„Für die letzten prinzipiellen Fragen der Wissenschaft“, so sagt Helmholtz in seiner Rede über die Entdeckungsgeschichte des Prinzips der kleinsten Aktion[1]), „der eigentlichen und berechtigten Philosophia naturalis, wie die Physik von den Engländern immer noch genannt wird, ist der Umstand von hoher Wichtigkeit, dafs in den beiden allgemeinsten Gesetzen von der Konstanz der Energie und von der kleinsten Aktion nur noch von den beiden Formen der Energie als den den ganzen Verlauf der Naturprozesse bestimmenden Gröfsen die Rede ist, nicht mehr von Bewegungskräften und Kraftkomponenten, welche letzteren nur noch als abgeleitete Rechnungswerte erscheinen. Alles Geschehen wird dargestellt durch das Hin- und Herfluten des ewig unzerstörbaren und unvermehrbaren Energievorrats der Welt, und die Gesetze dieses Flutens sind vollständig zusammengefafst in dem Satze der kleinsten Aktion.“

An Stelle dieses Prinzips der kleinsten Wirkung kann auch ein anderes der Integralprinzipien der Mechanik treten, z. B. das Hamilton'sche Prinzip[2]), welches Helmholtz als das geeignetste gewählt und in eine seine Anwendbarkeit noch erweiternde Form gebracht hat[3]).

Der Zweck der folgenden Abhandlung ist, die Eigentümlichkeiten dieses wichtigen Prinzips dadurch deutlich hervortreten zu lassen, dafs ausschliefslich mit seiner Verwendung eine Reihe einfacher aber möglichst mannigfaltiger Aufgaben der Mechanik behandelt worden ist.

Vorher ist der Versuch gemacht, die Grundlagen der Mechanik allein aus den Begriffen von Raum, Zeit und Energie herzuleiten. Da die Energie nicht direkt sinnlich wahrgenommen wird, so mufs festgesetzt werden, was wir darunter verstehen wollen. Wir benutzen dazu den Kraftbegriff, soweit er uns durch den Muskelsinn unmittelbar gegeben ist, wenn wir mechanische Vorgänge durch unsere Muskeltätigkeit hervorrufen. Dabei wird auf die Beschleunigung des bewegten Körpers kein Bezug genommen[4]). In der Newton'schen Mechanik wird gerade diese Beziehung zur Definition der Kraft benutzt und bei der Beschreibung der Naturvorgänge diese Kraft gewissermafsen objektiviert.

---

[1]) Diese Rede ist veröffentlicht in Ad. Harnack, Geschichte der Berliner Akademie der Wissenschaften. Bd. II.

[2]) Vergl. Heinrich Hertz, Die Prinzipien der Mechanik. Einleitung S. 18 u. 19.

[3]) H. v. Helmholtz, Wissenschaftliche Abhandlungen. III. Bd. S. 203. H. v. Helmholtz, Vorlesungen über die Dynamik diskreter Massenpunkte. S. 356.

[4]) M. Planck, Das Prinzip der Erhaltung der Energie. S. 151—153.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Objektivieren wir dagegen die Energie, so begleiten wir die Naturprozesse in letzter Linie freilich auch mit unserer Empfindung, nämlich dafs wir dieselben Vorgänge durch unsere Muskelkräfte nur unter Aufwand einer bestimmten Arbeit hervorbringen könnten. Diese Art der Betrachtung ist aber viel umfassender, sie allein können wir auf alle physikalischen Erscheinungen übertragen. Bilden Raum, Zeit und Energie die Grundvorstellungen, so können wir selbst den Massenbegriff als einen abgeleiteten auffassen, und die Newton'sche Kraft ist dann nur noch ein mathematischer Hilfsbegriff, der aus dem Hamilton'schen Prinzipe folgt[1]).

---

1. Begriff der Energie eines Systems. Bei der Beobachtung und Beschreibung der uns umgebenden Natur unterscheiden wir, obschon sie eigentlich ein unteilbares Ganzes ist, doch mehr oder weniger von einander unabhängige, einzelne „materielle Systeme". Lage und Geschwindigkeit seiner materiellen Elemente bestimmen in der Mechanik den Zustand eines Systems. Bei stattfindenden Veränderungen des Zustandes eines abgegrenzten Systems beobachten wir nun entweder auch äufsere Wirkungen, d. h. Veränderungen der Lage und Geschwindigkeit von Körpern, die nicht in das System mit einbegriffen sind; oder es treten nur innere Wirkungen auf. In letzterem Falle sprechen wir von einem „vollständigen System", das es natürlich streng genommen nicht gibt, das jedoch, je weiter man das System fafst, mit beliebiger Annäherung hergestellt werden kann. Je enger wir das System begrenzen, desto mehr äufsere Wirkungen sind mit Veränderungen seines Zustandes verknüpft, wir rechnen dazu auch die Änderung der Lage des Systems relativ zur Umgebung[2]).

Die Fähigkeit äufsere Wirkungen hervorzubringen bezeichnen wir als die Energie eines Systems.

Dieses Befähigtsein zu äufseren Wirkungen hängt entweder blofs von der gegenseitigen Lage der Teile des Systems ab und heifst dann Energie der Lage oder potentielle Energie (wie bei einem gehobenen Gewichte, einer gespannten Feder, einem komprimierten Gase); oder von den Geschwindigkeiten der Systemteile und heifst dann lebendige Kraft, Energie der Bewegung oder kinetische Energie (wie bei einem geschleuderten Steine, strömendem Wasser und Wind).

Alle mechanischen Vorgänge bestehen blofs in Umwandlungen dieser beiden Energiearten in einander.

2. Begriff der Kraft. Unser menschlicher Körper ist nun selbst ein mechanisches System, das zu äufseren Wirkungen befähigt ist. Indem wir in ein anderes System eingreifen, d. h. an anderen Körpern den natürlichen Ablauf ihrer Zustände ändern, gibt uns unser Muskelsinn deutlich die Empfindung einer Anstrengung und diese Zug- oder Druckempfindung bezeichnen wir als Kraft. Da der physiologische Vorgang in uns der Wahrnehmung der äufseren Wirkung vorausgeht, so erscheint uns die Kraft als die Ursache, die äufsere Wirkung als die Folge.

---

[1]) Hertz, Mechanik. Einleitung S. 33.

[2]) Hier und im Folgenden bis S. 9 vielfach wörtlich nach M. Planck, Das Prinzip der Erhaltung der Energie. Leipzig 1887. M. Planck, Vorlesungen über Thermodynamik. Leipzig 1897. Helmholtz l. c.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Spielen sich äufsere Vorgänge ohne unsere Einwirkung ab, so können wir uns doch immer vorstellen, dafs wir die nämliche Wirkung durch unsere Muskeltätigkeit hervorgerufen hätten, und insofern in ganz bestimmtem Sinne von einer Kraft sprechen, welche diese Vorgänge veranlafst hat. Die wirklichen Vorgänge in der Natur sind nur Umwandlungen der Energie, die Kräfte zwischen zwei auf einander wirkenden Systemen daher blofs Fiktionen. Nur wo wir selbst eines dieser Systeme bilden, haben die Kräfte eine reale Bedeutung.

3. Gröfse einer Kraft. Wir unterscheiden Angriffspunkt, Richtung und Gröfse einer Kraft. Die Richtung wird bestimmt durch die Richtung der Bewegung, die ein freier materieller Punkt unter dem Einflufs der betreffenden Kraft allein angenommen hätte. Da uns unser Muskelsinn kein genaues Mafs für die Gröfse einer Kraft liefert, so müssen wir zu exakten Messungen die an einem freien Punkte hervorgerufene Bewegung benutzen, die, wie später gezeigt wird, in einem bestimmten Zusammenhange mit der Gröfse der Kraft steht. Wohl aber können wir jetzt schon definieren, was gleiche Kräfte sind. Wenn auf einen Körper gleichzeitig mehrere Kräfte wirken (z. B. von mehreren Personen), so können sie sich das Gleichgewicht halten, d. h. in ihrer Wirkung aufheben. Ist K eine dieser Kräfte und kann eine neue Kraft P die Kraft K bei gleicher Richtung und gleichem Angriffspunkte völlig ersetzen, so sagen wir, P sei von gleicher Gröfse wie K. Wählen wir als Krafteinheit 1 kg-Gewicht, so können wir nun z. B. mittelst einer Wage Kräfte von jeder Gröfse darstellen, wenn wir noch als Kraft von n kg die gleichzeitige Wirkung von n Krafteinheiten (bei gleichem Angriffspunkte und gleicher Richtung) festsetzen.

4. Begriff und Mafs der Arbeit. Bewegen wir unter Aufwand von Kraft einen materiellen Punkt eines Systems in Richtung der Kraft, so sagen wir, wir leisten (positive) Arbeit an dem System. Dies geschieht z. B., indem wir ein Gewicht heben oder eine elastische Feder, ein Gas zusammendrücken. Die bei der Hebung von 1 kg um 1 m aufgewandte Arbeit nennen wir 1 kgm und benutzen sie als Einheit zum Messen jeder anderen Arbeitsleistung.

Entstehen bei den Zustandsänderungen eines Systems äufsere Wirkungen, so können wir uns das System immer so mit einer geeigneten Vorrichtung verbunden denken, dafs als äufsere Wirkung ein Gewicht gehoben oder gesenkt wird, während die Veränderungen im System selbst genau wie vorher vor sich gehen. Dadurch sind wir im stande, den Arbeitswert der äufseren Wirkungen durch eine Zahl (kgm) auszudrücken. Diese ist positiv oder negativ, je nachdem das Gewicht gehoben oder gesenkt worden ist, je nachdem das System Arbeit nach aufsen hin abgegeben hat oder von aufsen Arbeit an ihm geleistet worden ist.

5. Mafs der Energie. Hiernach können wir nun ein Mafs für die Energie eines mechanischen Systems angeben. Wir fixieren nach Willkür einen Anfangszustand (Nullzustand) des Systems. Dann ist die Energie des Systems in einem gegebenen Zustande, bezogen auf den Nullzustand, gleich dem Arbeitswerte der äufseren Wirkungen, welche durch den Übergang in den Nullzustand hervorgerufen werden. Ist der Zahlenwert der Energie für einen bestimmten Zustand gefunden, so hat man damit natürlich noch nicht den allgemeinen Ausdruck der Energie des Systems in seiner Abhängigkeit von den Zu-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

standsgröfsen desselben. Dazu bedarf es vielmehr einer weiteren Untersuchung, wie sich der Zahlenwert ändert, wenn die Bestimmungsstücke des Zustandes variiert werden.

6. Das Prinzip der Erhaltung der Energie. Das Prinzip der Erhaltung der Energie besagt nun, dafs der Arbeitswert der äufseren Wirkungen unabhängig ist von der Art des Überganges in den Nullzustand, dafs also die Energie eines Systems in einem gegebenen Zustande, bezogen auf einen bestimmten Normalzustand, einen ganz bestimmten Wert hat.

Bestimmen wir die Energie eines Systems in zwei Zuständen und machen wir dabei den Übergang aus einem Zustand in den Nullzustand durch den zweiten Zustand hindurch, so erkennen wir, dafs die Energieabnahme $E_1 - E_2$ gleich dem Arbeitswerte nur derjenigen äufseren Wirkungen ist, welche bei dieser Veränderung hervorgebracht werden; oder die Energiezunahme des Systems ist gleich dem Arbeitswert der bei seiner Veränderung aufgewendeten oder verbrauchten äufseren Wirkungen.

Die Abgrenzung eines Systems hängt von unserer Willkür ab, wir können seine Grenzen so erweitern, dafs bestimmte äufsere Wirkungen nun zu inneren werden. Die Energie eines Systems bleibt konstant, wenn ein mit ihm ausgeführter Prozefs keine äufseren Wirkungen hervorruft, mögen die inneren Wirkungen noch so verschieden sein. Dies führt uns dazu, die in einem System enthaltene Energie als eine begrifflich von den äufseren Wirkungen unabhängig bestehende Gröfse aufzufassen. Das System besitzt ein gewisses Quantum Energie, das konstant bleibt, so lange es weder Arbeit abgibt noch empfängt. Wir haben uns die Energie als im Systeme selbst befindlich vorzustellen, als eine Art Vorrat, welcher durch innere Wirkungen unzerstörbar ist. Analog ist die Materie auch in verschiedene Formen überführbar, aber nach ihrer Quantität unveränderlich; und in weiterer Analogie hiermit setzt sich auch die Energie eines Systems zusammen aus der Summation der einzelnen Energiearten, deren Veränderungen und Umwandlungen genau verfolgt werden können, ähnlich wie die Veränderungen der Materie in der Chemie.

7. Parallelogramm der Kräfte. Wird bei der Bewegung eines Systems ein materieller Punkt um die Strecke ds von A nach B verschoben (Fig. 1) und dabei von dem Systeme auf den Punkt die Kraft R ausgeübt, so ist der Betrag der hierbei nach aufsen abgegebenen Arbeit $dA = R ds$. Nach dem Prinzip von der Konstanz der Energie mufs die Arbeit dieselbe sein, wenn der Punkt längs des Weges $AC + CB$ verschoben wird. Sind P und Q die dabei längs AC und CB auf den Punkt ausgeübten Kräfte, so ist $dA = P\,dp + Q\,dq$. Nun ist $ds = dp \cos\alpha + dq \cos\beta$, daher $P = R \cos\alpha$ und $Q = R \cos\beta$, da C beliebig gewählt werden kann.

Verbinden wir hiermit den Erfahrungssatz, dafs jede unendlich kleine Bewegung aufgefafst werden kann als Superposition von mehreren gleichzeitig und unabhängig von einander vor sich gehenden Bewegungen, die nach einander denselben Zustand wie die wirkliche Bewegung hervorgebracht haben würden, so ergibt sich der Satz, dafs zwei gleichzeitig auf einen Punkt wirkende Kräfte nach dem Parallelogramme zu einer Resultante zusammengesetzt werden können und umgekehrt.

Bewegt sich also ein materieller Punkt unter dem Einflufs der Kraft R von der Stelle (x, y, z) nach dem Orte $(x + dx,\ y + dy,\ z + dz)$, so ist die dabei an ihm geleistete Arbeit $dA = R\,ds = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$, wo $X = R \cos(s, x)$, $Y = R \cos(s, y)$, $Z =$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$R\cos(s,z)$. Existiert ein Potential, d. h. eine Funktion Φ von der Art, dafs $X = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $Y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}$, $Z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}$, so ist $dA = -d\Phi$ die während der Verschiebung an dem Punkte geleistete Arbeit.

8. Abhängigkeit der Energie von den Zustandsgröfsen eines Systems. Kinetische Energie. Aufgabe der Physik ist, die Existenz der verschiedenen Arten von Energie an den verschiedenen Elementen des Systems im einzelnen nachzuweisen und ihren Übergang zu anderen Formen und zu anderen Elementen zu verfolgen. Die experimentelle Forschung hat den allgemeinen Ausdruck der Energie eines Systems in seiner Abhängigkeit von den Zustandsgröfsen festzustellen.

In der Mechanik handelt es sich nur um zwei Energiearten, die kinetische Energie (Energie der Bewegung, lebendige Kraft) und die potentielle Energie (Energie der Lage, Spannkraft).

Versuche zeigen, dafs die kinetische Energie eines Körpers proportional dem Quadrate seiner Geschwindigkeit ist. Vermag ein mit der Anfangsgeschwindigkeit v senkrecht emporgeworfener Körper sein eigenes Gewicht h Meter hoch zu heben, so kann er mit der Anfangsgeschwindigkeit 2v viermal so hoch steigen. Erlangt ferner ein Körper (1 kg) beim Herabfallen aus der Höhe h die Geschwindigkeit v, so erlangen zwei gleiche solche Körper beim Herabfallen aus derselben Höhe jeder die Endgeschwindigkeit v. Es war aber, um sie bis zur Höhe h emporzuheben, die doppelte Arbeit nötig gewesen. Daher ist auch die kinetische Energie des aus beiden Körpern bestehenden Systems im Momente des Aufschlagens doppelt so grofs, wie bei einem Körper allein, hängt also noch von einem anderen Bestimmungsstücke ab, als blofs von dem Quadrate der Geschwindigkeit.

9. Begriff der Masse. Jeder beliebige Körper (n kg), dem wir die Anfangsgeschwindigkeit v erteilen, vermag bis zu derselben Höhe h emporzusteigen, da wir ja den Vorgang auffassen können als ob unabhängig von einander n Stücke von je 1 kg emporstiegen. Übertragen wir aber auf verschieden schwere Körper stets dieselbe Energiemenge (z. B. die einer gespannten Feder), so müssen sie ungleich hoch emporsteigen, also ungleiche Anfangsgeschwindigkeiten erhalten. Je kleiner diese ist, desto gröfser ist mithin das Beharrungsvermögen, der Trägheitswiderstand des betreffenden Körpers. Als Mafs dafür kann der Quotient aus Energie (E) und Geschwindigkeitsquadrat (v^2) gelten. Aus Zweckmäfsigkeitsgründen wählen wir $\frac{2E}{v^2}$ und nennen diese Gröfse die Masse m des Körpers. Dann ist seine kinetische Energie $= \frac{1}{2} m v^2$ und für ein System von Massenpunkten $L = \frac{1}{2} \Sigma m (x'^2 + y'^2 + z'^2)$.

Betrachten wir die Energien der verschiedenen Körper als das eigentlich wirkliche, so ist hiernach der Massenbegriff erst ein abgeleiteter.

Heben wir zwei Körper von verschiedenem Gewicht (p_1 und p_2) auf dieselbe Höhe h, so sind die dabei aufgewendeten Arbeitsgröfsen $p_1 h$ resp. $p_2 h$. Beim Herabfallen kommen die Körper mit derselben Endgeschwindigkeit v unten an, aber mit verschiedenen kinetischen Energien $\frac{1}{2} m_1 v^2$ und $\frac{1}{2} m_2 v^2$. Nach dem Energiegesetze haben wir

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$\frac{1}{2} m_1 v^2 = p_1 h$ und $\frac{1}{2} m_2 v^2 = p_2 h$, also $m_1 : m_2 = p_1 : p_2$, d. h. die Massen der Körper sind ihren Gewichten proportional.

10. Potentielle Energie. Wird durch die Arbeit äufserer Kräfte nicht die kinetische Energie der Teile eines Systems, sondern nur ihre gegenseitige Lage verändert, so entspricht dem Aufwande von Arbeit eine Vermehrung der potentiellen Energie Φ des Systems. Diese ist daher eine Funktion der Gröfsen, welche die augenblickliche Lage der materiellen Teile des Systems bestimmen. Wir können sie als einen disponiblen Arbeitswert ansehen, den wir umgekehrt wieder für äufsere Zwecke nutzbar machen können, indem wir eine derartige Deformation des Massensystems vornehmen, dafs Φ dadurch vermindert wird.

Kommen in dem System nur Wirkungen zwischen unmittelbar benachbarten Teilchen vor, so ist die potentielle Energie eines Massenelements gleich dem Gesamtbetrage der Arbeit, welcher in der Umgebung des Teilchens aufgewandt worden ist, um dessen Zustandsveränderung hervorzubringen, und man erhält dann die Energie des Systems durch Summation der Energien aller materiellen Teilchen desselben. Ist z. B. bei einem elastischen Körper die potentielle Energie eines Volumenelements $d\tau$ gleich $\varphi \cdot d\tau$, so ist die potentielle Energie des ganzen Körpers $\Phi = \int \varphi \, d\tau$. Dabei ist φ eine Funktion der sechs Gröfsen, welche die Dilatation des Volumenelements bestimmen.

Kommen dagegen in dem betrachteten System auch Fernkräfte vor, so hängt die potentielle Energie von der gegenseitigen Lage der aufeinander wirkenden Elemente ab. So ist z. B. die Energie zweier gegen einander gravitierenden Massen proportional dem Produkte ihrer Massen und umgekehrt proportional ihrem Abstande, $\Phi = -G \cdot \frac{m_1 m_2}{r}$, wobei die Gravitationskonstante $G = \frac{2}{3} \cdot 10^{-7}$ ($cm^3\, gr^{-1}\, sec^{-2}$), denn dann ist die Anziehungskraft K zwischen den beiden Massen $= -G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2} = -\frac{\partial \Phi}{\partial r}$. Eine an der Oberfläche der Erde (Masse M, Radius R) befindliche Masse m hat hiernach, absolut genommen, das Gewicht $p = G \cdot \frac{Mm}{R^2}$ und in der Höhe h über dem Erdboden die potentielle Energie $-G \cdot \frac{Mm}{R+h} = -G \cdot \frac{Mm}{R}\left(1 - \frac{h}{R}\right) = -G \cdot \frac{Mm}{R} + G \cdot \frac{Mm}{R^2} \cdot h = C + ph$. Fassen wir, wie gewöhnlich, die Lage am Erdboden als Nullzustand auf, in welchem m keine potentielle Energie hat, so ist die Konstante $C = 0$ zu setzen und $\Phi = p \cdot h$.

Sollte einmal an Stelle der momentan in die Ferne wirkenden Anziehungskraft eine Wirkung treten, die sich in mefsbarer Zeit durch das Zwischenmedium vermittelst einer eigentümlichen Deformation desselben von Teilchen zu Teilchen fortpflanzt, so würde sich auch hier die Energie als ein Integral darstellen, das über das gesamte Zwischenmedium zu erstrecken ist. Die Gültigkeit des bisher gebrauchten Ausdrucks ist an die Bedingung geknüpft, dafs die von der einen Masse ausgehende Wirkung bei der anderen bereits angelangt ist, und sich im Zwischenmedium ein stationärer Zustand gebildet hat.

11. Das Hamilton'sche Prinzip. Alles Geschehen in der Natur ist nun blofs eine Umwandlung der einzelnen Energiearten in einander. Die eindeutige Bestimmung des zeitlichen Verlaufs dieser Umwandlung erfolgt durch das Prinzip der kleinsten

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wirkung, welches in der ihm von Hamilton gegebenen Form lautet: $\delta\int_{t_0}^{t_1}(\Phi - L)\,dt = 0$ oder in Worten: Unter allen Bewegungsarten, welche ein Massensystem aus einer gegebenen Anfangslage in einem vorgeschriebenen Zeitintervall $t_0 \ldots t_1$ zu einer gegebenen Endlage führen, ist die wirklich eintretende Bewegung vor allen virtuellen dadurch ausgezeichnet, dafs für sie der Mittelwert der Funktion $(\Phi - L)$ ein Grenzwert wird. Für diese Funktion $H = \Phi - L$ hat Helmholtz den Namen „kinetisches Potential" vorgeschlagen.

12. Erweiterung des Hamilton'schen Prinzips; Erweiterung des Kraftbegriffes aus dem Begriff der Arbeit. In der Form $\delta\int_{t_0}^{t_1} H\,dt = 0$ gilt das Prinzip nur für vollständige Systeme. Helmholtz hat es so erweitert, dafs es auch auf unvollständige Systeme anwendbar ist, bei denen äufsere Kräfte wirken, auf deren Herkunft man aber nicht näher eingehen will oder kann, die daher nur als vorgeschriebene Zeitfunktionen eingeführt werden und für welche der Ausdruck der potentiellen Energie nicht als bekannt vorausgesetzt wird, da diese ja nur von der Lage des Systems und nicht von der Zeit abhängt.

Unter dem Einflufs dieser äufseren Kräfte wird nun das betrachtete unvollständige System bei einer Lagenänderung Arbeit nach aufsen hin abgeben oder von aufsen her aufnehmen. Die Lage des Systems sei durch eine Anzahl allgemeiner Koordinaten p_a vollständig bestimmt. Die äufseren Kräfte können so in Komponenten zerlegt werden, dafs jede nur eine dieser Koordinaten des Systems zu verändern strebt. Das Aggregat von Komponenten, die alle nur auf eine Änderung der Abmessung p_a hinzielen, nennt Helmholtz „die äufsere Kraft in Richtung von p_a". Wird nun bei einer Bewegung des Systems die Koordinate p_a in $p_a + dp_a$ geändert und dabei gegen diese äufsere Kraft Arbeit geleistet, so bezeichnet Helmholtz die hierbei vom System nach aufsen abgegebene Arbeit mit $+P_a\,dp_a$. Die Gröfse P_a ist also die innere Kraft, mit der das System gegen die äufseren Einflüsse auf Vergröfserung von p_a hinwirkt. Umgekehrt ist dann $(-P_a)$ die bei der Arbeitsleistung des Systems überwundene äufsere Kraft. Wird dagegen bei der Vergröfserung von p_a um dp_a von aufsen Arbeit auf das System übertragen, so ist P_a negativ und $(-P_a)$ die positive äufsere Kraft, die dabei unter Überwindung der inneren Kräfte die Energie des Systems vermehrt. Hiernach ist eine Kraft nur durch die Arbeit definiert, welche sie leisten kann, nicht durch die auftretenden Beschleunigungen, die ja auch erfolgen können ohne äufsere Einflüsse, d. h. ohne Änderung der Energie des Systems.

Helmholtz fügte zu der potentiellen Energie der inneren (konservativen) Kräfte das Zusatzglied $\Sigma P_a p_a$ hinzu, welches bei der Differentiation nach den Koordinaten die äufseren Kräfte liefert. Dadurch erhält das Hamilton'sche Prinzip auch für unvollständige Systeme Gültigkeit und lautet dann $\delta\int_{t_0}^{t_1}(H + \Sigma P_a p_a)\,dt = 0$.

Durch Ausführung der vorgeschriebenen Variation des Hamilton'schen Integrals $\int H\,dt$ erhalten wir $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial p'_a}\right) - \frac{\partial L}{\partial p_a} + \frac{\partial \Phi}{\partial p_a} = 0$ oder, da Φ nur von p_a und nicht auch von $p'_a \left(= \frac{dp_a}{dt}\right)$ abhängt, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p'_a}\right) - \frac{\partial H}{\partial p_a} = 0$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dies sind die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen zweiter Form, die also nur in einer anderen Fassung dasselbe besagen, wie das Hamilton'sche Prinzip.

Aus der erweiterten Form des Hamilton'schen Integrals hat Helmholtz die damit gleichbedeutende Erweiterung der Lagrange'schen Differentialgleichungen gebildet: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p_a'}\right) - \frac{\partial H}{\partial p_a} = P_a$ und gezeigt, dafs diese Gleichungen und mithin auch deren Quelle, das erweiterte Hamilton'sche Prinzip, das Gesetz von der Energieerhaltung immer einschliefsen, dafs aber umgekehrt dieses Prinzip nicht immer erfüllt ist, auch wenn das Gesetz der Erhaltung der Energie gewahrt ist. Das Hamilton'sche Prinzip sagt also mehr aus über den besonderen Charakter der Naturkräfte, als was in ihrer Bezeichnung als konservative Kräfte bereits ausgedrückt ist. Es ergeben sich nämlich aus dem Prinzip notwendige Beziehungen zwischen dem Verhalten eines Systems gegenüber gewissen Veränderungen der Kräfte, reziproke Beziehungen, die Helmholtz aufgestellt hat, und die bisher immer bestätigt gefunden wurden[1]).

---

13. Erstes Axiom Newtons. Wir betrachten zunächst einen einzigen freien Massenpunkt m, auf den keine äufseren Kräfte wirken. Da eine potentielle Energie hier nicht vorhanden ist, mufs seine Bewegung nach dem Gesetze von der Erhaltung der Energie mit konstanter lebendiger Kraft, also mit konstanter Geschwindigkeit vor sich gehen. Ist daher t die vorgeschriebene Zeit zwischen der Anfangs- und Endlage, so unterscheidet sich die wirkliche von allen virtuellen Bahnen dadurch, dafs für sie $\delta(Lt) = 0$, mithin $L = \frac{1}{2} m v^2$ (bei hinreichend kleinem Wege) ein Minimum ist. Unter den möglichen Bahnen, die der Punkt m von der Anfangslage A zur Endlage B alle in derselben Zeit t und jedesmal mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchlaufen könnte, ist die von ihm wirklich eingeschlagene Bahn dadurch charakterisiert, dafs auf ihr das Ziel mit der kleinsten Geschwindigkeit erreicht wird. Sie ist also der kürzeste Weg von A nach B, d. h. die Bewegung des betrachteten Punktes geschieht nach dem Trägheitsgesetze.

Diese Betrachtungen gelten auch noch, wenn der Punkt m nicht frei, sondern gezwungen ist, auf einer Linie oder Fläche zu bleiben. Er mufs sich auch dann mit gleichbleibender Geschwindigkeit bewegen und auf der Fläche eine kürzeste Linie beschreiben.

Sind x, y, z die Koordinaten des freien Massenpunktes, so ist das kinetische Potential $H = -\frac{1}{2} m (x'^2 + y'^2 + z'^2)$, und die Lagrange'schen Gleichungen ergeben $m x'' = 0$; $m y'' = 0$; $m z'' = 0$ d. h. $m x'$, $m y'$, $m z'$ haben konstante Werte, wodurch wiederum ausgedrückt ist, dafs die Bewegung geradlinig und gleichförmig erfolgt.

14. Bewegung unter der Einwirkung von Kräften. Zweites Axiom Newtons. Beobachten wir eine andere Art der Bewegung von m, als durch diese Gleichungen dargestellt wird, so müssen wir annehmen, dafs der Punkt nicht mehr für sich allein ein vollständiges System bildet, sondern dafs seine Bewegung mit dem Ablauf der Be-

---

[1]) Helmholtz, Vorlesungen über die Dynamik diskreter Massenpunkte. Band I. Abt. 2. S. 373 u. f. Wissenschaftliche Abhandlungen. Band III. S. 203 u. f.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wegungen eines zweiten Systems verknüpft ist. Können wir beide zu einem vollständigen Systeme zusammenfassen, so bestimmt das Hamilton'sche Prinzip in seiner ursprünglichen Form den natürlichen Ablauf seiner Bewegung. Ist m z. B. der Schwerkraft unterworfen, so können wir seine Masse und die der Erde zusammen als ein vollständiges System betrachten, für welches $H = mgz - \frac{1}{2} m (x'^2 + y'^2 + z'^2)$ ist, also folgende Bewegungsgleichungen gelten

$$mx'' = 0; \; my'' = 0; \; mz'' + mg = 0. \qquad 1)$$

Wir können aber auch den Massenpunkt m für sich allein als ein unvollständiges System auffassen, das äufseren Kräften (in unserem Beispiel der Schwerkraft) unterworfen ist. Ist $\overline{H}$ das kinetische Potential dieses Teilsystems, so sind die Bewegungsgleichungen für dasselbe $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{H}}{d p'_a}\right) - \frac{\partial \overline{H}}{\partial p_a} = P_a$, also in dem betrachteten Beispiele, wo $\overline{H} = -\frac{1}{2} m (x'^2 + y'^2 + z'^2)$,

$$-mx'' = P_x; \; -my'' = P_y; \; -mz'' = P_z. \qquad 2)$$

Sind nun die äufseren Kräfte gegeben, im Beispiele also $(-P_x) = 0$; $(-P_y) = 0$; $(-P_z) = -mg$, so liefern die Gleichungen 2) die unter dem Einflufs dieser Kräfte vor sich gehende Bewegung des Punktes m, die wir als gezwungene Bewegung bezeichnen können im Gegensatz zu der natürlichen Bewegung, wie sie (in 13) für das vollständig abgeschlossene System entwickelt wurde.

Umgekehrt gestatten obige Gleichungen 2) aber auch die Zwangskräfte zu berechnen, falls eine bestimmte gezwungene Bewegung des Massenpunktes m gegeben ist. Ist nämlich durch die Gleichungen 1) eine gezwungene Bewegung von m charakterisiert, so zeigen die Gleichungen 2), mit welchen Kräften das für sich allein gedachte Teilsystem m auf diesen Zwang reagiert, wenn man in 2) an Stelle von mx'', my'', mz'' ihre aus 1) sich ergebenden Werte setzt. So folgt $P_x = 0$, $P_y = 0$, $P_z = mg$.

Beobachten wir in einem anderen Falle, dafs ein freier Punkt auf rauher horizontaler Bahn statt der natürlichen Bewegung $mx'' = 0$ die Bewegung $mx'' = -f$ ausführt, so sprechen wir von der Reibungskraft $(-f)$, die auf ihn wirkt.

Bewegt sich allgemein ein freier Punkt m unter dem Einflusse einer beliebigen Kraft K, deren Komponenten $(-P_x)$, $(-P_y)$, $(-P_z)$ sind, so haben wir die Bewegungsgleichungen $mx'' = (-P_x)$; $my'' = (-P_y)$; $mz'' = (-P_z)$, also $K = m\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}$, d. h. die Gröfse der Kraft wird gemessen durch das Produkt aus Masse und der von ihr hervorgebrachten Beschleunigung.

15. Drittes Axiom Newtons. Seinem dritten Axiom von der Gleichheit von Wirkung und Rückwirkung hat Newton die Hypothese untergelegt[1]), dafs alle Naturkräfte als sogenannte Zentralkräfte aufzufassen seien, d. h. als solche, die zwischen je zwei Massenpunkten in Richtung ihrer geradlinigen Verbindung als Abstofsungs- oder Anziehungskräfte wirken.

Unter dieser Voraussetzung ergibt sich auch aus Hamiltons Prinzip das dritte Axiom. Die Punkte m_1 und m_2 mögen die Entfernung r haben, dann ist die potentielle Energie $\Phi = f(r)$, da sie ja einzig von der gegenseitigen Lage der Punkte abhängen

[1]) Vergl. Helmholtz, Vorlesungen über Dynamik u. s. w. S. 140.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

kann. Aus dem kinetischen Potentiale

$$H = f(r) - \tfrac{1}{2} m_1 (x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2) - \tfrac{1}{2} m_2 (x_2'^2 + y_2'^2 + z_2'^2)$$

folgen die Bewegungsgleichungen $m_1 x_1'' + \frac{\partial f(r)}{\partial x_1} = 0$ etc.; $m_2 x_2'' + \frac{\partial f(r)}{\partial x_2} = 0$ etc., wobei $r^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$ und $\frac{\partial f(r)}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{x_1 - x_2}{r} = - \frac{\partial f(r)}{\partial x_2}$.

Betrachten wir nun m_1 als ein Teilsystem für sich, so vollführt es seine Bewegung als ein freier Punkt unter dem Zwange einer äufseren Kraft, deren Komponenten sind $(-P_x) = + m_1 x_1'' = - \frac{\partial f(r)}{\partial x_1}$ und analog für $(-P_y)$ und $(-P_z)$. Dieselbe Überlegung für m_2 angestellt zeigt, dafs die Komponenten der auf das Teilsystem m_2 wirkenden äufseren Kraft von gleicher Gröfse aber entgegengesetzter Richtung sind wie bei m_1.

Die von Helmholtz eingeführten Kräfte $(-P_a)$ sind an obige einschränkende Voraussetzung nicht gebunden. Hiernach sind Kräfte blofs Fiktionen, welche uns gestatten sollen, von der Energieübertragung zwischen zwei Teilen A und B eines vollständigen Systems abzusehen und nur von der Bewegung des Teilsystems A für sich zu sprechen, freilich unter dem Einflufs äufserer Kräfte, von deren Herkunft aber dann abgesehen werden kann. Nun war festgesetzt, dafs, wenn bei einer Lagenveränderung des Teilsystems A die Koordinate p_a um dp_a wächst und dabei die Energie des Systems um den Betrag $P_a\, dp_a$ abnimmt, P_a die Kraft sein soll, mit welcher das System A bei dieser Verschiebung gegen die Koppelung mit B reagiert. Nach dem Energiegesetze nimmt dann B die Energiemenge $P_a\, dp_a$ auf, folglich ist $(-P_a)$ die Kraft, mit welcher B bei der betrachteten Verschiebung auf A reagiert. Hiernach ist das dritte Axiom rein eine Folge der Definition des Kraftbegriffes, der auf den Arbeitsbegriff zurückgeführt ist, da wir ja die Energie als das allein vorhandene und den Ablauf der Erscheinungen bestimmende betrachten.

16. Kreisbewegung. Ein freier Massenpunkt m in der Ebene, auf den keine äufseren Kräfte wirken sollen, habe die Koordinaten x und y. Dann ist sein kinetisches Potential $H = -\tfrac{1}{2} m (x'^2 + y'^2)$ und seine natürliche Bewegung bestimmt durch $mx'' = 0$, $my'' = 0$. Ist m dagegen durch feste Verbindungen gezwungen, eine Kreisbahn mit dem Radius r zu beschreiben, so mufs dies nach dem Gesetze von der Erhaltung der Energie mit konstanter Winkelgeschwindigkeit (ω) geschehen. Wir haben dann $x = r \cos \omega t$, $y = r \sin \omega t$. Die durch die festen Verbindungen auf den frei gedachten Massenpunkt ausgeübten Zwangskräfte sind dabei $(-P_x) = mx''$ und $(-P_y) = my''$, worin x und y die Koordinaten von m bei seiner Kreisbewegung sind. Daher ist $(-P_x) = -m\omega^2 x$ und $(-P_y) = -m\omega^2 y$, d. h. der betrachtete Punkt unterliegt in jedem Augenblick zwei Kräften, die seinen Koordinaten proportional sind und diese zu verkleinern streben.

Wir wollen jetzt dieselbe Betrachtung mit Polarkoordinaten durchführen. Für den freien Punkt ist $H = -\tfrac{1}{2} m (r^2 \varphi'^2 + r'^2)$, die natürliche Bewegung wird also bestimmt durch die beiden Gleichungen $-\frac{d}{dt}(m r^2 \varphi') = 0$ oder $\varphi' = \text{const.}$ und $-mr'' + mr\varphi'^2 = 0$. Bei jeder anderen Bewegung reagiert m auf den dabei ausgeübten Zwang mit den Kräften $P_\varphi = -\frac{d}{dt}(m r^2 \varphi')$ und $P_r = -mr'' + mr\varphi'^2$, worin sich jetzt r und φ auf die

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

erzwungene Bahn beziehen. Bei einer Kreisbahn ist r konstant und nur noch φ veränderlich. Das kinetische Potential $\overline{H} = -\frac{1}{2} m r^2 \varphi'^2$ gibt dann die Gleichung $-m r^2 \varphi'' = 0$, also übereinstimmend mit dem Energiegesetze $\varphi' = \text{const.} = \omega$. In diesem Falle ist daher $P_\varphi = 0$ und $P_r = m r \omega^2$, d. h. der Punkt äufsert fortdauernd eine auf Vergröfserung von r hinwirkende Kraft (Centrifugalkraft) von der Stärke $m r \omega^2 = m \frac{v^2}{r}$. Betreffs der Drehung findet aber kein Zwang statt, d. h. der Punkt m beschreibt denselben Winkel $d\varphi$, mag er sich nun frei längs der Tangente oder gezwungen auf dem Kreise fortbewegen. (Fig. 2.)

17. Mathematisches Pendel. Beschreibt der Massenpunkt eine Kreisbahn unter dem Einflufs der Schwere, so sind (Fig. 3) seine Koordinaten an einer beliebigen Stelle seiner Bahn $x = r \sin\varphi$, $y = r \cos\varphi$, und das kinetische Potential $H = -m g r \cos\varphi - \frac{1}{2} m r^2 \varphi'^2$ liefert die Bewegungsgleichung $-m r^2 \varphi'' - m g r \sin\varphi = 0$ oder $r\varphi'' = -g \sin\varphi$. Um die Spannung des starren Fadens zu ermitteln, betrachten wir m als frei. Dann wäre $\overline{H} = -m g r \cos\varphi - \frac{1}{2} m (r^2 \varphi'^2 + r'^2)$ und mithin die Bewegungsgleichungen $-m r^2 \varphi'' - 2 m r r' \varphi' - m g r \sin\varphi = 0$ und $-m r'' + m r \varphi'^2 + m g \cos\varphi = 0$. Erfährt daher diese natürliche Bewegung des vollständigen Systems eine Beschränkung durch die Bedingung $r = \text{const.}$, so reagiert m darauf mit den Kräften $P_\varphi = -m r^2 \varphi'' - m g r \sin\varphi$ und $P_r = m r \varphi'^2 + m g \cos\varphi$, wobei für φ die aus der Bewegungsgleichung des Pendels sich ergebenden Werte zu setzen sind. Daher ist das Drehungsmoment $P_\varphi = 0$. P_r ist die Spannung des Fadens, hervorgerufen durch die Centrifugalkraft und die radiale Komponente der Schwere. Die Festigkeit des Aufhängungspunktes kann daher ersetzt werden durch die beiden nach den Achsen genommenen Komponenten von $(-P_r)$, nämlich $X = -m x \varphi'^2 - m g \sin\varphi \cos\varphi$ und $Y = -m y \varphi'^2 - m g \cos^2\varphi$.

Zu diesem Resultat kann man auch in der Weise gelangen, dafs man den Aufhängungspunkt als beweglich annimmt, indem man ihn durch die Koordinaten ξ und η auf ein festes Achsensystem bezieht, das dem der x, y parallel ist. Dann sind die Koordinaten von m $x = \xi + r \sin\varphi$, $y = \eta + r \cos\varphi$ und

$$H = -m g (\eta + r \cos\varphi) - \frac{1}{2} m (\xi'^2 + \eta'^2 + 2 \xi' \varphi' r \cos\varphi - 2 \eta' \varphi' r \sin\varphi + r^2 \varphi'^2).$$

Entsprechend den drei unabhängigen Koordinaten ergeben sich hieraus die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen

$$-m \xi'' - m r \varphi'' \cos\varphi + m r \varphi'^2 \sin\varphi = 0$$
$$-m \eta'' + m r \varphi'' \sin\varphi + m r \varphi'^2 \cos\varphi + m g = 0$$
$$-m r \xi'' \cos\varphi + m r \eta'' \sin\varphi - m r^2 \varphi'' - m g r \sin\varphi = 0.$$

Infolge der Bedingung, dafs jetzt ξ und η konstant sein sollen, treten Zwangskräfte auf, nämlich $(-P_\xi) = m r \varphi'' \cos\varphi - m r \varphi'^2 \sin\varphi$; $(-P_\eta) = -m r \varphi'' \sin\varphi - m r \varphi'^2 \cos\varphi - m g$; $(-P_\varphi) = m r^2 \varphi'' + m g r \sin\varphi = 0$ nach dem Gesetz der Pendelbewegung. Setzt man hiernach $r\varphi'' = -g \sin\varphi$, so werden $(-P_\xi) = -m g \sin\varphi \cos\varphi - m \varphi'^2 x$; $(-P_\eta) = -m g \cos^2\varphi - m \varphi'^2 y$. Dies sind die erforderlichen äufseren Kräfte, welche bei der Pendelbewegung den frei gedachten Aufhängungspunkt in Ruhe erhalten, also seine Festigkeit ersetzen.

Wird der Aufhängungspunkt des Pendels in beliebiger Weise horizontal bewegt, ist also $\eta = \text{const.}$ und ξ eine gegebene Funktion der Zeit, so wird die Bewegungs-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

gleichung für die dann noch allein vorhandene unabhängige Koordinate φ

$$-mr\xi''\cos\varphi - mr^2\varphi'' - mgr\sin\varphi = 0.$$

Die Pendelbewegung bleibt also nur dann ungeändert, wenn der Aufhängungspunkt mit konstanter Geschwindigkeit geradlinig bewegt wird.

18. Doppelpendel. Wir betrachten jetzt ein Doppelpendel mit den Massen m und μ an den beiden starren gewichtslosen Stangen a und b (Fig. 4.). m hat die Koordinaten $a\sin\varphi$, $a\cos\varphi$ und μ $a\sin\varphi + b\sin\psi$, $a\cos\varphi + b\cos\psi$. Das kinetische Potential ist daher $H = -(m+\mu)\,ga\cos\varphi - \frac{1}{2}(m+\mu)\,a^2\varphi'^2 - \mu gb\cos\psi - \frac{1}{2}\mu b^2\psi'^2 - \mu ab\varphi'\psi'\cos(\varphi-\psi)$ und mithin die Bewegungsgleichungen

$$(m+\mu)\,a\varphi'' + \mu b\psi''\cos(\varphi-\psi) + \mu b\psi'^2\sin(\varphi-\psi) + (m+\mu)\,g\sin\varphi = 0$$
$$b\psi'' + a\varphi''\cos(\varphi-\psi) - a\varphi'^2\sin(\varphi-\psi) + g\sin\psi = 0.$$

Wir können die Aufgabe auch dadurch lösen, dafs wir die Massen m und μ als ein vollständiges System auffassen, auf welches infolge des Einflusses der Erde äufsere Kräfte wirken. Dann ist das kinetische Potential dieses Systems

$$\overline{H} = -\frac{1}{2}(m+\mu)\,a^2\varphi'^2 - \frac{1}{2}\mu b^2\psi'^2 - \mu ab\varphi'\psi'\cos(\varphi-\psi).$$

Um nun die äufseren Kräfte $(-P_\varphi)$ bezw. $(-P_\psi)$ aufzustellen, welche jede nur eine Änderung der Koordinaten φ bezw. ψ bewirken, zerlegen wir die an μ angreifende Kraft μg in die beiden Komponenten $\mu g\cos\psi$ längs b und $\mu g\sin\psi$ senkrecht zu b. Erstere wird nach m verschoben, letztere parallel mit sich selbst an m in gleicher und entgegengesetzter Richtung angebracht. Wir erhalten so das äufsere, allein auf Vergröfserung von ψ hinwirkende Kräftepaar $(-P_\psi) = -b\mu g\sin\psi$ und aufserdem (Fig. 5) an m die Kräfte mg, $\mu g\cos\psi$ und $\mu g\sin\psi$. Diese liefern der Reihe nach senkrecht zu a die Komponenten $mg\sin\varphi$, $\mu g\cos\psi\sin(\varphi-\psi)$ und $\mu g\sin\psi\cos(\varphi-\psi)$. Daher ist das am Hebelarme a allein auf Vergröfserung von φ hinwirkende Drehungsmoment

$$(-P_\varphi) = -ag\,(m\sin\varphi + \mu\cos\psi\sin(\varphi-\psi) + \mu\sin\psi\cos(\varphi-\psi)) = -ag(m+\mu)\sin\varphi.$$

Es ist leicht einzusehen, dafs bei einer solchen Änderung $\partial\varphi$, bei der ψ ungeändert bleibt, also b parallel mit sich selbst verschoben wird, $(-P_\psi)$ keine Arbeit leistet, sondern nur $(-P_\varphi)$.

Bilden wir jetzt $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\overline{H}}{\partial\varphi'}\right) - \frac{\partial\overline{H}}{\partial\varphi} = P_\varphi$ und analog für ψ, so erhalten wir wieder obige Bewegungsgleichungen.

19. Schiefe Ebene. Ist φ der Neigungswinkel der Ebene und r der Abstand des Punktes m vom Anfangspunkte (Fig. 6), so ergibt sich $H = mgr\sin\varphi - \frac{1}{2}mr'^2$ und mithin als Bewegungsgleichung $r'' = -g\sin\varphi$. Für den freien Punkt m ist $\overline{H} = mgr\sin\varphi - \frac{1}{2}m(r^2\varphi'^2 + r'^2)$. Da sich aber m unter dem Zwange bewegt, dafs φ konstant ist, so geschieht die Reaktion darauf mit den Kräften

$$P_\varphi = \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\overline{H}}{\partial\varphi'}\right) - \frac{\partial\overline{H}}{\partial\varphi}\right)_{\text{für } \varphi = \text{const.}} = -\frac{\partial H}{\partial\varphi} = -mgr\cos\varphi \text{ und}$$

$$P_r = \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\overline{H}}{\partial r'}\right) - \frac{\partial\overline{H}}{\partial r}\right)_{\text{für } \varphi = \text{const.}} = -mr'' - mg\sin\varphi = 0.$$

P_φ ist das Drehungsmoment, mit welchem m auf Vergröfserung des Winkels φ hinstrebt. Da es negativ ist, so ergibt sich hieraus ein Druck auf die schiefe Ebene $= mg\cos\varphi$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Befestigen wir an m durch einen Faden eine frei herabhängende Masse μ (Fig. 7), so ist $H = mgr\sin\varphi + \mu gy - \frac{1}{2}mr'^2 - \frac{1}{2}\mu y'^2$. Da aber $dr = -dy$, also $-y = r + \text{const.}$, so folgt $H = mgr\sin\varphi - \mu g(r + \text{const.}) - \frac{1}{2}(m+\mu)r'^2$. Hieraus ergibt sich die Bewegungsgleichung $(m+\mu)r'' = \mu g - mg\sin\varphi$.

Der Druck auf die schiefe Ebene ist wieder gleich $mg\cos\varphi$. Den Zug längs des Fadens können wir auf folgende Arten ermitteln.

I. Als m nicht mit μ gekoppelt war, war seine natürliche Bewegung längs der schiefen Ebene bestimmt durch $mr'' + mg\sin\varphi = 0$. Bewegt m sich jetzt nach einem anderen Gesetze, so ist die dazu erforderliche äufsere Zwangskraft $(-P_r) = mr'' + mg\sin\varphi$, worin nun für r die Werte zu setzen sind, die der gezwungenen Bewegung entsprechen und sich nach oben aus $(m+\mu)r'' = \mu g - mg\sin\varphi$ ergeben. Daher ist die Spannung des Fadens $(-P_r) = \mu g - \mu r'' = \frac{m\mu}{m+\mu}g(1+\sin\varphi)$. Herrscht gerade Gleichgewicht, ist $r'' = 0$, also $\mu = m\sin\varphi$, so ist die Spannung $= \mu g$.

II. Bei der natürlichen Bewegung des freien Punktes μ unter dem Einflufs der Schwere ist $H = \mu gy - \frac{1}{2}\mu y'^2$ und folglich $-\mu y'' - \mu g = 0$ oder $\mu r'' - \mu g = 0$. Die durch Koppelung mit m verursachte Reaktion ist daher $P_y = -\mu y'' - \mu g = \mu r'' - \mu g = P_r$. Die Arbeit der Zwangskräfte in dem vollständigen System ist $(-P_r)dr + (-P_y)dy = 0$, wie es stets der Fall sein mufs; denn durch die Verbindung zweier Systeme wird — von der Reibung abgesehen — keine Änderung ihrer Gesamtenergie herbeigeführt, vorausgesetzt, dafs die Verbindungen bei der Bewegung keine inneren Veränderungen (elastischer Art) erleiden.

20. Druck auf eine Unterlage. Für einen frei beweglichen Massenpunkt m (Fig. 8), auf den die Schwere wirkt, ist $H = mgy - \frac{1}{2}my'^2$, daher seine natürliche Bewegung $-my'' - mg = 0$. Erfährt nun der Massenpunkt nicht die Beschleunigung g nach abwärts, so mufs er einem Zwange unterliegen. Die Gröfse der äufseren Zwangskraft ist dann $(-P_y) = my'' + mg$, wo jetzt y'' die Beschleunigung bei der gezwungenen Bewegung bedeutet. Ruht die Masse m oder wird sie samt der Unterlage mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf- oder abwärts bewegt, so ist $y'' = 0$ und $P_y = -mg$, der von der Masse auf die Unterlage ausgeübte Druck also gleich ihrem Gewicht. Wird m mit der Beschleunigung γ bewegt, ist also $y'' = \gamma$, so ist die Reaktion $P_y = -m\gamma - mg$. Der Druck auf die Unterlage ist also Null, wenn $\gamma = -g$, d. h. wenn sie mit der Beschleunigung g abwärts, dagegen gröfser als das Gewicht von m, wenn sie mit beschleunigter Geschwindigkeit aufwärts bewegt wird.

21. Atwood'sche Fallmaschine. Die Massen m und μ sind durch einen unausdehnbaren Faden verbunden (Fig. 9), daher ist $dy = -d\eta$ und $H = mgy + \mu g(\text{const.} - y) - \frac{1}{2}(m+\mu)y'^2$, mithin die Gleichg. der Bewegung $(m+\mu)y'' + (m-\mu)g = 0$. Für das Teilsystem (m, Erde) allein ist $\overline{H} = mgy - \frac{1}{2}my'^2$, seine natürliche Bewegung mithin $my'' + mg = 0$ und folglich die an m wirkende Zugkraft des Fadens

$$(-P_y) = my'' + mg, \text{ wo } y'' = -\frac{m-\mu}{m+\mu}\cdot g, \text{ also } (-P_y) = \frac{2m\mu}{m+\mu}\cdot g.$$

Für das Teilsystem (μ, Erde) allein ist $\mu\eta'' + \mu g = 0$, mithin die Zugkraft des Fadens

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

an μ $(-P_\eta) = \mu\eta'' + \mu g$, wo $\eta'' = -y''$, daher $(-P_\eta) = \frac{2m\mu}{m+\mu} \cdot g = (-P_y)$. Die Arbeit der Zwangskräfte ist wieder $(-P_y)dy + (-P_\eta)d\eta = 0$.

Ist die Scheibe M schwer und $K = \frac{1}{2}MR^2$ ihr Trägheitsmoment, so ist die kinetische Energie der Scheibe $= \frac{1}{2}K \cdot \varphi'^2$, wenn φ' ihre Winkelgeschwindigkeit bezeichnet. Da $d\eta = -dy = R d\varphi$, so folgt $H = mg(\text{const.} - R\varphi) + \mu g(\text{const.} + R\varphi) - \frac{1}{2}(mR^2 + \mu R^2 + K)\varphi'^2$.

Hieraus ergibt sich die Winkelbeschleunigung der Drehung $(m + \mu + \frac{1}{2}M)\varphi'' = \frac{m-\mu}{R} \cdot g$. Da für die schwere Masse μ allein $\overline{H} = \mu g\eta - \frac{1}{2}\mu\eta'^2$, so ist die an μ wirkende Spannung des Fadens $(-P_\eta) = \mu\eta'' + \mu g = \mu R\varphi'' + \mu g = \frac{\mu(2m + \frac{1}{2}M)}{m + \mu + \frac{1}{2}M} \cdot g$. Ganz analog folgt $(-P_y) = m(g - R\varphi'') = \frac{m(2\mu + \frac{1}{2}M)}{m + \mu + \frac{1}{2}M} \cdot g$. Die Spannung des Fadens ist also auf der Seite des gröfseren Gewichtes gröfser als auf der anderen Seite. Für die schwere Scheibe M allein ist $\overline{\overline{H}} = -\frac{1}{2}K \cdot \varphi'^2$. Da sie mit den Massen m und μ gekoppelt ist, modifiziert eine äufsere Kraft $(-P_\varphi)$ den natürlichen Verlauf der Änderungen von φ und zwar ist $(-P_\varphi) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\overline{\overline{H}}}{\partial\varphi'}\right) = K\varphi'' = \frac{\frac{1}{2}MR(m-\mu)}{m + \mu + \frac{1}{2}M} \cdot g$. In der Tat ergibt sich dieses Drehungsmoment, wenn man $R(P_y - P_\eta)$ bildet. Da die Arbeit der Zwangskräfte Null sein mufs, so erhält man P_φ auch aus der Gleichung $(-P_\varphi)d\varphi + (-P_y)dy + (-P_\eta)d\eta = 0$.

22. Rollen. Zwei auf gemeinsamer Achse befestigte Rollen von verschiedenen Radien sind durch eine in sich zurücklaufende Schnur mit zwei anderen solchen Rollen verbunden. Wie bewegt sich das System unter Einflufs der Gewichte m und μ? (Fig. 10.)

Aus der Figur folgt $r d\varphi = d\eta$, also $r\varphi + \text{const.} = \eta$; $a d\varphi = b d\psi$ und $-dy = \varrho d\psi = \varrho \frac{a}{b} \cdot d\varphi = \frac{\varrho}{r} \cdot \frac{a}{b} \cdot d\eta$. Sind K und J die Trägheitsmomente der Doppelrollen und wird $\frac{a}{b} = \varkappa$ gesetzt, so ist die lebendige Kraft des Systems

$$L = \tfrac{1}{2}K\varphi'^2 + \tfrac{1}{2}J\psi'^2 + \tfrac{1}{2}my'^2 + \tfrac{1}{2}\mu\eta'^2 = \tfrac{1}{2}(K + \varkappa^2 J + m\varkappa^2\varrho^2 + \mu r^2)\varphi'^2 = \tfrac{1}{2}A\varphi'^2$$

und die potentielle Energie $\Phi = \mu g\eta + mgy = \mu g(r\varphi + \text{const.}) + mg(\text{const.} - \varkappa\varrho\varphi)$. Aus $H = \Phi - L$ folgt $\frac{\partial H}{\partial\varphi'} = -A\varphi'$; $\frac{\partial H}{\partial\varphi} = \mu gr - mg\varkappa\varrho$ und die Bewegungsgleichung

$$A\varphi'' + \mu gr - mg\varkappa\varrho = 0. \qquad 1)$$

Um die Spannung der Verbindungsschnur zu ermitteln, betrachten wir für sich als freies System die Doppelrolle K mit dem daran befindlichen Gewichte μ. Sein kinetisches Potential ist $\overline{H} = \mu g(r\varphi + \text{const.}) - \frac{1}{2}(K + r^2\mu)\varphi'^2$, und seine Bewegung wird bestimmt durch $(K + r^2\mu)\varphi'' + \mu gr = 0$. Erfolgt die Bewegung nicht nach diesem Gesetze, sondern infolge der Koppelung mit J nach Gleichung 1), so ist die dazu erforderliche äufsere Kraft $(-P_\varphi) = (K + r^2\mu)\varphi'' + \mu gr$, worin φ'' durch Gleichung 1) bestimmt ist. Daher $(-P_\varphi) = \frac{(K + \mu r^2)(\varkappa m\varrho - \mu r)g}{A} + \mu gr = aS$, wo S die am Hebelarme a

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

angreifende Spannung der Schnur ist. Ganz analog folgt für das System links (J, m) $(-P_\psi) = \varkappa(J + m\varrho^2)\varphi'' - mg\varrho = -b \cdot S$. Die Arbeit der durch die Koppelung beider Systeme geweckten Zwangskräfte ist $(-P_\varphi)d\varphi + (-P_\psi)d\psi = -(P_\varphi + \varkappa P_\psi)d\varphi = 0$.

Die Spannung des Fadens an μ ergibt sich durch Betrachtung des freien Systems (μ, Erde). Dafür gilt $\mathfrak{H} = \mu g \eta - \frac{1}{2}\mu\eta'^2$, daher ist die Spannung $(-P_\eta) = \mu\eta'' + \mu g = \mu(r\varphi'' + g)$, wo für φ'' der aus Gleichung 1) sich ergebende Wert zu setzen ist. Entsprechend folgt $(-P_y) = m(g - \varkappa\varrho\varphi'')$.

Aus Gleichung 1) folgt noch, dafs das betrachtete ganze System nur dann in Ruhe sein kann, wenn $\mu r = \varkappa m\varrho$. Dann ist $(-P_\varphi) = \mu g r$, $(-P_\psi) = -mg\varrho$, $S = \frac{\mu g r}{a} = \frac{mg\varrho}{b}$, $(-P_\eta) = \mu g$, $(-P_y) = mg$.

23. Gleichgewicht. Befindet sich ein System im Gleichgewicht, so ist $L = 0$ und $\Phi = \text{const.}$, daher lautet in diesem Falle das Hamilton'sche Prinzip $\delta\Phi = 0$, d. h. es herrscht Gleichgewicht nur an solchen Stellen, wo die potentielle Energie einen Grenzwert besitzt[1]). Von jeder anderen Lage aus mufs das System, aus der Ruhe losgelassen, in Bewegung geraten, seine kinetische Energie also zunehmen, die potentielle abnehmen. Daher ist das Gleichgewicht labil, wenn Φ ein Maximum, stabil, wenn es ein Minimum ist.

Aus der Bedingung $\delta\Phi = 0$ folgt für jede unabhängige Koordinate $\frac{\partial\Phi}{\partial p_a} = 0$. Betrachten wir nur ein Teilsystem, auf das also äufsere Kräfte $(-P_a)$ wirken und ist $\overline{\Phi}$ dessen potentielle Energie, so ergeben die erweiterten Lagrange'schen Gleichungen für den Fall des Gleichgewichts, wo $\overline{H} = \overline{\Phi}$ ist, $-\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial p_a} = P_a$.

Anwendung auf das vorige Beispiel (22). Es war (S. 16) $\Phi = \mu g(r\varphi + \text{const.}) + mg(\text{const.} - \varkappa\varrho\varphi)$. Die Gleichgewichtsbedingung $\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = 0$ ist also $\mu r - \varkappa m\varrho = 0$. Für das Teilsystem ($\mu$, K) war $\overline{\Phi} = \mu g(r\varphi + \text{const.})$, daher ist $(-P_\varphi) = \mu g r$ in Übereinstimmung mit oben (Zeile 9).

24. Zweites Beispiel. Die Masse μ ist an zwei Fäden befestigt, welche über zwei feste Punkte A und B geschlungen sind und an ihren Enden die Massen m und n tragen. Unter welchen Bedingungen herrscht Gleichgewicht? Nach Fig. 11 ist $r + a - \eta = \text{const.}$; $r^2 = (a-y)^2 + x^2$; $\varrho + b - z = \text{const.}$; $\varrho^2 = (b-y)^2 + (c-x)^2$; $\Phi = \mu g y + mg\eta + ngz$. Führen wir x und y als unabhängige Koordinaten ein, so folgt für das Gleichgewicht

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = mg\frac{\partial\eta}{\partial x} + ng\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \text{ oder}$$

$$mg\frac{\partial r}{\partial x} + ng\frac{\partial\varrho}{\partial x} = mg\frac{x}{r} - ng\frac{c-x}{\varrho} = mg\sin\varphi - ng\sin\psi = 0 \text{ und}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \mu g + mg\frac{\partial\eta}{\partial y} + ng\frac{\partial z}{\partial y} \text{ oder } \mu g - mg\cos\varphi - ng\cos\psi = 0.$$

---

[1]) H. v. Helmholtz, Dynamik II. § 59.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Für das Teilsystem (μ, Erde) allein ist $\overline{\Phi} = \mu g y$, daher sind die infolge der Koppelung mit m und n auf μ ausgeübten äufseren Kräfte (in Richtung der Koordinaten)

$$(-P_x) = \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad (-P_y) = \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial y} = \mu g.$$

Wollen wir direkt die Spannungen der Fäden haben, so müssen wir r und ϱ selbst als unabhängige Koordinaten einführen. Dann ist $\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial r} = \mu g \frac{\partial y}{\partial r}$ und $\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \varrho} = \mu g \frac{\partial y}{\partial \varrho}$. Verschieben wir μ um eine unendlich kleine Strecke ε, so dafs ϱ dabei konstant bleibt, so ergibt sich leicht aus Fig. 12 die zugehörige Verrückung $dy = -\varepsilon \cos(\varepsilon, dy) = -\varepsilon \cos(180^\circ - \psi - 90^\circ) = -\varepsilon \sin\psi$ und $dr = \varepsilon \sin(180^\circ - \varphi - \psi) = \varepsilon \sin(\varphi + \psi)$, daher $\frac{\partial y}{\partial r} = -\frac{\sin\psi}{\sin(\varphi+\psi)}$ und analog $\frac{\partial y}{\partial \varrho} = -\frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi+\psi)}$. Folglich reagiert die Masse μ auf die Koppelung mit m und n im Gleichgewicht mit den Kräften

$$P_r = \mu g \frac{\sin\psi}{\sin(\varphi+\psi)} \quad \text{und} \quad P_\varrho = \mu g \frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi+\psi)}.$$

Dies sind in der Tat die nach dem Kräfteparallelogramm gebildeten Komponenten der Kraft μg längs der Fäden r und ϱ (Fig. 13). Führen wir r und φ als unabhängige Koordinaten ein, so erhalten wir für das betrachtete Teilsystem $\overline{\Phi} = \mu g (a - r\cos\varphi)$, daher die Reaktionen $P_r = \mu g \cos\varphi$ und $P_\varphi = -\mu g r \sin\varphi$, d. h. eine längs r wirkende Kraft $\mu g \cos\varphi$ und ein Kräftepaar, das φ zu verkleinern strebt. Wieder sind $\mu g \cos\varphi$ und $\mu g \sin\varphi$ die auf einander senkrechten Komponenten von μg (Fig. 14).

Betrachten wir jetzt das Teilsystem (m, Erde), so ist $\overline{\Phi} = m g \eta$. m ist durch einen unausdehnbaren Faden mit μ verbunden, der Ort von m daher abhängig von dem Orte von μ. Sind x und y die unabhängigen Koordinaten, dann sind $(-P_x) = \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial x}$ und $(-P_y) = \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial y}$ die äufseren Kräfte, die bei μ an dem Faden angreifen, um m im Gleichgewicht zu erhalten. Es ergibt sich

$$(-P_x) = m g \frac{\partial \eta}{\partial x} = m g \sin\varphi \quad \text{und} \quad (-P_y) = m g \frac{\partial \eta}{\partial y} = -m g \cos\varphi. \quad \text{(Fig. 15.)}.$$

Sind dagegen r und ϱ die unabhängigen Koordinaten, so erhalten wir direkt die längs r angreifende, das Gewicht mg tragende Kraft

$$(-P_r) = m g \frac{\partial \eta}{\partial r} = m g \quad \text{und} \quad (-P_\varrho) = 0.$$

Führen wir schliefslich noch η und z als unabhängige Koordinaten des ganzen betrachteten Systems ein, so ergibt sich am einfachsten die Spannung des Fadens, der m trägt, als $(-P_\eta) = m g$.

25. Mathematischer Hebel. Sind an den Enden A und B einer um O drehbaren starren Stange die Massen m und μ angebracht, so ist (Fig. 16) $x = a\cos\varphi$; $\xi = -b\cos\varphi$; $y = h + a\sin\varphi$; $\eta = h - b\sin\varphi$ und $H = (ma - \mu b) g \sin\varphi + \text{const.} - \frac{1}{2}(ma^2 + \mu b^2)\varphi'^2$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Bewegungsgleichung lautet also

$$(ma^2 + \mu b^2)\varphi'' + (ma - \mu b)\, g \cos\varphi = 0. \qquad 1)$$

Die auch aus $\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0$ sich ergebende Gleichgewichtsbedingung ist mithin $ma = \mu b$.

Für den schweren Massenpunkt m allein ist

$$\overline{H} = mg(h + a\sin\varphi) - \tfrac{1}{2} ma^2 \varphi'^2, \quad \text{folglich} \quad ma^2\varphi'' + mag\cos\varphi = 0. \qquad 2)$$

Wäre nur der einarmige Hebel OA mit der Masse m vorhanden, so würde also die Winkelbeschleunigung nach Gleichung 2) erfolgen, d. h. entsprechend der stetigen Wirkung des Kräftepaares $mag\cos\varphi$, das φ zu verkleinern strebt (Fig. 17). Erfolgt jedoch die Bewegung von m unter Einwirkung von μ nach Gleichung 1), so vollführt der frei gedachte schwere Massenpunkt m diese gezwungene Bewegung unter Einwirkung der äufseren Kraft $(-P_\varphi) = ma^2\varphi'' + mag\cos\varphi$, wobei $(ma^2 + \mu b^2)\varphi'' = (\mu b - ma) g\cos\varphi$, d. h. es tritt ein Kräftepaar $(-P_\varphi)$ hinzu, welches φ zu vergröfsern strebt (Fig. 18), wobei die in O senkrecht zu OA nach unten wirkende Kraft $mg\cos\varphi + ma\varphi''$ durch die Festigkeit des Drehpunktes vernichtet wird.

Analog übt die Koppelung beider Massen auf den frei gedachten Punkt μ die äufsere Zwangskraft $(-P^\varphi) = \mu b^2\varphi'' - \mu g b\cos\varphi$ aus, die φ zu vergröfsern strebt (Fig. 19). Daher hat O im ganzen die Kraft $(m + \mu) g\cos\varphi + (ma - \mu b)\varphi''$ in Richtung der nach abwärts gezogenen Normale zum Hebelarm auszuhalten. Dazu kommt noch die Beanspruchung von O infolge der längs OA und OB wirkenden Spannungen, die, wie beim mathematischen Pendel nachgewiesen, gleich $ma\varphi'^2 - mg\sin\varphi$ resp. $\mu b\varphi'^2 + \mu g\sin\varphi$ sind. Alle diese Kräfte ergeben zusammen in O senkrecht nach unten in Richtung der y-Achse den Druck $(m + \mu) g + (ma - \mu b)(\varphi''\cos\varphi - \varphi'^2\sin\varphi) = (m + \mu)(g + y_s'')$ und längs der x-Achse den Zug $(ma - \mu b)(\varphi''\sin\varphi + \varphi'^2\cos\varphi) = -(m + \mu) x_s''$, wenn wir die Koordinaten des Schwerpunktes mit x_s, y_s bezeichnen.

26. Ein Massenpunkt m bewegt sich auf einer schiefen Ebene (Masse M), die selbst ohne Reibung horizontal beweglich ist (Fig. 20) Die Koordinaten von m sind $x = \xi + s\cos\alpha$ und $y = s\sin\alpha$, daher $x' = \xi' + s'\cos\alpha$, $y' = s'\sin\alpha$ und $H = mgs\sin\alpha - \frac{1}{2} m(\xi'^2 + s'^2 + 2\xi' s'\cos\alpha) - \frac{1}{2} M\xi'^2$.

Hieraus folgen die Bewegungsgleichungen $(m + M)\xi'' + ms''\cos\alpha = 0$ und $ms'' + m\xi''\cos\alpha + mg\sin\alpha = 0$, also $(M + m\sin^2\alpha)\xi'' = mg\sin\alpha\cos\alpha$.

Für die schiefe Ebene allein haben wir $\overline{H} = -\frac{1}{2} M\xi'^2$, folglich $M\xi'' = 0$. Geschieht nun die Bewegung der schiefen Ebene nicht gleichförmig, sondern nach obiger Bewegungsgleichung, so wirkt auf sie seitens der Masse m eine äufsere Kraft $(-P_\xi) = M\xi'' = \frac{Mmg\sin\alpha\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha}$. Hieraus ergibt sich der Druck D auf die schiefe Ebene, da (Fig. 21) $D\sin\alpha = (-P_\xi)$.

Diesen Druck D können wir auch aus der Art bestimmen, mit der umgekehrt die als freier Punkt vorgestellte Masse m auf die Einwirkung durch die schiefe Ebene reagiert. Wäre letztere nicht vorhanden, also die Koordinate α beliebig veränderlich, so hätten wir $x' = \xi' + s'\cos\alpha - s\sin\alpha \cdot \alpha'$; $y' = s'\sin\alpha + s\cos\alpha \cdot \alpha'$ und $\mathfrak{H} = mgs\sin\alpha - \frac{1}{2} m(\xi'^2 + s'^2 + s^2\alpha'^2 + 2s'\xi'\cos\alpha - 2s\xi'\alpha'\sin\alpha)$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aus $\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \alpha'}$ und $\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \alpha}$ würde dann folgen

$$\frac{d}{dt}(m s^2 \alpha' - m s \xi' \sin\alpha) + m s' \xi' \sin\alpha + m s \xi' \alpha' \cos\alpha + m g s \cos\alpha = 0.$$

Ist hingegen die Bewegung von m unfrei und zwar derart, dafs α konstant ist, so ist die Reaktion $P_\alpha = m s (g \cos\alpha - \xi'' \sin\alpha) = s \cdot D$. Setzen wir hierin den oben abgeleiteten Wert von ξ'' ein, so folgt $D = \frac{M m g \cos\alpha}{M + m \sin^2\alpha}$.

Wir nehmen jetzt an, dafs die schiefe Ebene nicht frei beweglich sei, sondern durch eine äufsere Kraft geführt werde. Dann ist ξ eine gegebene Funktion der Zeit und nur s eine unabhängige, noch zu bestimmende Variable. Der ungeänderte Wert von H gibt $s'' = -g \sin\alpha - \xi'' \cos\alpha$. Es ist z. B. $s'' = 0$, falls die Führung der Ebene so erfolgt, dafs $\xi'' = -g \operatorname{tg}\alpha$. Für den Druck auf die schiefe Ebene erhalten wir wieder wie oben $D = m(g \cos\alpha - \xi'' \sin\alpha) = \frac{m}{\cos\alpha}(g + s'' \sin\alpha)$. Ist daher m relativ zur schiefen Ebene in Ruhe, so ist der Druck gegen diese Ebene ein viel gröfserer $\left(= \frac{m g}{\cos\alpha}\right)$, als wenn m z. B. infolge der Reibung auf der unbewegten schiefen Ebene ruhte $(= m g \cos\alpha)$.

Wir wollen jetzt noch die Kraft bestimmen, welche bei der Führung der schiefen Ebene von aufsen aufzuwenden ist. Für die natürliche, d. h. von äufseren Kräften nicht beeinflufste Bewegung des Systems hatten wir gefunden $\frac{d}{dt}[(m + M)\xi' + m s' \cos\alpha] = 0$. Daher ist die bei der Führung notwendige äufsere Kraft

$$(-P_\xi) = (m + M)\xi'' + m s'' \cos\alpha = M \xi'' + m \xi'' \sin^2\alpha - m g \sin\alpha \cos\alpha.$$

Ist z. B. $\xi'' = 0$, so ist $(-P_\xi) = -m g \sin\alpha \cos\alpha$ die dauernd erforderliche Kraft, um die in Richtung von ξ fallende Komponente des Druckes $m g \cos\alpha$ zu vernichten. Ist dagegen $s'' = 0$, also $\xi'' = -g \operatorname{tg}\alpha$, so ist $(-P_\xi) = -(M + m) g \operatorname{tg}\alpha$, da dann gewissermafsen m als ein fester Bestandteil von M zu betrachten ist. Wird schliefslich die schiefe Ebene so bewegt, dafs keine Einwirkung auf m stattfindet, der Druck D also Null ist, so folgt $\xi'' = g \operatorname{cotg}\alpha$, $s'' = -\frac{g}{\sin\alpha}$ und $(-P_\xi) = M g \operatorname{cotg}\alpha$, also unabhängig von m.

27. Poggendorff'sche Fallmaschine. An einem um O drehbaren Hebel mit zwei gleichen Armen a hängt links die Masse m_2 (Fig. 22). Die Massen m_1 und μ sind durch einen Faden über gewichtslose Rollen so verbunden, dafs sich μ genau unter dem Drehpunkte befindet. Aus der Figur folgt dann $x_1 = a \cos\varphi$, $y_1 = l - a - a \sin\varphi - \eta$; $\xi = 0$, $\eta = O\mu$; $x_2 = -a \cos\varphi$, $y_2 = b + a \sin\varphi$, daher

$$\Phi = -m_1 g (l - a - a \sin\varphi - \eta) - \mu g \eta - m_2 g (b + a \sin\varphi),$$
$$L = \tfrac{1}{2} a^2 (m_1 + m_2) \varphi'^2 + \tfrac{1}{2}(m_1 + \mu)\eta'^2 + m_1 a \varphi' \eta' \cos\varphi.$$

Aus $H = \Phi - L$ ergeben sich nun die Bewegungsgleichungen

$$a^2 (m_1 + m_2)\varphi'' + m_1 a \eta'' \cos\varphi + (m_1 - m_2) a g \cos\varphi = 0.$$
$$(m_1 + \mu)\eta'' + m_1 a \varphi'' \cos\varphi - m_1 a \varphi'^2 \sin\varphi + (m_1 - \mu) g = 0.$$

Es ist möglich, dafs sich die Massen μ und m_1 wie bei der Atwood'schen Fallmaschine bewegen, während der Hebel und m_2 in Ruhe bleiben, denn $\varphi = \text{const.}$ gibt $m_1 \cos\varphi \cdot \eta''$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$+ m_1 g \cos\varphi - m_2 g \cos\varphi = 0$ und $(m_1 + \mu)\eta'' + (m_1 - \mu) g = 0$, und diese Gleichungen werden aufser durch $\varphi = 90°$ durch die Bedingung $2 m_1 \mu = m_2 (m_1 + \mu)$ befriedigt.

Ändern wir das bisher betrachtete System (A) dadurch ab, dafs wir μ um das Übergewicht ν vermehren, so erhalten wir die Bewegungsgleichungen dieses neuen Systems, wenn wir in obigen Gleichungen $\mu + \nu$ an Stelle von μ setzen. Diese neuen Gleichungen können wir aber, indem wir die Glieder mit ν auf die rechte Seite schaffen, auch so auffassen, als ob das ursprüngliche System A sich jetzt infolge der Koppelung mit ν unter dem Einflufs der äufseren Kräfte $(-P_\varphi) = 0$ und $(-P_\eta) = \nu(g - \eta'')$ bewegte. Es wäre nun verkehrt, hieraus zu folgern, dafs der Hebel unter Mitwirkung des Übergewichts keine Winkelbeschleunigung erführe, sondern blofs μ und m_1 sich mit anderer Beschleunigung bewegten. Denn war z. B. ohne Übergewicht gerade der oben erwähnte Zustand $\varphi = \text{const.}$ verwirklicht, so stört ν die Gleichgewichtsbedingung und φ mufs sich ändern.

Es zeigt sich an diesem Beispiel recht deutlich, dafs eine Kraft nicht blofs in Richtung derjenigen Koordinate beschleunigend wirkt, auf die sie sich bezieht. Das widerspricht nicht der (unter 12) für die Kräfte aufgestellten Definition. $P_\varphi = 0$ besagt nur, dafs bei einer solchen Verrückung $d\varphi$, bei welcher η unverändert bleibt, die Energie des Systems A nicht geändert wird, denn ν wird ja dabei weder gehoben noch gesenkt. Die erfolgende Beschleunigung von φ ist eine Wirkung der inneren Kräfte, durch welche wir die Verbindung des einen Teilsystems F (Faden mit den Massen μ und m_1) mit dem anderen H (Hebel mit Masse m_2) ersetzen können, und die ja auch vorhanden sind, wenn gar keine äufseren Kräfte wirken. Diese Energieübertragung von F nach H verursacht eine Änderung von φ'' auch dann, wenn nur an der Koordinate η Arbeit von aufsen geleistet wird, denn jede Änderung von η'' bewirkt (nach 20) auch eine Änderung des Zuges von m_1 an dem Hebel.

Vermehren wir in dem System A m_2 um n, so zeigt eine ganz analoge Betrachtung, dafs diese Belastung gleichbedeutend ist mit dem Hinzutreten der äufseren Kräfte $(-P_\varphi) = an(g\cos\varphi - \varphi'' a)$ und $(-P_\eta) = 0$ und dafs durch sie nicht blofs φ'', sondern auch η'' geändert wird.

Wie Helmholtz[1]) gezeigt hat, tritt der Fall, dafs eine Kraft P_a aufser auf die zugehörige Koordinate p_a auch noch auf eine andere p_b beschleunigend wirkt, stets ein, wenn $\frac{\partial^2 H}{\partial p''_a \partial p''_b}$ von Null verschieden ist. Es besteht dann das allgemeine Reziprozitätsgesetz

$$\frac{\partial P_a}{\partial p''_b} = \frac{\partial P_b}{\partial p''_a} = \frac{\partial^2 H}{\partial p'_a \partial p'_b}.$$

Bewegt sich in unserem Beispiele das System A unter dem Einflufs beliebiger äufserer Kräfte $(-P_\varphi)$ und $(-P_\eta)$, so sind die Bewegungsgleichungen

$$- a^2 (m_1 + m_2)\varphi'' - m_1 a \eta'' \cos\varphi - (m_1 - m_2) a g \cos\varphi = P_\varphi$$
$$- (m_1 + \mu)\eta'' - m_1 a \varphi'' \cos\varphi + m_1 a \varphi'^2 \sin\varphi - m_1 g + \mu g = P_\eta.$$

Hieraus folgt in der Tat $\frac{\partial P_\varphi}{\partial \eta''} = \frac{\partial P_\eta}{\partial \varphi''} = \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi' \partial \eta'} = - m_1 a \cos\varphi$. Bleibt bei einer Änderung von η'', wie in obigem besonderen Falle durch das Übergewicht ν, doch $P_\varphi = 0$, so wird

[1]) Helmholtz, Wissenschaftliche Abhandlungen. Band III. S. 231 u. f.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

in dem (mit P_φ bezeichneten) Aggregat von Kraftkomponenten die durch den Zuwachs von η'' hervorgebrachte Änderung durch die gleichzeitige Änderung von φ'' aufgehoben.

28. Die Bewegung eines Punktes, der gezwungen ist auf einer festen Linie oder Fläche zu bleiben, können wir als die Bewegung eines freien Punktes auffassen, der äufseren Zwangskräften unterworfen ist. Diese sind dann bestimmt durch

$$(-P_x) = m x'', \quad (-P_y) = m y'', \quad (-P_z) = m z''.$$

Da nun die starren Linien oder Flächen bei der Bewegung des Punktes keine Veränderung erleiden, so kann durch das Bestehen der Bedingungen Energie weder gewonnen noch verloren werden, die Gesamtarbeit der Zwangskräfte mufs also Null sein. Schreiben wir diese Folgerung $(-P_x)dx + (-P_y)dy + (-P_z)dz = 0$ in der Form $\frac{P_x}{R} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{P_y}{R} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{P_z}{R} \cdot \frac{dz}{ds} = 0$, so erhellt, dafs wir die Reaktion des Punktes gegen den Widerstand einer Kurve durch eine einzige Kraft R ersetzen können, die in jedem Augenblicke senkrecht zur Richtung der Tangente wirkt und deren Komponenten die P_x, P_y, P_z sind.

Bei einer Fläche $F(x,y,z) = 0$ ist stets $\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0$, also auch $R \cdot \frac{\partial F/\partial x}{N}dx + R\frac{\partial F/\partial y}{N}dy + R\frac{\partial F/\partial z}{N}dz = 0$, wo $N^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2$. Wir können daher hier die Gröfsen P_x, P_y, P_z als Komponenten einer Kraft R auffassen, die in jedem Augenblick in Richtung der Flächennormale wirkt.

Ist ein freier Punkt m gezwungen, sich auf einer ebenen Kurve zu bewegen, so geschieht die Bewegung (nach 13) mit gleichförmiger Geschwindigkeit und es ist $H = -\frac{1}{2}mv^2$. Zur Ermittelung der Zwangskraft legen wir das Koordinaten-System durch den Mittelpunkt des Krümmungskreises, welcher durch den Punkt der Kurve geht, den m zur Zeit t gerade passiert, und setzen (Fig. 23) $x = \xi + \varrho\cos\varphi$, $y = \eta + \varrho\sin\varphi$.

Da wir den Krümmungskreis gewählt haben, so bleiben ξ, η und ϱ während des folgenden Zeitelements konstant, nur φ ändert sich. Folglich ist $x'^2 + y'^2 = \varrho^2\varphi'^2$, während für den ganz freien Punkt m in bezug auf dasselbe feste Koordinaten-System $x'^2 + y'^2 = \varrho^2\varphi'^2 + \varrho'^2$ sein würde. Daher ergeben sich die Zwangskräfte

$$(-P_\varphi) = 0 \text{ und } (-P_\varrho) = [m\varrho'' - m\varrho\varphi'^2]_{\varrho = \text{const.}} = -m\varrho\varphi'^2 = -m\frac{v^2}{\varrho}.$$

Mithin ist der in Richtung des Krümmungsradius auf die Kurve ausgeübte Druck $= \frac{mv^2}{\varrho}$.

Besitzt m auch noch die potentielle Energie Φ, so ist nach obiger Substitution Φ nur eine Funktion der Koordinaten ϱ und φ. Aus $H = \Phi - L$ folgt dann $P_\varrho = \left[\frac{d}{dt}\left(-\frac{\partial L}{\partial \varrho'}\right) + \frac{\partial L}{\partial \varrho} - \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho}\right]_{\varrho = \text{const.}}$, mithin ist der nun auf die starre Kurve ausgeübte Druck gleich $\frac{mv^2}{\varrho} - \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho}$. [Vergl. beim Pendel (17).]

Bei einer Raumkurve legen wir durch den von m zur Zeit t eingenommenen Punkt die Schmiegungsebene und wählen diese zur xy-Ebene, ihre Normale zur z-Achse. In der xy-Ebene wählen wir wie oben Polarkoordinaten mit dem Mittelpunkte des

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Krümmungskreises als Pol. Da der Punkt während der Zeit dt innerhalb der Schmiegungsebene und zwar auf dem Krümmungskreise bleiben mufs, so ist, wenn keine äufseren Kräfte vorhanden sind, $H = -L = -\frac{1}{2} m \varrho^2 \varphi'^2$. Wäre der Punkt frei, so würde $H = -\frac{1}{2} m(\varrho^2 \varphi'^2 + \varrho'^2 + z'^2)$ sein. Die Zwangskräfte sind daher

$$(-P_z) = [m z'']_{z = \text{const.} = 0} = 0 \text{ und wie oben } (-P_\varrho) = -\frac{m v^2}{\varrho}.$$

Der Punkt übt daher nur in Richtung der Hauptnormale einen Druck auf die Kurve aus, keinen senkrecht zur Schmiegungsebene. Bei vorhandener potentieller Energie Φ werden P_z und P_ϱ um $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$ resp. $\frac{\partial \Phi}{\partial \varrho}$ vermindert.

29. Raumpendel. Aus Fig. 24 ergibt sich $x = r \sin\vartheta \cos\varphi$, $y = r \sin\vartheta \sin\varphi$, $z = r \cos\vartheta$. Daher ist $\Phi = -m g r \cos\vartheta$, $L = \frac{1}{2} m r^2 (\sin^2\vartheta \cdot \varphi'^2 + \vartheta'^2)$ und als Bewegungsgleichungen ergeben sich $m r^2 \sin^2\vartheta \cdot \varphi' = \text{const.}$ (Flächensatz) und $\vartheta'' = \varphi'^2 \sin\vartheta \cos\vartheta - \frac{g}{r} \sin\vartheta$.

Wird m als freier schwerer Punkt betrachtet, so mufs r als variabel behandelt werden. Wir erhalten so $\overline{H} = -m g r \cos\vartheta - \frac{1}{2} m (r'^2 + r^2 \sin^2\vartheta \cdot \varphi'^2 + r^2 \vartheta'^2)$. Die wirkliche Bewegung des Raumpendels (bei der r konstant ist) ist mithin nur unter Einflufs einer auf m wirkenden äufseren Zwangskraft möglich, die bestimmt ist durch $(-P_r) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{H}}{\partial r'}\right) + \frac{\partial \overline{H}}{\partial r}$, wenn in den Ausdruck der rechten Seite $r = \text{const.}$ eingesetzt wird. Hieraus folgt, dafs wir den Wert von $(-P_r)$ einfach dadurch erhalten, dafs wir $\overline{H}$ nach dem konstanten Parameter r differentiieren, also

$$P_r = m r (\sin^2\vartheta \cdot \varphi'^2 + \vartheta'^2) + m g \cos\vartheta = \frac{m v^2}{r} + m g \cos\vartheta.$$

30. Centrifugalpendel. (Fig. 25.) An der vertikalen Achse befinde sich eine schwere Scheibe (Trägheitsmoment K), die durch eine Rotationsmaschine gedreht werden kann. Hat diese Drehung zur Zeit t die Winkelgeschwindigkeit φ', so ist die lebendige Kraft von m $L = -\frac{1}{2} m r^2 (\sin^2\vartheta \cdot \varphi'^2 + \vartheta'^2)$, also das kinetische Potential des ganzen Systems $H = -2 m g r \cos\vartheta - m r^2 (\sin^2\vartheta \cdot \varphi'^2 + \vartheta'^2) - \frac{1}{2} K \varphi'^2$.

Die Bewegungsgleichungen sind daher

$$-2 m r^2 \vartheta'' + 2 m r^2 \varphi'^2 \sin\vartheta \cos\vartheta - 2 m g r \sin\vartheta = 0.$$
$$-2 m r^2 \sin^2\vartheta \cdot \varphi'' - 4 m r^2 \varphi' \vartheta' \sin\vartheta \cos\vartheta - K \varphi'' = 0.$$

Für ein mathematisches Pendel allein war früher gefunden $-m r^2 \vartheta'' - m g r \sin\vartheta = 0$. Die Koppelung mit der Rotationsmaschine wirkt also wie eine äufsere Kraft $(-P_\vartheta) = m r^2 \varphi'^2 \sin\vartheta \cos\vartheta$, welche ϑ zu vergröfsern strebt. An demselben Hebelarme wirkt in entgegengesetztem Sinne die Schwere mit dem Drehungsmomente $m g r \sin\vartheta$. Der Winkel ϑ bleibt also ungeändert, wenn $r \varphi'^2 \cos\vartheta = g$, wie auch aus $\vartheta'' = 0$ folgt.

Für die Scheibe K allein ist $\overline{H} = -\frac{1}{2} K \varphi'^2$, also $-K \varphi'' = 0$ das Gesetz der natürlichen Bewegung. Die Koppelung mit m wirkt daher wie eine äufsere Kraft $(-P_\varphi) = -m r^2 \sin^2\vartheta \cdot \varphi'' - 2 m r^2 \varphi' \vartheta' \sin\vartheta \cos\vartheta$. Hieraus ergibt sich die Beziehung $\frac{\partial P_\varphi}{\partial \vartheta'} = -\frac{\partial P_\vartheta}{\partial \varphi'}$. Durch die Koppelung wirkt auf das Pendel eine äufsere Kraft $(-P_\vartheta)$,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

die nur von der augenblicklichen Winkelgeschwindigkeit φ' der Scheibe, nicht von ihrer Beschleunigung abhängt und mit wachsendem φ' gröfser wird. Gegen die dem Pendel dadurch aufgezwungene unnatürliche Bewegung reagiert es mit einer Gegenkraft $(-P_\varphi)$, welche die Ursache des Zwanges, nämlich φ', zu verkleinern sucht. Es ist dies ein Beispiel zu einem zweiten ganz allgemeinen von Helmholtz aufgestellten Reziprozitätsgesetze, welches besagt, dafs für jedes System $\frac{\partial P_a}{\partial p'_b} + \frac{\partial P_b}{\partial p'_a} = 2 \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p'_a \partial p'_b}\right)$ oder, wenn die rechte Seite gleich Null ist, wie es häufig vorkommt, dafs dann $\frac{\partial P_a}{\partial p'_b} = -\frac{\partial P_b}{\partial p'_a}$. Nur scheinbar ist oben dieser Satz auf zwei Systeme statt auf ein einziges angewandt. Unterliegt das Centrifugalpendel beliebigen äufseren Kräften, auf die sich jetzt die Bezeichnungen $(-P_\vartheta)$ und $(-P_\varphi)$ beziehen mögen, so sind die allgemeinsten Bewegungsgleichungen

$$-2mr^2\vartheta'' + 2mr^2\varphi'^2\sin\vartheta\cos\vartheta - 2mgr\sin\vartheta = P_\vartheta \text{ und}$$
$$-2mr^2\sin^2\vartheta\,\varphi'' - 4mr^2\varphi'\vartheta'\sin\vartheta\cos\vartheta - K\varphi'' = P_\varphi$$

und hieraus ergibt sich $\frac{\partial P_\varphi}{\partial \vartheta'} = -\frac{\partial P_\vartheta}{\partial \varphi'}$.

Dabei ist es gleichgültig, ob bei der Bewegung des Systems an den einzelnen Koordinaten Arbeit nach aufsen abgegeben resp. von aufsen aufgenommen wird oder nicht. Der Gesetz bezieht sich auf die korrespondierenden Glieder in den Aggregaten, welche mit $d\varphi$ resp. $d\vartheta$ multipliziert die an der betreffenden Koordinate geleistete Arbeit darstellen, unabhängig davon, wie grofs deren Summe ist. Zerlegt man daher das ganze System, wie oben, in zwei Teilsysteme, von denen jedes nur eine Koordinate enthält, so gibt das Reziprozitätsgesetz an, wie diese auf einander reagieren.

31. Physisches Pendel. (Fig. 26.) Ein beliebiger Massenpunkt P habe die Koordinaten $x = r\sin\varphi$, $y = r\cos\varphi$. Dann ist $L = \Sigma\frac{1}{2}m(x'^2 + y'^2) = \Sigma\frac{1}{2}mr^2\varphi'^2$ und $\Phi = -\Sigma mgy$. Hat der Schwerpunkt S des betrachteten ebenen Systems die Koordinaten ξ und η, bildet sein Abstand a vom Drehungspunkte O mit der y-Achse den Winkel ϑ und bezeichnet K das Trägheitsmoment des Pendels, so ist $L = \frac{1}{2}K\varphi'^2$ und $\Phi = -Mag\cos\vartheta$, also $H = -\frac{1}{2}K\vartheta'^2 - Mag\cos\vartheta$, da $\vartheta' = \varphi'$. Das Gesetz der natürlichen Bewegung ist daher $K\vartheta'' = -Mag\sin\vartheta$.

Für den Punkt m allein ist $\overline{H} = -\frac{1}{2}mr^2\varphi'^2 - mgr\cos\varphi$, er würde also wie ein mathematisches Pendel schwingen und unterliegt daher infolge seiner Verbindung mit den übrigen Punkten des starren Körpers der Zwangskraft $(-P_\varphi) = mr^2\vartheta'' + mgr\sin\varphi$. Setzen wir für ϑ'' seinen Wert, so folgt $(-P_\varphi) = mgr\left(\sin\varphi - \frac{Mar\sin\vartheta}{K}\right)$. Der Zwang ist also gleich Null für einen Punkt, der auf OS liegt und dessen Abstand von O gleich $\frac{K}{Ma}$ ist (reduzierte Pendellänge). Alle übrigen Massenpunkte wirken teils beschleunigend teils hemmend auf die Drehung des Systems ein, je nachdem der in Klammern stehende Ausdruck $\lesseqgtr 0$ ist. Die Summe ihrer Wirkungen mufs aber Null sein, da sonst eben eine andere als die wirklich vor sich gehende Bewegung resultieren würde. Summieren

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wir über alle Punkte m, so ist in der Tat $\Sigma m r \sin\varphi - \frac{Ma}{K}\sin\vartheta\,\Sigma m r^2 = Ma\sin\vartheta - Ma\sin\vartheta = 0$.

32. Stofs. Beim Stofs sind mehrere Systeme, wenn auch nur für kurze Zeit, in gegenseitiger Einwirkung. Die eigentlichen physikalischen Vorgänge während dieser Zeit sind uns wenig oder gar nicht bekannt, wir sind daher auch meist nicht im Stande, durch unabhängige Koordinaten die vor sich gehenden Veränderungen vollständig darzustellen. Soweit das jedoch betreffs einer Koordinate p_a möglich ist, mufs wieder das Hamilton'sche Prinzip und somit die Gleichung $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p'_a}\right) - \frac{\partial H}{\partial p_a} = P_a$ gelten, wo P_a die während der kurzen Zeit des Stofses wirksame sehr grofse äufsere Kraft bezeichnet, die auf das betrachtete unvollständige System ausgeübt wird. Integrieren wir die Gleichung nach Multiplikation mit dt über die Dauer τ eines Stofses, so folgt

$$\int d\left(\frac{\partial H}{\partial p'_a}\right) - \int \frac{\partial H}{\partial p_a}\cdot dt = \int P_a \cdot dt.$$

Nun sind H und $\frac{\partial H}{\partial p_a}$ stets endliche Gröfsen, daher $\frac{\partial H}{\partial p_a}\cdot\tau$ verschwindend klein. Dagegen ist die Kraft P_a sehr grofs, $P_a\cdot\tau$ endlich und heifst die Stofskraft, die wir mit S_a bezeichnen wollen. Demnach ist

$$\left[\frac{\partial H}{\partial p'_a}\right]_{t+\tau} - \left[\frac{\partial H}{\partial p'_a}\right]_t = S_a.$$

Betrachten wir zwei Massen m_1 und m_2 mit den Geschwindigkeiten $x_1' = u_1$ und $x_2' = u_2$ vor dem Stofse und v_1 resp. v_2 nach dem Stofse, so ist $H = -\frac{1}{2}m_1 x_1'^2 - \frac{1}{2}m_2 x_2'^2$, daher, weil für dieses vollständige System $S_a = 0$,

$$[m_1 x_1']_{t+\tau} + [m_2 x_2']_{t+\tau} = [m_1 x_1']_t + [m_2 x_2']_t \quad \text{oder} \quad m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2.$$

Die Summe der Bewegungsgröfsen vor und nach dem Stofse ist also unveränderlich. Wird während der Dauer des Stofses an keiner der übrigen denkbaren aber nicht angebbaren Koordinaten Arbeit nach aufsen abgegeben, so mufs die Energie des Systems konstant bleiben, d. h. es ist $\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2^2$. Durch diese beiden Gleichungen sind v_1 und v_2 völlig bestimmt.

Ist $u_1 > u_2$, so wird beim Zusammenstofs die lebendige Kraft von m_2 vermehrt, Energie also von m_1 auf m_2 übergeführt, bis beide Massen gleiche Geschwindigkeit haben. Erstrecken wir die Integration der Gleichung 1) nur bis zu diesem Augenblicke, so erhalten wir diese gemeinsame Geschwindigkeit w aus $(m_1 + m_2)w = m_1 u_1 + m_2 u_2$. Da die kinetische Energie des Systems in diesem Augenblicke $\frac{1}{2}(m_1 + m_2)w^2$ beträgt, so zeigt eine einfache Rechnung, dafs ein Verlust an lebendiger Kraft stattgefunden hat, dessen Betrag $\frac{1}{2}\cdot\frac{m_1\cdot m_2}{m_1 + m_2}(u_1 - u_2)^2$ ist. Beim elastischen Stofs erhält das System der beiden Massen dafür einen gleich grofsen Betrag an potentieller Energie, die sich dann im weiteren Verlaufe des Stofses wieder ganz in kinetische Energie umsetzt, so dafs man v_1 und v_2 auch aus $v_1 = u_1 - 2(u_1 - w) = u_1 - \frac{2m_2(u_1 - u_2)}{m_1 + m_2}$

$$v_2 = u_2 + 2(w - u_2) = u_2 + \frac{2m_1(u_1 - u_2)}{m_1 + m_2} \text{ berechnen kann.}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Beim unelastischen Stofs hört die gegenseitige Einwirkung der beiden Systeme in dem Momente auf, wo beide die gemeinsame Geschwindigkeit w erlangt haben. Die scheinbar verloren gegangene Energie findet sich dann jedoch an anderen, nicht in Rechnung gezogenen Koordinaten als Wärme wieder.

Fafst man m_2 als ein besonderes Teilsystem auf, so kann man die Stofskraft berechnen, die m_2 beim Zusammenprall erlitten hat, nämlich $S_x = \left[\frac{\partial \overline{H}}{\partial x'_2}\right]_{t+\tau} - \left[\frac{\partial \overline{H}}{\partial x'_2}\right]_t$, also da $\overline{H} = -\frac{1}{2} m_2 x'^2_2$ ist, $(-S_x) = m_2(v_2 - u_2)$. Analog folgt die beim Stofs auf m_1 ausgeübte äufsere Kraft $(-S'_x) = -m_1(u_1 - v_1)$. Demnach ist $(-S_x) = -(-S'_x)$, beide Kräfte sind gleich und entgegengesetzt, das Prinzip der Gleichheit von Aktion und Reaktion also auch in diesem Falle erfüllt.

Geht ein beliebiges System unter der Einwirkung einer Stofskraft aus dem Zustande der Ruhe in Bewegung über, und ist $(-S_a)$ die Komponente der Stofskraft, welche auf Vergröfserung der unabhängigen Variablen p_a hinwirkt, so ergibt sich für den Anfang der Bewegung, da vor dem Stofse $\frac{\partial H}{\partial p'_a} = 0$ ist, $\frac{\partial H}{\partial p'_a} = S_a$. Ist p_a ein Winkel, so ist natürlich wieder S_a das Drehungsmoment einer Stofskraft. Sind die Stofskräfte gegeben, so gibt $-\frac{\partial H}{\partial p'_a} = (-S_a)$ eine Gleichung zur Bestimmung des Anfangswertes von p'_a.

33. Anwendung auf das Raumpendel. Das Raumpendel (29) möge z. B. durch einen Stofs σ aus der Anfangslage (ϑ_0, φ_0) in Bewegung gesetzt werden. Die Stofskraft σ können wir zunächst in der durch ihre Richtung und den Aufhängungspunkt bestimmten Ebene wie eine Geschwindigkeit in eine normale (σ_1) und eine tangentiale Komponente zerlegen, letztere wieder in der Tangentialebene in zwei Komponenten, von denen die eine (σ_2) nur ϑ verändert, die andere (σ_3) nur φ. σ_1 wird durch die Spannung des Fadens aufgehoben. Das Drehungsmoment von σ_2 ist gleich $r\sigma_2$, also folgt aus dem Werte des kinetischen Potentials, da $\frac{\partial H}{\partial \vartheta'} = S_\vartheta$, dafs $m r^2 \vartheta'_0 = -S_\vartheta = r\sigma_2$. Ebenso ergibt sich aus $\frac{\partial H}{\partial \varphi'}$, dafs $m r^2 \sin^2\vartheta_0 \varphi'_0 = -S_\varphi = r\sigma_3 \sin\vartheta_0$, also ist $\vartheta'_0 = \frac{\sigma_2}{mr}$ und $\varphi'_0 = \frac{\sigma_3}{m r \sin\vartheta_0}$.

Damit eine Kreisbahn entsteht, mufs $\vartheta' = 0$ sein, es ist demnach σ_2 gleich Null zu machen. Aus $\vartheta'' = 0$ folgt für φ' der konstante Wert $\sqrt{\frac{g}{r\cos\vartheta}}$, daher $\sigma_3 = m \sin\vartheta_0 \sqrt{\frac{gr}{\cos\vartheta_0}}$.

34. Eine in horizontaler Ebene frei bewegliche, starre Stange AB erhält einen Stofs. Wie bewegt sie sich? Wir betrachten zunächst einen beliebigen starren Körper, dessen Schwerpunkt die Koordinaten ξ, η, ζ haben möge und beziehen jeden seiner Punkte x, y, z durch r, ϑ, φ auf den Schwerpunkt. Dann ist

$$x = \xi + r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = \eta + r\sin\vartheta\sin\varphi, \quad z = \zeta + r\cos\vartheta.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Bilden wir $L = \Sigma \frac{1}{2} m(x'^2 + y'^2 + z'^2)$ und berücksichtigen die Eigenschaften des Schwerpunktes $[\xi' \Sigma m = \Sigma m x']$, so folgt $L = \frac{1}{2} M(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) + \Sigma \frac{1}{2} m r^2 (\sin^2 \vartheta \varphi'^2 + \vartheta'^2)$, d. h. die lebendige Kraft des Körpers setzt sich zusammen aus der lebendigen Kraft der Vorwärtsbewegung des Schwerpunkts und aus der lebendigen Kraft der Drehung um denselben.

In unserem besonderen Beispiele, in dem $\vartheta = 90°$, ist $L = \frac{1}{2} M(\xi'^2 + \eta'^2) + \Sigma \frac{1}{2} m r^2 \varphi'^2$, oder, wenn wir das Trägheitsmoment der Stange in bezug auf eine durch den Schwerpunkt S gehende Achse mit K bezeichnen, $L = \frac{1}{2} M(\xi'^2 + \eta'^2) + \frac{1}{2} K \varphi'^2$. Da $H = -L$, so erhalten wir als Gleichungen der Bewegung

$$\frac{\partial H}{\partial \xi'} = -M\xi' = \text{const.}; \quad \frac{\partial H}{\partial \eta'} = -M\eta' = \text{const.}; \quad \frac{\partial H}{\partial \varphi'} = -K \cdot \varphi' = \text{const.}$$

Der Schwerpunkt bewegt sich also in gerader Linie, dabei dreht sich die Stange um ihn mit konstanter Winkelgeschwindigkeit.

Erhält die Stange im Anfang den Stofs σ im Abstande a von S (Fig. 27) und unter dem Winkel α zu ihrer Richtung, so ergeben sich die Anfangswerte von ξ', η' und φ', die in unserem Falle unverändert beibehalten werden, aus

$$M\xi_0' = \sigma \cos(\alpha + \varphi); \quad M\eta_0' = \sigma \sin(\alpha + \varphi); \quad K\varphi_0' = a\sigma \sin\alpha.$$

Druck von W. Pormetter in Berlin.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf