I. Kapitel.

Die Ebene.

§ 1. Ableitung der Gleichung der Ebene.

Sei P ein Punkt der Ebene, welche die Achsen in den Knoten A_1 B_1 C_1 schneidet, und werde derselbe durch die Neigungswinkel ($\xi\,\eta\,\zeta$) bestimmt, die das $\triangle$ mit den Ebenen P B C, P C A, P A B bildet. (Fig. 1.). (Fig. 2.). Durch die Koordinatenebenen und die Ebenen der Dreiecke A B C und A_1 B_1 C_1 wird ein Prisma (**P**) gebildet, dessen Inhalt angegeben wird durch

$$\mathbf{P} = \triangle . H$$

wenn H die im Schwerpunkt des $\triangle$ errichtete Höhe (00_1) des Prismas bezeichnet.

Fällt man von P das Lot P M auf die Ebene des $\triangle$ und legt durch PM und die Achsen Ebenen, so zerfällt P in drei Prismen über den Grundflächen B C M, C A M, A B M. Der Inhalt der einzelnen Teilprismen ist gleich dem Produkt aus der Grundfläche und der Schwerpunktshöhe, und da diese gleich dem arithmetischen Mittel der Seitenkanten ist, so besteht

$$\mathbf{P} = \triangle . H = ABM \frac{1}{3} (AA_1 + BB_1 + PM) +$$

$$BCM \frac{1}{3} (BB_1 + CC_1 + PM) + CAM \frac{1}{3} (CC_1 + AA_1 + PM).$$

Bezeichnet man die Seiten des $\triangle$ mit a b c und die von M auf diese Seiten gefällten Lote mit m n o, so ist, (Fig. 3.) weil

$$am + bn + co = 2 \triangle$$

$$\mathbf{P} = \frac{1}{6} \Big\{ AA_1 (bn + co) + BB_1 (co + am) +$$

$$CC_1 (am + bn) + PM (am + bn + co) \Big\}$$

$$= \frac{\triangle}{3} (AA_1 + BB_1 + CC_1) - \frac{1}{6} (AA_1 am + BB_1 bn + CC_1 co) + \frac{\triangle}{3} PM.$$

Da aber

$$\frac{1}{3} (AA_1 + BB_1 + CC_1) = H = 00_1$$

so muss

$$2 \triangle . PM = AA_1 am + BB_1 bn + CC_1 co$$

sein.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Man dividiere durch $2\triangle . PM$; man erhält, wenn die Höhen des $\triangle$ kurz mit $h_1\ h_2\ h_3$ bezeichnet werden

$$\frac{AA_1}{h_1} \cdot \frac{m}{PM} + \frac{BB_1}{h_2} \cdot \frac{n}{PM} + \frac{CC_1}{h_3} \cdot \frac{o}{PM} = 1.$$

Wird der Neigungswinkel der Achse AA_1 gegen die Ebene A_1BC durch λ, der Neigungswinkel von BB_1 gegen B_1CA durch μ und der Neigungswinkel der Achse CC_1 gegen C_1AB durch ν bezeichnet, so bekommt man die Relation

$$(1) \quad \operatorname{cotg} \lambda \operatorname{cotg} \xi + \operatorname{cotg} \mu \operatorname{cotg} \eta + \operatorname{cotg} \nu \operatorname{cotg} \zeta = 1$$

als Gleichung für die Ebene durch den Punkt P.

Setzt man $\operatorname{cotg} \xi = \alpha$ $\quad \operatorname{cotg} \lambda = a$

$\operatorname{cotg} \eta = \beta$ $\quad \operatorname{cotg} \mu = b$

$\operatorname{cotg} \zeta = \gamma$ $\quad \operatorname{cotg} \nu = c$

so geht (1) über in

$$(2) \quad a\alpha + b\beta + c\gamma = 1$$

in welcher Gleichung $\alpha\beta\gamma$ als veränderliche Grössen, als laufende Koordinaten der Ebene zu betrachten sind, während a b c konstante Werte haben und Parameter der Ebene genannt werden.

Ein Punkt P soll in Zukunft durch die Koordinaten $(\alpha\beta\gamma)$ gegeben werden.

Die Schnitte der Ebene (2) mit den Achsen, d. h. die Knoten der Ebene haben die Koordinaten

$$A_1 : (\alpha = \frac{1}{a},\ \beta = o,\ \gamma = o)$$

$$B_1 : (\alpha = o,\ \beta = \frac{1}{b},\ \gamma = o)$$

$$C_1 : (\alpha = o,\ \beta = o,\ \gamma = \frac{1}{c}).$$

§ 2. Besondere Formen der Gleichung der Ebene.

Wiewohl die Gleichung (2) für jedes Fundamental $\triangle$ gilt, soll doch für die Folge dasselbe als gleichseitig vorausgesetzt werden, wird dann noch die Höhe des $\triangle$ der Längeneinheit gleich gesetzt, so erhalten die Parameter a b c sehr einfache Bedeutungen. Es ist

$$a = \operatorname{cotg} \lambda = \frac{AA_1}{h_1} = AA_1$$

$$b = BB_1$$

$$c = CC_1$$

d. h. die konstanten Grössen a b c in der Gleichung der Ebene geben die Stücke an, welche die Ebene auf den Achsen abschneidet.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Achsenabschnitte werden von der Ebene des △ aus nach oben in positiver, nach unten in negativer Richtung gezählt.

1) Für eine Ebene parallel mit dem △ ist $a = b = c$. Ihre Gleichung ist mithin

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{1}{a} = k \text{ (constans)}.$$

2) Fällt die Ebene mit der Ebene des △ zusammen, so ist ihre Gleichung

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{1}{0} = \infty.$$

3) Die Ebene durch den Punkt A des △ hat die Form

$$b\beta + c\gamma = 1.$$

4) Die Ebene durch die Seite BC des △ hat, weil $b = c = 0$, die Gleichung

$$a\alpha = 1$$
$$\alpha = k \text{ (constans)}.$$

5) Soll die Ebene unter 4 auch noch zur Ebene des △ senkrecht stehen, so muss, weil $a = \infty$, die Gleichung sein

$$\alpha = 0.$$

Diese Ebene ist aber als Koordinatenebene erklärt; die beiden andern Koordinatenebenen haben die Gleichungen

$$\beta = 0, \gamma = 0.$$

6) Die unendlich ferne Ebene schneidet auf den Achsen unendlich grosse Stücke ab, ihre Gleichung muss demnach sein

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{1}{a} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

7) Die Ebene durch den Pol des Systems muss durch die Koordinaten des Poles befriedigt werden. Da aber für den Pol

$$\xi = \eta = \zeta = 0$$

also $\quad \operatorname{cotg} \xi = \operatorname{cotg} \eta = \operatorname{cotg} \zeta = \infty$

d. h. $\quad \alpha = \beta = \gamma = \infty$

werden, so müssen die Parameter der Ebene die Bedingung

$$a + b + c = \frac{1}{\infty} = 0$$

erfüllen.

Die Ebene durch den Pol wird also durch eine der folgenden sechs Formen gegeben sein

$$\pm a\alpha \pm b\beta \mp (a + b)\gamma = 1$$
$$\pm a\alpha \mp (a + c)\beta \pm c\gamma = 1$$
$$\mp (b + c)\alpha \pm b\beta \pm c\gamma = 1$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Gleichung

$$a\alpha - (a + c)\,\beta + c\,\gamma = 1$$

drückt beispielsweise aus, dass die Ebene durch den Pol auf den A- und C-Achsen die positiven Strecken a und c, auf der B-Achse die negative Strecke (a + c) abschneidet.

Dass für jede Ebene durch den Pol die Summe der Parameter gleich Null werden muss, geht auch unmittelbar aus der Anschauung hervor. Ist $A_1\,B_1\,C_1$ die Ebene durch den Pol, so ist (Fig 4.)

$$AA_1 : DE = AO : OD = 2 : 1$$

$$AA_1 : \frac{BB_1 + CC_1}{2} = 2 : 1$$

$$AA_1 = BB_1 + CC_1$$

$$-a = b + c$$

$$a + b + c = 0.$$

§ 3. Neigungswinkel der Ebene gegen die Koordinatenebenen.

1) Werde der Neigungswinkel der Ebene $A_1\,B_1\,C_1$, welche die Gleichung

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 1$$

haben möge, mit der Koordinatenebene $\alpha = 0$ durch ϱ_1 bezeichnet. (Fig. 5.) Zur Konstruktion desselben lege man durch A_1 die zum $\triangle$ parallele Ebene $A_1\,FG$, ziehe $A_1\,E$ senkrecht zu FG und ED lotrecht auf den Schnitt der gegebenen und der Koordinatenebene, d. h. auf $B_1\,C_1$. Es ist dann, weil

$$A_1\,E = AH = h_1 = 1 \qquad \text{(vergl. § 2)}$$

$$\operatorname{cotg} \varrho_1 = DE.$$

Bezeichnet man den Winkel zwischen $C_1\,B_1$ und CB oder zwischen $C_1\,B_1$ und GF mit δ, (Fig. 5a.) so ist, weil auch $\sphericalangle\, DEK = \delta$ (EK in $\alpha = 0$ parallel den Achsen)

$$\operatorname{cotg} \varrho_1 = EK \,.\, \cos\delta = \frac{1}{2}\,(FB_1 + GC_1)\,\cos\delta$$

$$= \frac{1}{2}\,(BB_1 - AA_1 + CC_1 - AA_1)\,\cos\delta$$

$$= \frac{1}{2}\,(b + c - 2a)\,\cos\delta.$$

Da aber $\quad \operatorname{tg}\delta = \dfrac{GC_1 - FB_1}{FG} = \dfrac{c - b}{BC}$

und BC, als Seite des gleichseitigen $\triangle$ mit der Höhe gleich der Längeneinheit (§ 2), den Wert $\dfrac{1}{\cos 30^0} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ hat, also

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{c - b}{2}\sqrt{3}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ist, so hat $\cos\delta$ den Wert

$$\cos\delta = \pm\frac{2}{\sqrt{4+3(c-b)^2}}$$

und es wird

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{cotg}\varrho_1 = \pm\frac{b+c-2a}{\sqrt{4+3(c-b)^2}}.$$

Hieraus findet man

$$(3^a)\begin{cases}\cos\varrho_1 = \pm\dfrac{b+c-2a}{2\sqrt{1+a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}} & \text{oder}\\[2ex] \cos\varrho_1 = \pm\dfrac{b+c-2a}{2\sqrt{1-\frac{1}{2}\left\{a(b+c-2a)+b(c+a-2b)+c(a+b-2c)\right\}}}.\end{cases}$$

In ähnlicher Weise kann man die Neigungswinkel ϱ_2 und ϱ_3 der Ebene $A_1\,B_1\,C_1$ gegen $\beta = 0$ und $\gamma = 0$ berechnen, man findet

$$\operatorname{cotg}\varrho_2 = \pm\frac{a+c-2b}{\sqrt{4+3(a-c)^2}} \qquad \operatorname{cotg}\varrho_3 = \pm\frac{a+b-2c}{\sqrt{4+3(b-a)^2}}$$

$$\cos\varrho_2 = \pm\frac{a+c-2b}{2\sqrt{1+a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}}$$

$$\cos\varrho_3 = \pm\frac{a+b-2c}{2\sqrt{1+a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}}.$$

In den Formeln gilt das + Zeichen für die spitzen, das — Zeichen für die stumpfen Winkel, die die Ebene mit den Koordinatenebenen bildet.

2) Aus obigen Gleichungen folgt

$$\cos\varrho_1 + \cos\varrho_2 + \cos\varrho_3 = 0$$

eine Gleichung, welche erkennen lässt, dass die drei Neigungswinkel nicht unabhängig sind. Ist $\varrho_1 = 90^0$, so muss sein

$$\cos\varrho_2 + \cos\varrho_3 = 0$$
$$\varrho_2 + \varrho_3 = 180^0$$

d. h. steht eine Ebene zu einer Koordinatenebene senkrecht, so ist die Summe der Neigungswinkel dieser Ebene mit den andern Koordinatenebenen 180^0.

Ist die Ebene $A_1\,B_1\,C_1$ der Seite BC des $\triangle$ parallel, so ist, weil $b = c$

$$\varrho_2 = \varrho_3.$$

Für $a = b = c$ ist (vergl. § 2, 1)

$$\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3 = 90^0.$$

3) Steht die Ebene $A_1\,B_1\,C_1$ zu der Koordinatenebene $\alpha = 0$ senkrecht, so muss, weil $\varrho_1 = 90^0$ und $\cos 90^0 = 0$ ist

$$\text{(4)} \qquad b + c - 2a = 0 \text{ oder } b + c = 2a$$

sein.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Steht eine Ebene zu einer Koordinatenebene senkrecht, so ist das von der Ebene abgeschnittene Stück der Achse, welche nicht in der Koordinatenebene liegt, zu der die Ebene senkrecht steht, das arithmetische Mittel der Abschnitte auf den andern Achsen.

Dieser Satz folgt auch unmittelbar aus der Anschauung.

Die Gleichung der Ebene senkrecht zur Koordinatenebene $\alpha = 0$ hat also die Form

$$\text{(4a)} \qquad \frac{b + c}{2}\,\alpha + b\beta + c\gamma = 1.$$

§ 4. Neigungswinkel zweier Ebenen.

1) Der Neigungswinkel, den die Ebene $A_1 B_1 C_1$ mit der Gleichung

$$a_1\,\alpha + b_1\,\beta + c_1\,\gamma = 1$$

mit dem Teil der Koordinatenebene

$$\alpha = 0$$

bildet, der nach dem Pol des Systems hin liegt, sei ϱ. Eine zweite Ebene $A_2 B_2 C_2$ mit der Gleichung

$$a_2\,\alpha + b_2\,\beta + c_2\,\gamma = 1$$

möge mit $\alpha = 0$, ebenfalls nach der Polseite hin, den Winkel τ bilden.

Denkt man sich nun die Ebenen $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$ und $\alpha = 0$ erweitert, so werden sie sich in drei Kanten schneiden, welche, im Falle sie nicht parallel laufen, nach einem Punkte 0 convergieren. Legt man um diesen Punkt als Mittelpunkt eine Kugel, so wird der Schnitt der drei Ebenen mit der Kugel im allgemeinsten Falle ein schiefwinkliges sphärisches Dreieck sein, in welchem zwei Winkel (die Neigungswinkel der Ebenen $A_1 B_1 C_1$ und $A_2 B_2 C_2$ gegen $\alpha = 0$) nämlich ϱ und $(180 - \tau)$ und die von den Winkeln eingeschlossene Seite bekannt sind. Diese Seite wird nämlich ihrer Grösse nach angegeben durch die Differenz der Winkel, die die Spuren der gegebenen Ebenen in $\alpha = 0$ d. h. $C_1 B_1$ und $C_2 B_2$ mit CB bilden. Wird der Winkel zwischen CB und $C_1 B_1$ mit δ, der Winkel zwischen CB und $C_2 B_2$ mit ε bezeichnet, so ist die Seite des sphärischen Dreiecks gleich $\delta - \varepsilon$. (Fig. 6.) Wird der Winkel, den die gegebenen Ebenen $A_1 B_1 C_1$

und $A_2 B_2 C_2$ mit einander bilden mit λ bezeichnet, so ist nach einem bekannten Satz der sphärischen Trigonometrie (Fig. 7.)

$$\cos\lambda = -\cos\varrho\cos(180-\tau) + \sin\varrho\sin(180-\tau)\cos(\delta-\varepsilon)$$

$$= \frac{\operatorname{cotg}\varrho\ \operatorname{cotg}\tau + \cos(\delta-\varepsilon)}{\sqrt{(1+\operatorname{cotg}^2\varrho)(1+\operatorname{cotg}^2\tau)}}.$$

Setzt man nach § 3

$$\operatorname{cotg}\varrho = \frac{1}{2}(b_1 + c_1 - 2a_1)\cos\delta$$

$$\operatorname{cotg}\tau = \frac{1}{2}(b_2 + c_2 - 2a_2)\cos\varepsilon$$

so kommt

$$\cos\lambda = \frac{\cos\delta\cos\varepsilon\left[\frac{1}{4}(b_1+c_1-2a_1)(b_2+c_2-2a_2) + 1 + \operatorname{tg}\delta\operatorname{tg}\varepsilon\right]}{\cos\delta\cos\varepsilon\sqrt{\left[1+\operatorname{tg}^2\delta+\frac{1}{4}(b_1+c_1-2a_1)^2\right]\left[1+\operatorname{tg}^2\varepsilon+\frac{1}{4}(b_2+c_2-2a_2)^2\right]}}$$

welche Gleichung durch die Substitutionen nach § 3

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{c_1-b_1}{2}\sqrt{3} \qquad \operatorname{tg}\varepsilon = \frac{c_2-b_2}{2}\sqrt{3}$$

übergeht in

$$(5)\quad \cos\lambda = \pm\frac{4+3(b_1-c_1)(b_2-c_2)+(b_1+c_1-2a_1)(b_2+c_2-2a_2)}{\sqrt{[4+3(b_1-c_1)^2+(b_1+c_1-2a_1)^2][4+3(b_2-c_2)^2+(b_2+c_2-2a_2)^2]}}.$$

Das doppelte Vorzeichen entspricht dem spitzen und stumpfen Winkel, welche von den beiden Ebenen gebildet werden.

2) Hätte man zur Berechnung von λ die Neigungswinkel der gegebenen Ebenen gegen $\beta = 0$, d. h. die Winkel ϱ_2 τ_2 benutzt, so würde das Ergebnis sein

$$(5_1)\quad \cos\lambda = \pm\frac{4+3(c_1-a_1)(c_2-a_2)+(a_1+c_1-2b_1)(a_2+c_2-2b_2)}{\sqrt{[4+3(c_1-a_1)^2+(a_1+c_1-2b_1)^2][4+3(c_2-a_2)^2+(a_2+c_2-2b_2)^2]}}.$$

Die Werte (5) und (5_1) sind, wie die Ausrechnung ergiebt, identisch. Man kann durch Umrechnung den Zähler (Z) und den Nenner (N) von $\cos\lambda$ auch in folgende Formen bringen

$$Z = 1 + a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 - \frac{1}{2}(a_1b_2 + a_2b_1 + b_1c_2 + b_2c_1 + c_1a_2 + c_2a_1)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left\{a_1(b_2+c_2-2a_2) + b_1(c_2+a_2-2b_2) + c_1(a_2+b_2-2c_2)\right\}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left\{a_2(b_1+c_1-2a_1) + b_2(c_1+a_1-2b_1) + c_2(a_1+b_1-2c_1)\right\}$$

$$N^2 = [1 + a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - a_1b_1 - b_1c_1 - c_1a_1][1 + a_2^2 + b_2^2 + \cdots\cdots]$$

$$= \left[1 - \frac{1}{2}\left\{a_1(b_1+c_1-2a_1) + b_1(c_1+a_1-2b_1) + c_1(a_1+b_1-2c_1)\right\}\right].$$

$$\left[1 - \frac{1}{2}\left\{a_2(b_2+c_2-2a_2) + b_2(c_2+a_2-2b_2) + c_2(a_2+b_2-2c_2)\right\}\right]$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Beachtet man noch schliesslich die Relationen

$$3(b_1 - c_1)(b_2 - c_2) = -(a_1 - b_1)(b_2 - c_2) - (a_2 - b_2)(b_1 - c_1)$$
$$-(b_1 - c_1)(c_2 - a_2) - (b_2 - c_2)(c_1 - a_1)$$
$$+(b_1 - c_1)(b_2 - c_2)$$

$$(b_1 + c_1 - 2a_1)(b_2 + c_2 - 2a_2) = (a_1 - b_1)(a_2 - b_2) + (c_1 - a_1)(c_2 - a_2)$$
$$-(a_1 - b_1)(c_2 - a_2) - (a_2 - b_2)(c_1 - a_1)$$

$$3(b_1 - c_1)^2 = -2(a_1 - b_1)(b_1 - c_1) - 2(b_1 - c_1)(c_1 - a_1) + (b_1 - c_1)^2$$
$$(b_1 + c_1 - 2a_1)^2 = (a_1 - b_1)^2 + (c_1 - a_1)^2 - 2(a_1 - b_1)(c_1 - a_1)$$

so kommt man zu der symmetrischen Form

$$\cos\lambda =$$
$$\pm \frac{\begin{array}{c}(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) - (a_1 - b_1)(b_2 - c_2) - (a_2 - b_2)(b_1 - c_1) + \\ 4 + (b_1 - c_1)(b_2 - c_2) - (b_1 - c_1)(c_2 - a_2) - (b_2 - c_2)(c_1 - a_1) + \\ (c_1 - a_1)(c_2 - a_2) - (c_1 - a_1)(a_2 - b_2) - (c_2 - a_2)(a_1 - b_1)\end{array}}{\sqrt{\left[\begin{array}{c}(a_1-b_1)^2-2(a_1-b_1)(b_1-c_1)+ \\ 4+(b_1-c_1)^2-2(b_1-c_1)(c_1-a_1)+ \\ (c_1-a_1)^2-2(c_1-a_1)(a_1-b_1)\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}(a_2-b_2)^2-2(a_2-b_2)(b_2-c_2)+ \\ 4+(b_2-c_2)^2-2(b_2-c_2)(c_2-a_2)+ \\ (c_2-a_2)^2-2(c_2-a_2)(a_2-b_2)\end{array}\right]}}$$

3) Fällt die Ebene $A_2\,B_2\,C_2$ im speciellen Falle mit der Ebene des Fundamental $\triangle$ zusammen, so ist $a_2 = b_2 = c_2 = 0$ und es wird

$$\cos\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - a_1 b_1 - b_1 c_1 - c_1 a_1}}$$

(5_2)

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\left\{a_1(b_1+c_1-2a_1) + b_1(c_1+a_1-2c_1) + c_1(a_1+b_1-2c_1)\right\}}}.$$

Wird die Ebene $A_2\,B_2\,C_2$ zur Koordinatenebene $\alpha = 0$, so ist $b_2 = c_2 = 0$ und $a_2 = \infty$ zu setzen.

$$\cos\lambda = \pm \frac{b_1 + c_1 - 2a_1}{2\sqrt{1 + a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - a_1 b_1 - b_1 c_1 - c_1 a_1}}.$$

(vergl. § 3 Gleichung 3a).

§ 5. Parallele und senkrechte Ebenen.

1) Sind $A_1\,B_1\,C_1$ und $A_2\,B_2\,C_2$ zwei Ebenen mit den Gleichungen

$$a_1\,\alpha + b_1\,\beta + c_1\,\gamma = 1$$
$$a_2\,\alpha + b_2\,\beta + c_2\,\gamma = 1$$

so werden dieselben parallel sein, wenn ihre Spuren in den Koordinatenebenen parallel sind. Es müssen also die Abschnitte auf den Achsen gleich sein.

$$A_1\,A_2 = B_1\,B_2 = C_1\,C_2$$

oder (6) $a_1 - a_2 = b_1 - b_2 = c_1 - c_2$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ist die Bedingung, die die Parameter der Ebenen erfüllen müssen, wenn dieselben parallel sein sollen.

Es hätte diese Bedingung auch aus der Grösse des Neigungswinkels zweier Ebenen § 4 Gleichung (5) gefolgert werden können. Es muss, da $\cos 0^0 = 1$ ist, der Zähler gleich dem Nenner sein. Dieses trifft zu für

$$a_1 - b_1 = a_2 - b_2$$
$$b_1 - c_1 = b_2 - c_2$$
$$c_1 - a_1 = c_2 - a_2$$

welche Bedingungen mit (6) identisch sind.

Fällt die Ebene $A_2 B_2 C_2$ mit der Ebene durch die Seite BC des $\triangle$ zusammen, ist also $b_2 = c_2 = 0$, so geht (6) über in

$$a_1 - a_2 = b_1 = c_1.$$

Die Gleichung einer Ebene parallel der Seite BC ist demnach

$$(7) \qquad a_1 \alpha + b_1 (\beta + \gamma) = 1.$$

2) Stehen die Ebenen $A_1 B_1 C_1$ und $A_2 B_2 C_2$ senkrecht zu einander, so muss der Neigungswinkel $\lambda = 90^0$ sein; da aber $\cos 90^0 = 0$ ist, so wird die Bedingung für senkrechte Ebenen sein

$$(8) \begin{cases} 4 + 3\ (b_1 - c_1)(b_2 - c_2) + (b_1 + c_1 - 2a_1)(b_2 + c_2 - 2a_2) = 0 \\ \text{oder} \\ 1 + a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 - \frac{1}{2}(a_1 b_2 + a_2 b_1 + b_1 c_2 + b_2 c_1 + c_1 a_2 + c_2 a_1) = 0 \\ \text{oder} \\ 1 - \frac{1}{2}\Big\{ a_1 (b_2 + c_2 - 2a_2) + b_1 (a_2 + c_2 - 2b_2) + c_1 (a_2 + b_2 - 2c_2) \Big\} = 0 \\ \text{oder} \\ 4 + \begin{matrix} (a_1 - b_1)(a_2 - b_2) - (a_1 - b_1)(b_2 - c_2) - (a_2 - b_2)(b_1 - c_1) + \\ (b_1 - c_1)(b_2 - c_2) - (b_1 - c_1)(c_2 - a_2) - (b_2 - c_2)(c_1 - a_1) + \\ (c_1 - a_1)(c_2 - a_2) - (c_1 - a_1)(a_2 - b_2) - (c_2 - a_2)(a_1 - b_1) \end{matrix} = 0. \end{cases}$$

3) Fällt die Ebene $A_2 B_2 C_2$ im speciellen Falle mit der Koordinatenebene $\alpha = 0$ zusammen, so ist $b_2 = c_2 = 0$, $a_2 = \infty$ und man erhält, wie in § 3 Gleichung (4) die Bedingung, die die Parameter der Ebene $A_1 B_1 C_1$ erfüllen müssen

$$b_1 + c_1 - 2a_1 = 0.$$

Für zwei Ebenen, deren Spuren in $\alpha = 0$ mit BC parallel sind, die also nach § 5 Gleichung (7) die Formen haben

$$a_1 \alpha + b_1 (\beta + \gamma) = 1$$
$$a_2 \alpha + b_2 (\beta + \gamma) = 1$$

geht die Bedingungsgleichung (8) für das lotrechte Durchdringen über in

$$(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) = -1.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Diese Beziehung hätte man auch durch folgende Betrachtung finden können. Die beiden gegebenen Ebenen und die Koordinatenebene werden in dem speciellen Falle, der vorliegt, sich in parallelen Kanten schneiden; legt man nun zu diesen Kanten die senkrechte Ebene, so entsteht als Schnitt ein Dreieck, dessen Winkel die Neigungswinkel der betreffenden Ebenen sind. Heissen die Neigungswinkel der Ebenen mit der Koordinatenebene nach der Polseite des Systems ϱ u. τ, so sind die Winkel im Dreieck ϱ und $180 - \tau$. Sollen die Ebenen zu einander senkrecht stehen, so muss sein

$$\varrho + 180 - \tau = 90^0.$$

Nun ist aber allgemein

$$\operatorname{cotg} \alpha \,.\, \operatorname{cotg} (90 - \alpha) = 1$$

und da nach § 3 Gleich. (3) für $b = c$

$$\operatorname{cotg} \varrho = b_1 - a_1 \qquad \operatorname{cotg} (180 - \tau) = -(b_2 - a_2)$$

ist, so muss $\quad -(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) = 1$

oder wie oben $\quad (a_1 - b_1)(a_2 - b_2) = -1$

sein.

Gehen die gegebenen Ebenen durch die Seiten des $\triangle$ selbst und zwar durch BC u. CA, sind also ihre Gleichungen

$$a\alpha = 1 \qquad b\beta = 1$$

so werden sich die Ebenen rechtwinklig schneiden, wenn besteht

$$ab = 2.$$

Es bilden demnach die drei Ebenen durch die Seiten des $\triangle$

$$a\alpha = 1, \quad b\beta = 1, \quad c\gamma = 1$$

eine rechtwinklige Ecke, wenn ist

$$ab = bc = ca = 2$$

oder $\quad a = b = c = \sqrt{2}$

oder $\quad \alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$

Der Winkel, dessen Cotangente den Werth $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ hat, ist etwa $54^0\ 44'\ 8''$.

§ 6. Die Ebene durch einen, zwei, drei und vier Punkte.

1) Ist die allgemeine Gleichung der Ebene gegeben durch

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 1$$

und soll dieselbe durch den Punkt (1), gegeben durch die Koordinaten $(\alpha_1\, \beta_1\, \gamma_1)$ gehen, so müssen die Koordinaten des Punktes der Ebenengleichung genügen, es muss sein

$$a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1 = 1.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Gleichung der gesuchten Ebene ist

$$a(\alpha - \alpha_1) + b(\beta - \beta_1) + c(\gamma - \gamma_1) = 0$$

oder

$$\frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1} = 1.$$

Es giebt eine Doppelserie solcher Ebenen.

2) Soll die Ebene durch die Punkte (1) und (2) gehen, so müssen folgende Gleichungen bestehen, die die Punkte auf die Ebene versetzen

$$a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1 = 1$$
$$a\alpha_2 + b\beta_2 + c\gamma_2 = 1.$$

Werden diese Gleichungen mit der allgemeinen Gleichung der gesuchten Ebene verbunden, so kommt

$$a(\alpha - \alpha_1) + b(\beta - \beta_1) + c(\gamma - \gamma_1) = 0$$
$$a(\alpha - \alpha_2) + b(\beta - \beta_2) + c(\gamma - \gamma_2) = 0.$$

Es sind zur Bestimmung der Parameter der Ebene nur zwei Gleichungen gegeben, es muss mithin ein Parameter willkührlich bleiben. Es giebt eine Serie von Ebenen durch zwei Punkte.

Ist a willkührlich, so findet man

$$b = a\,\frac{(\alpha - \alpha_1)(\gamma - \gamma_2) - (\alpha - \alpha_2)(\gamma - \gamma_1)}{(\beta - \beta_2)(\gamma - \gamma_1) - (\beta - \beta_1)(\gamma - \gamma_2)}$$

$$c = a\,\frac{(\alpha - \alpha_1)(\beta - \beta_2) - (\alpha - \alpha_2)(\beta - \beta_1)}{(\gamma - \gamma_2)(\beta - \beta_1) - (\gamma - \gamma_1)(\beta - \beta_2)}.$$

Substituiert man diese Werthe in

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 1$$

so erhält man die Gleichung der verlangten Ebene.

3) Wenn die Ebene durch drei Punkte gehen soll, so muss ihre Gleichung von den Koordinaten der Punkte befriedigt werden.

Man hat daher zur Bestimmung der Parameter a b c die drei Gleichungen

$$A \left| \begin{array}{l} a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1 = 1 \\ a\alpha_2 + b\beta_2 + c\gamma_2 = 1 \\ a\alpha_3 + b\beta_3 + c\gamma_3 = 1. \end{array} \right.$$

Multipliciert man das System der drei Gleichungen der Reihe nach

mit $\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2,\quad \beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3,\quad \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1$

und addiert sie, so findet man

$$a = \frac{\beta_1(\gamma_2 - \gamma_3) + \beta_2(\gamma_3 - \gamma_1) + \beta_3(\gamma_1 - \gamma_2)}{\alpha_1(\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2) + \alpha_2(\beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3) + \alpha_3(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Komponiert man das System A der Reihe nach mit

$$\gamma_2 \alpha_3 - \gamma_3 \alpha_2, \quad \gamma_3 \alpha_1 - \gamma_1 \alpha_3, \quad \gamma_1 \alpha_2 - \gamma_2 \alpha_1$$

so findet man

$$b = \frac{\gamma_1 (\alpha_2 - \alpha_3) + \gamma_2 (\alpha_3 - \alpha_1) + \gamma_3 (\alpha_1 - \alpha_2)}{\beta_1 (\gamma_2 \alpha_3 - \gamma_3 \alpha_2) + \beta_2 (\gamma_3 \alpha_1 - \gamma_1 \alpha_3) + \beta_3 (\gamma_1 \alpha_2 - \gamma_2 \alpha_1)}$$

und durch ähnliche Rechnung ergiebt sich

$$c = \frac{\alpha_1 (\beta_2 - \beta_3) + \alpha_2 (\beta_3 - \beta_1) + \alpha_3 (\beta_1 - \beta_2)}{\gamma_1 (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) + \gamma_2 (\alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3) + \gamma_3 (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)}.$$

Die Nenner in den Ausdrücken für a b c sind gleich. Werden die Werte für die Parameter in die Gleichung

$$a \alpha + b \beta + c \gamma = 1$$

eingesetzt, so erhält man die Bedingungsgleichung, welche zwischen den Koordinaten der gegebenen drei Punkte und den laufenden Koordinaten der Ebene $(\alpha \beta \gamma)$ erfüllt sein müssen, wenn die Ebene die drei Punkte enthalten soll.

Auf einfachere Weise lassen sich die Resultate mit Hülfe der Determinanten finden. Aus dem System der Gleichungen A, welche die Punkte auf die Ebene versetzen, findet man

$$a = \begin{vmatrix} 1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 1 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 1 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$b = \begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & 1 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & 1 & \gamma_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$c = \begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & 1 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & 1 & \gamma_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

und es muss

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta & \gamma \\ 1 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 1 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 1 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0$$

sein, wenn die Ebene $a \alpha + b \beta + c \gamma = 1$ die drei Punkte (1) (2) und (3) enthalten soll.

4) Die letzte Determinante führt auch zu der Bedingungsgleichung, durch welche vier Punkte auf eine Ebene versetzt

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

werden. Der vierte Punkt muss in der durch die drei ersten Punkte bestimmten Ebene liegen. Die gesuchte Bedingung ist

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 1 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 1 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ 1 & \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 \end{vmatrix} = 0$$

oder wie sich aus No. 3 ergiebt

$$\begin{aligned} &\{\beta_1(\gamma_2-\gamma_3)+\beta_2(\gamma_3-\gamma_1)+\beta_3(\gamma_1-\gamma_2)\}\alpha_4 \\ &+\{\gamma_1(\alpha_2-\alpha_3)+\gamma_2(\alpha_3-\alpha_1)+\gamma_3(\alpha_1-\alpha_2)\}\beta_4 \\ &+\{\alpha_1(\beta_2-\beta_3)+\alpha_2(\beta_3-\beta_1)+\alpha_3(\beta_1-\beta_2)\}\gamma_4 \\ &=\alpha_1(\beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2)+\alpha_2(\beta_3\gamma_1-\beta_1\gamma_3)+\alpha_3(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1). \end{aligned}$$

§ 7. Die Ebene durch einen Punkt parallel einer gegebenen Ebene und die Ebene durch zwei Punkte senkrecht zu einer gegebenen Ebene.

1) Hat die gesuchte Ebene die allgemeine Form

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 1$$

so müssen die Parameter ABC der gestellten Aufgabe gemäss gewisse Bedingungen erfüllen.

Es muss

$$1)\quad A\alpha_1 + B\beta_1 + C\gamma_1 = 1$$

sein, denn die Ebene soll durch den Punkt $(\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1)$ gehen.

Da ferner die Ebene parallel mit

$$a\alpha' + b\beta' + c\gamma' = 1$$

sein soll, so muss

$$\begin{aligned} 2)\quad & a - b = A - B \\ 3)\quad & b - c = B - C \\ 4)\quad & c - a = C - A \end{aligned}$$

sein. Aus 1, 2, 3 und 4 findet man

$$A = \frac{1 + (a-b)\beta_1 - (c-a)\gamma_1}{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1}$$

$$B = \frac{1 + (b-c)\gamma_1 - (a-b)\alpha_1}{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1}$$

$$C = \frac{1 + (c-a)\alpha_1 - (b-c)\beta_1}{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1}.$$

Die Gleichung der gesuchten Ebene ist demnach

$$\frac{\{1+(a-b)\beta_1-(c-a)\gamma_1\}\alpha+\{1+(b-c)\gamma_1-(a-b)\alpha_1\}\beta+\{1+(c-a)\alpha_1-(b-c)\beta_1\}\gamma}{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1}=1$$

oder

$$\frac{(a-b)(\alpha\beta_1-\beta\alpha_1)+(b-c)(\beta\gamma_1-\gamma\beta_1)+(c-a)(\gamma\alpha_1-\alpha\gamma_1)}{(\alpha_1-\alpha)+(\beta_1-\beta)+(\gamma_1-\gamma)}=1.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2) Soll die Ebene

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 1$$

durch die Punkte (1) und (2) gehen und zu der Ebene

$$a\alpha' + b\beta' + c\gamma' = 1$$

senkrecht stehen, so unterliegen die Parameter A B C folgenden Bedingungen

$$1) \qquad A\alpha_1 + B\beta_1 + C\gamma_1 = 1$$

$$2) \qquad A\alpha_2 + B\beta_2 + C\gamma_2 = 1$$

$$3) \quad 1 - \frac{1}{2}\left\{A(b+c-2a) + B(c+a-2b) + C(a+b-2c)\right\} = 0.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{1}{2}(b + c - 2a) = r$$

$$\frac{1}{2}(c + a - 2b) = s$$

$$\frac{1}{2}(a + b - 2c) = t$$

so nimmt 3) die Form an

$$3) \qquad Ar + Bs + Ct = 1.$$

Unter Anwendung von Determinanten bestimmt man hieraus

$$A = \begin{vmatrix} 1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 1 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 1 & s & t \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ r & s & t \end{vmatrix} = \frac{R}{U}$$

$$B = \begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & 1 & \gamma_2 \\ r & 1 & t \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ r & s & t \end{vmatrix} = \frac{S}{U}$$

$$C = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 1 \\ r & s & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ r & s & t \end{vmatrix} = \frac{T}{U}.$$

Die gesuchte Gleichung der Ebene heisst

$$\frac{R\alpha + S\beta + T\gamma}{U} = 1$$

dabei ist

$$R = (\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1) - t(\beta_1 - \beta_2) + s(\gamma_1 - \gamma_2)$$

$$S = (\gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1) - r(\gamma_1 - \gamma_2) + t(\alpha_1 - \alpha_2)$$

$$T = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) - s(\alpha_1 - \alpha_2) + r(\beta_1 - \beta_2)$$

$$U = r(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1) + s(\gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1) + t(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1).$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf