andern beliebigen Punkte derselben Ebene durch die Coefficienten m_i, m'_i und die Entfernungen der Fundamentalpunkte von einander ausgedrückt werden.

Es ist natürlich nicht möglich, auch nur annähernd die Reichhaltigkeit der obigen Formeln anzudeuten; einige Beispiele mögen die Methode der Anwendung zeigen.

1) *Entfernung zweier beliebiger Punkte auf zwei Seiten eines Dreiecks.*

In dem Dreieck $A_1A_2A_3$ sei $A_1A_2 = a_3$, $A_2A_3 = a_1$, $A_3A_1 = a_2$; SS' seien zwei Punkte auf A_1A_3 und A_1A_2, so dass:

$$\frac{A_1 - S}{S - A_3} = \frac{m_3}{m_1}, \quad \frac{A_1 - S'}{S' - A_2} = \frac{m'_2}{m'_1}.$$

Dann ist

$$(m_1+m_3)S = m_1A_1+m_3A_3, \quad (m'_1+m'_2)S' = m'_1A_1+m'_2A_2;$$

somit in Gl. (79):

$$s = m_1+m_3, \quad m_2 = 0; \quad s' = m'_1+m'_2, \quad m'_3 = 0,$$

und

$$(ss')^2 . (SS')^2 = sm'_2s'm_3 . a^2_1 + (s'm_1 - sm'_1)s'm_3 . a^2_2 - (sm'_1 - s'm_1)sm'_2 . a^2_3.$$

Sind SS' speciell die Mittelpunkte der Seiten, so ist $1 = m_1 = m_3$, $s = 2$, $m'_1 = m'_2 = 1$, $s' = 2$,

und

$$2 . SS' = A_2A_3.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2) *Die Eulerschen Gleichungen.*[1]) Die Eulerschen Gleichungen drücken die Entfernungen der merkwürdigen Punkte des Dreiecks durch die Seiten aus. Unsere allgemeine Formel gestattet dasselbe in mehr symmetrischer Form. Wir wollen nur drei Entfernungen herausheben: nämlich SI, SU, und IU. Es ist, wenn S der Schwerpunkt und I der Mittelpunkt des Inkreises:

$$3S = A_1 + A_2 + A_3, \qquad (a_1 + a_2 + a_3)I = a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3,$$

somit Gl. (79)

$$\begin{aligned} 9(a_1+a_2+a_3)^2 . SI^2 = {} & [3a_1 - (a_1+a_2+a_3)] . [(a_1+a_2+a_3) - 3a_2] . a^2_3 \\ & + [3a_2 - (a_1+a_2+a_3)] . [(a_1+a_2+a_3) - 3a_3] . a^2_1 \\ & + [3a_3 - (a_1+a_2+a_3)] . [(a_1+a_2+a_3) - 3a_1] . a^2_2 \end{aligned}$$

u. s. w.

Für die Entfernungen eines Punktes vom Mittelpunkt U des Umkreises ist es bequemer Formel (74) zu benützen, da man hier direct den Radius in die Gleichung bekommt. Setzen wir $s = 3$, $m_1 = m_2 = m_3 = 1$, und $A_1U = A_2U = A_3U = r$, so ist:

$$9SU^2 = 3r^2 - (a^2_1 + a^2_2 + a^2_3).$$

Desgleichen ist nach Gl. (74):

$$(a_1 + a_2 + a_3)[r^2 - IU^2] = a_1 a_2 a_3 \,;\, IU^2 = r^2 - 2r\varrho.$$

2) Das ebene und räumliche Viereck.

a) Die Formeln (74), (75), (77), (78) gelten sowohl für das ebene wie räumliche Viereck, da O_1O_2 ganz beliebige, also auch außerhalb der Ebene gelegene Punkte sein können. Ein paar Beispiele müssen genügen.

1) *Schwerpunkttransversale im Tetraeder.*

Wenn $O = A_4$ die Spitze eines Tetraeders, $a_1a_2a_3a_4$ die Seitenflächen, S_4 der Schwerpunkt der Fläche $A_1A_2A_3$, so ist nach Gl. (74), (75), wenn

$$3S_4 = A_1 + A_2 + A_3 :$$

$$9A_4S^2_4 = 3[A_1A^2_4 + A_2A^2_4 + A_3A^2_4] - [A_1A^2_2 + A_2A^2_3 + A_3A^2_1],$$

$$3A_4S^2_4 = A_1A^2_4 + A_2A^2_4 + A_3A^2_4 - [S_4A^2_1 + S_4A^2_2 + S_4A^2_3],$$

u. s. w.

---

[1]) Man vergleiche auch: J. Lange, Geschichte des Feuerbachschen Kreises. S. 6. Programm d. Friedrichs-Werderschen Oberrealschule. Berlin 1894. — Aus den folgenden Gleichungen über das Tetraeder könnte man auch für diese fundamentale Raumfigur die «Eulerschen Gleichungen» ableiten.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2) *Winkelsymmetralen im Tetraeder.*

$$(a_1+a_2+a_3)I_4 = a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3,$$

$$(a_1+a_2+a_3)^2A_4I^2_4 = (a_1+a_2+a_3)[a_1A_1A^2_4+a_2A_2A^2_4+a_3A_3A^2_4]$$
$$-[a_1a_2A_1A^2_2+a_2a_3A_2A^2_3+a_3a_1A_3A^2_1];$$

$$(a_1+a_2+a_3)A_4I^2_4 = a_1A_1A^2_4+a_2A_2A^2_4+a_3A_3A^2_4-[a_1I_4A^2_1+a_2I_4A^2_2+a_3I_4A^2_3],$$

u. s. w.

Die erste dieser Gleichungen besagt, dass man die Winkelsymmetrale durch drei Seitenflächen $a_1a_2a_3$ und alle 6 Kanten eines Tetraeders berechnen kann; die zweite, dass man sie berechnen kann aus drei anliegenden Seitenflächen $a_1a_2a_3$ und drei anliegenden Kanten A_4A_1, A_4A_2, A_4A_3, und aus der Entfernung des Fußpunktes der Symmetrale von den Ecken der Grundfläche.

b) Gegeben 5 Punkte im Raume mit ihren Gewichten und ein beliebiger Punkt O.

Wenn

$$sS = m_1A_1+m_2A_2+m_3A_3+m_4A_4\,,\; s = m_1+m_2+m_3+m_4,$$

so ist

$$s^2SO^2 = s[m_1A_1O^2+m_2A_2O^2+m_3A_3O^2+m_4A_4O^2]$$
$$-[m_1m_2A_1A^2_2+m_2m_3A_2A^2_3+m_3m_4A_3A^2_4 \qquad (80)$$
$$+m_4m_1A_1A^2_4+m_1m_3A_1A^2_3+m_2m_4A_2A^2_4];$$

$$sSO^2 = m_1A_1O^2+m_2A_2O^2+m_3A_3O^2+m_4A_4O^2 \qquad (81)$$
$$-[m_1SA^2_1+m_2SA^2_2+m_3SA^2_3+m_4SA^2_4];$$

$$s[m_1SA^2_1+m_2SA^2_2+m_3SA^2_3+m_4SA^2_4]$$
$$= m_1m_2A_1A^2_2+m_2m_3A_2A^2_3+m_3m_4A_3A^2_4$$
$$+m_4m_1A_4A^2_1+m_1m_3A_1A^2_3+m_2m_4A_2A^2_4. \qquad (82)$$

c) Gegeben 5 Punkte im Raume mit ihren Gewichten und zwei beliebige Punkte O_1O_2.

$$s[SO_1{}^2-SO_2{}^2]$$
$$=m_1[A_1O^2_1-A_1O^2_2]+m_2[A_2O^2_1-A_2O^2_2]+m_3[A_3O^2_1-A_3O^2_2]+m_4[A_4O^2_1-A_4O^2_2],$$

u. s. w. (83)

d) Gegeben 6 Punkte $A_1A_2A_3A_4SS'$ im Raume mit ihren Gewichten. Es ist mit leichtverständlicher Bezeichnung:

$$(ss')^2SS'^2$$
$$= (sm'_1-s'm_1)(s'm_2-sm'_2)A_1A^2_2+(sm'_2-s'm_2)(s'm_3-sm'_3)\,.\,A_2A^2_3$$
$$+(sm'_3-s'm_3)(s'm_4-sm'_4)A_3A^2_4+(sm'_4-s'm_4)(s'm_1-sm'_1)\,.\,A_4A^2_1 \qquad (84)$$
$$+(sm'_1-s'm_1)(s'm_3-sm'_3)A_1A^2_3+(sm'_2-s'm_2)(s'm_4-sm'_4)\,.\,A_2A_4.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Mit Hilfe dieser und ähnlicher Gleichungen kann die Entfernung zweier beliebiger Punkte im Raume berechnet werden. Auf Beispiele einzugehen müssen wir uns versagen, doch kann die Berechnung nach dem Gesagten keine Schwierigkeiten bieten.

Was vom Dreieck und Tetraeder gesagt wurde, gilt in analoger Weise vom ebenen und räumlichen Vieleck.

§ 9. Reguläre Kreis- und Kugelvielecke.

a) Kreisvielecke.

Es wurde früher bereits darauf aufmerksam gemacht, welche Formeln man am bequemsten benützt, um die Entfernung eines beliebigen Punktes vom Kreis- und Kugelmittelpunkt zu bestimmen. Hier wollen wir nur noch einen zuerst von Carnot[1]) aufgestellten Satz weiter verfolgen, da er uns gestattet die Beziehung des Radius des Umkreises zur Seite eines regulären, ebenen und räumlichen Vielecks auf das einfachste herzustellen und zwar ohne alle Winkelbetrachtungen.

Die Punkte $A_1 A_3 A_3 \ldots A_n$ seien die Ecken eines regulären Vielecks, in welchem natürlich der mittlere Punkt S mit dem Kreismittelpunkt zusammenfällt, O sei ein beliebiger Punkt auf der Peripherie. Dann ist, Gl. (16), weil $OS = A_1S = A_2S = \ldots = r$,

$$2nr^2 = A_1O^2 + A_2O^2 + A_3O^2 + \ldots + A_nO^2. \qquad (85)$$

Diese überraschende Beziehung kann nach Carnot als Erweiterung des Pythagoreischen Lehrsatzes angesehen werden. Denn wenn A_1A_2 die Endpunkte eines Durchmessers (reguläres Zweieck) sind, so ist

$$(2r)^2 = A_1A^2_2 = A_1O^2 + A_2O^2.$$

Die Gleichung (85) wollen wir noch dahin specialisieren, dass O mit einem der Punkte (A_1) des regulären Vielecks zusammenfällt. Nun können von einem Punkte aus im ganzen n-1 Seiten und Diagonalen gezogen werden; davon sind aber beim ungeraden regulären Vieleck je zwei einander gleich. Somit giebt es hier $\frac{n-1}{2}$ verschiedene Seiten oder Diagonalen. Beim geraden Vieleck aber sind nur $\frac{n-2}{2}$ ungleiche Seiten und dazu noch eine, welche gleich dem Durchmesser ist. Sind also $s_1, s_2, s_3, \ldots s_k$ die ungleichen Seiten eines ebenen Vielecks, so gilt für das ungerade und gerade Vieleck:

---

[1]) Carnot, Geometrie der Stellung. 2 Theil. S. 72.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$nr^2 = s^2_1 + s^2_2 + s^2_3 + \ldots + s^2_k; \quad (k = 1, 2, 3, \ldots \frac{n-1}{2}),$$
$$(n-2)r^2 = s^2_1 + s^2_2 + s^2_3 + \ldots + s^2_k; \quad (k = 1, 2, 3, \ldots \frac{n-2}{2}). \qquad (86)$$

Nun bestehen außerdem für die ungleichen Seiten eines regulären Polygons noch weitere einfache Beziehungen, so dass wir mit Hilfe von Gl. (86) jede Seite durch den Radius des Umkreises bestimmen können. Die Seiten $s_1 s_2 s_3 \ldots s_k$ in dem regulären Vieleck seien so bezeichnet, dass der größere Index auch die größere Seite angebe; dann ist für das

Dreieck: $(k = 1)$ $\quad 3r^2 = s^2;\ s = r\sqrt{3}.$

Viereck: $(k = 1)$ $\quad 2r^2 = s^2;\ s = r\sqrt{2}.$

Fünfeck: $(k = 2)$ $\quad 5 = s^2_1 + s^2_2,\ (r = 1).$

Nun ist $s^2_2 = 2 + \sqrt{4 - s^2_1}$, somit

$$s^4_1 - 5s^2_1 + 5 = 0;\ s^2_1 = \frac{1}{2}(5 \mp \sqrt{5}).$$

Für s_2 findet man dieselbe Gleichung, so dass die Wurzeln dieser Gleichung den beiden Seiten des Fünfecks entsprechen.

Sechseck: $(k = 2)$ $\quad 4r^2 = s^2_1 + s^2_2;$

$$s^2_2 = 3r^2 \text{ (Dreieck), somit } r = s.$$

Siebeneck: $(k = 3)$ $\quad 7 = s^2_1 + s^2_2 + s^2_3,\ (r = 1);$

$$s^2_3 = 2 + \sqrt{4 - s^2_1},\ s^2_2 = 2 + \sqrt{4 - s^2_3}.$$

Setzt man $\sqrt{4 - s^2_1} = x$, so erhält man die Gleichung 4. Grades:

$$x^4 - 2x^3 - x^2 + 3x - 1 = 0.$$

Die Gleichung $x^2 + s^2_1 = 2^2 = (2r)^2$ verbindet das 14-Eck mit dem 7-Eck.

Achteck: $(k = 3)$ $\quad 6 = s^2_1 + s^2_2 + s^2_3;$

$$s^2_2 = 2,\ s^2_3 = 2 + \sqrt{4 - s^2_2} = 2 + \sqrt{2};$$
$$s^2_1 = 2 - \sqrt{2}.$$

Neuneck: $(k = 4)$ $\quad 9 = s^2_1 + s^2_2 + s^2_3 + s^2_4;$

$$s^2_4 = 2 + \sqrt{4 - s^2_1},\ s^2_3 = 3 \text{ (Dreieck)};$$
$$s^2_2 = 2 - \sqrt{4 - s^2_4}.$$

Durch dieselbe Substitution, wie beim 7-Eck, kommt man auf eine Gleichung 4. Grades.

Zehneck. Durch die Substitution im Fünfeck:

$$4 - s^2_1 = x^2 \text{ oder } (2r)^2 = x^2 + s^2_1$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

erhält man:

$$x^2 - x - 1 = 0;$$

oder

$$x_{12} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}).$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind, wie man aus der Substitution ersieht, zwei Seiten des Zehnecks.

In entsprechender Weise könnte man in beliebigen regulären Vielecken eine Beziehung zwischen den Seiten und dem Radius des Umkreises finden.

b) Kugelvielecke.

Die Gl. (85) gilt auch für reguläre Polyeder. Lässt man auch hier den beliebigen Punkt O mit einem der Punkte $A_1 A_2 A_3$ .. des Umfanges der Kugel zusammenfallen, so resultiert eine einfachere Beziehung. Mit Hilfe dieser allgemeinen Gleichung oder der eben abgeleiteten Formeln für reguläre Polygone lassen sich leicht die bekannten Beziehungen zwischen den Kanten eines regulären Polyeders und dem Radius der umschriebenen Kugel herstellen. So ist z. B., wenn k_1 verschiedene Kanten sind, für das reguläre

Tetraeder: $2 \cdot 4r^2 = 3k^2, \qquad r = \frac{k}{4}\sqrt{6}.$

Hexaeder: $2 \cdot 8r^2 = 3k^2_1 + 3k^2_2 + (2r)^2, \quad k^2_2 = 2k^2_1,$

$12r^2 = 9k^2_1, \qquad r = \frac{k}{2}\sqrt{3}.$

Oktaeder: $2 \cdot 6r^2 = 4k^2_1 + (2r)^2,$

$2r^2 = k^2, \qquad r = \frac{k}{2}\sqrt{2}.$

Auch für das Ikosaeder und Dodekaeder können die Kanten und somit auch der Radius der Umkugel leicht mit Hilfe der obigen regulären Vielecke bestimmt werden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf