Wissenschaftliche Beilage zum Programm des Humboldts-Gymnasiums
zu Berlin. Ostern 1887.

Elementare Darstellung

der

mechanischen Wärmetheorie für Gase.

Von

Albert Voss.

REALGYMNASIUM DÜSSELDORF BIBLIOTHEK

Mit Figuren.

BERLIN 1887.
R. Gaertners Verlagsbuchhandlung
Hermann Heyfelder.

1887. Programm Nr. 61.

9be
24

75,12.6

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

HT00 0420904

UNIVERSITÄTS- UND LANDESBIBLIOTHEK DÜSSELDORF

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Elementare Darstellung der mechanischen Wärmetheorie für Gase.

In § 1 wird das Mariotte-Gay-Lussacsche Gesetz besprochen und eine Schätzung des Fehlers gewonnen, der in der Anwendung desselben auf Zustände liegt, die sich von Gleichgewichtszuständen wenig unterscheiden.

In § 2 wird als drittes Erfahrungsergebnis die Konstanz des Quotienten der specifischen Wärmen angenommen und daraus die Poissonsche Gleichung hergeleitet. Das Irrtümliche der Poissonschen Anschauung vom Wesen der Wärme zeigt sich an einem einfachen Beispiel.

In § 3 wird die von R. Mayer begründete neue Vorstellung vom Wesen der Wärme und das von demselben berechnete mechanische Wärmeäquivalent behandelt.

In § 4 wird gezeigt, dafs dieser Berechnung entweder die Erfahrung, dafs bei der Ausdehnung eines Gases ohne Arbeitsleistung keine Wärme verbraucht wird, oder die Konstanz der Differenz der specifischen Wärmen zu Grunde gelegt werden kann. Daraus wird der Begriff des vollkommenen Gases festgestellt.

In § 5 wird nach Analogie der Erscheinungen bei den Gasen das allgemeine Prinzip der Energie aufgestellt und die Energiefunktion für die Gase ermittelt.

In § 6 werden die Wärme- und Arbeitsaufwendungen bei den Temperaturkurven und den adiabatischen Kurven berechnet, sodann wird der Carnotsche Kreisprozefs behandelt.

---

§ 1.

Das Mariottesche und das Gay-Lussacsche Gesetz.

Wir denken uns in einem cylinderförmigen Gefäfs die Gewichtseinheit eines Gases durch einen im Cylinder beweglichen Stempel abgeschlossen. Die Spannung des Gases wird dann gemessen durch den Druck, welcher von aufsen auf die Quadrateinheit der Oberfläche des gewichtslos gedachten Stempels ausgeübt werden mufs, um bei gleichbleibender Temperatur das System im Gleichgewicht zu halten. Die Erfahrung lehrt dann für gewisse Gase:

1) Wird der Druck geändert, so ändert sich auch das Volumen des Gases, und zwar ist bei derselben Temperatur das Volumen stets umgekehrt proportional dem Drucke (Mariottesches Gesetz).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2) Wird bei gleich bleibendem Drucke das Gas erwärmt (abgekühlt), so wird das Volumen vergröfsert (vermindert), und zwar entspricht der Veränderung der Temperatur um einen Grad der Skala des Quecksilberthermometers stets dieselbe Zunahme oder Abnahme des Volumens (Gay-Lussacsches Gesetz).

Beide Gesetze lassen sich in eine Formel zusammenfassen.

Es bezeichne p, v, t Druck, Volumen und Temperatur, letztere ausgedrückt in Graden der hundertteiligen Skala; ferner sei p_0 der Druck einer Quecksilbersäule von 76 cm und v_0 das Volumen des Gases unter diesem Drucke bei der Temperatur Null. Wird nun die Temperatur des Gases unter konstant bleibendem Drucke p_0 von Null auf einen Grad erhöht, so dehnt sich dasselbe um eine gewisse Gröfse aus, diese Gröfse sei das α fache des Volumens bei Null Grad; das Volumen bei t Grad ist dann

$$v = v_0 + v_0 \alpha t = v_0 (1 + \alpha t).$$

Geht man nicht von dem Volumen bei Null Grad, sondern von einem andern (v_1) bei der Temperatur t_1 Grad aus, so ist die Zunahme das β fache des ursprünglichen Volumens, es mufs dann nach dem zweiten Gesetz sein

$$v_0 \alpha = v_1 \beta, \text{ also}$$

$$\beta = \frac{v_0}{v_1} \alpha \text{ oder da}$$

$$v_1 = v_0 (1 + \alpha t_1) \text{ ist,}$$

$$\beta = \frac{\alpha}{1 + \alpha t_1} \text{ also}$$

$$v = v_1 \left(1 + \frac{\alpha}{1 + \alpha t_1} (t - t_1)\right).$$

Findet die Erwärmung unter einem andern Druck p statt, so ist nach dem ersten Gesetz das Volumen bei Null Grad nicht v_0 sondern $\frac{v_0 p_0}{p}$, ebenso das Volumen (v) bei t Grad statt $v_0 (1 + \alpha t)$

$$v = \frac{v_0 p_0}{p} (1 + \alpha t) \text{ also}$$

I. $$v \cdot p = v_0 p_0 (1 + \alpha t).$$

In dieser Formel sind die beiden Gesetze enthalten.

Die Richtigkeit derselben kann durch folgende, leicht anzustellende Versuche, durch welche zugleich die Gröfse von α ermittelt wird, nachgewiesen werden*).

In einsr Glasröhre, deren Durchmesser ca. 1,5 mm ist, befindet sich unten ein Tropfen Schwefelsäure, darüber ist eine Luftsäule von ca. 10 cm Länge durch einen Quecksilbertropfen abgeschlossen; der etwaige Wasserdampf der Luft wird von der Schwefelsäure absorbiert werden. Befindet sich diese Röhre in einem Gefäfs mit Wasser, so wird die kleine Luftmasse sehr bald die Temperatur desselben annehmen. Man kann nun von verschiedenen Anfangstemperaturen aus die Luft bis zur Temperatur des kochenden Wassers erwärmen, man kann auch durch Aufgiefsen von Quecksilber den Druck vermehren und dann die Erwärmungen vornehmen.

---

*) Vgl. Weinhold „physikalische Demonstrationen“ § 380—383.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Berechnet man nach Formel I aus den beobachteten Anfangs- und Endzuständen die Grösse α, so findet man mit grofser Genauigkeit stets denselben Wert, 0,00366.., und kann so die Richtigkeit der beiden Gesetze nachweisen.

Die Formel I gilt zunächst nur für den Gleichgewichtszustand, weil nur dann die Spannung des Gases gleich dem äufseren Druck ist. Während der Bewegung ist die innere Spannung gröfser oder kleiner als der äufsere Druck. Die Gröfse des Überdrucks hängt von der Geschwindigkeit der Bewegung ab; um sich von derselben eine Vorstellung zu verschaffen, kann man folgendes Beispiel ausführen: Von einem gewissen Gleichgewichtszustand dehne sich die Gassäule um die Länge (l) aus, die Geschwindigkeit im letzten Moment der Ausdehnung sei w, die Spannung des Gases P, der äufsere Druck p, es hat dann die Spannung des Gases den Druck p eine Strecke l gehoben und aufserdem dem System eine Geschwindigkeit w gegeben, es mufs also die Arbeit der Spannung gleich der Summe der geleisteten äufseren Arbeit und der erzeugten lebendigen Kraft sein. Ist nun die Spannung konstant, oder bezeichnet P den mittleren Wert derselben und m die in Bewegung gesetzte Masse, so ist

$$P\,l = p\,l + \frac{1}{2}\,m\,w^2.$$

m setzt sich zusammen aus der Masse der bewegten Luft und derjenigen der Anzahl Kilogramme, welche den äufseren Druck bestimmen, in den meisten Fällen ist die erste verschwindend klein gegen die zweite, so dafs man setzen kann

$$m = \frac{p}{g},$$

durch Einsetzen dieses Wertes erhält man

$$P\,l = p\,l + \frac{1}{2}\,\frac{p\,w^2}{g} \text{ oder}$$

$$\frac{P - p}{p} = \frac{1}{2}\,\frac{w^2}{g \cdot l}.$$

Nimmt man für l 1 cm, für w den bei solchen Bewegungen sehr grofsen Wert von ½ cm und setzt $g = 9{,}81$, so ergiebt sich

$$\frac{P - p}{p} = \frac{0{,}0000125}{9{,}81 \cdot 0{,}01},$$

also ist selbst bei dieser verhältnismäfsig schnellen Bewegung der Überdruck nur ungefähr ein Tausendstel des äufseren Druckes. Man läfst deshalb die Formel I auch in jedem Moment der Bewegung, sofern dieselbe nur klein ist, gelten.

Bis jetzt war der Druck während der Erwärmung konstant gedacht, ändert sich derselbe auch nach irgend einem Gesetz, so wird auch für diese Zustandsänderungen unter Voraussetzung kleiner Geschwindigkeit die Formel I gültig sein, da man sich denken kann, dafs dieselben zustande kommen aus unendlich kleinen Veränderungen, während welcher der Druck konstant bleibt.

Zustandsänderungen, bei denen die erzeugte lebendige Kraft verschwindend klein ist gegen die geleistete Arbeit, nennt man umkehrbare.

Man schreibt die Formel I für viele Rechnungen bequemer in der Form

$$p\,v = p_0\,v_0\,\alpha\left(\frac{1}{\alpha} + t\right) \text{ oder}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$pv = R(a + t),$$

in welcher Gleichung $a = \frac{1}{0{,}00366}$ und R eine für jede Gasart experimentell zu bestimmende Konstante ist.

§ 2.

Die Poissonsche Gleichung.

Ändert man den Druck, unter dem das Gas steht, so nimmt das Volumen nicht sofort den aus dem Mariotteschen Gesetz folgenden Wert an, sondern es findet bei der Zusammendrückung eine Temperaturerhöhung, bei der Ausdehnung eine Temperaturerniedrigung statt, und erst wenn durch den Einflufs der Umgebung die Temperatur sich ausgeglichen hat, erreicht das Volumen die entsprechenden Werte. Denkt man sich nun das Gas von einer für die Wärme undurchdringlichen Hülle umgeben und dann die Druckveränderung vorgenommen, so entsteht die Frage, welches Volumen und welche Temperatur wird jetzt das Gas haben. Die Lösung dieser Aufgabe kann deduktiv gegeben werden auf Grund folgender Ergebnisse der Erfahrung:

1) Erwärmt man das Gas unter konstantem Druck um einen Grad, so gehört dazu eine bestimmte Anzahl Wärmeeinheiten c_p.

2) Erwärmt man das Gas bei konstantem Volumen um einen Grad, so gehört dazu auch eine bestimmte Anzahl Wärmeeinheiten c_v.

Das Verhältnis dieser Wärmemenge sei experimentell bestimmt.

$$\frac{c_p}{c_v} = k.$$

Das Gas befinde sich nun in einem beliebigen Zustande p_0, v_0, t_0, so dafs ist

$$p_0 v_0 = R(a + t_0).$$

Wird jetzt dem Gase unter konstantem Druck eine Wärmemenge Q hinzugeführt, so wird die Temperatur und das Volumen sich verändern, bezeichnen t' und v_1 die neuen Werte, so mufs die Gleichung stattfinden

$$p_0 v_1 = R(a + t')$$

und die zugeführte Wärmemenge ist

$$Q = c_p(t' - t_0) \text{ oder da}$$
$$p_1 v_1 - p_0 v_0 = R(t' - t_0) \text{ also}$$
$$t' - t_0 = \frac{p_0(v_1 - v_0)}{R}, \text{ ist}$$
$$Q = \frac{c_p p_0}{R}(v_1 - v_0).$$

Wird jetzt dem Gase dieselbe Wärmemenge entzogen, während das Volumen konstant bleibt, so ändern sich Druck und Temperatur, und zwar nehmen beide ab; bezeichnen p_1 und t_1 die entsprechenden Werte, so ist dann

$$p_1 v_1 = R(a + t_1) \text{ und}$$
$$Q = c_v(t' - t_1) \text{ oder, da}$$
$$p_0 v_1 - p_1 v_1 = R(t' - t_1) \text{ also}$$
$$t' - t_1 = \frac{v_q}{R}(p_0 - p_1) \text{ ist}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$Q = \frac{c_v v_1}{R} (p_0 - p_1),$$

man hat also die Gleichung

$$\frac{c_p p_0}{R} (v_1 - v_0) = \frac{c_v v_1}{R} (p_0 - p_1)$$

oder anders geschrieben und für $\frac{c_p}{c_v}$ k eingeführt

$$\frac{p_1 - p_0}{p_0} = - k \frac{v_1 - v_0}{v_1},$$

aus welcher sich eine der Gröfsen p_1 v_1 bestimmt, wenn die andere gegeben ist. Man gelangt hierdurch von einem Zustande aus zu einem beliebig gegebenen in der Weise, dafs die Summe der zugeführten Wärme Null ist. Eine solche Zustandsänderung entspricht aber noch nicht der gesuchten, bei welcher das Gas sich in einer für Wärme undurchläfslichen Hülle befindet, denn bei dieser sollen nicht nur die in endlichen Zeiten zugeführten und entzogenen Wärmemengen sich aufheben, sondern es soll überhaupt keine Wärmezufuhr stattfinden. Man kann sich aber diese Zustandsänderung in der Weise zustande gekommen denken, dafs in einem Moment eine unendlich kleine Wärmemenge hinzugeführt und dieselbe sofort wieder entzogen wird, es tritt dann eine unendlich kleine Veränderung des Drucks und des Volumens ein; wird dann von neuem eine unendlich kleine Wärmemenge zugeführt und sofort wieder entzogen, so findet eine neue unendlich kleine Veränderung des Drucks und Volumens statt; denkt man sich diese Operation unendlich oft wiederholt, so kann man zu einem beliebigen neuen Zustand in der Weise gelangen, dafs die in jeder noch so kleinen endlichen Zeit hinzugeführte oder entzogene Wärme Null ist. Er erübrigt jetzt, diesen Gedanken mathematisch auszuführen.

Der Anfangszustand sei p_0 v_0, nachdem zum ersten Mal eine unendlich kleine Wärmemenge hinzugeführt und sofort wieder entzogen ist, sei der Druck p_1, das Volumen v_1, es mufs dann nach der oben ausgeführten Rechnung sein

$$\frac{p_1 - p_0}{p_0} = - k \frac{v_1 - v_0}{v_1},$$

nachdem sodann eine ähnliche Operation ausgeführt und der Druck p_2, des Volumen v_2 entstanden ist, hat man

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = - k \frac{v_2 - v_1}{v_2}$$

und so weiter

$$\frac{p_3 - p_2}{p_2} = - k \frac{v_3 - v_2}{v_3}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{p_n - p_{n-1}}{p_{n-1}} = - k \frac{v_n - v_{n-1}}{v_n}.$$

Man kann nun die Wärmezufuhren so eingerichtet denken, dafs das Verhältnis der Druckzunahme zum jedesmaligen Druck stets dasselbe ist, d. h. dafs

$$\frac{p_1 - p_0}{p_0} = \frac{p_2 - p_1}{p_1} = \ldots \frac{p_n - p_{n-1}}{p_{n-1}} = \frac{q}{n},$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wo $\frac{q}{n}$ eine Gröfse ist, die wenn n wächst, immer kleiner und schliefslich für ein unendlich grofses n unendlich klein wird. Man hat dann

$$p_1 = p_0\left(1 + \frac{q}{n}\right)$$
$$p_2 = p_1\left(1 + \frac{q}{n}\right)$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$p_{n-1} = p_{n-2}\left(1 + \frac{q}{n}\right)$$
$$p_n = p_{n-1}\left(1 + \frac{q}{n}\right)$$

und hieraus, indem man in der letzten Gleichung p_{n-1} durch p_{n-2}, letzteres durch p_{n-3} und so fort bis p_0 ausdrückt

$$p_n = p_0\left(1 + \frac{q}{n}\right)^n.$$

Nimmt man jetzt n unendlich grofs, so werden die Druckzunahmen und die entsprechenden Wärmezufuhren unendlich klein, man hat dann die gesuchte Zustandsänderung und erhält mit Benutzung der Formel

$$\lim_{n=\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$
$$p_n = p_0\, e^q.$$

Weiter mufs aber auch $-k\,\frac{v_1 - v}{v_1}$, $-k\,\frac{v_2 - v_1}{v_2}$ u. s. w. gleich $\frac{q}{n}$ sein, also

$$v_1\left(1 + \frac{q}{k \cdot n}\right) = v_0$$
$$v_2\left(1 + \frac{q}{k \cdot n}\right) = v_1$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$v_{n-1}\left(1 + \frac{q}{k \cdot n}\right) = v_{n-2}$$
$$v_n\left(1 + \frac{q}{k \cdot n}\right) = v_{n-1}$$

man erhält also nacheinander

$$v_n = \frac{v_{n-1}}{1 + \frac{q}{k \cdot n}} = \frac{v_{n-2}}{\left(1 + \frac{q}{k \cdot n}\right)^2} = \frac{v_0}{\left(1 + \frac{q}{k \cdot n}\right)^n}$$

und, wenn man in dem letzten Ausdruck n unendlich grofs nimmt

$$v_n = \frac{v_0}{e^{\frac{q}{k}}} = v_0\, e^{-\frac{q}{k}}.$$

Aus den beiden Formeln $p_n = p_0\, e^q$

$v_n = v_0\, e^{-\frac{q}{k}}$ folgt, wenn man die letzte zur kten Potenz erhebt und die linken und rechten Glieder mit einander multipliziert.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

II. $$p_n v_n^k = p_0 v_0^k.$$

Dies ist die gesuchte Beziehung zwischen Druck und Volumen der Gase, wenn kein Wärmeausgleich stattfindet. Man nennt diese Gleichung, welche zuerst von Poisson aufgestellt wurde, die adiabatische Gleichung. —

Die Gleichung II lehrt die Druckveränderung bestimmen, welche einer gegebenen Volumenveränderung entspricht, oder umgekehrt; es entsteht nun die Frage, welches ist die Temperaturveränderung, wenn die Volumen- oder Druckveränderung gegeben ist. Die Beantwortung erfolgt durch Verbindung der Formel I und II.

Bezeichnet t_0 die zum Anfangszustand $p_0 v_0$, t_n die zum Zustand $p_n v_n$ gehörige Temperatur, so ist nach Formel I

$$p_0 v_0 = R(a + t_0)$$
$$p_n v_n = R(a + t_n), \text{ also}$$
$$\frac{a + t_n}{a + t_0} = \frac{p_n v_n}{p_0 v_0};$$

nach Formel II ist aber

$$\frac{p_n}{p_0} = \left(\frac{v_0}{v_n}\right)^k, \text{ also}$$
$$\frac{a + t_n}{a + t_0} = \left(\frac{v_n}{v_0}\right)^{1-k}.$$

Diese Gleichung bestimmt die Temperatur, wenn das Volumen gegeben ist; ist der Druck gegeben, so hat man aus Formel II

$$\frac{v_n}{v_0} = \left(\frac{p_0}{p_n}\right)^{\frac{1}{k}}$$

und gewinnt durch Einsetzen dieses Wertes die Gleichung

$$\frac{a + t_n}{a + t_0} = \left(\frac{p_n}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}.$$

Diese Formeln finden Anwendung bei zwei Versuchen, welche in der Schule gemacht zu werden pflegen.

1) In einer dickwandigen Glasröhre, wie sie bei dem sogenannten pneumatischen Feuerzeug gebräuchlich ist, werde eine 15 cm lange Luftsäule auf 1 cm Länge zusammengepreſst, welches ist die entstehende Temperatur?

Man hat

$$\frac{v_n}{v_0} = \frac{1}{15}, \text{ also}$$
$$\frac{a + t_n}{a + t_0} = \left(\frac{1}{15}\right)^{1-k},$$

nimmt man nun für t_0 18° an und setzt $a = 273$, $k = 1{,}4$, so ergiebt sich

$$273 + t_n = 291 \cdot 15^{0,4};$$

man findet hieraus die Endtemperatur (t_n) von ca. 586°.

2) Im kurzen Schenkel einer kommunicierenden Röhre, wie sie zur Demonstration des Mariotteschen Gesetzes angewendet wird, sei eine Luftmasse unter dem Atmosphärendruck abgeschlossen, durch Aufgieſsen von Quecksiber wird der Druck verdreifacht,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

welches ist das Volumen und die Temperatur der Luft unter der Annahme, dafs kein Wärmeausgleich stattfindet, es ist hier

$$\frac{p_n}{p_0} = 3, \text{ also}$$

$$\frac{v_n}{v_0} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{k}}$$

$$\frac{a + t_n}{a + t_0} = 3^{\frac{k-1}{k}}$$

oder, wenn t_0 wieder gleich 18° genommen wird,

$$v_n = v_0 \cdot 0{,}436$$

$$t_n = 125° \text{ (ca.)}.$$

Da die Wärmekapacität der Luft sehr gering und die Luftmenge verhältnismäfsig klein ist, so wird die Temperaturerhöhung sehr bald ausgeglichen, beim langsamen Zugiefsen von Quecksilber schon während des Versuchs, und v_n wird gleich $\frac{1}{3}$ v_0. —

Poisson fand die adiabatische Gleichung als Integral einer gewissen partiellen Differentialgleichung, die Vorstellung jedoch über das Wesen der Wärme, welche seiner Rechnung zu Grunde liegt, ist unrichtig. Poisson nebst den andern Physikern seiner Zeit hielt die Wärme für einen Stoff und nahm an, dafs die Wärmemenge, welche sich in einem Körper befindet, durch den Zustand desselben bestimmt ist, dafs also beim Gase die Wärmemenge eine Funktion zweier der Veränderlichen p, v, t ist, welche den Zustand bestimmen. Das Irrtümliche dieser Anschauung zeigt folgendes einfache Beispiel. Hat die Wärmemenge, welche das Gas im Zustande p_0 v_0 und im Zustande p_1 v_1 hat, stets eine bestimmte Gröfse, so wird stets dieselbe Wärmemenge nötig sein, um das Gas durch Hinzuführen von Wärme aus dem Zustande p_0 v_0 in den Zustand p_1 v_1 zu bringen. Man kann nun erstens den Druck p_0 konstant lassen und das Volumen durch Erwärmung von v_0 auf v_1 bringen, die dazu nötige Wärme ist

$$Q_1 = c_p \ (t' - t_0),$$

wenn t_0 t' die Temperaturen in den entsprechenden Zuständen bezeichnen. Es ist aber

$$p_0 v_0 = R \ (a + t_0)$$

$$p_0 v_1 = R \ (a + t'), \text{ also}$$

$$t' - t^0 = \frac{p_0 \ (v_1 - v_0)}{R} \text{ und}$$

$$Q_1 = \frac{c_p \ p_0}{R} \ (v_1 - v_0);$$

hält man jetzt das Volumen konstant und erhöht durch Erwärmung den Druck von p_0 auf p_1, so ist die dazu nötige Wärme

$$Q_2 = c_v \ (t_1 - t') \text{ oder da}$$

$$p_0 v_1 = R \ (a + t')$$

$$p_1 v_2 = R \ (a + t_1) \text{ ist,}$$

$$Q_2 = \frac{c_v \ v_1}{R} \ (p_1 - p_0),$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

also die ganze gebrauchte Wärmemenge

$$Q_1 + Q_2 = \frac{c_p\, p_0\, (v_1 - v_0) + c_v\, v_1\, (p_1 - p_0)}{R}.$$

Zweitens kann man in umgekehrter Reihenfolge erst das Volumen festhalten und den Druck auf p_1 bringen und dann den Druck festhalten und das Volumen auf v_1 erhöhen, die dazu nötigen Wärmemengen ergeben sich ähnlich wie vorhin

$$Q_1' = \frac{c_v\, v_1\, (p_1 - p_0)}{R}$$

$$Q_2' = \frac{c_p\, p_1\, (v_1 - v_0)}{R}.$$

Die Differenz der beiden Wärmemengen $(Q_1' + Q_2') - (Q_1 + Q_2)$ ist gleich $\left(\frac{c_p - c_v}{R}\right)(v_1 - v_0)\,(p_1 - p_0)$, also nur gleich Null, wenn $c_p = c_v$ ist, für k war aber schon von Laplace der Wert 1,4 ermittelt. Die Durchführung eines solchen Beispiels hätte also das Irrtümliche der Vorstellung vom Wesen der Wärme gezeigt.

Von den neueren Schriftstellern wird die adiabatische Gleichung gewöhnlich aus der ersten Hauptgleichung, welche im folgenden Paragraphen besprochen werden wird, abgeleitet, aber diese Ableitung verführt leicht zu der Ansicht, dafs die Anwendung des Prinzips der Energie dazu nötig ist; es scheint wichtig zu bemerken, dafs die Formel I und der Wert k die einzigen aus der Erfahrung entnommenen Grundlagen für die adiabatische Gleichung sind.

§ 3.

Das mechanische Wärmeäquivalent.

Am Ende des vorigen Paragraphen wurden die Wärmemengen berechnet, die erforderlich waren, um auf zwei verschiedenen Wegen das Gas aus einem Zustande in einen beliebigen andern überzuführen. Es ist auch einzusehen, dafs, wenn die Überführung auf einem andern Wege geschehen soll, auf welchem der Druck nacheinander die Werte $p_1\, p_2 \ldots p_n$, das Volumen die Werte $v_1\, v_2 \ldots v_n$ annimmt, die Berechnung der Wärmemenge in ähnlicher Weise geschehen kann. Ja auch wenn der Druck und das Volumen nach irgend einem Gesetze sich stetig ändern, ist die Wärmemenge bestimmt, da bei einer solchen stetigen Änderung während einer unendlich kleinen Druckzunahme das Volumen konstant und während einer unendlich kleinen Zunahme des Volumens der Druck konstant gedacht werden kann. Die Berechnung kann mathematische Schwierigkeiten bieten, gedanklich ist die Wärme für jede Art der Überführung bestimmt. Eine Hypothese über das Wesen der Wärme ist bis jetzt nicht zu Grunde gelegt. Darum sind auch die Resultate der älteren Bearbeiter der Wärmetheorie, welche, wie wir sahen, von einer falschen Ansicht ausgingen, dennoch richtig. Aber eine Einsicht in den Grund, weshalb die Wärmemenge auf den verschiedenen Wegen verschieden ist, ist auch nicht gewonnen. Diese wurde erst eröffnet im Jahre 1842 von Robert Mayer. Derselbe ging von der Thatsache aus, dafs bei dem Zusammenstofs und der Reibung der Körper Wärme entsteht und sprach nun folgendes aus. „Ist es nun ausgemacht, dafs für die verschwindende Bewegung keine andere Wirkung gefunden werden kann als die Wärme, für die

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

entstandene Wärme keine andere Ursache als die Bewegung, so ziehen wir die Annahme, Wärme entsteht aus Bewegung, der Annahme einer Ursache ohne Wirkung und einer Wirkung ohne Ursache vor.“ Diese Auffassung der Wärme als einer Art der Bewegung vereinigt sich leicht mit der Ansicht, welche man sich über das Wesen des Lichts, welches die Wärmeerscheinungen häufig begleitet, schon früher gebildet hat. R. Mayer macht weiter den wichtigsten Fortschritt, indem er fortfährt: „Es ist die Frage zu beantworten, wie grofs das einer bestimmten Menge Fallkraft oder Bewegung entsprechende Wärmequantum sei, z. B. wir müssen ausfindig machen, wie hoch ein bestimmtes Gewicht über den Erdboden gehoben werden mufs, dafs seine Fallkraft äquivalent der Erwärmung eines gleichen Gewichts Wasser von 0° auf 1° sei.“ —

Zur Berechnung dieser Gröfse boten sich ihm die Erscheinungen bei den Gasen dar. Wird die Gewichtseinheit eines Gases, welches bei der Temperatur von Null Grad den Druck p_0 und das Volumen v_0 hat, bei konstantem Volumen auf einen Grad erwärmt, so gehört dazu die Wärmemenge c_v, wird dieselbe Erwärmung bei konstantem Druck vorgenommen, so dehnt sich die Gassäule um $v_0\,\alpha$ aus und es wird die gröfsere Wärmemenge c_p gebraucht; bei dem letzten Vorgang hat aber das Gas p_0 Kilogramm $v_0\,\alpha$ Meter hoch gehoben, hat also eine Arbeit von $p_0\,v_0\,\alpha$ Kilogrammmetern geleistet; diese Arbeit setzt Mayer äquivalent der Wärmemenge, welche beim letzten Vorgang mehr gebraucht wird. Entsprechen $c_p - c_v$ Wärmeeinheiten einer Arbeit von $p_0\,v_0\,\alpha$ Kilogrammmetern, so entspricht einer Wärmeeinheit eine Arbeit von

$$\frac{p_0\,v_0\,\alpha}{c_p - c_v}\ \text{kgm}$$

Bezeichnet man

$$\frac{p_0\,v_0\,\alpha}{c_p - c_v} = \frac{R}{c_p - c_v}$$

mit $\mathfrak{A}$ und setzt für R, c_p und c_v ihre experimentell ermittelten Werte, so findet man

$$\mathfrak{A} = 424\ \text{kgm}.$$

Durch andere Versuche, welche allerdings nur mit sehr beschränkten Hilfsmitteln schon von Mayer selbst, besonders aber von Joule angestellt wurden, ergab sich dann, dafs überall, wo eine Arbeit von 424 kgm verschwindet wie bei der Reibung, dem Zusammenstofs von Körpern, eine Wärmemenge entsteht, welche ein kg Wasser von 0° auf 1° zu bringen vermag.

Auf Grund dieses Gesetzes kann man nun die Erscheinungen, welche beim Überführen des Gases von einem Zustande in einen andern sich zeigen, einheitlich auffassen. Betrachtet man z. B. den am Ende des zweiten Paragraphen behandelten Vorgang, so wird dort erstens unter dem Drucke p_0 das Volumen um $v_1 - v_0$ vergröfsert und dann unter konstantem Volumen der Druck auf p_1 gebracht, das Resultat ist eine Erwärmung um $(t_1 - t_0)°$ und eine Arbeitsleistung von $p_0\,(v_1 - v_0)$ kgm; zweitens wird bei konstantem Volumen der Druck auf p_1 erhöht und dann unter dem Druck p_1 das Volumen um $v_1 - v_0$ vergröfsert, es wird also dieselbe Erwärmung von $(t_1 - t_0)°$, aber eine gröfsere Arbeit von $p_1\,(v_1 - v_0)$ kgm geleistet, der Unterschied der beiden Arbeitsleistungen

$$(p_1 - p_0)\,(v_1 - v_0)\ \text{kgm}$$

entspricht einer Wärmemenge von

$$\frac{(p_1 - p_0)\,(v_1 - v_0)}{\mathfrak{A}} = (p_1 - p_0)\,(v_1 - v_0)\,\frac{(c_p - c_v)}{R},$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

das ist der oben gefundene Unterschied der gebrauchten Wärmemengen. Es äufsert sich also nach dieser Anschauung die dem Gase zugeführte Wärme nach zwei Seiten hin, erstens wird die Temperatur erhöht, zweitens wird eine Arbeit geleistet. — Die auf einem Wege mehr geleistete äufsere Arbeit bedingt auch den Verbrauch einer gröfseren Wärmemenge.

§ 4.

Das vollkommene Gas.

Bei der Berechnung des mechanischen Wärmeäquivalents ist stillschweigend angenommen worden, dafs die bei der Erwärmung unter konstantem Druck mehr erforderliche Wärmemenge ganz durch Leistung der äufseren Arbeit verbraucht wird, d. h. dafs keine Arbeit oder Wärme dazu nötig ist, die Moleküle des Gases von einander zu entfernen, oder dafs die Kohäsionskraft, mit der die Teile eines Gases einer Ausdehnung widerstreben, Null ist.

Die Richtigkeit dieser Annahme hatte schon, wie R. Mayer bekannt war, Gay-Lussac experimentell nachgewiesen, genauere Versuche wurden dann von Regnault angestellt. Derselbe brachte zwei durch einen Kanal verbundene Gefäfse, von denen das eine mit komprimierter Luft gefüllt, das andere luftleer war, in einen Behälter voll Wasser (Kalorimeter); wurden nun durch Öffnung eines Hahnes die Gefäfse mit einander in Verbindung gesetzt, so sank zunächst in dem ersten Gefäfs die Temperatur, während sie in dem zweiten stieg; nach Verlauf einiger Zeit zeigte aber sowohl das Gas als auch das Wasser die Anfangstemperatur. Es war also zu der unter dem Druck Null, d. h. ohne Leistung von äufserer Arbeit stattfindenden Ausdehnung keine Wärme verbraucht worden. Es ist aber wichtig zu bemerken, dafs dieses Ergebnis sich deduktiv ableiten läfst, sobald man die ja auch aus andern Versuchen folgende Existenz des mechanischen Wärmeäquivalents und für ein Gas die Gültigkeit des Gay-Lussacschen Gesetzes und die Differenz der specifischen Wärmen c_p und c_v konstant annimmt. —

Denken wir uns nämlich ein Gas in dem beliebigen Zustand p, v, t und nehmen an, es würde bei der durch Erwärmung um einen Grad unter konstantem Druck erfolgenden Ausdehnung aufser der äufseren Arbeit noch die innere Arbeit J geleistet, so müfste die Differenz der specifischen Wärmen c_p und c_v gleich der Wärmemenge sein, welche der bei der Ausdehnung geleisteten inneren und äufseren Arbeit äquivalent ist; setzt man also $\frac{1}{\mathfrak{A}} = A$, so hat man

$$c_p - c_v = A\,J + A\,p\,(v_1 - v)$$

wenn v_1 das neue Volumen bezeichnet.

Nimmt man dieselbe Erwärmung in einem Zustande vor, in welchem der Druck und das Volumen verschieden, die Temperatur aber dieselbe ist, so erhält man ähnlich

$$c_p - c_v = A\,J' + A\,p'\,(v_1' - v')$$

aus beiden Gleichungen ergiebt sich

$$J + p\,(v_1 - v) = J' + p'\,(v_1' - v').$$

Nun ist aber

$$p\,v = R\,(a + t)$$
$$p\,v_1 = R\,(a + t + 1), \text{ also}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$p(v_1 - v) = R; \text{ ebenso erhält man}$$
$$p'(v_1' - v') = R, \text{ also}$$
$$p(v_1 - v) = p'(v_1' - v');$$

daraus folgt, dafs $J = J'$ sein mufs. Denkt man sich nun das erste Mal den Druck sehr grofs und das zweite Mal sehr klein, so mufs umgekehrt die Ausdehnung im ersten Falle sehr klein, im zweiten sehr grofs, aber die innere Arbeit in beiden Fällen gleich sein. Die zu der Ausdehnung erforderliche innere Arbeit wäre also ganz unabhängig von der Gröfse der Ausdehnung, was offenbar sinnlos ist; hieraus folgt, dafs J und J' nur Null sein kann. Legt man andererseits das Ergebnis des Regnaultschen Versuches zu Grunde, so folgt aus der Existenz des mechanischen Wärmeäquivalents und der Gay-Lussacschen Gleichung

$$c_p - c_v = A\,p\,(v_1 - v), \text{ oder da}$$
$$p(v_1 - v) = R \text{ ist,}$$
$$c_p - c_v = A\,R;$$

die Differenz der specifischen Wärme ist dann also konstant. —

Bei der Ableitung der Poissonschen Gleichung war $k\left(\frac{c_p}{c_v}\right)$ konstant genommen worden, wie es sich bei einer Reihe von Gasen durch mannigfaltige Versuche herausgestellt hat. Man kann also die experimentell festgestellten Eigenschaften des Gases, für welches diese Entwickelungen gelten, in zweifacher Weise gruppieren, die Existenz des mechanischen Wärmeäquivalents wird dabei stets angenommen.

Erstens:

1) die Gültigkeit der Formel I,
2) die Konstanz der specifischen Wärmen bei konstantem Druck,
3) die Konstanz der specifischen Wärme bei konstantem Volumen.

Zweitens:

1) die Gültigkeit der Formel I,
2) das Ergebnis des Regnaultschen Versuches, dafs die bei der Ausdehnung mehr zugeführte Wärme ganz zur Leistung der äufseren Arbeit verbraucht wird,
3) die Konstanz von k oder einer der Gröfsen c_p oder c_v.

Ein Gas, welchem diese Eigenschaften zukommen, nennt man ein vollkommenes Gas. —

§ 5.

Das Princip der Energie.

Man kann sich nun auch nach Analogie der Erscheinungen bei den Gasen von der Wirkung der Wärme auf andere Körper eine Vorstellung bilden. Es wird diese Wirkung eine dreifache sein.

1) die Temperatur des Körpers wird erhöht,
2) der Körper dehnt sich aus, d. h. es wird eine innere Arbeit gegen die Kohäsion der Moleküle untereinander geleistet,
3) durch Überwindung eines auf dem Körper lastenden Druckes wird eine äufsere Arbeit geleistet.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Betrachtet man die Temperatur eines Körpers als hervorgebracht durch die Schwingungen der Moleküle desselben, so kann man die Erhöhung der Temperatur als Vermehrung der lebendigen Kraft der sich bewegenden Moleküle auffassen, so dafs die Erhöhung der Temperatur mit einer Arbeitsleistung verglichen werden kann.

Bezeichnet T die lebendige Kraft, J die innere, S die äufsere Arbeit und Q die zugeführte Wärme, so hat man

$$Q = A(T - T_0) + AJ + AS.$$

Nimmt man ferner nach Analogie der Gase an, dafs für jeden Körper eine Gleichung zwischen dem äufseren Druck, dem Volumen und der Temperatur besteht, dafs also der Zustand des Körpers durch zwei der Veränderlichen p, v, t bestimmt ist, und dafs auch die verschiedene Gröfse der Wärmemengen, welche bei der Überführung aus einem Zustand in einen andern auf verschiedenen Wegen gebraucht werden, nur in der Verschiedenheit der dabei geleisteten äufseren Arbeit beruht, so ist die Gröfse $A(T - T_0) + AJ$ durch den Anfangs- und Endzustand bestimmt und kann als Zuwachs einer Funktion angesehen werden, welche von 2 der Variabeln p v t abhängt. Diese Funktion (E) nennt man die Energie des Körpers und das in der Gleichung

$$Q = E_1 - E_0 + AS$$

ausgesprochene Gesetz das Prinzip der Energie.

Für die vollkommenen Gase läfst sich die Funktion E bestimmen.

Soll das Gas aus dem Zustande $p_0\ v_0\ t_0$ in den andern $p_n\ v_n\ t_n$ geführt werden, so läfst sich die Überführung so denken, dafs zuerst bei konstantem Volumen die Temperatur unendlich wenig erhöht, sodann, nachdem der Druck auch den entsprechenden etwas höheren Wert angenommen hat, das Volumen um ein unendlich kleines Stück vermehrt, und diese Operation unendlich oft wiederholt wird. Bezeichnen $q_1\ q_2 \ldots q_n$ die bei den einzelnen Operationen verbrauchten Wärmemengen und $t_1\ t_2 \ldots t_n$, $p_1\ p_2 \ldots p_n$, $v_1\ v_2 \ldots v_n$ die aufeinander folgenden Werte der Temperatur, des Drucks und des Volumens, so ist

$$q_1 = c_v(t_1 - t_0) + A\,p_1(v_1 - v_0)$$
$$q_2 = c_v(t_2 - t_1) + A\,p_2(v_2 - v_1)$$
$$\vdots$$
$$q_n = c_v(t_n - t_{n-1}) + A\,p_n(v_n - v_{n-1})$$

also die ganze hinzugeführte Wärme

$$Q = c_v(t_n - t_0) + A\,[p_1(v_1 - v_0) + \ldots p_n(v_n - v_{n-1})]$$

Der Ausdruck in der Klammer des zweiten Summanden auf der rechten Seite drückt die geleistete äufsere Arbeit aus, der Wert der Summe ist erst angebbar, wenn das Verhältnis der Zunahme des Volumens zu dem Wachsen des Drucks gegeben, d. h. wenn die Art der Überführung aus dem ersten in den zweiten Zustand festgesetzt ist. Der Wert des ersten Summanden hängt nur von der Anfangs- und Endtemperatur ab, ist also für jede Art der Überführung dieselbe. Dieser Summand $c_v(t_n - t_0)$ ist der Zuwachs der Energie. Ist dieselbe also bei der Temperatur Null gleich C, so ist sie bei einer beliebigen anderen Temperatur t

$$E = c_v\,t + C.$$

Die Energie bei den vollkommenen Gasen ist also eine lineare Funktion der Temperatur.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 6.

Graphische Darstellung der Zustandsänderungen. Kreisprozesse.

Auf dem Schenkel eines rechten Winkels, Fig. 1, ist eine Strecke AB vom Scheitel aus abgetragen, stellt dieselbe die Einheit dar, mit welcher das Volumen gemessen wird, so wird jedes beliebige Volumen v durch eine bestimmte Entfernung AC repräsentiert werden können. Ebenso kann auf dem andern Schenkel durch eine beliebig gewählte Strecke die Einheit des Drucks und dann jeder Druck durch eine bestimmte Entfernung vom Scheitelpunkte dargestellt werden. Ein Punkt (P) innerhalb der Schenkel ist durch seine Entfernungen von denselben bestimmt, umgekehrt bestimmt auch jeder Punkt die Entfernungen, also die Werte von v und p, d. h. den Zustand des Gases.

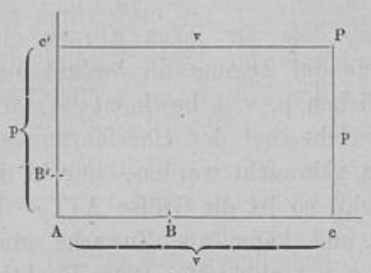

Fig. 1.

Die Punkte einer Kurve bezeichnen eine Reihe von Zuständen, welche stetig ineinander übergehen. Die Art der Überführung aus einem Zustand $p_0\ v_0$ in einen andern $p_1\ v_1$ wird durch eine zwischen beiden Punkten gezogene Kurve festgelegt. In Fig. 2 z. B. bezeichnen die ausgezogenen und die punktierten Linien die Zustandsänderungen,

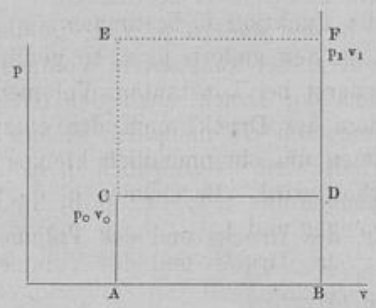

Fig. 2.

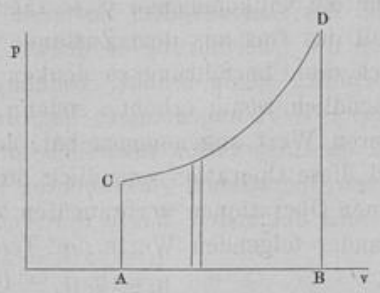

Fig. 3.

welche am Ende des zweiten Paragraphen S. 10 besprochen wurden. Die bei der ersten geleistete Arbeit $p_0\,(v_1 - v_0)$ wird durch das Rechteck ABCD dargestellt, der Flächeninhalt des Rechtecks ABEF bezeichnet die gröfsere im zweiten Falle geleistete Arbeit $p_1\,(v_1 - v_0)$. Ähnlich wird die bei jeder beliebigen Zustandsänderung CD geleistete äufsere Arbeit durch die Fläche ABCD veranschaulicht, denn dieselbe kann aufgefafst werden als die Summe unendlich vieler Rechtecke, deren eine Seite der jedesmalige Druck und deren andere Seite die bei diesem Druck stattfindende unendlich kleine Vergröfserung des Volumens ist.

Geht man von einem bestimmten Punkte $(p_0\ v_0)$ aus und fragt, wo liegen alle die Punkte, welche die Zustände repräsentieren, bei denen die Temperatur dieselbe ist wie im ersten, so findet man zunächst die zu $p_0\ v_0$ gehörige Temperatur aus

$$p_0\,v_0 = R\,(a + t_0)$$

für die übrigen Punkte mufs dann sein

$$p\,v = R\,(a + t_0) = p_0\,v_0.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Punkte liegen also auf dem einen Zweig einer Hyperbel; man nennt diese Kurve die „Temperaturkurve“.

Die Überführung längs einer Temperaturkurve kann man praktisch dadurch ausführen, dafs man den Druck des Gases in einer Umgebung, deren Temperatur konstant bleibt, langsam verändert, dann wird auch das Volumen sich langsam verändern. Die infolge einer kleinen Vergröfserung oder Verkleinerung des Volumens eintretende Erniedrigung oder Erhöhung der Temperatur wird dann durch Zufuhr oder Abgabe von Wärme an die Umgebung sofort ausgeglichen.

Es entsteht nun die Frage, welches ist die zugeführte Wärmemenge und welches ist die geleistete Arbeit, wenn das Gas sich längs einer Temperaturkurve von v_0 bis v_n ausdehnt.

Nach der Gleichung der Energie (S. 15) ist immer

$$Q = c_v (t_n - t_0) + AS,$$

da hier die Temperatur konstant bleibt, ist $t_n - t_0 = 0$, die ganze Wärme wird also zur Leistung der Arbeit verbraucht.

Man kann sich nun die Überführungen in der Weise ausgeführt denken, dafs erst der Druck p_0 auf p_1 erniedrigt wird, dann findet die Ausdehnung $v_1 - v_0$ statt, damit nun die Temperatur konstant bleibt, mufs eine Wärmemenge $\frac{Q}{n}$ von aufsen hinzugeführt werden, welche der geleisteten Arbeit $p_1 (v_1 - v_0)$ äquivalent ist. Wird diese Operation unendlich oft wiederholt, so hat man

$$\frac{Q}{n} = A\, p_1 (v_1 - v_0)$$

$$\frac{Q}{n} = A\, p_2 (v_2 - v_1)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{Q}{n} = A\, p_n (v_n - v_{n-1}).$$

Nun ist aber

$$p_0 v_0 = p_1 v_1 = p_2 v_2 = \ldots p_n v_n$$

setzt man für $p_1\, p_2 \ldots$ die hieraus folgenden Werte ein und löst die Gleichungen nach $v_0\, v_1 \ldots$ auf, so findet man

$$v_0 = v_1 \left(1 - \frac{Q}{n A p_0 v_0}\right).$$

$$v_1 = v_2 \left(1 - \frac{Q}{n A p_0 v_0}\right)$$

$$\vdots$$

$$v_{n-1} = v_n \left(1 - \frac{Q}{n A p_0 v_0}\right), \text{ also}$$

$$v_0 = v_1 \left(1 - \frac{Q}{n A p_0 v_0}\right)^2 = \ldots v_n \left(1 - \frac{Q}{n A p_0 v_0}\right)^n$$

Wird n unendlich grofs, so ist

$$v_0 = v^n e^{-\frac{Q}{A p_0 v_0}} \text{ oder}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\frac{v_n}{v_0} = e^{\frac{Q}{A\,p_0\,v_0}}.$$

Nimmt man auf beiden Seiten die natürlichen Logarithmen, so ergiebt sich

$$Q = A\,p_0\,v_0 \ln \frac{v_n}{v_0}, \text{ oder da}$$

$$p_0\,v_0 = R\,(a + t_0) \text{ ist,}$$

$$Q = A\,R\,(a + t_0) \ln \frac{v_n}{v_0},$$

also die geleistete Arbeit

$$S = R\,(a + t_0) \ln \frac{v_n}{v_0}.$$

Für $\frac{v_n}{v_0}$ kann man auch in diesen Formeln $\frac{p_0}{p_n}$ setzen, da $p_n\,v_n = p_0\,v_0$ ist. —

Geht man von einem Punkt $(p_0\,v_0)$ aus und sucht die Punkte, welche diejenigen Zustände des Gases darstellen, in welche dasselbe ohne Wärmezufuhr von $p_0\,v_0$ aus gebracht werden kann, so hat man für dieselben die Gleichung II

$$p\,v^k = p_0\,v_0^k.$$

Die Punkte bilden eine Kurve, welche mit gröfser werdendem v steiler abfällt als die Temperaturkurve, da $k > 1$ ist. Die Kurve nennt man die „adiabatische Kurve".

Die durch eine gegebene Ausdehnung $(v_n - v_0)$ geleistete Arbeit findet sich hier leicht; da $Q = 0$ ist, hat man nach der Energiegleichung

$$0 = c_v\,(t_1 - t_0) + A\,S, \text{ also}$$

$$S = \frac{c_v\,(t_0 - t_n)}{A},$$

oder wenn man nach der auf Seite 9 gegebenen Formel die Endtemperatur durch das Endvolumen ausdrückt

$$S = \frac{c_v\,(a + t_0)\,(v_n^{k-1} - v_0^{k-1})}{A\,v_n^{k-1}}.$$

Die Arbeit wird hier ganz auf Kosten der Energie des Gases geleistet, während bei der Temperaturkurve die Energie dieselbe bleibt und die zugeführte Wärme in Arbeit verwandelt wird. Geht man umgekehrt zu Werke und führt durch Zusammendrückung dem Gase eine Arbeitsmenge zu, so wird dieselbe auf der adiabatischen Kurve ganz zur Erhöhung der Energie verwendet, während sie bei der Temperaturkurve ganz als Wärme abgegeben wird.

Man kann durch Zufuhr oder Fortnahme von Wärme und Arbeit das Gas eine Reihe von Zuständen so durchlaufen lassen, dafs es wieder in den Anfangszustand zurückkehrt, es wird dabei immer entweder Wärme in Arbeit oder Arbeit in Wärme verwandelt. Man nennt einen solchen Vorgang einen Kreisprozefs.

Führt man z. B. nach Fig. 1 das Gas auf dem punktierten Wege von $p_0\,v_0$ nach $p_1\,v_1$ und dann zurück auf der ausgezogenen Linie, so mufs dem Gase eine bestimmte Wärmemenge auf dem ersten Wege hinzugeführt, auf dem zweiten Wege entzogen werden; die Differenz derselben ist nach S. 11

$$\frac{c_p - c_v}{R}\,(v_1 - v_0)\,(p_1 - p_0).$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Auf dem ersten Wege leistet aber das Gas die gröfsere Arbeit $p_1 (v_1 - v_0)$, während auf dem Rückwege die kleinere Arbeit $p_0 (v_1 - v_0)$ verbraucht wird; es ist also durch diesen Kreisprozefs eine bestimmte Wärmemenge in Arbeit verwandelt; dieser Prozefs könnte nun wiederholt werden. —

Ein anderer Kreisprozefs ist der zuerst von Carnot bearbeitete sogenannte „Carnotsche Kreisprozefs".

Fig. 4 veranschaulicht denselben. Vom Zustand A aus dehnt sich das Gas durch allmähliche Verminderung des Druckes bei konstanter Temperatur (t_1) bis B aus, es nimmt dabei von einer zur Verfügung stehenden Wärmequelle, die immer auf der Temperatur t_1 erhalten wird, eine gewisse Wärmemenge auf und leistet eine bestimmte Arbeit. Von B aus wird das Gas mit einer undurchläfslichen Hülle umschlossen und ebenso durch langsame Verringerung des Druckes bis c ausgedehnt, es leistet dabei auf Kosten seiner Energie eine gewisse Arbeit. Von C aus wird das Gas zusammengedrückt und die entstehende Temperaturerhöhung durch Wärmeabgabe ausgeglichen, so dafs stets die in C vorhandene Temperatur t_0 bleibt, es wird also Arbeit verbraucht und eine gewisse Wärmemenge gewonnen. Diese Zusammendrückung wird fortgesetzt bis zum Punkte D, in welchem die durch A gelegte adiabatische Kurve die durch C gehende Temperaturkurve schneidet, so dafs es möglich ist von D aus durch Zusammendrückung ohne Wärmeabgabe das Gas in den Anfangszustand A zurückzuführen.

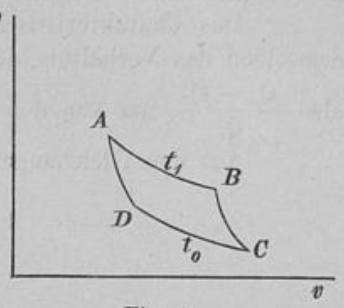

Fig. 4.

Nach den oben gegebenen Formeln können wir die Wärme- und Arbeitsmengen berechnen. Die Indices 0 1 2 3 mögen die Zustände bei A B C D bezeichnen.

1) Die auf dem Wege AB hinzugeführte Wärme ist

$$Q_1 = AR(a + t_1) \ln \frac{v_1}{v_0},$$

die geleistete Arbeit ist

$$S_1 = R(a + t_1) \ln \frac{v_1}{v_0}.$$

2) Auf dem Wege BC ist die Wärme Null, die geleistete Arbeit

$$S_2 = c_v (t_1 - t_0).$$

3) Auf dem Wege CD ist die abgegebene Wärme

$$Q_2 + AR(a + t_0) \ln \frac{v_2}{v_3},$$

die verbrauchte Arbeit

$$S_3 = R(a + t_0) \ln \frac{v_2}{v_3}.$$

4) Auf dem Wege DA ist die Wärme Null, die verbrauchte Arbeit

$$S_4 = c_v (t_1 - t_0.$$

Man sieht zunächst, dafs die geleistete Arbeit S_2 gleich der verbrauchten S_4 ist.

Die durch Ausdehnung des Gases geleistete Arbeit kann man sich auf eine Maschine übertragen denken, es ist dann aber nötig, wieder die Arbeit $S_3 + S_4$ zu ver-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

brauchen, um das Gas auf den ursprünglichen Zustand zurückzuführen und den Prozefs von neuem beginnen zu können, so dafs nur

$$(S_1 + S_2) - (S_3 + S_4) = S_1 - S_3$$

als nutzbare Arbeit verbleibt. Die zur Leistung dieser Arbeit verbrauchte Wärme ist $Q_1 - Q_2$. Es ist also sowohl bei diesem als auch bei jedem andern Kreisprozefs immer nur möglich einen Teil der zugeführten Wärme in Arbeit zu verwandeln.

Das Charakteristische des Carnotschen Kreisprozesses besteht darin, dafs bei demselben das Verhältnis der in Arbeit verwandelten Wärmemenge zur hinzugeführten, also $\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$, nur von den Temperaturen t_1 und t_0 abhängt.

Aus den Gleichungen

$$p_0 v_0 = p_1 v_1$$
$$p_1 v_1^k = p_2 v_2^k$$
$$p_2 v_2 = p_3 v_3$$
$$p_3 v_3^k = p_0 v_0^k$$

folgt nämlich, dafs $\frac{v_1}{v_0} = \frac{v_2}{v_3}$ ist, also

$$Q_1 - Q_2 = A R \ln \frac{v_1}{v_0} (t_1 - t_0) \text{ und}$$

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \xi = \frac{t_1 - t_0}{a + t_1}.$$

Man nennt die Gröfse ξ den „ökonomischen Koefficienten" und eine Maschine, welche durch Ausdehnung eines Gases vermittels zweier Wärmequellen von konstanter Temperatur Arbeit leistet, eine „kalorische Maschine". Nimmt man den Prozefs in umgekehrter Reihenfolge vor, indem man das Gas vom Zustand A in die Zustände D, C, A führt, so wird bei der Zusammendrückung mehr Arbeit verbraucht als bei der Ausdehnung geleistet, dafür aber eine äquivalente Wärmemenge der oberen Wärmequelle zugeführt. Die Differenz der Arbeiten ist natürlich dieselbe wie beim ersten Prozefs, hintereinander ausgeführt, heben sich die Wirkungen beider Prozesse also auf. Alle diese Entwickelungen gelten aber nur unter der Voraussetzung, dafs die Zustandsänderung so langsam erfolgen, dafs die in irgend einer Zeit erzeugte lebendige Kraft der sich bewegenden Massen verschwindend klein gegen die in derselben Zeit geleistete Arbeit ist.

Druck von W. Pormetter in Berlin.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

brauchen, um das Gas auf den ursprünglichen Zustand zurückzuführen und den Prozefs von neuem beginnen zu l

als nutzbare Arbeit verbl eit verbrauchte Wärme ist $Q_1 - Q_2$. Es ist also so andern Kreisprozefs immer nur möglich einen Teil d verwandeln.

Das Charakterist s besteht darin, dafs bei demselben das Verhältnis emenge zur hinzugeführten, also $\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$, nur von

Aus den Gleichu

folgt nämlich, dafs $\frac{v_1}{v_0} =$

Man nennt die enten" und eine Maschine, welche durch Ausdehnun rmequellen von konstanter Temperatur Arbeit leiste nt man den Prozefs in umgekehrter Reihenfolge v A in die Zustände D, C, A führt, so wird bei der raucht als bei der Ausdehnung geleistet, dafür ab oberen Wärmequelle zugeführt. Die Differenz de beim ersten Prozefs, hintereinander ausgeführt, heb se also auf. Alle diese Entwickelungen gelten aber s die Zustandsänderung so langsam erfolgen, dafs d ndige Kraft der sich bewegenden Massen verschwi eit geleistete Arbeit ist.

Grauskala #13 B.I.G.
A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19
C Y M

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf