§ 1. Bekanntlich liegen die Fufspunkte der von einem Punkte des umbeschriebenen Kreises auf die drei Seiten des Dreiecks gefällten Lote auf einer Geraden, der Fufspunktlinie des betreffenden Punktes. Durchläuft nun der Punkt den Umfang des Kreises, so ändert auch die Fufspunktlinie stetig ihre Lage und berührt dabei beständig eine Kurve oder wie man auch sagt, sie hüllt diese Kurve ein. Die analytische Entwickelung (§ 11) ergiebt, dafs dieselbe eine Linie vierten Grades ist. Eine grofse Anzahl interessanter Eigenschaften derselben, wie auch ihrer Tangenten, d. h. der Fufspunktlinien, hat zuerst Steiner[1]) ohne Beweis ausgesprochen. Die Kurve wird daher meistens die Steinersche Kurve genannt. Einen Beweis der Steinerschen Sätze auf synthetisch-geometrischem Wege hat Schröter[2]) gegeben. In ganz besonders eleganter Weise hat jedoch Cremona[3]) unter Anwendung der in seiner „Introduzione ad una theoria geometrica delle curve piane" entwickelten Prinzipien die allgemeine Theorie der Linien dritten und vierten Grades zur Untersuchung der betreffenden Kurve benutzt und nicht nur die von Steiner hervorgehobenen Eigenschaften vollständig bewiesen, sondern noch eine ganze Reihe neuer hinzugefügt. Die Gleichung der Kurve läfst sich, wie wir sehen werden (§ 11), auf Grund der Eigenschaften der Fufspunktlinien bei passender Wahl der Koordinaten in ziemlich einfacher Form darstellen, doch ist dieselbe auch wiederholt ganz allgemein, besonders unter Zugrundelegung homogener Koordinaten von Greer[4]), Cayley[5]) und Ferrers[6]) entwickelt worden. Eine andere Entstehungsart der Kurve durch Rollen eines Kreises im Innern eines anderen vom dreifachen Radius (§ 10 u. 11) führt ebenfalls in bequemer Weise zur Ableitung ihrer Gleichung. Diese Form derselben, welche auch Salmon[7]) aufgenommen hat, ist z. B. von Painvin[8]) und P. Serret[9]) zum Ausgangspunkt ihrer Untersuchungen genommen worden. Dieselbe Erzeugung der Kurve als Hypocycloide liegt den Schriften von Eckhardt[10]) und Kiepert[11]) zu Grunde, von denen besonders der letztere das Problem bedeutend erweitert und verallgemeinert hat. In ähnlicher Weise sind Schröters Entwickelungen durch Siebeck[12]) ergänzt worden.

Auf elementarem Wege sind dagegen bisher nur einzelne der von Steiner und Cremona angeführten Sätze bewiesen worden, z. B. von Retsin[13]), Besant[14]) u. a., am vollständigsten wohl von Cahen[15]), der jedoch dabei von einer anderen Entstehungsart der Kurve ausgeht (§ 10); eine ausführliche und zusammenhängende elementare Entwickelung der Eigenschaften der Fufspunktlinien als solcher und der von ihnen eingehüllten Kurve ist jedoch meines Wissens bis jetzt nicht veröffentlicht worden. Die folgenden Untersuchungen bilden einen Versuch einer solchen vollständig elementaren Behandlung des Problems, soweit nicht Linien zweiten Grades mit in Betracht kommen. Dieselbe wird wesentlich geometrisch sein und das Gebiet der höheren Geometrie nur einmal (§ 9 No. 1) streifen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 2. Es mögen zunächst einige im Folgenden zu benutzende allgemeinere Sätze, insbesondere über den Feuerbachschen Kreis hier eine Stelle finden.

Verbindet man die Punkte eines Kreises mit einem Punkte in der Ebene desselben, so ist der geometrische Ort der Mittelpunkte der Verbindungslinien ein Kreis, dessen Radius die Hälfte des gegebenen und dessen Mittelpunkt die Mitte zwischen dem gegebenen Punkte und dem Mittelpunkte des ersten Kreises ist.*) Denn ist (Fig. 1) M der Mittelpunkt des gegebenen Kreises, X ein solcher auf dem Umfang, D der gegebene Punkt, O die Mitte von DM und N die Mitte von DX, so ist $ON \parallel MX$ und $ON = \frac{1}{2} \cdot MX$; durchläuft daher X die Peripherie des Kreises M, so durchläuft N die Peripherie eines Kreises, dessen Mittelpunkt O und dessen Radius ON ist.

Ist DY eine zweite solche Verbindungslinie und N′ ihr Mittelpunkt, so ist $NN' \parallel XY$ und $NN' = \frac{1}{2} \cdot XY$ und daher auch $\angle NON' = \angle XMY$. Sind also z. B. X und Y die Endpunke eines Durchmessers des Kreises M, so ist auch NN′ ein Durchmesser des Kreises O.

Nimmt man (Fig. 2) für D den Schnittpunkt der drei Höhen eines dem Kreise M einbeschriebenen Dreiecks ABC an, so halbiert der Kreis O nach dem Vorigen zunächst die oberen Höhenabschnitte AD, BD und CD in I″, K″ und L″. Verlängert man aber die Höhe AI bis zum Schnittpunkte mit dem Kreise, d. h. bis D′, so ist, weil $\angle ICD' = BAD' = ICD$ ist, auch $DI = ID'$, folglich geht der Kreis O auch durch I und entsprechend durch K und L, d. h. durch die Fufspunkte der drei Höhen. Fällt man endlich von M und O die Lote MI′ und OZ auf BC, so ist I′ die Mitte von BC, und (weil $DO = OM$) Z die Mitte von II′, daher $OI' = OI$, oder der Kreis O geht auch durch I′ (resp. K′ u. L′), d. h. durch die Mittelpunkte der Seiten des Dreiecks. Er wird daher der Kreis der neun Punkte oder nach seinem Entdecker der Feuerbachsche[16]) Kreis genannt. Weil $\angle I''II' = 90°$, ist I′I″, ebenso K′K″ und L′L″ ein Durchmesser desselben. Sein Radius ist $\frac{1}{2} \cdot MA$ und O die Mitte von DM.

Derselbe Kreis O geht, wie die Figur zeigt, auch durch die Mitten der Seiten und die Höhenfufspunkte der Dreiecke ABD, ACD und BCD, ist also auch für diese als Feuerbachscher Kreis zu bezeichnen, daher haben die den vier Dreiecken ABC, ABD, ACD und BCD umbeschriebenen Kreise denselben Radius r, der doppelt so grofs ist als der des Kreises O. Sind M, M′, M″, M‴ die Mittelpunkte derselben, so folgt, weil $AO = OM'$, $BO = OM''$, $CO = OM'''$, $DO = OM$ ist, dafs die Verbindungslinien je zweier der Punkte M den entsprechenden der Punkte A bis D gleich und parallel sind. Weil ferner $AM = AM'' = AM''' = BM = BM' = BM'''$ u. s. w. sind, ist I″ die Mitte von M″M‴, K″ von M′M‴ u. s. w., d. h. der Kreis O ist auch der Feuerbachsche Kreis der Dreiecke MM′M″ u. s. w. und A, B, C, D sind die Mittelpunkte der diesen Dreiecken umbeschriebenen Kreise.

§ 3. Der Vollständigkeit der Untersuchung halber beginne ich nunmehr mit dem Beweise des in § 1 ausgesprochenen Satzes. Sind (Fig. 3) XU, XV und XW die vom Punkte X des umbeschriebenen Kreises M auf die Seiten des Dreiecks ABC gefällten Lote, so ist, weil XVUC, XWAV und XABC sämtlich Kreisvierecke sind:

*) Dieser Satz ist nur ein besonderer Fall eines viel allgemeineren für alle ebenen Kurven gültigen Satzes der analytischen Geometrie.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$\angle XVW = XAW = XCB = XCU = 180° - XVU$, daher:

$\angle XVW + XVU = 180°$, d. h. U, V und W liegen auf einer Geraden.

Verbindet man ferner X mit den Punkten D′, D″, D‴, in denen die verlängerten Höhen den Kreis schneiden, nennt die Schnittpunkte dieser Linien mit den entsprechenden Seiten U′, V′, W′ und verbindet U′, V′ und W′ sämtlich mit dem Höhenschnittpunkt D, so ist z. B.:

$\angle W'DL = W'D'''L = XD'''C = XBC$,

$\angle U'DI = U'D'I = XD'A = XBA$, folglich:

$\angle W'DL + U'DI = XBC + XBA = ABC$, also:

$\angle W'DL + LDI + U'DI = ABC + LDI = LBI + LDI = 180°$, oder:

U′, W′ und D bilden eine gerade Linie. Ähnlich wird bewiesen, dafs auch der Punkt V′ auf derselben Geraden liegt.

Verlängert man XV bis zum Schnittpunkt mit U′V′, d. h. bis Z, so ist, da $DK = D''K$ und $XZ \parallel DD''$, auch $XV = VZ$, und:

$\angle VZV' = VXV' = KD''V' = XCU$ (weil XD″BC ein Kreisviereck),

$\angle XCU = WVX$ (weil XVUC ein Kreisviereck),

daher $\angle VZV' = WVX$, folglich $WV \parallel V'Z$ (resp. V′U′). Man kann daher V′U′ die Begleitlinie der Fufspunktlinie UV nennen und diesen Satz folgendermafsen aussprechen:

1. Während die Fufspunktlinie die in § 1 erwähnte Kurve einhüllt, geht die ihr parallele Begleitlinie beständig durch den Höhenschnittpunkt des Dreiecks.

Schneidet die Verlängerung von XU den Kreis in X″, so ist der Bogen $D'X'' = AX$, folglich $\angle D'AX'' = AD'X = D'DU'$, folglich $AX'' \parallel DU' \parallel WU$, es ist daher AX″ gewissermafsen eine Begleitlinie zweiter Ordnung, die beständig durch A geht, während die Fufspunktlinie die Kurve einhüllt. Zwei entsprechende Begleitlinien zweiter Ordnung gehen durch B und C.

Da $XV = VZ$, so wird auch jede andere von X nach U′V′ gezogene Gerade durch die Parallele UV halbiert, z. B. DX. Bezeichnet man daher den Schnittpunkt von DX und UV mit N, so ist $DN = NX$. Da nun aber N nach § 2 auch ein Punkt des Feuerbachschen Kreises ist, so ergeben sich folgende Sätze:

2. Jede Fufspunktlinie halbiert die Linie, welche den zugehörigen Kreispunkt mit dem Höhenschnittpunkt verbindet. In demselben Punkte schneidet sie den Feuerbachschen Kreis.

Wenn man diesen Punkt N den Mittelpunkt der Fufspunktlinie nennt, kann dieser Satz auch so ausgesprochen werden:

3. Der Ort der Mittelpunkte der Fufspunktlinien ist der Feuerbachsche Kreis.

Ist nunmehr Y ein anderer Punkt auf dem Kreise M und DU″ die Begleitlinie seiner Fufspunktlinie, so ist $\triangle U'U''D \cong U'U''D'$, also $\angle U'DU'' = U'D'U'' = XD'Y$, d. h. der Winkel der beiden Begleitlinien ist gleich dem Peripheriewinkel über dem Bogen zwischen den zugehörigen Punkten. Da nun einerseits die Fufspunktlinien den entsprechenden Begleitlinien parallel sind, andererseits, wenn N′ (Fig. 1) der Mittelpunkt der zu Y gehörigen Fufspunktlinie ist, nach § 2 die Centriwinkel NON′ und XMY, also auch die zugehörigen Peripheriewinkel einander gleich sind, so folgt:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

4. Der Winkel, den zwei Fufspunktlinien mit einander bilden, ist gleich dem Peripheriewinkel über dem Bogen zwischen den zugehörigen Punkten des umbeschriebenen Kreises, wie auch gleich dem Peripheriewinkel über dem Bogen des Feuerbachschen Kreises zwischen ihren Mittelpunkten.

§ 4. Nennt man (Fig. 4) die Endpunkte X und X′ eines Durchmessers des Kreises M Gegenpunkte und die zu ihnen gehörigen Fufspunktlinien NS und N′S, die sich in S schneiden, Gegenlinien (Steiner nennt sie „ein Paar"), so ist nach § 2 NN′ Durchmesser des Kreises O und nach § 3 $\angle NSN' = 90°$, daher liegt S ebenfalls auf der Kreislinie O, oder:

Je zwei Gegenlinien stehen auf einander senkrecht. Der Ort der Schnittpunkte der Gegenlinien ist der Feuerbachsche Kreis.

Jede Fufspunktlinie schneidet daher den Kreis O aufser in ihrem Mittelpunkte N noch im Punkte S, den man ihren Scheitelpunkt nennt.

Die Seiten und Höhen des Dreiecks ABC gehören zu den Fufspunktlinien und zwar bilden jede Seite und die zugehörige Höhe ein Paar Gegenlinien; denn dem Punkte A entspricht z. B. die Höhe AI, dem Gegenpunkte A′ die Seite BC als Fufspunktlinie.

§ 5. Es sei jetzt (Fig. 5) N″S′ eine beliebige dritte Fufspunktlinie, welche das Paar Gegenlinien NS und N′S in E und F schneidet, so ist nach § 3, No. 4:

$\angle N''FN' = N''SN'$, also $N''F = N''S$, folglich, da $\angle ESF = 90°$, auch:

$\angle N''ES = N''SE$, daher $N''E = N''S$, oder:

$N''F = N''E = N''S$, d. h.:

1. Jede Fufspunktlinie wird von einem Paar Gegenlinien so geschnitten, dafs die Schnittpunkte vom Mittelpunkte der ersteren gleich weit entfernt sind.
2. Diese Entfernung ist gleich der Sehne des Feuerbachschen Kreises vom Mittelpunkte jener Fufspunktlinie zum Scheitelpunkte der beiden Gegenlinien.

Beschreibt man ferner mit N″E den Kreis um N″, so schneidet dieser (solange N″E kleiner ist als der Durchmesser des Kreises O, d. h. als der Radius des Kreises M) den Feuerbachschen Kreis aufser in S noch in einem zweiten Punkte S″ und es geht daher nach No. 1 u. 2 von den in S″ sich schneidenden Gegenlinien ebenfalls eine durch E, die andere durch F, mit anderen Worten:

3. Durch jeden Punkt E einer Fufspunktlinie N″S′, dessen Entfernung von ihrem Mittelpunkte N″ kleiner ist als der Durchmesser des Kreises O, gehen noch zwei andere Fufspunktlinien. Ihre bezüglichen Gegenlinien schneiden sich ebenfalls auf der ersten Fufspunktlinie, und zwar in einem Punkte F, der vom Mittelpunkte derselben ebenso weit entfernt ist wie E.

Hieraus erklärt sich die Berechtigung, die Punkte N, N′ u. s. w. die Mittelpunkte der Fufspunktlinien zu nennen.

Offenbar ist noch $\angle SES'' = SFS''$, da dieselben nach § 3 den Peripheriewinkeln über den betreffenden Bogen des Kreises gleich sind und der Bogen zwischen zwei Punkten eines Kreises ebenso grofs ist, wie der zwischen ihren Gegenpunkten.

Da ferner Dreieck N″FS gleichschenklig ist, so ist der Aufsenwinkel

$EN''S = S'N''S = 2 \cdot N''SN'$, folglich: $\text{arc } SS' = 2 \cdot \text{arc } N'N''$, d. h.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

4. Der Bogen zwischen den Scheitelpunkten zweier Fufspunktlinien ist doppelt so grofs, wie der zwischen ihren Mittelpunkten.

§ 6. Schneiden sich ES und FS″ in G, ES″ und FS in H, so liegen G und H auf der Gegenlinie von EF. Denn zunächst sind FS und ES″ Höhen des Dreiecks EFG, mithin H der Höhenschnittpunkt, also GH die dritte Höhe, d. h. senkrecht zu EF. Da nun der Kreis O bereits durch die Mitte N″ einer Seite und die Höhenfufspunkte S und S″ der beiden anderen Seiten des Dreiecks EFG geht und durch diese drei Punkte vollständig bestimmt ist, ist er der Feuerbachsche Kreis des Dreiecks EFG, geht also auch durch den Fufspunkt S′ der Höhe GH, letztere ist daher Gegenlinie von EF. Diesen Satz kann man auch so aussprechen:

1. Schneiden zwei Fufspunktlinien, welche nicht Gegenlinien sind, eine dritte in gleichen Entfernungen von deren Mittelpunkt, so liegt ihr eigener Schnittpunkt auf der Gegenlinie der dritten.

Die drei Fufspunktlinien EF, FG, GE bilden ein Dreieck, dessen Höhen ihre drei Gegenlinien sind. Gehen umgekehrt drei Fufspunktlinien HS, HS′ und HS″ durch einen Punkt H, so sind sie die Höhen eines Dreiecks, dessen Seiten ihre Gegenlinien sind. Denn ist N″S′ die Gegenlinie von HS′ und schneiden sich HS und N″S′ in F, so ist, wenn N′ der Mittelpunkt von HS, nach § 5: $N'H = N'F = N'S'$. Nach demselben Satze ist aber auch $N'S'' = N'H$, folglich $N'S'' = N'F$ und daher geht N‴S″ (die Gegenlinie von HS″) nach § 5 No. 3 ebenfalls durch F. Ebenso beweist man, dafs HS′, NS und N‴S″ sich in einem Punkte (G) und HS″, NS und N″S′ in einem Punkte (E) schneiden.

2. Erklärung: Ein Fufspunktliniendreieck („Tripel“ nach Steiner) heifst jedes von drei Fufspunktlinien gebildete Dreieck, wenn gleichzeitig ihre drei Gegenlinien die Höhen desselben sind; z. B. EFG, EFH, u. s. w. oder das Urdreieck ABC.

Da nach dem Vorangehenden der Kreis O durch die Höhenfufspunkte und die Mitten der Seiten der Dreiecke EFG, EFH u. s. w. geht, so ergiebt sich:

3. Der Kreis O ist der Feuerbachsche Kreis für jedes Fufspunktliniendreieck;

und hieraus folgt weiter mit Rücksicht auf § 2 und 3:

4. Der irgend einem Fufspunktliniendreieck umbeschriebene Kreis hat denselben Radius r, wie der dem ursprünglichen Dreieck ABC umbeschriebene Kreis.
5. Jedes dieser Dreiecke hat daher auch dieselbe Schar Fufspunktlinien, wie das Urdreieck ABC, denn da z. B. zu den Fufspunktlinien des Dreiecks EFG die Seiten und Höhen desselben gehören, nach § 5 aber durch eine Fufspunktlinie und den Feuerbachschen Kreis auch die Lage aller übrigen vollkommen bestimmt ist, so sind alle seine Fufspunktlinien mit denen des Dreiecks ABC identisch, hüllen daher auch dieselbe Kurve ein, wie diese.

Konstruiert man aber die Mittelpunkte der umbeschriebenen Kreise aller Fufspunktliniendreiecke in ähnlicher Weise, wie dies in § 2 für ABC, ABD u. s. w. geschehen ist, so gehört zu jeder Dreiecksgruppe ABCD bezüglich EFGH eine Dreiecksgruppe MM′M″M‴ bezüglich mm′m″m‴, welche ebenfalls alle den Kreis O zum Kreis der

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

neun Punkte haben. Das erste System von Dreiecksgruppen möge das System D, das zweite das System M heifsen. Alsdann ist auch der Radius des umbeschriebenen Kreises für jedes dem System M angehörige Dreieck gleich r und es haben alle Dreiecke des Systems M dieselbe Schar Fufspunktlinien. Doch ist diese Schar von der des Systems D verschieden, denn es gehören zur Schar M z. B. die Linien MM′, MM″ u. s. w. (Fig. 2), welche den Fufspunktlinien AD, BD u. s. w. des Systems D parallel sind. Da aber aus § 3 folgt, dafs nicht zwei Fufspunktlinien einer Schar einander parallel sein können, so sind MM′, MM″ u. s. w., folglich auch die ganze Schar M von der Schar D verschieden. Man erhält aber das System M aus dem System D, wenn man die Figur 2 um den Punkt O um 180° dreht (wobei D in M u. s. w. übergeht). Daher ist auch die von der Schar M eingehüllte Kurve der von der Schar D eingehüllten kongruent, jedoch gegen dieselbe um 180° (um den Punkt O) gedreht.

§ 7. Nach § 5 erhält man die beiden durch einen beliebigen Punkt F (Fig. 5) einer Fufspunktlinie N″S′ hindurchgehenden anderen Fufspunktlinien N′S und N‴S″, indem man N″F als Sehne in den Kreis O einträgt $=$ N″S und N″S″ und S und S″ mit F verbindet. Aufserdem ist $\angle SFS'' = N'SN''' = \frac{1}{2} \cdot SN'''S''$ (nach § 3 und 5).

Nehme ich nun $N''F = O$, d. h. suche die durch N″ selbst hindurchgehenden Fufspunktlinien, so sind auch $N''S = N''S'' = 0$, d. h. S und S″ fallen mit N″ zusammen und SS″ wird Tangente des Kreises O, also $\angle SN''S'' = 180°$ und daher der Winkel der beiden Fufspunktlinien gleich 90°, sie sind demgemäfs Gegenlinien und N″ ist ihr gemeinsamer Scheitelpunkt.

Wird N″F gröfser, d. h. entfernt sich der Punkt F von N″, so wird der Winkel SN″S″, also auch der Winkel der Fufspunktlinien (SFS″) allmählich kleiner, da sich auch S und S″ immer mehr von N″ entfernen.

Wird endlich $N''F = N''T$ (Fig. 4) gleich dem Durchmesser des Kreises O, (d. h. gleich dem Radius des Kreises M), so fallen die Punkte S und S″ wiederum in einen Punkt S zusammen und es ist $N''S = N''T$ ein Durchmesser des Kreises O, der Winkel $SN''S'' = SN''S = 0°$, daher ist auch der Winkel, den die beiden noch durch T gehenden Fufspunktlinien mit einander bilden, gleich 0°, oder: im Punkte T schneiden sich zwei unendlich nahe Fufspunktlinien TS und TS″ unter einem Winkel von 0° (d. h. sie fallen zusammen), der Punkt aber, in welchen sich zwei unendlich nahe Fufspunktlinien schneiden, ist ein Punkt der von ihnen eingehüllten Kurve und zwar derjenige Punkt, in welchem sie von der betreffenden Fufspunktlinie berührt wird. Also ist T ein Punkt der Kurve und TS die Tangente derselben in diesem Punkte. Macht man $N''T' = N''T = r$, so geht nach § 5 die Gegenlinie von ST durch T′ und es ist aus demselben Grunde ST′ die Tangente der Kurve in T′, die Fufspunktlinie TT′ (oder N″S′) aber schneidet die Kurve in T und T′.

Da N″F nicht gröfser werden kann als der Durchmesser des Kreises O, d. h. als N″T (bezüglich N″T′), so gehen durch die Punkte der Fufspunktlinie N″S′ jenseits der Punkte T und T′ keine anderen Fufspunktlinien mehr, während durch T und T′ nur je eine, durch alle Punkte zwischen T und T′ (mit Ausnahme des Berührungspunktes) noch je zwei andere Fufspunktlinien gehen. Man kann daher T und T′ auch die Grenzpunkte ihrer Fufspunktlinie und die durch sie hindurchgehenden Fufspunktlinien TS und T′S die Grenzlinien derselben nennen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es ist $N''T = N''T' = r$, also $TT' = 2r$. d. h.:

1. Jede Fufspunktlinie schneidet die einhüllende Kurve in zwei Punkten (ihren Grenzpunkten), deren Entfernung von einander gleich dem Durchmesser des gegebenen Kreises ist und die vom Mittelpunkte der Fufspunktlinie gleichen Abstand haben.

Ist S' der Scheitelpunkt von TT', so ist, weil $N''S$ ein Durchmesser des Kreises O ist, $\angle N''S'S = 90°$, folglich SS' die Gegenlinie von TT', d. h.

2. Die Tangenten in den Schnittpunkten einer Fufspunktlinie (ihre Grenzlinien) sind Gegenlinien, sie schneiden sich auf dem Kreise O und auf der Gegenlinie der ersteren.

Schneiden ST und ST' den Kreis O zum zweiten Male in N und N', so ist z. B. $\angle N''NS = 90°$, folglich $N''N \parallel T'S$. Da aber $N''T = N''T'$ war, so folgt: $NT = NS$, ebenso $N'T' = N'S$, d. h.:

3. Der Berührungspunkt und Scheitelpunkt einer Fufspunktlinie sind von dem Mittelpunkte derselben gleich weit entfernt.

Mit Hilfe von Nr. 1 und 3 kann man daher auf jeder Fufspunktlinie die beiden Punkte, in welchen sie die einhüllende Kurve schneidet, und den Punkt, in welchem sie dieselbe berührt, leicht finden.

Satz 2 läfst sich auch umkehren; denn sind (Fig. 4) NS und $N'S$ zwei Gegenlinien, so sind T und T' ihre Berührungspunkte, wenn $NT = NS$ und $N'T' = N'S$ ist; dann ist aber $TT' \parallel NN'$ und $TT' = 2 \cdot NN' = 2r$. Sind nun X und X' die zu NS und $N'S$ gehörigen Punkte des gegebenen Kreises, so ist nach § 2: $XX' \parallel NN'$ und $XX' = 2 \cdot NN'$, folglich $TT' \parallel XX'$ und $TT' = XX'$. Fällt man ferner von S das Lot SS' auf TT', welches NN' in U schneidet, so ist $SU = US'$, daher liegt S' auf dem Kreise O und es ist $NS' = NS = NT$, folglich sind nach § 5 TT' und SS' Fufspunktlinien, oder:

4. Die Gerade, welche die Berührungspunkte zweier Gegenlinien verbindet, ist selbst Fufspunktlinie und parallel der Verbindungslinie der Mittelpunkte der beiden ersten, also auch dem zu ihnen gehörigen Durchmesser des gegebenen Kreises. Ihre Gegenlinie geht durch den Scheitelpunkt der beiden ersten.
5. Der Abstand der Berührungspunkte zweier Gegenlinien ist gleich dem Durchmesser des gegebenen Kreises.

Zieht man im Punkte S die Tangente ZZ' an den Kreis O, so ist $\angle ZSN = NS'S$ (Sehnen-Tangenten-Winkel), aber $NS'S = NSS'$, folglich auch: $ZSN = NSS'$, d. h.:

6. Durch jeden Punkt des Feuerbachschen Kreises gehen drei Fufspunktlinien, nämlich zwei Gegenlinien und eine dritte; die beiden Gegenlinien halbieren die Winkel zwischen der dritten Fufspunktlinie und der Tangente des Kreises in dem gegebenen Punkte.

Auf vorstehenden Sätzen beruht folgende von Cremona[17]) zuerst angegebene Konstruktion der Fufspunktlinien, wenn eine derselben und der Kreis O gegeben: Es sei NS diese Fufspunktlinie, so ist zunächst $N'S \perp NS$ ihre Gegenlinie, alsdann verbinde man ihre Mittelpunkte NN' und ziehe die Sehne $SS' \perp NN'$, so wie $N''S' \perp SS'$, so sind SS' und $N''S'$ ein zweites Paar Gegenlinien, u. s. f. Alle Fufspunktlinien, wie Cremona meinte, erhält man jedoch nicht auf diesem Wege, sondern höchstens ein Drittel derselben, da

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

die Konstruktion nicht mehr anwendbar ist, wenn eine Fufspunktlinie Tangente des Kreises O wird (vergl. § 10). Für diesen Fall mufs man dann § 5 anwenden.

§ 8. Die Normale einer Kurve ist die im Berührungspunkte auf der Tangente errichtete Senkrechte. Ist daher $TW \perp ST$ und $T'W \perp ST'$, so sind TW und T'W die Normalen der Steinerschen Kurve in den Punkten T und T'. Da nun TWT'S ein Rechteck ist, so sind die Diagonalen TT' und SW desselben einander gleich und zwar gleich 2r. Da $N''T = N''T'$, ist N'' der Schnittpunkt der Diagonalen und daher $N''S = N''W = N''T = r$, und da $OS = \frac{r}{2}$, so ist $OW = 3 \cdot \frac{r}{2} = 3.\ OS$. Fällt man noch von W das Lot WT'' auf TT', so sind die Dreiecke N''WT'' und N''SS' kongruent und daher $N''T'' = N''S'$, nach § 7 Nr. 3 ist deshalb T'' der Berührungspunkt auf TT' und WT'' die Normale in T''; dies ergiebt in Verbindung mit dem Vorangehenden folgende Sätze:

1. Die drei Normalen der Steinerschen Kurve in den Schnittpunkten und dem Berührungspunkte einer Fufspunktlinie schneiden sich in einem Punkte.
2. Der Ort dieser Schnittpunkte ist ein dem Feuerbachschen Kreise koncentrischer Kreis mit dreifachem Radius.

§ 9. Wenn (Fig. 6) NS und N''S' zwei Fufspunktlinien sind, so war nach § 5 No. 4 der Bogen SS' doppelt so grofs als NN''. Bleibt nun N''S' fest, bewegt sich dagegen NS, indem sich der Punkt N allmählich von N'' entfernt, so wird sich auch S in entgegengesetzter Richtung und mit doppelter Geschwindigkeit von S' entfernen, die Punkte N und S nähern sich daher allmählich und werden schliefslich für eine bestimmte Lage der Fufspunktlinie in einen Punkt Q zusammenfallen. Bleibt umgekehrt NS fest und dreht sich N''S', indem N'' sich allmählich von N entfernt, so kommt ihm S' von S aus mit doppelter Geschwindigkeit entgegen, so dafs auch hier zuletzt für eine gewisse Lage der Fufspunktlinie beide in einem Punkte P sich vereinigen. Die gegenseitige Lage von P und Q ergiebt sich hieraus sofort, denn da man beide sowohl als Scheitelpunkt wie als Mittelpunkt ihrer bezüglichen Fufspunktlinien auffassen kann, ist nach § 5 No. 4:

$$\text{arc } PSQ = 2 \cdot \text{arc} PNQ,$$

$$\text{da aber: arc } PSQ + \text{arc} PNQ = 2\pi, \text{ so folgt:}$$

$$\text{arc } PNQ = \frac{2\pi}{3} \text{ oder } \angle POQ = 120°.$$

In derselben Weise kann man aber auch die Gegenlinien von NS und N''S', nämlich N'S und N'''S' sich von einander entfernen lassen, indem man eine derselben als fest annimmt, die andere sich bewegen läfst. Man würde demnach noch zwei Punkte finden, für welche Mittelpunkt und Scheitelpunkt der betreffenden Fufspunktlinie zusammenfällt. Der eine derselben liegt offenbar zwischen N''' und S', er heifse R, so ist (wiederum nach § 5 No. 4):

$$\angle ROS = 2 \cdot N'OR = \frac{2}{3} \cdot N'OS \text{ und}$$

$$\angle QOS = 2 \cdot NOQ = \frac{2}{3} \cdot NOS, \text{ folglich durch Addition:}$$

$$\angle ROQ = \frac{2}{3} \cdot NON' = \frac{2}{3} \cdot 180°, \text{ da } NN' \text{ Durchmesser von O,}$$

$$\text{also: } \angle ROQ = 120°.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Der vierte Punkt, der nach dem Obigen von R ebenfalls um einen Bogen von 120° entfernt sein mufs, fällt demnach mit P zusammen und P, Q und R bilden ein gleichseitiges Dreieck.

Es giebt daher (Fig. 6) drei Fufspunktlinien $O'O''$, $O'O'''$ und $O''O'''$, für welche Mittelpunkt, Scheitelpunkt und folglich auch (nach § 7 No. 3) Berührungspunkt in einen Punkt P (bezügl. Q und R) zusammenfallen und die mithin in diesen Punkten gleichzeitig die einhüllende Kurve und den Kreis O berühren. Es wird deshalb auch in denselben Punkten die Kurve vom Feuerbachschen Kreise berührt. Die Schnittpunkte dieser drei Linien mit der Kurve sind also nach § 7 No. 1 von ihrem Berührungspunkte gleich weit entfernt (und zwar um r). Wie die Berührungspunkte P, Q und R, so bilden auch die drei Fufspunktlinien selbst ein gleichseitiges Dreieck. Das letztere, $O'O''O'''$, kann man daher das gleichseitige Fufspunktlinien-Dreieck nennen.

Die drei Gegenlinien zu $O'O''$ u. s. w. sind die Höhen dieses Dreiecks und gehen (Fig. 7) demnach sämtlich durch den Punkt O, sind also Durchmesser des Feuerbachschen Kreises. Mittelpunkt und Scheitelpunkt haben bei diesen Linien ($O'P$, $O''Q$ und $O'''R$) daher die gröfste Entfernung, welche möglich ist, nämlich gleich jenem Durchmesser (d. h. $=r$), der eine Schnittpunkt fällt mit dem Scheitelpunkte, folglich der andere mit dem Berührungspunkte zusammen. Die Mittelpunkte derselben seien P', Q', R', die Berührungspunkte P'', Q'', R'', so dafs $P'P = P'P'' = r$ u. s. w. ist. Die Linien PP'', QQ'' und RR'' berühren dann und schneiden gleichzeitig die einhüllende Kurve in den Punkten P'', Q'' und R''. Mithin sind P'', Q'', R'', welche ebenfalls ein gleichseitiges Dreieck bilden, Rückkehrpunkte oder Spitzen der Kurve und $P''P$, $Q''Q$, $R''R$ die Tangenten in diesen Punkten (Rückkehrtangenten). Diese Sätze lassen sich in Bezug auf die Kurve folgendermafsen zusammenfassen:

1. Die von den Fufspunktlinien eingehüllte Kurve hat drei Spitzen (P'', Q'', R''), welche ein gleichseitiges Dreieck bilden. Die drei Tangenten derselben in diesen Punkten gehen durch den Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises und schneiden die Kurve zum zweiten Male in den Punkten (P, Q, R), in welchen sie den Feuerbachschen Kreis berührt. Die Gegenlinien der Rückkehrtangenten sind die gemeinschaftlichen Tangenten der Kurve und des Kreises in letzteren Punkten.

Sind (Fig. 6) ES und ES' zwei im Punkte E auf $O''O'''$ sich schneidende Fufspunktlinien, so schneiden sich nach § 5 ihre Gegenlinien in G auf $O''O'''$ so, dafs $PE = PG$ ist, und der Schnittpunkt F von ES und GS' (ebenso H von ES' und GS) liegt auf der Gegenlinie von $O''O'''$, d. h. auf $O'P$. Da nun sowohl Dreieck FEG wie HEG gleichschenklig sind, so liegen EF und GF (ebenso EH und GH) symmetrisch zu $O'P$, folglich auch ihre Mittel- und Scheitel-, Schnitt- und Berührungspunkte. Dasselbe gilt für $O''Q$ und $O'''R$, oder:

2. Die Steinersche Kurve liegt symmetrisch zu jeder der drei Rückkehrtangenten, besteht daher aus drei kongruenten Ästen.

In Fig 7 ist dieselbe gezeichnet. Zusätzlich ergiebt sich, dafs jede Fufspunktlinie je einen Ast berührt und die beiden andern schneidet. Zwei Gegenlinien berühren verschiedene Zweige.

§ 10. Aus den im Anfang des § 9 entwickelten Sätzen folgt noch, dafs, wenn

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

man einen der Bogen zwischen dem Mittelpunkte N und dem Scheitelpunkte S einer beliebigen Fufspunktlinie mit a bezeichnet, die drei Punkte P, Q und R bezüglich die Bogen a, $2\pi - a$ und $2\pi + a$ im Verhältnis 1:2 teilen und zwar so, dafs jedesmal S doppelt so weit von P (bezügl. Q und R) entfernt ist als N. Auf diese Eigenschaft, aus welcher auch umgekehrt der Satz des § 5, dafs $\text{arc}\, SS' = 2 \cdot \text{arc}\, NN''$ ist, abgeleitet werden kann, gründet sich folgende, zuerst von Cremona[18]) angegebene und später von Kiepert[11]) bedeutend verallgemeinerte Erzeugung der Kurve: „Bewegen sich auf einem Kreise O vom Punkte P aus zwei Punkte N und S in entgegengesetzter Richtung, und zwar S mit doppelter Geschwindigkeit als N, so hüllen die entsprechenden Verbindungslinien NS die Steinersche Kurve ein.“ Während N den Kreis einmal durchläuft, durchläuft ihn S zweimal, woraus sich bestätigt, dafs durch jeden Punkt des Kreises O drei Fufspunktlinien gehen, nämlich zwei, deren Scheitelpunkt, und eine, deren Mittelpunkt er ist. Ausgenommen sind die Punkte P, Q, R, in welchen sich nur zwei Fufspunktlinien schneiden, da für eine derselben Mittelpunkt und Scheitelpunkt zusammenfällt.

Wenn man vom Mittelpunkte irgend einer Fufspunktlinie, z. B. N″ (Fig. 6) das Lot N″L auf eine der den Kreis O berührenden Fufspunktlinien, z. B. O″O‴ fällt, so ist, wenn E der Schnittpunkt von N″S′ und O″O‴ ist, $N''E = N''P$, folglich auch $LP = LE$. Fällt man daher umgekehrt von sämtlichen Punkten (N) des Kreises O Lote auf eine Tangente desselben, deren Berührungspunkt P ist, nennt den Fufspunkt des Lotes L und macht $LE = LP$, so sind die Verbindungslinien EN mit den Fufspunktlinien identisch, hüllen daher auch dieselbe Kurve ein. Von dieser Eigenschaft ist Cahen[15]) bei seinen Untersuchungen ausgegangen.

Nach § 7 No. 1 ist $PP'' = 2r = 4 \cdot OP$ (Fg. 7), folglich $OP'' = 3 \cdot OP = 3 \cdot \frac{r}{2}$, ebenso OQ'' und OR'', mithin liegen P″, Q″, R″, d. h. die Spitzen der Kurve auf dem § 8, 2 erwähnten Kreise, welcher mit dem Feuerbachschen konzentrisch ist, aber den dreifachen Radius hat wie dieser. Auch diese Eigenschaft der Kurve kann man, wie ebenfalls Cremona[19]) zuerst gezeigt, zur Erzeugung derselben benutzen. Den folgenden einfachen Beweis hierfür hat Cahen[15]) gegeben. Es sei (Fig. 7) NS eine Fufspunktlinie und T ihr Berührungspunkt, d. h. ein Punkt der Kurve, so ist $NT = NS$. R (§ 9) liege zwischen N und S und die T nächstgelegene Spitze sei P″. Verlängert man den Durchmesser N′N über N hinaus bis zum Schnittpunkt mit dem grofsen Kreise O, d. h. bis V und halbiert NV in U, so ist $NU = NO$, demnach $\triangle NUT \cong NOS$, folglich geht der um U mit dem Radius UV beschriebene Kreis (der die Kreise O in N und V berührt) durch T und es ist:

$\angle NUT = NOS$, folglich:

$\angle VUT = 180° - NUT = 180° - NOS = 180° - 3 \cdot NOR$ (s. § 9)

d. h. $\angle VUT = 3 \cdot (60° - NOR) = 3 \cdot NOP'$ (weil $ROP' = 60°$),

es ist aber $\text{arc}\, VP'' = \frac{3r}{2} \cdot VOP''$ (im grofsen Kreise O) $= \frac{3r}{2} \cdot NOP'$

und $\text{arc}\, VT = \frac{r}{2} \cdot VUT = \frac{3r}{2} \cdot NOP'$, folglich:

$\text{arc}\, VT = \text{arc}\, VP''$.

Diese Beziehung findet aber offenbar für einen Punkt T des Kreises U dann statt, wenn T ursprünglich mit P″ zusammenfiel und der Kreis U nun innerhalb des grofsen Kreises

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

rollt. Jede solche beim Rollen eines Kreises im Innern eines andern von einem Punkte des ersteren (T) beschriebene Kurve heifst aber eine Hypocycloide. Für unseren besonderen Fall haben wir daher, da T nach unserer Annahme auch ein Punkt der Steinerschen Kurve ist, folgenden Satz: „Die von den Fufspunktlinien eingehüllte Kurve ist diejenige Hypocycloide, welche ein Punkt eines beweglichen Kreises beschreibt, wenn der letztere innerhalb eines festen Kreises vom dreifachen Radius rollt.“ Sie gehört in die Klasse der nicht transcendenten Hypocycloiden und wird speziell die Hypocycloide mit drei Rückkehrpunkten genannt.

§ 11. Die Resultate der letzten beiden Paragraphen zeigen, dafs der Verlauf der Kurve schliefslich ganz unabhängig ist von der Gestalt des ursprünglichen Dreiecks, sondern dafs der Kreis O und eine der Eigenschaften, die in § 5, 9 und 10 aufgeführt sind, völlig ausreichen, die Kurve zu bestimmen, also auch ihre Gleichung zu ermitteln. So ergiebt sich nach Salmon[7]) die Gleichung derselben als Hypocycloide (wenn man O als Anfangspunkt der Koordinaten, OP″ als Y-Achse nimmt und OP = b setzt):

1. $$(x^2+y^2)^2-8\cdot b\,y^3+24\,b\cdot x^2\cdot y+18\,b^2\cdot(x^2+y^2)=27\cdot b^4.$$

Doch erhält man auch die Gleichung derselben als einhüllender Kurve der Fufspunktlinien in verhältnismäfsig einfacher Weise, wenn man das ursprüngliche Dreieck als gleichseitig annimmt. Es sei z. B. O′O″O‴ (Fig. 6) dieses Dreieck und r der Radius des demselben umbeschriebenen Kreises. Dann fallen für dasselbe D, O und M zusammen und seine Seiten berühren den Kreis O, dessen Radius $=\frac{1}{2}\cdot r$ ist. Der Berührungspunkt P auf O″O‴ sei der Anfangspunkt, O″O‴ die X-Achse, O′P die Y-Achse. Ein beliebiger Punkt Z des umbeschriebenen Kreises habe die Koordinaten: $PZ'=\xi$, $ZZ'=\eta$.

Die Gleichung der Fufspunktlinie des Punktes Z sei:

2. $$m\cdot y+n\cdot x=1.$$

Der Fufspunkt Z′ des Lotes von Z auf O″O‴ hat die Koordinaten $x'=\xi$, $y'=0$, daher ist:

3. $$0+n\cdot\xi=1,\ \text{d. h. } n=\frac{1}{\xi}$$

die Fufspunktlinie geht nach § 3 aber auch durch den Mittelpunkt N^{IV} von OZ; dieser hat die Koordinaten $x''=PZ''=\frac{\xi}{2}$, $y''=N^{IV}Z''=\frac{1}{2}\cdot\left(\eta+\frac{r}{2}\right)=\frac{r+2\cdot\eta}{4}$, folglich:

4. $$\frac{m\cdot(r+2\eta)}{4}+\frac{n\cdot\xi}{2}=1,\ \text{woraus mit Rücksicht auf (3):}$$

$$m=\frac{2}{r+2\eta};$$

setzt man diese Werte für n und m in (2) ein, so wird die Gleichung der Fufspunktlinie:

5. $$F=\frac{2y}{r+2\eta}+\frac{x}{\xi}-1=0\ \text{oder: } 2y\cdot\xi-(\xi-x)\cdot(r+2\eta)=0.$$

Da Z auf dem Kreise O mit dem Radius r liegt, ist:

$$\left(\eta-\frac{r}{2}\right)^2+\xi^2=r^2\ \text{oder was dasselbe ist:}$$

6. $$(r+2\eta)(3r-2\eta)=4\xi^2.$$

Durch Einsetzen dieses Wertes kann man (5) auch auf die Form bringen:

7. $$F=y\cdot(3r-2\eta)-2\xi\cdot(\xi-x)=0.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Gleichung der einhüflenden Kurve erhält man nun, wenn man die Gleichung der Fufspunktlinie nach ξ differentiiert und aus den beiden Gleichungen $F=0$ und $\frac{dF}{d\xi}=0$ mit Rücksicht auf (6) η und ξ eliminiert. Es ist nun

$$\frac{dF}{d\xi}=-2y\cdot\frac{d\eta}{d\xi}-2\cdot(2\xi-x)=0, \text{ aus (6) folgt:}$$

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{2\xi}{r-2\eta}, \text{ dies in die vorige Gleichung eingesetzt giebt:}$$

8. $$\frac{dF}{d\xi}=2y\cdot\xi+(r-2\eta)(2\xi-x)=0.$$

Aus (5) folgt: $$\frac{1}{r+2\eta}=\frac{\xi-x}{2y\cdot\xi}$$

aus (8) „ $$\frac{1}{r-2\eta}=-\frac{2\xi-x}{2y\cdot\xi}, \text{ folglich}$$

$$\frac{1}{r+2\eta}+\frac{1}{r-2\eta}=\frac{2r}{r^2-4\eta^2}=-\frac{\xi}{2y\cdot\xi}=-\frac{1}{2y}, \text{ d. h:}$$

9. $$4ry=4\eta^2-r^2, \text{ folglich: } 2\eta=\sqrt{r^2+4ry}$$

Aus (5) erhält man: $$\xi=\frac{x\cdot(r+2\eta)}{r+2\eta-2y}, \text{ also;}$$

$$4\cdot\xi^2=\frac{4x^2\cdot(r+2\eta)^2}{(r+2\eta-2y)^2}, \text{ dies in (6) eingesetzt giebt:}$$

$$\frac{4\cdot x^2\cdot(r+2\eta)^2}{(r+2\eta-2y)^2}=(3r-2\eta)(r+2\eta), \text{ oder mit Rücksicht auf (9):}$$

$$4x^2\cdot(r+\sqrt{r^2+4ry})=(3r-\sqrt{r^2+4ry})(r-2y+\sqrt{r^2+4ry})^2;$$

entwickelt man die rechte Seite und dividiert durch 4, so kommt:

$$x^2\cdot(r+\sqrt{r^2+4ry})=r^3-r^2y+7ry^2+(r^2-3ry-y^2)\cdot\sqrt{r^2+4ry}, \text{ oder:}$$

10. $$x^2r-7y^2r+r^2y-r^3=(r^2-3ry-y^2-x^2)\sqrt{r^2+4ry}.$$

Erhebt man diese Gleichung ins Quadrat, so nimmt sie durch Zusammenfassen und Ordnen der Glieder folgende Gestalt an:

$$4ry^5-24r^2y^4+48r^3y^3-32r^4y^2=4r^3x^2y-40r^2y^2x^2-8rx^2y^3-4rx^4y$$

Nach Division durch $4ry$ kann man dieselbe folgendermafsen schreiben:

$$y\cdot(y^3-6ry^2+12r^2y-8r^3)=x^2\cdot(r^2-10ry-2y^2-x^2)$$

oder endlich:

11. $$y\cdot(y-2r)^3=x^2\cdot(r^2-10ry-2y^2-x^2).$$

Dies ist die Gleichung der einhüllenden Kurve. Sie ist wie (1) vom vierten Grade. Setzt man $r=2b$ und verlegt den Anfangspunkt der Koordinaten nach O, (d. h. setzt $y=y'+b$), so geht die Gleichung (11) in die der Hypocycloide über, woraus hervorgeht, dafs beide Kurven identisch sind.

Nach § 9 gilt aber, wie schon gesagt, auch Gleichung (11) nicht blofs, wenn das Ursprungsdreieck gleichseitig ist, sondern für jedes beliebige Dreieck ABC, wenn man nur den Anfangspunkt der Koordinaten auf einen der Punkte P, Q oder R verlegt und die entsprechende Tangente des Kreises O als X-Achse, den Durchmesser als Y-Achse nimmt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Da in (11) wie in (1) nur gerade Potenzen von x vorkommen, ist die Kurve symmetrisch zur Y-Achse. Diese selbst ist eine Rückkehrtangente, denn für $x=o$ erhält man aufser $y=o$ noch die Wurzel $y=2r$ dreimal, welches Resultat die Spitze im Punkte $(x=0,\ y=2r)$ leicht erkennen läfst. Die beiden anderen Spitzen ergeben sich für $y=-\frac{r}{4}$ als die beiden Wurzeln $x=\pm\frac{3r}{4}\cdot\sqrt{3}$ (jede doppelt).

Für $y=0$ erhält man die Wurzeln $x=\pm r$ und die doppelte Wurzel $x=0$, d. h. die X-Achse schneidet die Kurve in den Punkten $x=\pm r$ und berührt sie im Anfangspunkte.

Als Durchschnittspunkte der Kurve und des Feuerbachschen Kreises, dessen Gleichung bei dieser Wahl der Koordinaten: $x^2=r\cdot y-y^2$ lautet, ergeben sich die drei Werte: $x'=o,\ y'=o;\ x''=+\frac{r}{4}\sqrt{3},\ y''=\frac{3r}{4}$ und $x'''=-\frac{r}{4}\sqrt{3}, y'''=\frac{3r}{4}$, jeder als Doppelpunkt. Da aber die Kurve an diesen Stellen keinen Doppelpunkt hat, so berühren sich Kurve und Kreis in diesen Punkten. Bezeichnet man den Winkel, den die vom Anfangspunkt nach einem der beiden andern Schnittpunkte gezogene Gerade mit der X-Achse bildet, mit φ, so ist $\operatorname{tg}\varphi=\frac{3r}{4}:\frac{r}{4}\sqrt{3}=\sqrt{3}$, also $\varphi=60°$, d. h. das Dreieck der Berührungspunkte ist gleichseitig.

Überhaupt lassen sich die sämtlichen Eigenschaften der Kurve auch aus dieser Gleichung ableiten, doch kann die vollständige Entwickelung derselben hier wohl um so mehr unterbleiben, als ja nach der von mir in der Einleitung ausgesprochenen Absicht die vorliegende Untersuchung sich, soweit dies möglich, auf das Gebiet der elementaren Geometrie beschränken sollte.

§ 12. Dagegen möchte ich noch mit kurzen Worten eine algebraische Lösung des Problems des § 9, die den Kreis O berührenden Fufspunktlinien zu finden, erwähnen, welche sich durch grofse Einfachheit auszeichnet. Ist $O''O'''$ (Fig. 6) mit dem Berührungspunkte P die gesuchte Fufspunktlinie, NS und N'S ein beliebiges Paar Gegenlinien, welche $O''O'''$ in E und G schneiden, so ist nach § 5: $PS=PE=PG=x$. Ferner sei $NN'=r$, $NS=m$, $N'S=n$, $EN=y$ und $GN'=z$, so ist:

1. $EG^2=ES^2+GS^2$, d. h. $4x^2=(m+y)^2+(n+z)^2$
2. $EP^2=EN\cdot ES$, d. h. $x^2=y\cdot(m+y)$
3. $GP^2=GN'\cdot GS$, d. h. $x^2=z\cdot(n+z)$, und
4. $m^2+n^2=r^2$.

Aus (2) folgt: $y=\frac{-m+\sqrt{4x^2+m^2}}{2}$, also: $m+y=\frac{m+\sqrt{4x^2+m^2}}{2}$

Aus (3) folgt: $z=\frac{-n+\sqrt{4x^2+n^2}}{2}$, also: $n+y=\frac{n+\sqrt{4x^2+n^2}}{2}$.

Diese Werte in (1) eingesetzt, giebt mit Rücksicht auf (4):

5. $$4x^2-r^2=m\cdot\sqrt{4x^2+m^2}+n\cdot\sqrt{4x^2+n^2}.$$

Diese Gleichung ins Quadrat erhoben, giebt nach einigen Umformungen:

6. $$8x^4-6r^2x^2+m^2n^2=mn\cdot\sqrt{16x^4+4r^2x^2+m^2n^2}.$$

Erhebt man zum zweiten Male ins Quadrat, so kann man die neue Gleichung auf die Form bringen: $$64x^8-96r^2x^6+36r^4x^4-16m^2n^2r^2x^2=o,$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

welche nach Division durch $4x^2$ sich auch folgendermafsen schreiben läfst:

7. $$(4x^3 - 3r^2x)^2 - 4m^2n^2r^2 = o$$

und daher in die beiden kubischen Gleichungen:

8. $$4x^3 - 3r^2x \pm 2mnr = o$$

zerfällt, deren Wurzeln sämtlich reell sind. Die der einen: $+\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$ (1 positiv, 2 negativ) unterscheiden sich nur durch die Vorzeichen von denen der andern: $-\alpha$, $+\beta$, $+\gamma$. Die absoluten Werte derselben: α, β und γ geben uns die Lösung unseres Problems, d. h. die Sehnen SP, SQ und SR und zeigen, dafs es drei Fufspunktlinien giebt, die den Kreis O berühren.

Weil in (8) das zweite Glied fehlt, ist $\alpha = \beta + \gamma$, oder: $SP = SQ + SR$.

Setzt man: $\angle NOS = \varphi$, so ist $NN'S = \frac{1}{2}\varphi$, $m = r \cdot \sin\frac{1}{2}\varphi$, $n = r \cdot \cos\frac{1}{2}\varphi$, folglich $2 \cdot m \cdot n \cdot r = r^3 \cdot 2\sin\frac{1}{2}\varphi \cdot \cos\frac{1}{2}\varphi = r^3 \cdot \sin\varphi$. Ist ferner $x = r \cdot \sin y$, so geht die Gleichung (8, 1) über in:

9. $4 \cdot \sin^3 y - 3\sin y + \sin\varphi = o$, deren Identität mit

$$4 \cdot \sin^3\frac{\varphi}{3} - 3 \cdot \sin\frac{\varphi}{3} + \sin\varphi = o \text{ (Formel für die Dreiteilung des Winkels)}$$

sofort sich ergiebt. Es ist daher $y = \frac{\varphi}{3}$, oder (vergl. § 9) die Punkte P, Q, R teilen den Bogen zwischen Scheitelpunkt und Mittelpunkt im Verhältnis 1:2, denn ist z. B. $x = SQ$, so ist $\angle y = SNQ = \frac{1}{2} \cdot SOQ$, also $SOQ = \frac{2}{3} \cdot \varphi = \frac{2}{3} \cdot NOS$, folglich $NOQ = \frac{1}{3} \cdot NOS$.

Druck von W. Pormetter in Berlin.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf