IV. Kapitel.

Transformation der Koordinaten.

Wenn man bei Untersuchungen im Raume, zur Vereinfachung der Rechnungen, ein zweites Koordinatensystem nötig hat, so ist die Aufgabe zu lösen, die Koordinaten eines beliebigen Punktes in Rücksicht auf das eine System, durch die gegebenen Koordinaten des Punktes für das andere System und die als gegeben anzusehenden Elemente, welche die Lage der Systeme gegen einander bestimmen, auszudrücken. Man pflegt diese oft wichtige Operation im allgemeinen „Verwandlung der Koordinaten“ zu nennen. Das Koordinatensystem, in Rücksicht auf das die Lage des andern Systems bestimmt gedacht wird, führt den Namen: primitives System, im Gegensatz zu dem Hülfs- oder sekundären System. Die Aufgaben der Koordinaten-Transformation bestehen demnach darin, einmal die primitiven Koordinaten eines beliebigen Punktes durch seine sekundären Koordinaten und die Elemente, welche die gegenseitige Lage der Systeme festlegen, auszudrücken, das andere Mal die sekundären Koordinaten durch die primitiven zu bestimmen. Welche Lage aber auch die Systeme gegen einander einnehmen mögen, man wird immer das eine System in die Lage des andern überführen können, wenn man folgende Veränderungen, zum Teil oder in ihrer Gesamtheit vornimmt:

1) Verschiebung des einen Systems in der Ebene seines Fundamentaldreiecks parallel den Seiten desselben.

2) Hebung oder Senkung des einen Systems parallel der Ebene seines Fundamentaldreiecks in der Richtung der Achsen.

3) Drehung des einen Systems um den Pol in der Ebene seines Fundamentaldreiecks.

4) Neigung des einen Systems um eine durch den Pol in der Ebene seines Fundamentaldreiecks verlaufende Achse.

Diesen Hauptveränderungen entsprechend, sollen die Koordinaten-Transformationen im Folgenden betrachtet werden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 1. Die Fundamentaldreiecke beider Systeme liegen in derselben Ebene, entsprechende Dreiecksseiten sind parallel.

Liege der Pol des primitiven Systems in 0, der des sekundären in 0_1 (Fig. 14). Die Entfernung der Pole sei d, die Lage der Pole gegeneinander sei gekennzeichnet durch die Neigungswinkel von d gegen die Seiten A B, B C und A C des $\triangle$ A B C. Der Winkel zwischen A B und d sei ε, es sind dann, wie in II § 4, die mit B C und A C gebildeten Winkel $(120 + \varepsilon)$ und $(60 + \varepsilon)$. Ein Punkt M, dessen orthogonale Projektion auf die Ebene der $\triangle\triangle$ in P liegen möge, habe im primitiven System die Koordinaten $(\alpha\beta\gamma)$, seine Koordinaten für das zweite System seien $(\alpha'\beta'\gamma')$. Da die Seiten der Fundamental $\triangle\triangle$ bei dieser Verwandlung parallel bleiben, so fallen die Abstände des Punktes P von den Seiten der $\triangle\triangle$ zusammen. Wie die Figur zeigt, ist

$$\begin{aligned} PD &= PD_1 + d \sin (120 + \varepsilon) \\ PE &= PE_1 - d \sin (60 + \varepsilon) \\ PF &= PF_1 + d \sin \varepsilon. \end{aligned}$$

Bei dieser Transformation ändert sich die Höhe h des Punktes M über der Ebene der $\triangle\triangle$ nicht, und da

$$\frac{PD}{h} = \alpha \qquad \frac{PE}{h} = \beta \qquad \frac{PF}{h} = \gamma$$

$$\frac{PD_1}{h} = \alpha' \qquad \frac{PE_1}{h} = \beta' \qquad \frac{PF_1}{h} = \gamma'$$

ferner nach II § 4 Gl. (7)

$$h = h_1 = \frac{1}{\alpha + \beta + \gamma} = \frac{1}{\alpha' + \beta' + \gamma'}$$

ist, so erhält man die Relationen

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha' + d \sin (120 + \varepsilon)(\alpha' + \beta' + \gamma') \\ \beta &= \beta' - d \sin (60 + \varepsilon)(\alpha' + \beta' + \gamma') \\ \gamma &= \gamma' + d \sin \varepsilon\,(\alpha' + \beta' + \gamma') \end{aligned} \quad \Bigg| \quad \begin{aligned} \alpha' &= \alpha - d \sin (120 + \varepsilon)(\alpha + \beta + \gamma) \\ \beta' &= \beta + d \sin (60 + \varepsilon)(\alpha + \beta + \gamma) \\ \gamma' &= \gamma - d \sin \varepsilon\,(\alpha + \beta + \gamma). \end{aligned}$$

Mit Hülfe dieser Formeln geht man von dem einen System zum andern über, je nachdem $\alpha\,\beta\,\gamma$ oder $\alpha'\,\beta'\,\gamma'$ als bekannt vorausgesetzt sind.

Als Beweis für die Richtigkeit der Formeln ist die Identität

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma'$$

anzusehen, zu welcher man durch Addition in jedem System gelangt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 2. **Die Fundamentaldreiecke der beiden Systeme liegen in parallelen Ebenen, die Achsen fallen zusammen.**

Habe der Punkt M für das primitive System ABC die Koordinaten $(\alpha\ \beta\ \gamma)$ und seien die Koordinaten desselben Punktes $(\alpha'\ \beta'\ \gamma')$ für das sekundäre System $A_1 B_1 C_1$. (Fig. 15.) Die gegenseitige Lage der beiden Systeme werde bestimmt durch den Abstand $\pm$ a der beiden Pole 0 und 0_1, und zwar gelte $+$ a für den Fall, dass das sekundäre System höher, $-$ a für den Fall, dass es tiefer liegt als das erste System.

Wird der Abstand des Punktes M von der Ebene des Fundamentaldreiecks $A_1 B_1 C_1$ durch h_1 bezeichnet, so ist

$$\alpha = \frac{PD}{h_1 \pm a} \quad \beta = \frac{PE}{h_1 \pm a} \quad \gamma = \frac{PF}{h_1 \pm a}$$

$$\alpha' = \frac{PD_1}{h_1} \quad \beta' = \frac{PE_1}{h_1} \quad \gamma' = \frac{PF_1}{h_1}$$

es besteht mithin die Proportion

$$\alpha : \alpha' = \beta : \beta' = \gamma : \gamma' = \frac{1}{h_1 \pm a} : \frac{1}{h_1}$$

woraus folgt

$$\alpha = \frac{\alpha' h_1}{h_1 \pm a} \quad \beta = \frac{\beta' h_1}{h_1 \pm a} \quad \gamma = \frac{\gamma' h_1}{h_1 \pm a}.$$

Setzt man noch $h_1 = \dfrac{1}{\alpha' + \beta' + \gamma'}$

so findet man

$$(1) \qquad \begin{aligned} \alpha &= \frac{\alpha'}{1 \pm a(\alpha' + \beta' + \gamma')} \\ \beta &= \frac{\beta'}{1 \pm a(\alpha' + \beta' + \gamma')} \\ \gamma &= \frac{\gamma'}{1 \pm a(\alpha' + \beta' + \gamma')}. \end{aligned}$$

Bezeichnet man den Abstand des Punktes M von der Ebene des $\triangle$ ABC mit h, so besteht

$$\alpha : \alpha' = \beta : \beta' = \gamma : \gamma' = \frac{1}{h} : \frac{1}{h \mp a}.$$

Es gehen hieraus die Transformationsformeln

$$(2) \qquad \begin{aligned} \alpha' &= \frac{\alpha}{1 \mp a(\alpha + \beta + \gamma)} \\ \beta' &= \frac{\beta}{1 \mp a(\alpha + \beta + \gamma)} \\ \gamma' &= \frac{\gamma}{1 \mp a(\alpha + \beta + \gamma)} \end{aligned}$$

hervor.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 3. Die Fundamentaldreiecke beider Systeme liegen in parallelen Ebenen, entsprechende Dreiecksseiten sind parallel.

Man kann die in § 1 und § 2 getrennt betrachteten Transformationen zusammenfassen. Die gegenseitige Lage der beiden Systeme zu einander ist dann dadurch gekennzeichnet, dass ihre Fundamentaldreiecke in parallelen Ebenen mit dem Abstande a liegen, dass die Entfernung des einen Poles von der Projektion des andern Poles auf das Fundamentaldreieck dieses Poles d ist und endlich diese Poldistanz d mit der Seite AB des ersten Fundamentaldreiecks den Winkel ε bildet. Heissen dann die Koordinaten eines Punktes M für das erste System $(\alpha\,\beta\,\gamma)$ und für das zweite $(\alpha'\,\beta'\,\gamma')$, so ist für $MP_1 = h_1$ wie aus Fig. 14 und 15 folgt

$$\alpha = \frac{PD}{h_1 \pm a} \qquad \beta = \frac{PE}{h_1 \pm a} \qquad \gamma = \frac{PF}{h_1 \pm a}$$

$$\alpha' = \frac{PD_1}{h_1} \qquad \beta' = \frac{PE_1}{h_1} \qquad \gamma' = \frac{PF_1}{h_1}$$

$$PD = PD_1 + d \sin (120 + \varepsilon)$$

$$PE = PE_1 - d \sin (60 + \varepsilon)$$

$$PF = PF_1 + d \sin \varepsilon$$

woraus hervorgeht

$$\alpha = \frac{PD_1 + d \sin (120 + \varepsilon)}{h_1 \pm a} = \frac{\alpha' h_1 + d \sin (120 + \varepsilon)}{h_1 \pm a}$$

$$\beta = \frac{PE_1 - d \sin (60 + \varepsilon)}{h_1 \pm a} = \frac{\beta' h_1 - d \sin (60 + \varepsilon)}{h_1 \pm a}$$

$$\gamma = \frac{PF_1 + d \sin \varepsilon}{h_1 \pm a} = \frac{\gamma' h_1 + d \sin \varepsilon}{h_1 \pm a}.$$

Setzt man noch

$$h_1 = \frac{1}{\alpha' + \beta' + \gamma'}$$

so kommt

$$\alpha = \frac{\alpha' + d \sin (120 + \varepsilon)(\alpha' + \beta' + \gamma')}{1 \pm a (\alpha' + \beta' + \gamma')}$$

$$(3) \qquad \beta = \frac{\beta' - d \sin (60 + \varepsilon)(\alpha' + \beta' + \gamma')}{1 \pm a (\alpha' + \beta' + \gamma')}$$

$$\gamma = \frac{\gamma' + d \sin \varepsilon (\alpha' + \beta' + \gamma')}{1 \pm a (\alpha' + \beta' + \gamma')}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Durch ähnliche Betrachtung findet man

$$\alpha' = \frac{\alpha - d \sin (120 + \varepsilon)(\alpha + \beta + \gamma)}{1 \mp a (\alpha + \beta + \gamma)}$$

$$(4) \qquad \beta' = \frac{\beta + d \sin (60 + \varepsilon)(\alpha + \beta + \gamma)}{1 \mp a (\alpha + \beta + \gamma)}$$

$$\gamma' = \frac{\gamma - d \sin \varepsilon (\alpha + \beta + \gamma)}{1 \mp a (\alpha + \beta + \gamma)}.$$

Aus diesen letzten Transformationsformeln gehen die in § 1 und 2 angegebenen hervor für $a = 0$ und $d = 0$.

§ 4. Die Fundamentaldreiecke der beiden Systeme liegen in derselben Ebene und haben den Pol gemeinsam.

Die gegenseitige Lage der beiden Systeme (Fig. 16.) werde bestimmt durch den Drehungswinkel $A O A_1 = \varphi$, den zwei Strahlen von dem Pol nach entsprechenden Ecken der Fundamentaldreiecke bilden. Die Drehung um den Pol ist in der Richtung der Bewegung der Zeiger auf der Uhr zu denken und erfolgt von einer Ecke des primitiven Dreiecks zu der entsprechenden des sekundären.

Der Punkt M, dessen Projektion auf die zusammenfallenden Ebenen der Fundamental $\triangle\triangle$ P sein soll, habe die primitiven Koordinaten $(\alpha\, \beta\, \gamma)$, die Koordinaten für das sekundäre System mögen durch $(\alpha'\, \beta'\, \gamma')$ angegeben werden. Die Abstände des Punktes P von den Seiten der Fundamental $\triangle\triangle$ mögen für die beiden Systeme bezüglich m n o und m_1 n_1 o_1 sein. Der Abstand des Poles von den Seiten der $\triangle\triangle$ sei a. Da zwei auf entsprechende Seiten der Fundamental $\triangle\triangle$ stehende Lote bei der Drehung der Systeme um den Pol denselben Winkel bilden, wie die Strahlen OA und OA_1, so werden die Winkel zwischen m und m_1, zwischen n und n_1, zwischen o und o_1 sowie zwischen den entsprechenden Dreiecksseiten gleich φ sein. Habe der Punkt P vom Pol der Dreiecke die Entfernung d und seien die Winkel, die von OP mit den Dreiecksseiten im zweiten System, in der Reihenfolge $A_1 B_1$, $B_1 C_1$, $A_1 C_1$ gebildet werden: ε, $(120 + \varepsilon)$, $(60 + \varepsilon)$, so sind die Neigungswinkel von OP gegen die entsprechenden Seiten im ersten System: $(\varepsilon + \varphi)$, $(120 + \varepsilon + \varphi)$, $(60 + \varepsilon + \varphi)$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es bestehen nun die Gleichungen *)

$$(1)\quad \begin{array}{l|l|l} a - m_1 = d\sin(120+\varepsilon) & a - n_1 = -d\sin(60+\varepsilon) & a - o_1 = d\sin\varepsilon \\ a - m = d\sin(120+\varepsilon+\varphi) & a - n = -d\sin(60+\varepsilon+\varphi) & a - o = d\sin(\varepsilon+\varphi) \end{array}$$

woraus durch Subtraktion folgt

$$(2)\quad \begin{array}{lll} m - m_1 = & d\sin(120+\varepsilon) & - d\sin(120+\varepsilon)\cos\varphi & - d\cos(120+\varepsilon)\sin\varphi \\ n - n_1 = & -d\sin(60+\varepsilon) & + d\sin(60+\varepsilon)\cos\varphi & + d\cos(60+\varepsilon)\sin\varphi \\ o - o_1 = & d\sin\varepsilon & - d\sin\varepsilon\cos\varphi & - d\cos\varepsilon\sin\varphi. \end{array}$$

In diesen Relationen sind die Werte für $d\cos\varepsilon$, $d\cos(120+\varepsilon)$, $d\cos(60+\varepsilon)$ noch unbekannt, dieselben werden wie folgt gefunden.

Aus

$$\begin{array}{lll} a - m_1 = d\sin(60-\varepsilon) & = & d\sin 60\cos\varepsilon - d\cos 60\sin\varepsilon \\ a - n_1 = -d\sin(60+\varepsilon) & = & -d\sin 60\cos\varepsilon - d\cos 60\sin\varepsilon \end{array}$$

geht durch Subtraktion hervor

$$(3a)\qquad d\cos\varepsilon = \frac{n_1 - m_1}{\sqrt{3}}.$$

Mit Hülfe der Gleichungen

$$a - o_1 = d\sin\varepsilon = d\sin(120+\varepsilon-120)$$
$$a - n_1 = -d\sin(60+\varepsilon) = -d\sin(120+\varepsilon-60)$$

findet man

$$(3b)\qquad d\cos(120+\varepsilon) = \frac{o_1 - n_1}{\sqrt{3}}.$$

Und schliesslich erhält man aus

$$a - o_1 = d\sin\varepsilon = d\sin(60+\varepsilon-60)$$
$$a - m_1 = d\sin(120+\varepsilon) = d\sin(60+\varepsilon+60)$$

$$(3c)\qquad d\cos(60+\varepsilon) = \frac{o_1 - m_1}{\sqrt{3}}.$$

Werden nun aus (1) und (3) die Werte in (2) eingesetzt, so wird erhalten

$$(4)\quad \begin{array}{l} m = a - (a - m_1)\cos\varphi + \dfrac{n_1 - o_1}{\sqrt{3}}\sin\varphi \\ n = a - (a - n_1)\cos\varphi + \dfrac{o_1 - m_1}{\sqrt{3}}\sin\varphi \\ o = a - (a - o_1)\cos\varphi + \dfrac{m_1 - n_1}{\sqrt{3}}\sin\varphi. \end{array}$$

Da die Fundamental $\triangle\triangle$ in derselben Ebene liegen, so sind die Abstände des Punktes M von diesen Ebenen gleich ($h = h_1$).

*) In Fig. 16 ist die Lage von P falsch angegeben, es müssen die Abstände PD, PD_1 sowie PF, PF_1 kleiner als a sein.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dividiert man die Gleichungen (4) durch diesen gleichen Abstand und beachtet

$$\frac{m}{h} = \alpha, \frac{n}{h} = \beta, \frac{o}{h} = \gamma$$

$$h = h_1 = \frac{1}{\alpha' + \beta' + \gamma'}$$

$$a = \frac{m_1 + n_1 + o_1}{3}$$

$$a - o_1 = \frac{m_1 + n_1 - 2o_1}{3} \text{ etc.}$$

so kommt

$$\alpha = \frac{\alpha' + \beta' + \gamma'}{3} - \frac{\beta' + \gamma' - 2\alpha'}{3} \cos\varphi + \frac{\beta' - \gamma'}{\sqrt{3}} \sin\varphi$$

$$(5) \quad \beta = \frac{\alpha' + \beta' + \gamma'}{3} - \frac{\gamma' + \alpha' - 2\beta'}{3} \cos\varphi + \frac{\gamma' - \alpha'}{\sqrt{3}} \sin\varphi$$

$$\gamma = \frac{\alpha' + \beta' + \gamma'}{3} - \frac{\alpha' + \beta' - 2\gamma'}{3} \cos\varphi + \frac{\alpha' - \beta'}{\sqrt{3}} \sin\varphi.$$

Die Formeln (5) vermitteln den Ubergang vom primären zum sekundären System. Will man die sekundären Koordinaten durch die primitiven ausdrücken, so wird die folgende Betrachtung dahin führen.

Man nenne die Winkel, die O P mit den Seiten A B, B C, A C im ersten System der Reihe nach bildet λ, $(120 + \lambda)$, $(60 + \lambda)$; dann heissen die Winkel derselben Geraden mit den entsprechenden Dreiecksseiten im zweiten System $(\lambda - \varphi)$, $(120 + \lambda - \varphi)$, $(60 + \lambda - \varphi)$.

Es bestehen alsdann die Gleichungen

$$(6) \quad \begin{array}{l|l|l} a - m = d\sin(120+\lambda) & a - n = -d\sin(60+\lambda) & a - o = d\sin\lambda \\ a - m_1 = d\sin(120+\lambda-\varphi) & a - n_1 = -d\sin(60+\lambda-\varphi) & a - o_1 = d\sin(\lambda-\varphi) \end{array}$$

$$m - m_1 = d \sin(120 + \lambda - \varphi) - d \sin(120 + \lambda)$$
$$n - n_1 = -d \sin(60 + \lambda - \varphi) + d \sin(60 + \lambda)$$
$$o - o_1 = d \sin(\lambda - \varphi) - d \sin\lambda.$$

Auch findet man in ähnlicher Weise wie früher

$$d \cos\lambda = \frac{n - m}{\sqrt{3}}$$

$$(7) \quad d \cos(120 + \lambda) = \frac{o - n}{\sqrt{3}}$$

$$d \cos(60 + \lambda) = \frac{o - m}{\sqrt{3}}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und kommt nach Substitution dieser Werte zu den Formen

$$
(7^{a})\quad
\begin{aligned}
m_1 &= a - (a - m)\cos\varphi - \frac{n - o}{\sqrt{3}}\sin\varphi \\
n_1 &= a - (a - n)\cos\varphi - \frac{o - m}{\sqrt{3}}\sin\varphi \\
o_1 &= a - (a - o)\cos\varphi - \frac{m - n}{\sqrt{3}}\sin\varphi
\end{aligned}
$$

$$
(8)\quad
\begin{aligned}
\alpha' &= \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} - \frac{\beta + \gamma - 2\alpha}{3}\cos\varphi - \frac{\beta - \gamma}{\sqrt{3}}\sin\varphi \\
\beta' &= \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} - \frac{\gamma + \alpha - 2\beta}{3}\cos\varphi - \frac{\gamma - \alpha}{\sqrt{3}}\sin\varphi \\
\gamma' &= \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} - \frac{\alpha + \beta - 2\gamma}{3}\cos\varphi - \frac{\alpha - \beta}{\sqrt{3}}\sin\varphi.
\end{aligned}
$$

Werden die drei Gleichungen in (5) sowie in (8) addiert, so erhält man die Identität

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma'.$$

§ 5. Die Fundamentaldreiecke der beiden Systeme liegen in verschiedenen Ebenen und haben ohne Drehung um den Pol, diesen gemeinsam.

Seien A B C und $A_1 B_1 C_1$ die Fundamental △ △ für das erste und zweite System, so wird die Lage der Systeme angegeben: (Fig. 17)

1) durch den Neigungswinkel δ der beiden △ △, die sich in der Achse X Y durch den gemeinsamen Pol schneiden ($D E D_1 = \delta$),

2) durch den Winkel ψ, den die Normale zu der Achse X Y mit der Seite A B oder $A_1 B_1$ bildet ($A_1 D_1 E = A D E = \psi$).

Die Drehung der Winkel hat wieder in der Bewegungsrichtung der Uhrzeiger zu erfolgen und führt bei δ von der Ebene des ersten zum zweiten Fundamentaldreieck, bei ψ von der Dreiecksseite zu der Normalen.

Der Punkt M, dessen Projektionen in A B C und $A_1 B_1 C_1$ beziehungsweise P und P_1 heissen mögen, habe die Koordinaten ($\alpha\beta\gamma$) resp. ($\alpha'\beta'\gamma'$). Da die Ebene der Projektionslote von M auf A B C und $A_1 B_1 C_1$ zu der Achse X Y senkrecht steht, so ist der Winkel der Projektionslote $P M P_1$ (Fig. 17a) gleich dem Neigungswinkel der Dreiecke, gleich δ. Dreht man das sekundäre System um den Winkel δ rückwärts, so fällt D_1 auf D, der dem Punkte P_1 in E D entsprechende Punkt sei P_2 ($E P_1 = E P_2$).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Abstände der Punkte P und P_1 von den Seiten der Fundamental △ △ seien wieder m n o und $m_1\, n_1\, o_1$, es hat dann auch P_2 von den Seiten des ersten Fundamentaldreiecks die Abstände $m_1\, n_1\, o_1$. Es bestehen nun die Gleichungen (Fig. 17b)

$$(1)\qquad \begin{aligned} m_1 - m &= P\,P_2 \sin(120 + \psi) \\ n_1 - n &= -P\,P_2 \sin(60 + \psi) \\ o_1 - o &= P\,P_2 \sin \psi. \end{aligned}$$

Welchen Wert hat $P\,P_2$? Nennt man die Abstände des gegebenen Punktes M von den Ebenen der Fundamental △ △ kurz h und h_1 ($h = M\,P$, $h_1 = M\,P_1$), so ist (Fig. 17a)

$$PP_2 = PE - P_2E = PE - P_1E = PE - (SE - PL) = PE - PE\cos\delta + MP\sin\delta$$

$$= PE(1-\cos\delta) + h\sin\delta = \frac{PS}{\sin\delta}(1-\cos\delta) + h\sin\delta = \frac{MP_1 - ML}{\sin\delta}(1-\cos\delta) + h\sin\delta$$

$$= \frac{h_1 - h\cos\delta}{\sin\delta}(1-\cos\delta) + h\sin\delta = \frac{h_1 - h\cos\delta - h_1\cos\delta + h}{\sin\delta} = \frac{(h_1+h)(1-\cos\delta)}{\sin\delta}$$

$$= \frac{(h_1 + h)\, 2\sin^2\frac{\delta}{2}}{2\sin\frac{\delta}{2}\cos\frac{\delta}{2}} = (h_1 + h)\,\mathrm{tg}\,\frac{\delta}{2}.$$

Setzt man den Wert von PP_2 in (1) ein, so erhält man

$$(1a)\qquad \begin{aligned} m_1 - m &= (h_1 + h)\,\mathrm{tg}\,\frac{\delta}{2}\sin(120 + \psi) \\ n_1 - n &= -(h_1 + h)\,\mathrm{tg}\,\frac{\delta}{2}\sin(60 + \psi) \\ o_1 - o &= (h_1 + h)\,\mathrm{tg}\,\frac{\delta}{2}\sin\psi. \end{aligned}$$

Dividiert man diese Gleichungen nach einander durch h und h_1 so kommt

$$(2)\qquad \begin{aligned} \frac{m}{h} &= \frac{m_1}{h_1}\cdot\frac{h_1}{h} - \left(1 + \frac{h_1}{h}\right)\mathrm{tg}\,\frac{\delta}{2}\sin(120 + \psi) \\ \frac{n}{h} &= \frac{n_1}{h_1}\cdot\frac{h_1}{h} + \left(1 + \frac{h_1}{h}\right)\mathrm{tg}\,\frac{\delta}{2}\sin(60 + \psi) \\ \frac{o}{h} &= \frac{o_1}{h_1}\cdot\frac{h_1}{h} - \left(1 + \frac{h_1}{h}\right)\mathrm{tg}\,\frac{\delta}{2}\sin\psi. \end{aligned}$$

$$(3)\qquad \begin{aligned} \frac{m_1}{h_1} &= \frac{m}{h}\cdot\frac{h}{h_1} + \left(1 + \frac{h}{h_1}\right)\mathrm{tg}\,\frac{\delta}{2}\sin(120 + \psi) \\ \frac{n_1}{h_1} &= \frac{n}{h}\cdot\frac{h}{h_1} - \left(1 + \frac{h}{h_1}\right)\mathrm{tg}\,\frac{\delta}{2}\sin(60 + \psi) \\ \frac{o_1}{h_1} &= \frac{o}{h}\cdot\frac{h}{h_1} + \left(1 + \frac{h}{h_1}\right)\mathrm{tg}\,\frac{\delta}{2}\sin\psi. \end{aligned}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

In den Systemen der Gleichungen (2) und (3) sind die Werte von $\frac{h_1}{h}$ und $\frac{h}{h_1}$ noch unbekannt. Zur Berechnung derselben führt man zwei Hülfswinkel λ und ε ein, die OP und OP_2 mit der Seite AB des Fundamentaldreiecks ABC bilden. (Fig. 17b.)

Es ist (Fig. 17a.)

$$h = MP = MQ \cos\delta = (MP_1 - QP_1)\cos\delta$$
$$= h_1 \cos\delta - EP_2 \sin\delta.$$

Aus Fig. 17b ersieht man

$$EP_2 = OP_2 \cos OP_2 E = OP_2 \cos(\varepsilon - \psi)$$
$$= OP_2 \cos\varepsilon \cos\psi + OP_2 \sin\varepsilon \sin\psi;$$

nach IV § 4 Gleichg. (3a) und (1) ist, weil auch OP_1 mit $A_1 B_1$ den Winkel ε bildet

$$OP_2 \cos\varepsilon = OP_1 \cos\varepsilon = \frac{n_1 - m_1}{\sqrt{3}}$$
$$OP_2 \sin\varepsilon = OP_1 \sin\varepsilon = a - o_1.$$

Durch Substitution dieser Werte wird

$$h = h_1 \cos\delta + \frac{m_1 - n_1}{\sqrt{3}} \cos\psi \sin\delta - (a - o_1) \sin\psi \sin\delta$$

und es ist

$$(4) \quad \frac{h}{h_1} = \cos\delta + \frac{\alpha' - \beta'}{\sqrt{3}} \cos\psi \sin\delta - \frac{\alpha' + \beta' - 2\gamma'}{3} \sin\psi \sin\delta.$$

Aus der Fig. 17a geht ferner hervor

$$h_1 = MP_1 = ML + PS = MP \cos\delta + EP \sin\delta$$
$$= h \cos\delta + EP \sin\delta;$$

nun ist aber (Fig. 17b)

$$EP = OP \cos(\lambda - \psi) = OP \cos\lambda \cos\psi + OP \sin\lambda \sin\psi;$$

und nach IV § (4) Gl. (6) und (7)

$$OP \sin\lambda = a - o$$
$$OP \cos\lambda = \frac{n - m}{\sqrt{3}};$$

also wird

$$h_1 = h \cos\delta + \frac{n - m}{\sqrt{3}} \cos\psi \sin\delta + (a - o) \sin\psi \sin\delta$$

und

$$(5) \quad \frac{h_1}{h} = \cos\delta - \frac{\alpha - \beta}{\sqrt{3}} \cos\psi \sin\delta + \frac{\alpha + \beta - 2\gamma}{3} \sin\psi \sin\delta.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Werden nun endlich die Werte aus (4) und (5) in die Systeme (2) und (3) eingesetzt, so kommt

$$6\quad\begin{cases}\alpha = \dfrac{\alpha' - \operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\sin(120+\psi)}{\cos\delta + \frac{\alpha'-\beta'}{\sqrt{3}}\cos\psi\sin\delta - \frac{\alpha'+\beta'-2\gamma'}{3}\sin\psi\sin\delta} - \operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\sin(120+\psi)\\[2ex] \beta = \dfrac{\beta' + \operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\sin(60+\psi)}{\cos\delta + \frac{\alpha'-\beta'}{\sqrt{3}}\cos\psi\sin\delta - \frac{\alpha'+\beta'-2\gamma'}{3}\sin\psi\sin\delta} + \operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\sin(60+\psi)\\[2ex] \gamma = \dfrac{\gamma' - \operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\sin\psi}{\cos\delta + \frac{\alpha'-\beta'}{\sqrt{3}}\cos\psi\sin\delta - \frac{\alpha'+\beta'-2\gamma'}{3}\sin\psi\sin\delta} - \operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\end{cases}$$

$$7\quad\begin{cases}\alpha' = \dfrac{\alpha + \operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\sin(120+\psi)}{\cos\delta - \frac{\alpha-\beta}{\sqrt{3}}\cos\psi\sin\delta + \frac{\alpha+\beta-2\gamma}{3}\sin\psi\sin\delta} + \operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\sin(120+\psi)\\[2ex] \beta' = \dfrac{\beta - \operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\sin(60+\psi)}{\cos\delta - \frac{\alpha-\beta}{\sqrt{3}}\cos\psi\sin\delta + \frac{\alpha+\beta-2\gamma}{3}\sin\psi\sin\delta} - \operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\sin(60+\psi)\\[2ex] \gamma' = \dfrac{\gamma + \operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\sin\psi}{\cos\delta - \frac{\alpha-\beta}{\sqrt{3}}\cos\psi\sin\delta + \frac{\alpha+\beta-2\gamma}{3}\sin\psi\sin\delta} + \operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\sin\psi.\end{cases}$$

Addiert man in den letzten Systemen die Gleichungen, so findet man die Identität

$$h(\alpha+\beta+\gamma) = h_1(\alpha'+\beta'+\gamma').$$

§ 6. Die Fundamentaldreiecke der beiden Systeme haben den Pol gemeinsam.

Findet neben der Neigung des einen Systems um eine durch den Pol gehende Achse, die im Fundamentaldreieck liegt, auch noch eine Drehung desselben um den Pol in der Ebene des Fundamentaldreiecks statt, so hat man den allgemeinsten Fall der Koordinatentransformation, bei welcher die Pole der Systeme zusammenfallen. Es soll diese Transformation, in welche die in den letzten §§ getrennt behandelten Fälle zusammenfliessen, noch betrachtet werden.

Die Lage der Systeme gegen einander wird durch die 3 Winkelgrössen δ ψ φ wie in § 4 und 5 angegeben. Um von dem primären System zu dem sekundären überzugehen, neigt

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

man das primäre um den Winkel δ um eine durch den Pol gehende im $\triangle$ A B C liegende Achse, deren Normale mit A B den Winkel ψ bildet und dreht nun das primäre System in dieser Lage um den Pol in der Ebene seines Fundamentaldreiecks um den Winkel φ.

Seien P und P_1 die Projektionen eines Punktes M auf die Fundamentaldreiecke der Systeme und habe P die Koordinaten $(\alpha\,\beta\,\gamma)$, P_1 die Koordinaten $(\alpha'\,\beta'\,\gamma')$. (Fig. 16 u. 17.) Wird das Fundamentaldreieck des zweiten Systems $A_1\,B_1\,C_1$ um den Winkel δ rückwärts in die Ebene des ersten Dreiecks A B C gedreht, wobei P_1 auf P_2 fallen möge, so werden die Seiten der Fundamentaldreiecke sich nicht mehr wie in § 5 decken, denn der Annahme gemäss sind ja die Systeme in dieser Lage um den Pol um den Winkel φ gedreht. Demnach werden auch die Abstände des Punktes P_1 $(m_1\,n_1\,o_1)$ von den Seiten des Dreiecks $A_1\,B_1\,C_1$ nicht mehr gleich sein den Entfernungen des Punktes P_2 $(m_2\,n_2\,o_2)$ von den Seiten des Dreiecks A B C. Heissen die Abstände des Punktes P von den Seiten des Dreiecks A B C noch m n o, so ist nach IV § 5 Gleichg. (1a)

$$m_2 - m = (h_1 + h)\,\mathrm{tg}\,\frac{\delta}{2}\,\sin\,(120 + \psi)$$

$$n_2 - n = -(h_1 + h)\,\mathrm{tg}\,\frac{\delta}{2}\,\sin\,(60 + \psi)$$

$$o_2 - o = (h_1 + h)\,\mathrm{tg}\,\frac{\delta}{2}\,\sin\,\psi$$

und nach IV § 4 Gleichg. (4)

$$m_2 = a - (a - m_1)\cos\varphi + \frac{n_1 - o_1}{\sqrt{3}}\sin\varphi$$

$$n_2 = a - (a - n_1)\cos\varphi + \frac{o_1 - m_1}{\sqrt{3}}\sin\varphi$$

$$o_2 = a - (a - o_1)\cos\varphi + \frac{m_1 - n_1}{\sqrt{3}}\sin\varphi.$$

Setzt man die Werte von $m_2\,n_2\,o_2$ ein, so findet man nach Division mit h

$$\frac{m}{h} = \frac{a - (a - m_1)\cos\varphi + \frac{n_1 - o_1}{\sqrt{3}}\sin\varphi}{h_1} \cdot \frac{h_1}{h} - \left(1 + \frac{h_1}{h}\right)\mathrm{tg}\,\frac{\delta}{2}\,\sin(120 + \psi)$$

$$\frac{n}{h} = \frac{a - (a - n_1)\cos\varphi + \frac{o_1 - m_1}{\sqrt{3}}\sin\varphi}{h_1} \cdot \frac{h_1}{h} + \left(1 + \frac{h_1}{h}\right)\mathrm{tg}\,\frac{\delta}{2}\,\sin\,(60 + \psi)$$

$$\frac{o}{h} = \frac{a - (a - o_1)\cos\varphi + \frac{m_1 - n_1}{\sqrt{3}}\sin\varphi}{h_1} \cdot \frac{h_1}{h} - \left(1 + \frac{h_1}{h}\right)\mathrm{tg}\,\frac{\delta}{2}\,\sin\,\psi.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wegen der Identitäten

$$a = \frac{m_1 + n_1 + o_1}{3} \quad \Big| \quad a - m_1 = \frac{n_1 + o_1 - 2m_1}{3}$$

$$a - n_1 = \frac{m_1 + o_1 - 2n_1}{3} \quad \Big| \quad a - o_1 = \frac{m_1 + n_1 - 2o_1}{3}$$

und der Gleichung (4)* IV § 5 gehen die Formeln über in

$$(8)\ \alpha = \frac{\frac{\alpha' + \beta' + \gamma'}{3} - \frac{\beta' + \gamma' - 2\alpha'}{3}\cos\varphi + \frac{\beta' - \gamma'}{\sqrt{3}}\sin\varphi - \operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\sin(120 + \psi)}{\cos\delta + \frac{\alpha' - \beta'}{\sqrt{3}}\cos(\psi - \varphi)\sin\delta - \frac{\alpha' + \beta' - 2\gamma'}{3}\sin(\psi - \varphi)\sin\delta - \operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\sin(120 + \psi)}$$

$$\beta = \frac{\frac{\alpha' + \beta' + \gamma'}{3} - \frac{\alpha' + \gamma' - 2\beta'}{3}\cos\varphi + \frac{\gamma' - \alpha'}{\sqrt{3}}\sin\varphi + \operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\sin(60 + \psi)}{\cos\delta + \frac{\alpha' - \beta'}{\sqrt{3}}\cos(\psi - \varphi)\sin\delta - \frac{\alpha' + \beta' - 2\gamma'}{3}\sin(\psi - \varphi)\sin\delta + \operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\sin(60 + \psi)}$$

$$\gamma = \frac{\frac{\alpha' + \beta' + \gamma'}{3} - \frac{\alpha' + \beta' - 2\gamma'}{3}\cos\varphi + \frac{\alpha' - \beta'}{\sqrt{3}}\sin\varphi - \operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\sin\psi}{\cos\delta + \frac{\alpha' - \beta'}{\sqrt{3}}\cos(\psi - \varphi)\sin\delta - \frac{\alpha' + \beta' - 2\gamma'}{3}\sin(\psi - \varphi)\sin\delta - \operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\sin\psi.}$$

Um vom sekundären System zum primären System zu transformieren, führt man für die Abstände des Punktes P von den Seiten des in die Ebene A B C gedrehten zweiten Dreiecks $A_1 B_1 C_1$ die Bezeichnungen $m_3\, n_3\, o_3$ ein, es ist dann nach IV § 4 Gleichg. (7a)

$$m_3 = a - (a - m)\cos\varphi - \frac{n - o}{\sqrt{3}}\sin\varphi$$

$$n_3 = a - (a - n)\cos\varphi - \frac{o - m}{\sqrt{3}}\sin\varphi$$

$$o_3 = a - (a - o)\cos\varphi - \frac{m - n}{\sqrt{3}}\sin\varphi$$

und nach IV § 5 Gleichg. (1a), weil nach der Drehung des $\triangle$ $A_1 B_1 C_1$ in die Ebene des $\triangle$ ABC die Gerade P_2 P mit $A_1 B_1$ den Winkel $(\psi - \varphi)$ bildet

$$m_1 - m_3 = (h_1 + h)\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\sin(120 + \psi - \varphi)$$

$$n_1 - n_3 = -(h_1 + h)\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\sin(60 + \psi - \varphi)$$

$$o_1 - o_3 = (h_1 + h)\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\sin(\psi - \varphi)$$

*) Man beachte, dass, nach der Drehung des $\triangle$ $A_1B_1C_1$ in die Ebene des $\triangle$ ABC, OP_2 und P_2P mit A_1B_1 die Winkel $(\varepsilon - \varphi)$, $(\psi - \varphi)$ bilden und setze bei der Ableitung der Gleichung $(\varepsilon - \psi) = (\varepsilon - \varphi) - (\psi - \varphi)$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

woraus folgt

$$\frac{m_1}{h_1} = \frac{a - (a-m)\cos\varphi - \frac{n-o}{\sqrt{3}}\sin\varphi}{h} \cdot \frac{h}{h_1} + \left(1 + \frac{h}{h_1}\right) \operatorname{tg}\frac{\delta}{2} \sin(120 + \psi - \varphi)$$

$$\frac{n_1}{h_1} = \frac{a - (a-n)\cos\varphi - \frac{o-m}{\sqrt{3}}\sin\varphi}{h} \cdot \frac{h}{h_1} - \left(1 + \frac{h}{h_1}\right) \operatorname{tg}\frac{\delta}{2} \sin(60 + \psi - \varphi)$$

$$\frac{o_1}{h_1} = \frac{a - (a-o)\cos\varphi - \frac{m-n}{\sqrt{3}}\sin\varphi}{h} \cdot \frac{h}{h_1} + \left(1 + \frac{h}{h_1}\right) \operatorname{tg}\frac{\delta}{2} \sin(\psi - \varphi).$$

Diese Gleichungen gehen bei Beachtung der vorher angeführten Identitäten und der Gleichg. (5) IV § 5 über in

$$(9)\quad \alpha' = \frac{\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} - \frac{\beta+\gamma-2\alpha}{3}\cos\varphi - \frac{\beta-\gamma}{\sqrt{3}}\sin\varphi + \operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\sin(120+\psi-\varphi)}{\cos\delta - \frac{\alpha-\beta}{\sqrt{3}}\cos\psi\sin\delta + \frac{\alpha+\beta-2\gamma}{3}\sin\psi\sin\delta + \operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\sin(120+\psi-\varphi)}$$

$$\beta' = \frac{\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} - \frac{\alpha+\gamma-2\beta}{3}\cos\varphi - \frac{\gamma-\alpha}{\sqrt{3}}\sin\varphi - \operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\sin(60+\psi-\varphi)}{\cos\delta - \frac{\alpha-\beta}{\sqrt{3}}\cos\psi\sin\delta + \frac{\alpha+\beta-2\gamma}{3}\sin\psi\sin\delta - \operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\sin(60+\psi-\varphi)}$$

$$\gamma' = \frac{\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} - \frac{\alpha+\beta-2\gamma}{3}\cos\varphi - \frac{\alpha-\beta}{\sqrt{3}}\sin\varphi + \operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\sin(\psi-\varphi)}{\cos\delta - \frac{\alpha-\beta}{\sqrt{3}}\cos\psi\sin\delta + \frac{\alpha+\beta-2\gamma}{3}\sin\psi\sin\delta + \operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\sin(\psi-\varphi)}.$$

Setzt man in den Gleichungen (8) und (9) die Winkelgrösse $\delta = 0$, so resultieren die Gleichungen (5) und (8) des § 4; für $\varphi = 0$ gehen die Gleichungen über in die Gleichungen (6) und (7) des § 5.

Mit Hülfe der in den letzten Paragraphen abgeleiteten Transformationen lässt sich immer das eine System in die gewünschte Lage des zweiten überführen. Nicht überflüssig ist hierbei die Bemerkung, dass in den Werten für $\alpha\,\beta\,\gamma$ nur die ersten Potenzen von $\alpha'\,\beta'\,\gamma'$ vorkommen und umgekehrt. Infolge dieses Umstandes ist jede durch Transformation der Koordinaten herbeigeführte Gleichung von demselben Grade, wie die ursprüngliche. Hätte man um die Gleichung einer Fläche $F(\alpha\,\beta\,\gamma) = 0$ auf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ein neues Koordinatensystem zu beziehen, eines oder mehrere der vorhergehenden Formelsysteme angewandt, so muss die veränderte Flächengleichung $F_1(\alpha' \beta' \gamma') = 0$ doch stets von demselben Grade sein, wie die erste. Da nämlich in allen diesen Formelsystemen die Werte von $\alpha \beta \gamma$ in Bezug auf $\alpha' \beta' \gamma'$ linear sind, so kann der Grad der Gleichung von $F_1 = 0$ den von $F = 0$ nicht übersteigen. Andererseits kann man aber stets $F_1 = 0$ in $F = 0$ zurück transformieren, also kann auch der Grad von F_1 nicht kleiner sein als der von F, d. h. der Grad einer Fläche wird durch Transformation nicht geändert.

§ 7. Zusammenhang der triangulären Koordinaten mit den Parallel-Koordinaten.

1) Wählt man den Pol des triangulären Koordinatensystems zum Anfang der rechtwinkligen Parallel-Koordinaten und lässt die x-Axe mit einer Höhe, die y-Achse mit der durch den Pol gezogenen Parallelen zu einer Seite des Fundamentaldreiecks, die z-Achse endlich mit der durch den Pol zu den Achsen des triangulären Systems parallel gezogenen Geraden zusammenfallen, so ist der Punkt M (Fig. 18.) im Parallel-Koordinatensystem gegeben durch (x y z), während die Koordinaten im triangulären System $(\alpha \beta \gamma)$ heissen.

Ist die orthogonale Projektion von M auf die Ebene des Fundamentaldreiecks ABC oder auf die xy Ebene P, so ist

$$OR = x, \quad RP = y, \quad MP = z$$

und bezeichnet man die Abstände des Punktes P von den Seiten des $\triangle$, wie früher, mit m n o, so besteht

$$\frac{PG}{MP} = \frac{m}{h} = \alpha; \quad \frac{PH}{MP} = \frac{n}{h} = \beta; \quad \frac{PK}{MP} = \frac{o}{h} = \gamma.$$

Setzt man die Höhe des Dreiecks ABC gleich k, so hat man

$$m = PG = PE + EG = \frac{y}{\cos 30} + EB \sin 30 = \frac{y}{\cos 30} + \frac{1}{2}(OB - OR - RE)$$

$$= \frac{y}{\cos 30} + \frac{k}{3} - \frac{x}{2} - \frac{y}{2} \operatorname{tg} 30 = \frac{k}{3} - \frac{x}{2} + \frac{y}{2}\sqrt{3}$$

$$n = PH = PL + LH = x + \frac{k}{3}$$

$$o = PK = PF \cos 30 = (RF - y) \cos 30 = (RB \operatorname{tg} 30 - y) \cos 30$$

$$= (OB - OR) \sin 30 - y \cos 30 = \frac{k}{3} - \frac{x}{2} - \frac{y}{2}\sqrt{3}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dividiert man die Gleichungen für m n o durch MP = h = z, so ergiebt sich

$$\alpha = \frac{\frac{k}{3} - \frac{x}{2} + \frac{y}{2}\sqrt{3}}{z} = \frac{2k - 3x + 3y\sqrt{3}}{6z}$$

$$(1) \qquad \beta = \frac{\frac{k}{3} + x}{z} = \frac{2k + 6x}{6z}$$

$$\gamma = \frac{\frac{k}{3} - \frac{x}{2} - \frac{y}{2}\sqrt{3}}{z} = \frac{2k - 3x - 3y\sqrt{3}}{6z}.$$

Löst man diese Gleichungen für x y z auf, so findet man

$$x = \frac{k(2\beta - \alpha - \gamma)}{3(\alpha + \beta + \gamma)}$$

$$(2) \qquad y = \frac{k(\alpha - \gamma)}{\sqrt{3}(\alpha + \beta + \gamma)}$$

$$z = \frac{k}{\alpha + \beta + \gamma}.$$

Mit Hülfe der Formeln (1) und (2) kann man vom triangulären zum rechtwinkligen Parallel-Koordinatensystem und umgekehrt übergehen.

Aus (1) folgt durch Addition

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{k}{z} = \frac{k}{h}$$

$$\frac{m}{h} + \frac{n}{h} + \frac{o}{h} = \frac{k}{h}$$

$$m + n + o = k.$$

2) Wird die Mitte einer Seite des Fundamentaldreiecks ABC zum Anfang der rechtwinkligen Parallel-Koordinaten gewählt, und fällt die Höhe des Dreiecks mit der x-Achse, die Seite mit der y-Achse zusammen, so wird für einen Punkt M, dessen Projektion P ist, y und z die gleiche Bedeutung wie in 1) behalten, es ändert sich nur die x Koordinate, welche gleich $x + \frac{k}{3}$ zu setzen ist. Es wird demnach

$$\alpha = \frac{\frac{k}{2} - \frac{x}{2} + \frac{y}{2}\sqrt{3}}{z} = \frac{k - x + y\sqrt{3}}{2z}$$

$$(3) \qquad \beta = \frac{x}{z}$$

$$\gamma = \frac{\frac{k}{2} - \frac{x}{2} - \frac{y}{2}\sqrt{2}}{z} = \frac{k - x - y\sqrt{3}}{2z}$$

woraus folgt

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$x = \frac{k\beta}{\alpha + \beta + \gamma}$$

$$y = \frac{k(\alpha - \gamma)}{\sqrt{3}(\alpha + \beta + \gamma)}$$

$$z = \frac{k}{\alpha + \beta + \gamma}.$$

3) Verlegt man den Anfang der rechtwinkligen Parallel-Koordinaten in die Ecke A des Fundamentaldreiecks und lässt die y-Achse mit der Seite AB, die Z-Achse mit der A-Achse zusammenfallen und nimmt als x-Achse die zu AB in der Ebene des △ liegende Senkrechte an, so ist (Fig. 19.)

$$\gamma = \frac{PK}{MP} = \frac{x}{z}$$

$$\beta = \frac{PH}{MP} = \frac{PS\cos 30}{z} = \frac{y\cos 30 - ST\cos 30}{z} = \frac{y\cos 30 - x\sin 30}{z}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}y\sqrt{3} - \frac{1}{2}x}{z} = \frac{y\sqrt{3} - x}{2z}$$

$$\alpha = \frac{k}{z} - \beta - \gamma = \frac{2k - y\sqrt{3} + x - 2x}{2z} = \frac{2k - x - y\sqrt{3}}{2z}$$

woraus hervorgeht

$$x = \frac{k\gamma}{\alpha + \beta + \gamma}$$

$$y = \frac{k(2\beta + \gamma)}{\sqrt{3}(\alpha + \beta + \gamma)}$$

$$z = \frac{k}{\alpha + \beta + \gamma}.$$

4) Lässt man endlich die x-Achse mit der Seite AC, die y-Achse mit AB und die z-Achse mit der A-Achse zusammenfallen, so bestehen die Beziehungen (Fig. 20)

$$\gamma = \frac{PK}{MP} = \frac{PD\cos 30}{z} = \frac{\frac{1}{2}x\sqrt{3}}{z} = \frac{x\sqrt{3}}{2z}$$

$$\beta = \frac{PH}{MP} = \frac{PE\cos 30}{z} = \frac{y\sqrt{3}}{2z}$$

$$\alpha = \frac{k}{z} - \beta - \gamma = \frac{2k - x\sqrt{3} - y\sqrt{3}}{2z}$$

und

$$x = \frac{2k\gamma}{\sqrt{3}(\alpha + \beta + \gamma)}$$

$$y = \frac{2k\beta}{\sqrt{3}(\alpha + \beta + \gamma)}$$

$$z = \frac{k}{\alpha + \beta + \gamma}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf