Erster Teil.

I.

Historisch-Polemisches.

Der vorliegende Versuch verdankt seine Entstehung ebensosehr einer Preisausschreibung wie einem Zeitungsstreit. Wenn man freilich auf die letzten Gründe zurückgeht, so ist auch dieser die Folge jener Auslobung, und man würde das Wolfskehlsche Testament allein als Veranlasser meiner Schrift betrachten dürfen, die nur aus dem Drange entstanden ist, der Wahrheit zu dienen. Jedenfalls aber müssen beide Tatsachen erst gewürdigt und besprochen werden, ehe ich über meine eigenen Ergebnisse bezüglich der Preisfrage berichten kann. Wir wenden uns daher den beiden Männern zu, die für das zu lösende Problem immer von weltgeschichtlicher Bedeutung bleiben werden. Im zweiten Teil soll dann die gewonnene Einsicht durch die reine Mathematik gestützt und ihr so der unauslöschliche Stempel absoluter Wahrheit und logischer Unanfechtbarkeit aufgedrückt werden.

Von den beiden Forschern ist Dühring der bedeutendere. Einerseits deswegen, weil er universeller ist, andrerseits wegen seiner absoluten Wahrhaftigkeit, seiner beispiellosen Unermüdlichkeit im Streben nach der einfachsten Form und den letzten Gründen der Probleme, sowie auch wegen der Vorsicht und Zurückhaltung, der kühlen wissenschaftlichen Reserve, die er bei der Veröffentlichung der von ihm gewonnenen Einsichten bewahrt hat. Deshalb habe ich ihn vorangestellt. Nichtsdestoweniger muß ich ihn beim vorliegenden Vergleich aus historischen Gründen, um sowohl die Aufstellung der Preisfrage, als auch den daran anknüpfenden Streit recht verständlich zu machen, meist an zweiter Stelle behandeln.

Gemeinsam ist beiden Forschern eine außerordentliche Liebe zur Wissenschaft, ein Drang zur Wahrheit und der Wille, diesem Drange um jeden Preis zu folgen. Sonderbar ist, daß beide von Haus aus sich der Rechtswissenschaft zugewandt haben, um dabei daneben die Mathematik zu pflegen. Von Fermat ist uns nicht bekannt, daß er noch anderen Studien obgelegen hat. Dühring dagegen, dessen Universalität wir schon vorher erwähnten, hat sich auf allen möglichen wissenschaftlichen Gebieten bewegt. Er hat dieselben historisch und kritisch behandelt, selbständig aufbauend, begründend und systematisierend, immer das philosophische Ziel im Auge behaltend und nie den praktischen Zweck vergessend. Daher muß man ihn weit über Fermat stellen, welcher auch schon, obgleich viel einseitiger, der Nachwelt eine Anzahl von Aufgaben hinterlassen hat, von denen einige von recht gewandten und bedeutenden Mathematikern erst nach ihm erledigt worden sind, andere den Bemühungen der Fachgelehrten bis heute getrotzt haben. Man mag daraus ersehen, welche Folgen in der Zukunft aus dem Auftreten des vielseitigeren Denkers Dühring sich ergeben werden, wenn die Interessen der gerade

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

im Lehramt Befindlichen der Verbreitung seiner Schriften nicht mehr im Wege sein werden. In der Geschichte der allgemeinen Wissenschaft, die man als Philosophie bezeichnet, sind solche Fälle bereits häufiger zu verzeichnen. Schopenhauer dürfte das krasseste Beispiel hierzu bieten.

Dühring und Fermat sind von den Gelehrten wohl zunächst nur als Laien und Dilettanten betrachtet worden. Bei Fermat hat diese Enge der Anschauung seiner Zeitgenossen nicht lange vorgehalten. Es scheint, daß es ihm früh gelungen ist, in Briefwechsel mit gleichartig Strebenden zu treten, und so eine Anerkennung und Position zu gewinnen, die damals leichter als heut zu erlangen war, weil diese gelehrten Studien, denen er oblag, durchaus keinen anderen Gewinn als Ansehen und Bewunderung einbrachten und für eine angenehme Ausfüllung müßiger Stunden und ein Zeichen hochgeistiger Begabung und Betätigung gehalten und auch dementsprechend bewundert wurden. Keineswegs aber konnten sie, wie heute, als eine Quelle des Erwerbs und als ein Mittel dienen, in gehobene Stellen zu gelangen. Das Mittelalter war daher in diesen Dingen vorurteilsfreier und weniger kleinlich als die Gegenwart. Allerdings haben manche Denker jener Zeit häufig genug weder die Verfolgung gefürchtet, noch auch sich gescheut, zur Sicherung ihres Lebensunterhaltes gewöhnliche Hantierungen zu betreiben, um sich dadurch eine Freiheit und Unabhängigkeit zu sichern, wie wir sie heutigentags wieder an Dühring zu bewundern Gelegenheit haben.

Auch Dühring ist weder Laie noch Dilettant in der Mathematik trotz gegenteiliger Äußerung der die mathematische Literatur beherrschenden Kreise. Schon in früher Jugend von seinem Vater in Berlin auf kürzestem Wege und in praktisch anregender Weise für diese Wissenschaft gewonnen, hat er sie später weder als Schüler des Köllnischen Gymnasiums, noch als Kostgänger des Joachimstalschen jemals ganz aus den Augen verloren. Im Gegenteil haben ihn eigene mathematische Bestrebungen oft für nichtssagende und unerfreuliche Arbeiten auf anderen Gebieten entschädigen und seinen Geist frisch und rege erhalten müssen, wobei wir nicht vergessen wollen zu erwähnen, daß er immer in allen Fächern das Zeugnis guter Leistungen erhalten und das Joachimstalsche Gymnasium als Schulerster verlassen hat. Auch während seines juristischen Studiums und in seiner praktischen Rechtstätigkeit hat er seine Liebe für die strengste aller Wissenschaften nie verloren, so daß er eigentlich schon recht früh bei seiner außerordentlichen Denkschärfe über eine Reihe ansehnlicher Ergebnisse verfügte, welche bei seiner Selbständigkeit aus dem üblichen schulmäßigen Rahmen herausdrängten und ihm ein großes Selbstbewußtsein verliehen. Auch als er nachmals erblindete und der richterlichen Tätigkeit entsagen mußte, hat er sich emsig an logomathische Übungen gehalten und sich dabei immer mehr daran gewöhnt, mathematische Probleme auf die einfachste Form zu bringen und in schärfster Abstraktion zu erfassen, wobei ihm dann sein ohne die übliche Lernschule vom Vater allein ausgebildeter Sohn Ulrich durch gründliche und gewandt durchgeführte Rechenarbeit mit seltener Treue, Hingabe und Selbstlosigkeit zur Seite stand, so daß in den im Jahre 1884 bezw. 1903 erschienenen beiden mathematischen Werken, die als Grundmittel der Mathematik bezeichnet wurden, gleichsam die Arbeiten zweier Forscher vereinigt werden konnten und durchaus Bedeutendes veröffentlicht wurde.

Über den ersten Teil „Neue Grundmittel und Erfindungen zur Analysis, Algebra, Funktionsrechnung und zugehörigen Geometrie. Von Dr. E. Dühring und Ulrich Dühring" habe ich schon einmal in einer mathematischen Arbeit und später in Zeitungsartikeln Gelegenheit gefunden, mich zu äußern. Das erstemal geschah es, als ich Ostern 1901 im Programm des Luisenstädtischen Gymnasiums „Die algebraisch lösbaren irreduziblen Gleichungen fünften Grades"

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

nach Dührings Methode ermittelte. Diese Gleichungen waren bereits bekannt. Ihre Auffindung war umständlich, mühselig, setzte ganz bedeutende Kenntnisse der höheren Mathematik voraus und erforderte ziemlich viel Papier. Am durchsichtigsten war noch die Behandlung eines Amerikaners G. P. Young. Das wurde nun anders! Mit Dühring konnte ich nach Angabe der Grundzüge seiner Betrachtungsweise die Frage auf 15 Seiten unter Voraussetzung der Kenntnisse eines Realabiturienten erledigen. Ich äußerte mich in der Einleitung ungefähr folgendermaßen: „Ich werde mich der Dühringschen Methode bedienen, weil dieselbe gestattet, die Frage endgültig zu entscheiden, und durch ihre Kürze und Klarheit das Studium ganz bedeutend vereinfacht. Ich hoffe dadurch zu zeigen, daß die Dühringsche Methode vollständig einwandfrei ist.“ Das ist gelungen trotz der Gerüchte, die über die Unzulänglichkeit der Dühringschen Methode umherspukten! Dieses Merkzeichen muß ich hier von neuem aufrichten und darauf hinweisen, daß hierdurch eine experimentelle Bestätigung von verblüffender Einfachheit für eine Sache gegeben ist, die für den vorurteilsfreien Denker nach dem Studium Dührings von vornherein klar und sicher ist. Vergeblich sind alle Versuche, wie sie oft genug in den Tageszeitungen gemacht worden sind, alles mögliche von Dühring anzuerkennen, um ihn dann auf dem mathematischen Gebiete höhnelnd als einen Gernegroß hinzustellen. Er ist ein Kenner und Könner höchster Potenz auch hier.

Fermat gilt ohne Frage und mit Recht als einer der bedeutendsten Mathematiker. Wer die geschichtlichen Nachweisungen dieser Wissenschaft auch nur durchblättert, findet ihn daselbst in den verschiedensten Teildisziplinen mit ganz wesentlichen Methoden und Ergebnissen, bewiesenen und vermuteten und auch solchen, für die er den Beweis aus Furcht vor Unterschlagung seiner Urheberschaft zurückzuhalten für gut befindet*). Besonders sind es die Geometrie und die Algebra in der Form der unbestimmten Analytik des Diophant, worin Fermat Hervorragendes geleistet hat. Das Größte aber sind sicher seine Untersuchungen über Maxima und Minima nebst den dazugehörigen Betrachtungen über die Tangentenmethode, die Quadraturen (Flächenberechnungen) und Rektifikationen (Bestimmungen von Bogenlängen) der höheren Kurven. Sie enthalten die sicherste und beste Grundlage der Infinitesimalrechnung für jene Zeit und finden auch heut noch ungeteilte Bewunderung. Wir haben uns hier aber nicht sowohl mit diesem Teil seiner Veröffentlichungen als vielmehr mit den algebraischen zum Diophant in Beziehung stehenden näher zu befassen, und zwar ganz besonders mit derjenigen Behauptung, die zur Errichtung des Wolfskehlpreises geführt hat.

Multipliziert man eine Zahl, z. B. 3, mit sich selbst, so nennt man das entstehende Produkt 3.3 das Quadrat von 3. Dasselbe gibt den Inhalt eines Quadrats, dessen Seite drei Längeneinheiten hat, richtig in den 9 zugehörigen Fächeneinheiten an. Nun sagt der berühmte pythagoreische Lehrsatz, welcher bekanntlich das Fundament der ganzen höheren Mathematik bildet, daß in einem rechtwinkligen Dreieck die Summe der Kathetenquadrate gleich ist dem Hypotenusenquadrat. Sind x und y die Maßzahlen der Katheten, und ist z die der Hypotenuse, so wird die rechnerische Form dieses Lehrsatzes lauten $x^2+y^2=z^2$. Ist nun weiter $x=3$, $y=4$,

*) Es ist eigenartig und muß nachdenklich stimmen, daß auch ihm die häßlichen Erfahrungen nicht erspart worden sind, über die Dühring so häufig Klage führt und durch welche er veranlaßt worden ist, seine Lösung des großen Fermatschen Rätsels zurückzuhalten. Zu diesem Grund für seine Zurückhaltung kommt ein zweiter. Er hat keine Eile, da er nach seinen eigenen Erklärungen den ihm nur quer gekommenen Wolfskehlpreis aus Gesinnungsgründen zurückweisen müßte und keineswegs, die Flecksche Jagd nach dem Wolfskehlpreise mitzumachen, Neigung hat.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

so wird $3^2+4^2=9+16=25$, d. h. 5^2. Ebenso ist $12^2+5^2=13^2$. Es gibt eine ganze Reihe natürlicher ganzer positiver Zahlen, welche diese unbestimmte Gleichung $x^2+y^2=z^2$ befriedigen. Man nennt sie pythagoreische Zahlen. Die Gleichung heißt unbestimmt, weil man für x eine unbeschränkte Anzahl natürlicher Zahlwerte finden kann derart, daß dazu jedesmal auch ein natürlicher Zahlwert von y und von z gehört, die Lösung gibt unbestimmt viele Werte für x. Bezeichnet man durch a und b zwei beliebige natürliche Zahlen, so gelingt es, alle Werte jeder der drei Unbekannten auf einmal hinzuschreiben, d. h. also sie durch eine Formel wiederzugeben. Es ist nämlich $x=a^2-b^2$, $y=2\,ab$, $z=a^2+b^2$. Für $a=2$, $b=1$ findet man $x=3$, $y=4$, $z=5$; für $a=3$, $b=2$ wird $x=5$, $y=12$, $z=13$ usw. Diese Tatsache und auch ihre beweiskräftige Ableitung sind schon lange bekannt gewesen. Der Inder Brahmagupta soll sie besessen haben und der Grieche Diophant hat sie schriftlich überliefert. Fermat, welcher sich für die Eigenschaften der ganzen Zahlen und damit zusammenhängende Spielereien ganz besonders interessierte, hat die Gleichung $x^2+y^2=z^2$ neben anderen unbestimmten von Diophant der Nachwelt überlieferten Gleichungen mit Leidenschaft bearbeitet und dabei eine große Zahl merkwürdiger und geistreicher Entdeckungen gemacht, die er seinen Zeitgenossen bisweilen mitteilte, bisweilen auch nur in Form von Aufgaben und Rätseln zukommen ließ, um sie zur Betätigung ihrer geistigen Kräfte anzuregen, vielleicht auch, um sie seine Überlegenheit fühlen zu lassen. Es ist wirklich erstaunlich, welches Geschick er darin besaß und wie vielseitig seine Erfindungskraft uns in seinen nachgelassenen Werken, Briefen und Aufzeichnungen entgegentritt. Oft benutzte er den Rand seiner Diophantausgabe, um besonders merkwürdige Ergebnisse aufzuzeichnen. Es scheint fast, daß er die Absicht gehabt hat, eine Neuausgabe dieses Buches vorzunehmen und diese Anmerkungen dabei zu verarbeiten. Dazu ist es nun freilich nicht gekommen. Sein Sohn hat später den so bereicherten Diophant herausgegeben und der Nachwelt damit eine ganze Reihe von Rätseln aufgegeben. Fermat war Parlamentsrat in Toulouse und hatte als solcher gewiß ein großes Arbeitspensum zu bewältigen. Daher wird es ihm an der nötigen Zeit gefehlt haben, seinen Lieblingswunsch zur Ausführung zu bringen. Dazu kann man wohl seine außerordentliche Fruchtbarkeit besonders auf zahlentheoretischem Gebiet als ein zweites recht bedeutendes Hindernis für diese mühevolle Arbeit ansehen.

Multipliziert man x^2 noch einmal mit x, so setzt man $x.x.x=x^3$ und nennt das den Kubus von x oder die dritte Potenz. Dieser Ausdruck gibt den Rauminhalt eines Würfels oder Kubus in cbm, wenn die Kante x m lang ist. Multipliziert man dann x^3 wieder mit x, so wird $x.x.x.x=x^4$ und heißt die vierte Potenz oder das Biquadrat von x und so fort. Man sieht hieraus, daß unter x^7 ein Produkt verstanden wird, das sieben gleiche Faktoren x enthält. Fermat bemühte sich nun, zunächst durch Ausprobieren zwei Würfel oder Kuben zu finden, deren Summe wieder einen Würfel gibt derart, daß die Kanten aller drei durch ganze Zahlen ausgedrückt werden. Sein Versuch scheiterte, er fand solche Zahlen nicht. Darauf untersuchte er die Biquadrate in der gleichen Weise, um schließlich auch hier einzusehen, daß es ihm nicht gelingen werde, die Aufgabe zu lösen. Diese Tatsache schrieb er an den Rand seines Diophant, und er fügte noch hinzu, daß er für die Unmöglichkeit der Lösung einen wunderbaren allgemeinen Beweis besitze, den er aus Mangel an Raum an dieser Stelle nicht wiedergeben könne. Nach seinem Tode haben viele Mathematiker es versucht, einen solchen Beweis zu finden, aber all ihr Mühen war vergeblich. Der Satz wurde auf beliebige, d. h. n^{te} Potenzen erweitert, und es wurde nun behauptet, die Gleichung $x^n+y^n=z^n$ sei in ganzen Zahlen unlösbar, sobald n größer als 2 ist; die Auffindung des Beweises wurde dadurch nicht leichter. Später hat dann Euler einen Beweis für

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

n = 4, Dirichlet einen solchen für n = 5 gegeben, Kummer gab ihn für fast alle Primzahlen unter 100. Der allgemeine Beweis jedoch steht noch immer aus, und so kam es, daß der Darmstädter Dr. Wolfskehl, der sich selbst viel mit Beweisversuchen dieser Art beschäftigt hatte, einen ganz außerordentlich hohen Preis von 100 000 M. für denjenigen aussetzte, dem es gelingen würde, diesen Beweis zu finden. Im Jahre 1907 ist die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen durch Testament zur Hüterin und Verwalterin dieses Preises ernannt und verpflichtet worden, in jedem Jahr mindestens einmal in geeigneten Blättern die Aufforderung zur Lösung der Preisaufgabe zu veröffentlichen. Für die Preisbewerbung ist eine Frist von 100 Jahren gesetzt worden. Sollte die Aufgabe während dieser Zeit keine Erledigung finden, so kann alsdann die Göttinger Gesellschaft den Preis für einen andern mathematischen Zweck bestimmen. Inzwischen können die Zinsen des Vermächtnisses von der Verwalterin verbraucht werden, insbesondere auch, um die Zensoren der einlaufenden Bewerbungen für ihre Mühe zu entschädigen. Kaum waren diese Festsetzungen bekannt geworden, als auch schon eine Flut von Arbeiten die Göttinger überschüttete. Nach den erstatteten Berichten sind die meisten derselben laienhaft und die wenigsten derselben von richtig geschulten Mathematikern verfaßt; keine einzige kann ernsthaft in Frage kommen. Das sieht traurig aus, war aber wohl kaum anders zu erwarten.

Dühring sind die Höhen der Mathematik ebensowenig fremd, wie die der Mechanik. In dieser war er als einer der gründlichsten Kenner durch den im März 1872 unter den Ausdrücken höchster Anerkennung und größten Lobes von der Göttinger Universität verliehenen Preis der Benekestiftung im Betrage von 500 Talern Gold bezeichnet worden. Natürlich hatte er ebenfalls auf den großen Fermatschen Satz, wie die schon früher wiederholt gestellte Preisaufgabe gewöhnlich genannt wird, stoßen müssen. Lange vor der Ausschreibung des Wolfskehlpreises beschäftigte auch ihn dieses Problem, an dem er nach seinen Mitteilungen in den achtziger Jahren (1886) den ersten nennenswerten Erfolg verzeichnen konnte. Durch eine Notiz des Reichstagsabgeordneten und ehemaligen Gymnasialoberlehrers Prof. C. Metger, der ein Werk über Gleichungen herausgegeben hat, in welchem er anhangsweise auch die Lösung der Gleichungen dritten und vierten Grades nach der Dühringschen Methode mitteilt, wurde ich von den Erfolgen unterrichtet. In der Nr. 259 des „Tag" vom Jahre 1911, in Nr. 585 der „Magdeburgischen Zeitung" 1911 machte er bekannt, daß Eugen Dühring und sein Sohn Ulrich die Lösung des großen Fermatschen Satzes besitzen müßten. Dies gehe aus Andeutungen in der Dühringschen Halbmonatsschrift „Personalist und Emanzipator" ganz sicher hervor. Gegen Metger und den von ihm präsentierten älteren Fermatlöser polemisierte nun in Nr. 594 und Nr. 628 Herr Dr. W. Ahrens, ein Herausgeber mathematischer Anekdoten sowie mathematischer Unterhaltungen und Spiele. Auch ich ergriff dann dazu in Nr. 633 das Wort gegen Ahrens für Dühring und im Sinne Metgers, wobei ich rein sachlich bleiben konnte, da ich mich auf die im Programm 1901 aufgezeigten guten Erfahrungen mit der Methode der Dühringschen Gleichungslösung berufen konnte. Dieser Zeitungsstreit hat nie ganz geruht. Herr Ahrens hat immer wieder gesprochen, Herr A. Moszkowski hat es ebenfalls getan, z. B. im „Berliner Tageblatt" Nr. 98 und 196, nachdem Herr Metger eine neuerliche Veröffentlichung im roten „Tag" Nr. 24 und ich selbst in Nr. 33 des Jahres 1913 hatten erscheinen lassen. Auch in anderen Zeitungen tauchten Artikel darüber auf. Die wichtigsten sind außer den schon erwähnten:

1910. Roter „Tag" Nr. 259 „Das Fermatproblem." Von Prof. Dr. Metger.

1911. „Neue Züricher Zeitung" Nr. 100 „Das Fermatsche Beweisproblem".

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

1911. „Deutsche Tageszeitung“ Nr. 99 „Dühring und das Fermat-Problem“. Von Ph. Stauff.
„Wissenschaftliche Rundschau“ Heft 17 „Die beiden Dührings und die Fermatlösung“. Von Prof. Dr. Döll.
„Vossische Zeitung“ Nr. 301.
„Staatsbürger-Zeitung“ Nr. 132 und 142.

1912. Roter „Tag“ Nr. 48 „Neues vom Fermat-Problem“. Von Prof. Dr. Metger. — „Tag“ Nr. 58.

1913. „Berliner Allgemeine Zeitung“, 9. Februar, „100 000 Mark für eine Rechenaufgabe“. Dr. E. Breitner.
„General-Anzeiger der Stadt Frankfurt a. M.“ Nr. 52 „Warum veröffentlicht Dühring seine Fermatlösung nicht?“. Von Dr. Georg Biedenkapp.
„Echo“ Nr. 1590 und 1591.

1914. Züricher Halbmonatsschrift „Wissen und Leben“, Heft 9, S. 556, „Zum Fermatproblem“. Von Hermann Meyer.

Bei dieser Gelegenheit mag ein Irrtum des Herrn Ahrens berichtigt werden. Nach ihm soll Herr Metger*) kein Mathematiker sein! Ich denke, meine Nachweisungen haben ergeben, daß er es sicherlich ebensosehr ist wie Herr Ahrens selbst.

Der schwerste und zugleich der einzige sachliche Angriff gegen Dühring und die Vorkämpfer seiner Fermatlösung erfolgte am 1. Juni 1913 in der Sonntagsbeilage Nr. 22 zur „Vossischen Zeitung“ Nr. 272 von Herrn Albert Fleck durch den Artikel „Die Jagd nach dem Wolfskehlpreise“. Aber auch er hat weder Herrn Metger noch mich überzeugt. Unsere Entgegnung ist von der „Vossischen Zeitung“ unter ziemlich nichtigen Gründen abgelehnt worden. Die Antwort von Prof. Metger konnte in der Nr. 198 der „National-Zeitung“ vom Jahre 1913 erfolgen, während die meinige als Manuskript gedruckt nur unsern Freunden zugehen konnte. Sie steht also noch aus und soll bei dieser Gelegenheit recht gründlich und sachlich gegeben werden. Sie wird die Behauptung vernichten, Dühring begehe zwei Irrtümer. Der eine, schreibt Herr Fleck, bestehe darin, daß er meine, in der von ihm skizzierten Art könne das fragliche Problem gelöst werden. Sonderbarerweise steht bezüglich dieses Irrtums Flecks Mitkämpfer Herr Moszkowski auf unserer Seite, so daß in diesem Punkte im gegnerischen Lager ein schroffer Gegensatz waltet, bei dem Herr Moszkowski im Recht ist. Die bloße Erwähnung dieser Meinungsdifferenz könnte genügen, das Gespenst dieses Irrtums für erledigt anzusehen. Im Interesse der Sache wird es aber besser sein, wenn ich mit eigenen Mitteln den Fleckschen Fehler bekämpfe und zurückweise.

Wenn ich den Angriff als den schwersten bezeichnete, so dachte ich dabei an die Autorität, die Herr Fleck, der Mathematiker und Arzt ist, in den Kreisen der Fachgelehrten als Spezialist der Zahlentheorie genießt. Diese Autorität machte die „Vossische Zeitung“ geltend, um unsere Entgegnung abzulehnen! In seinem Artikel erwähnt Herr Fleck, daß er bereits Hunderte der eingelaufenen Arbeiten durchgesehen, ihre Fehler festgestellt und diese Fehler im Archiv für Mathematik und Physik veröffentlicht habe, wenn die Behandlungen des Themas nicht gar zu unbedeutend waren. Daraus geht deutlich hervor, daß er sich als einen Beauftragten ansieht. Erkundigungen in Fachkreisen haben ergeben, daß ihm die betreffenden Arbeiten

*) Kleyer Encyklopädie. Lehrbuch der Gleichungen 3. und 4. Grades von Prof. Conrad Metger. Bremerhaven 1892.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

tatsächlich von Göttingen zugesandt worden sind. Ferner betont er selbst, daß er die Literatur genau kenne und sie im Taschenbuch für Mathematiker und Physiker, dritter Jahrgang, 1913, Seite 103 angegeben habe. Auch bin ich selbst gelegentlich von akademischen Kreisen auf Herrn Fleck als Kenner der Zahlentheorie hingewiesen worden. Danach gewinnt es fast den Anschein, als sollte Herr Fleck — mindestens bei dem Vorrennen um den Preis — einen nicht zu unterschätzenden Einfluß gewinnen.

Sachlich nannte ich den Angriff deshalb, weil Herr Fleck sich bemüht, auf eine Herausforderung Dührings zu antworten, gegen welche bis dahin kein Fachgelehrter reagiert hatte. Auch der sonst so schreibselige Herr Ahrens hatte nichts von sich hören lassen. Ich war der einzige, der als Freund Dührings die Lösung der von ihm gestellten Aufgabe im roten „Tag" Nr. 33 vom Jahre 1913 angedeutet hatte. Ich werde sie in dieser Arbeit so vollständig geben, wie sie bisher nirgends gegeben ist. Herr Fleck will es in seiner „Jagd nach dem Wolfskehlpreise" ebenfalls getan haben und kommt dabei zu dem Ergebnis, daß die Lösung etwas recht Altes sei und daß Dühring sich daher gewaltig irre, wenn er in dem von ihm vorgelegten Problem und seiner Erledigung etwas Neues sehe. Das bezeichnet Herr Fleck als den ersten Irrtum Dührings, um dann später noch den zweiten viel schwereren anzufügen. Gemach, gemach! So steht es denn nun doch nicht. Herrn Flecks Lösung ist noch lange nicht allgemein. Sie enthält in sich eine noch nicht aufgelöste zahlentheoretische oder unbestimmt analytische Gleichung. Diese wäre erst noch zu beseitigen, um die allgemeine Lösung zu erhalten. Dieser letzte Schritt ist für mich nicht schwer, ja sogar leicht und in einer einzigen Zeile anzudeuten. Da ihn aber Herr Fleck nicht macht, muß ich annehmen, daß er ihm entgangen ist. Auf eine Zeile oder einige wenige würde es ihm im Interesse der Abfertigung Dührings, wie man der ganzen Arbeit anmerkt, gewiß nicht angekommen sein. Die Niederlage Dührings war ja ihr ausgesprochenes Ziel. Ist die ersehnte völlige Abfuhr unterblieben, so kann es nur daran gelegen haben, daß die Mittel dazu gefehlt haben. Dem Triumph über den Besitz der herausgeforderten Lösung schließt sich bei Herrn Fleck die Freude darüber an, daß die Methode eine altbekannte sei. Oh, weh! Freilich, das geben auch wir gern zu: Herrn Flecks Weise (nicht Methode), zur Lösung zu gelangen, ist recht schön alt. Wir finden alles dazu Nötige in Nr. 170 des zweiten Abschnitts der Eulerschen Algebra (1770. Von der unbestimmten Analytik). Außerdem ist sein Verfahren gar keine eigentliche Methode. Er beginnt mit einer Identität, die er dadurch schmackhafter zu machen sucht, daß er sie eine allbekannte nennt. Dann macht er einige willkürliche Satzungen, die zur Gewinnung der Lösung ganz geeignet sind, aber unbegründet und unvermittelt erscheinen und gewissermaßen ein Rätsel darstellen, das ersonnen wurde, um das erste Rätsel zu lösen. Das alles sind Kunstgriffe; Kunstgriffe sind aber keine Methode! Was ist übrigens allbekannt? Ich habe bei Lösung einer andern diophantischen Gleichung [$x^3+y^3=z^2$], welche der Dührings chen Herausforderungsgleichung [$x^2+y^2=z^3$] verwandt ist, gefunden, daß dabei eine gewisse einfache, sagen wir primitive, Identität eine recht bedeutsame Rolle spielt, ja gleichsam den Schlüssel zur Lösung darstellt. Gehe ich von dieser Identität aus, ohne ihre Ableitung zu verraten, so kann ich durch geeignete von mir beliebte Satzungen die Lösung der Gleichung erhalten. Wo es sich um schnelle Ermittelung und Angabe der Lösung handelt, kann das auch ganz passend und praktisch sein. Ich darf dann aber nicht behaupten, daß ich der Aufforderung, eine methodische Ableitung zu geben, entsprochen habe. Somit ist das, was Herr Fleck als den ersten Irrtum Dührings bezeichnet, nichts anderes als ein einziger großer Irrtum des Herrn Fleck selbst.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Das, was in der „Jagd“ als der zweite „irreparable“ Irrtum Dührings erörtert wird, habe ich schon vorher gestreift, als ich Herrn Moszkowski erwähnte, der sich in persönlicher und politischer Beziehung als ein Gegner Dührings erklärt. Warum hat der große Fermatsche Satz bisher den Bemühungen der Mathematiker getrotzt? Weil man, sagt Dühring, die ganze Frage zu eng gefaßt hat. Man hat das Problem zahlentheoretisch in Angriff genommen und geprüft: gibt es ganze Zahlen, welche der Gleichung $x^n+y^n=z^n$ genügen, wenn n größer als 2 ist? Das war ein Fehler, fährt er fort. Bei dieser Fragestellung wird man nie zu einer restlosen Erledigung gelangen, weil die Fragestellung zu eng ist. Ganz anders wird das, sobald man untersucht, ob sich rationale Lösungen dieser Gleichung nicht in bestimmten Zahlen, sondern in Buchstaben finden lassen, insbesondere ob es möglich ist, die drei Unbekannten (x, y, z) als rationale ganze Ausdrücke von zwei Elementargrößen g und h zu bestimmen. Diese Frage läßt sich erledigen, und sie schließt die Lösung der andern ein. Denn setzt man für g und h beliebige ganze Zahlen, so erhält man auch ganze Zahlen für x, y und z. Mit Rücksicht hierauf sagt Moszkowski: „Dühring verwirft die zahlentheoretische Behandlung des Problems, das er vielmehr gänzlich von der algebraischen Flanke aus angreift. Nicht die Ganzzahligkeit der Grundzahlen (x, y, z) steht ihm im Vordergrunde, sondern weit darüber hinaus: deren Rationalität: und auf umständlichen Wegen will er dem Satze näher kommen, daß jene Unglücksgleichung für Rationalzahlen überhaupt verschlossen sein müsse. Er möchte also viel mehr beweisen, als verlangt wird; er erschwert die Aufgabe, weit ausholend, um mit der Lösung des Schwierigeren zugleich die Lösung des Leichteren als eines Spezialfalls darzubieten.“

Ganz anders urteilt Herr Fleck hierüber und konstruiert dadurch den zweiten — den irreparablen — Irrtum Dührings als eine verfehlte Auffassung des Hauptproblems. Er schreibt: „Denken wir es als völlig feststehend, daß Dühring von irgend welchen Ausdrücken mit g und h durchaus richtig bewiesen hätte, daß die Fermatsche Gleichung durch sie nicht lösbar ist, so ist damit das Fermatproblem noch nicht im entferntesten gelöst, sondern nur die folgende Behauptung bewiesen: Durch rationale Ausdrücke mit Buchstabengrößen g und h ist die Gleichung nicht lösbar, oder: Es gibt keine rationalen Ausdrücke mit Buchstabengrößen g, h usw., welche für jedes mögliche Spezialwertsystem der g, h die Gleichung erfüllten. Dann ist aber noch nicht bewiesen, daß auch nicht ein einziges bestimmtes Wertsystem der g, h, z. B. $g=3$, $h=5$ gesetzt, der Gleichung genügen kann. Erst dies wäre die Behauptung Fermats. Es könnte sehr wohl eine bestimmte Zahlenlösung geben, wenn auch keine Lösung durch algebraische Formen vorhanden ist.“ Ich teile diese Meinung nicht, sondern ich bin der Ansicht Moszkowskis und berufe mich dabei außerdem noch darauf, daß die Fleckschen Ausführungen allen Eingeweihten längst bekannt waren, dem Inhalte nach auch längst gedruckt worden sind. Wie naiv möchte er uns den auch von den Gegnern als Denker und wohlbewanderten Forscher anerkannten Dühring hinstellen! Aber ich bin damit noch nicht am Ende meiner Gegenrede. Wer wirklich mit voller Energie und unbeugsamem Entschluß an die rein algebraische Lösung gegangen ist, muß es bald eingesehen haben, daß eine etwa vorhandene beschränkte Anzahl von Lösungen durch diesen Weg nicht verschlossen wird. Setzt man x, y, z als ganze rationale Ausdrücke von g und h, so hat man die Koeffizienten dieser Ausdrücke zu bestimmen, um zur Lösung zu gelangen. Ist das unmöglich, so besteht der nächste Ausweg darin, daß man h als eine rationale Funktion von g betrachtet, d. h. x, y, z als solche Funktionen von g allein ansieht. In der zu suchenden Identität für $x^n+y^n=z^n$ sind dann wieder die unbestimmten Koeffizienten von g in den Ausdrücken für x, y und z zu berechnen. Nimmt man nun für g beliebige ganze

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zahlwerte, so würde man immer noch unbeschränkt viele Wertsysteme x, y, z der verlangten Art erhalten. Man pflegt zu sagen, es gebe jetzt nur einfach unendlich viele Resultate, während vorher zweimal unendlich viele vorausgesetzt wurden. Bei dieser Rechnung kann es sich ereignen, daß eine rationale Auflösung der gefundenen Bedingungsgleichungen allgemein, d. h. für beliebiges g unmöglich ist, daß sie sich aber erreichen läßt, wenn man für g nur einen oder einige wenige Zahlenwerte gestattet dadurch, daß man die entstehende Gleichung in g auflöst, statt die Koeffizienten gleicher Potenzen von g zu identifizieren bzw. zu nullifizieren. Man erhält dann diejenigen Resultate, welche nach der Meinung des Herrn Fleck eigentlich nur die Zahlentheorie liefern könnte. Die algebraische Methode läßt sich daher so handhaben, daß sie auch etwaige singuläre Lösungswerte mit umfaßt. Der Zahlentheorie bedarf es dazu nicht. Verfolgt man den angegebenen Weg für $x^3+y^3=z^3$ und $x^4+y^4=z^4$, so ergeben sich freilich nur die Grenzlösungen $x=0$, $y=g^n$ oder $x=g^n$, $y=0$, $n=3$ bzw. 4. Damit wäre dann aber gezeigt, daß es überhaupt keine Lösungen dieser beiden Gleichungen gibt: weder allgemeine in doppelt- oder einfach-unbeschränkter Zahl noch auch singuläre. Hätte aber Herr Fleck recht, und würde Dühring nur die allgemeine Unlösbarkeit aller Gleichungen $x^n+y^n=z^n$ zeigen können und ließe er die singulären unerledigt, so wäre auch das schon ein ganz bedeutender und mit Freude zu begrüßender Fortschritt in dieser unerfreulichen Gleichungsfrage, und man müßte deshalb wünschen, daß Dühring selbst dann zu einer Veröffentlichung seiner Behandlungsweise angeregt werden möchte.

Ich will nun diese auch Nicht-Fachleuten großenteils verständliche Betrachtung schließen, um mich der rein mathematischen Behandlung zuzuwenden. Zuvor zitiere ich aber noch einmal Herrn Moszkowski, um zu zeigen, daß es auch Gegner Dührings gibt, die seine mathematische Bedeutung anerkennen. „Gruppieren wir wieder die Wahrscheinlichkeiten nach den bisher erlebten Eindrücken, so sind die günstigsten Momente vorwiegend der Person Dührings, nicht „dem Personalist" zuzuschreiben. Auf dem Verdienstkonto der Person steht die „kritische Geschichte der Prinzipien der Mechanik", jenes Wunderwerk tiefgründigen Denkens und vollendeter Darstellung, das seinem Urheber vor 41 Jahren den großen Benekepreis der Göttinger Fakultät eingetragen hat. Wenn der Autor eines solchen Werkes mit der positiven Behauptung hervortritt, „ich habe gefunden", so wirft er damit ein gewaltiges Gewicht an Glaubwürdigkeit in die Wagschale."

II.

Formal-Mathematisches.

§ 1.

Man soll die rationalen Lösungen der Gleichung

$$x^2+y^2=z^3 \quad (1)$$

suchen. Hierin sind zwei Größen willkürlich, die dritte ist abhängig; welche man als unabhängig ansieht, ist gleichgültig. Wir behandeln zunächst den einfachsten Fall: z habe keinen reellen Teiler, und die komplexen Faktoren, welche bei der Zerlegung von z auftreten, seien alle verschieden. Aus der Summe x^2+y^2 ist die dritte Wurzel nicht ohne weiteres ausziehbar. Damit sie es werde, müssen x und y als algebraische Ausdrücke zweier neuen Größen a und b dargestellt werden, die wir Elementargrößen nennen. Da es sich bei der Lösung der Gleichung (1) bisher immer um ganze Zahlen gehandelt hat, setzen wir x und y als ganze rationale

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ausdrücke von a und b; ebenso sei z beschaffen. Setzen wir die höchste Dimension der Summanden in x und y gleich μ, die in z gleich ν, so wird die der linken Seite in (1) gleich 2μ, die der rechten gleich 3ν, und es folgt $2\mu = 3\nu$ oder $\mu : \nu = 3 : 2$. Also ist

$$\mu = 3k,\ \nu = 2k,\ k = 1, 2, 3 \ldots n. \quad (2)$$

Wir betrachten zunächst den einfachsten Fall $k=1$, $\mu=3$, $\nu=2$. Dann sind x und y ganze rationale Ausdrücke höchstens vom Grade 3, z ist vom Grade 2, und eine der Größen x, y muß den Grad 3 haben. Bezeichnet ε_n jede n^{te} Einheitswurzel, so gilt Gleichung (1) auf für $\varepsilon_2 x$, $\varepsilon_2 y$ und $\varepsilon_3 z$. Um auch diese Lösungen mitzuerhalten, müssen wir für a und b die Substitutionen $\varepsilon_6 a$ und $\varepsilon_6 b$ zulassen. Das ergibt, daß x, y homogene Funktion dritten Grades sein müssen, z eine homogene Funktion zweiten Grades sein muß. In allen Summanden von x und y muß nämlich der gemeinsame Faktor ε_6^3, in z dagegen ebenso ε_6^2 auftreten.

Es wird daher
$$\left.\begin{aligned} x &= p_3a^3 + p_2a^2b + p_1ab^2 + p_0b^3 \\ y &= q_3a^3 + q_2a^2b + q_1ab^2 + q_0b^3 \\ z &= r_2a^2 + r_1ab + r_0b^2 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Dabei gehören zu dem $\varepsilon_3 z$ zunächst zwei Wertepaare x, y, nämlich $\varepsilon_2 x$, $\varepsilon_2 y$ und $\varepsilon_2^2 x$, $\varepsilon_2^2 y$. Zu jedem dieser Wertepaare gehören drei Werte von z, nämlich $\varepsilon_3 z$, $\varepsilon_3^2 z$ und $\varepsilon_3^3 z$. Hierbei sind ε_2 und ε_3 primitiv gedacht. Nach der Gleichung (1) darf man jederzeit x mit —x und ebenso y mit —y vertauschen, ohne daß z sich zu ändern braucht. Um dieses zu erreichen, muß man in den Ausdrücken für x, y und z die Substitutionen (a,—b), (—a,b) und (—a,—b) machen. Damit sich dabei z nicht ändert, muß der Koeffizient r_1 von ab verschwinden,

$$z = r_2a^2 + r_0b^2 \quad (4a)$$

Darum bekommt z^3 nur gerade Potenzen von a und b. Dasselbe gilt von x^2+y^2. Damit (a,—b) und (—a,b) die Ausdrücke x und y in —x und —y überführen, müssen in (3) einige Koeffizienten nullifiziert werden. Läßt man x mit a^3 beginnen, so müssen darin a^2b und b^3 fehlen, und in y müssen entsprechend a^3 und ab^2 ausfallen. Somit wird

$$\left.\begin{aligned} x &= p_3a^3 + p_1ab^2 \\ y &= q_2a^2b + q_0b^3 \\ z &= r_2a^2 + r_0b^2 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Durch Einsetzen von (4) in (1) folgt weiter $p_3^2 = r_2^3$ und $q_0^2 = r_0^3$, d. h. wenn $r_2 = \varrho^2$ und $r_0 = r^2$ gesetzt wird, $p_3 = \varrho^3$, $q_0 = r^3$. Dann kann man aber $(\varrho a)^3$ einfach durch a^3 und $(rb)^3$ durch b^3 ersetzen, indem man ϱ, r mit a und b verschmilzt. Die Koeffizienten p_1 und q_0 ändern sich dabei. Wir setzen deshalb
$$\left.\begin{aligned} x &= a^3 + sab^2 = a\,(a^2 + sb^2) \\ y &= ta^2b + b^3 = b(ta^2 + b^2) \\ z &= a^2 + b^2 \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Die Substitution von (5.) in (1.) gibt

$$a^6 + (2s+t)a^4b^2 + (2t+s)a^2b^4 + b^6 = a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6$$

$$\text{d. h. } \left.\begin{aligned} 2s + t^2 &= 3 \\ 2t + s^2 &= 3 \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Hieraus folgt $(s-t)(s+t-2) = 0$, und daraus ergeben sich zwei Lösungen:

1. $s=t$, $t^2+2t-3=0$, $s_1=t_1=1$ und $s_2=t_2=-3$
2. $s=2-t$, $t^2-2t+1=0$, $(t-1)=0$, $t=1$, was schon vorher gefunden wurde. Die

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Lösung der Gleichung $x^2+y^2=z^3$ (1), z irreduzibel,

ist also entweder
$$\left.\begin{aligned} x&=a(a^2+b^2)\\ y&=b(a^2+b^2)\\ z&=a^2+b^2 \end{aligned}\right\} \quad (7a)$$

oder
$$\left.\begin{aligned} x&=a(a^2-3b^2)\\ y&=b(b^2-3a^2)\\ z&=a^2+b^2 \end{aligned}\right\} \quad (7b)$$

Der Bedingung, z soll nicht in mehrere reelle Faktoren zerfallen, kann also auf zwei Weisen entsprochen werden. Bei der Lösung (7a) wird $x \pm iy = (a^2+b^2)(a \pm ib)$, bei (7b) dagegen ist $x \pm iy = (a \pm ib)^3$. Während hier $x+iy$ eine dritte Potenz wird, enthält $x+iy$ im andern Fall das unzerlegbare z als einen Teiler und den einen seiner komplexen Faktoren als den andern.

Die Substitution von (5) in (1) und die anschließende Rechnung läßt sich durch ein Schlußverfahren, also einen Denkprozeß ersetzen. Setzt man $a=b$, so wird $x=a^3(1+s)$, $y=a^3(1+t)$, $z=2a^3$ und es folgt aus (1). $(1+s)^2+(1+t)^2=8$, d. h. die Zahl 8 ist als richtige Summe zweier Quadrate darzustellen. Dafür gibt es nur die eine ganzzahlige Lösung $4+4=8$, und daher muß $1+s=1+t=\pm 2$ sein, woraus wieder $s_1=t_1=1$ und $s_2=t_2=-3$ folgt. Daß die beiden Werte 1 und -2 nicht zu einem Wertepaar zusammengefügt werden dürfen, ergibt sich sofort. Für $s_1=1$ erhalten x und z in (5) den gemeinsamen Teiler (a^2+b^2), also muß ihn auch y haben, und deshalb muß $t_1=1$ werden.

Durch diese Betrachtung ist die Lösung der Gleichung $x^2+y^2=z^3$ auf ein Minimum von Rechnungen beschränkt worden. Wir verdanken dieses Bestreben Dühringschen Hinweisungen, welche besagen: „Es ist nicht angebracht, nach der Formulierung einer Aufgabe sofort die Rechenmaschine automatisch und mechanisch spielen zu lassen; es ist viel wichtiger, erst die Bedingungen, die in der Aufgabe liegen, grundsätzlich zu erforschen und auf die einfachste Form zu bringen.“ Wir haben das hier durch die Betrachtung und Bestimmung der Kombinationsmöglichkeit der verschiedenen Werte der x, y, z und der entsprechenden Gruppierungen der dazugehörigen Sechswertigkeiten der Elementargrößen a und b getan und glauben dadurch eine neue Lösungsart gefunden zu haben, die sich nur vom Problem leiten läßt und alles aus ihm entwickelt. Willkürliche Identitäten und Satzungen haben wir vermieden und dadurch eine richtige Methode erhalten. Sie gibt auch die Lösung der Gleichung $x^2+y^2=z^q$.

In der ersten der beiden Lösungen (7) haben x, y, z einen gemeinsamen Teiler, in der zweiten nicht; in beiden ist z reell unzerlegbar. Diese Lösungen sind Fundamentallösungen und können als Teilerlösung und Primlösung unterschieden werden.

§ 2.

Wird z reell zerlegbar angenommen, so ergeben sich noch andere Lösungen, die wir zusammengesetzte Lösungen nennen wollen. Bei ihnen haben x, y, z einen gemeinsamen Teiler, sie sind Teilerlösungen und nicht fundamental. Sie lassen sich zu einer allgemeinen Lösung zusammenfassen. Das geschieht folgendermaßen. Es sei $x=\xi t$, $y=\eta t$, $z=\zeta t$, so wird $t^2(\xi^2+\eta^2)=t^3\zeta^3$ oder $\xi^2+\eta^2=t.\zeta^3$. Für $\zeta=1$ folgt $\xi^2+\eta^2=t$, $x=\xi(\xi^2+\eta^2)$, $y=\eta(\xi^2+\eta^2)$, $z=\xi^2+\eta^2$, die fundamentale Teilerlösung. Sie muß in der gesuchten allgemeinen enthalten sein, daher muß t jedenfalls immer gleich der Summe zweier Quadrate sein. Für $t=1$ folgt $\xi^2+\eta^2=\zeta^3$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

mit der Bedingung, daß ζ keine reellen Faktoren enthält. Hierzu gehört die fundamentale Primlösung $\xi = a(a^2 - 3b^2)$, $\eta = b(b^2 - 3a^2)$, $\zeta = a^2 + b^2$. Sie muß ebenfalls in der gesuchten enthalten sein. In dieser muß daher sowohl t als auch ζ gleich der Summe zweier Quadrate sein.

Deshalb setzen wir
$$\left.\begin{aligned} z &= (r^2+s^2)\,(p^2+q^2) \\ x &= (r^2+s^2).a \\ y &= (r^2+s^2).b \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Dann wird
$$x^2+y^2 = (r^2+s^2)^2\,(a^2+b^2),$$
$$z^3 = (r^2+s^2)^3\,(p^2+q^2)^3,$$

und nach (1)
$$(a^2+b^2) = (r^2+s^2)\,(p^2+q^2)^3 \quad (9)$$

oder
$$(a+bi)\,(a-bi) = (r+si)\,(r-si)\,(p+qi)^3\,(p-qi)^3 \quad (10)$$

Nach der Wertigkeitsrechnung ergeben sich nun vier Fälle zur Bestimmung von a und b
$$\left.\begin{aligned} &A)\ a+bi = (r+si)\,(p+qi)^3 \\ &B)\ a+bi = (r-si)\,(p+qi)^3 \\ &C)\ a+bi = (r+si)\,(p-qi)^3 \\ &D)\ a+bi = (r-si)\,(p-qi)^3 \end{aligned}\right\} \quad (11),$$

die aber alle in A enthalten sind, wenn man für s und q auch negative Werte zuläßt. Das soll geschehen. Dann wird
$$\left.\begin{aligned} a &= r\,(p^3-3pq^2) - s\,(3p^2q-q^3) \\ b &= s\,(p^3-3pq^2) + r\,(3p^2q-q^3) \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Als allgemeine Lösung von $x^2+y^2=z^3$ (1) ergibt sich nun
$$\left.\begin{aligned} x &= (r^2+s^2)\,(p^3r-3p^2qs-3pq^2r+q^3s) \\ y &= (r^2+s^2)\,(p^3s+3p^2qr-3pq^2s-q^3r) \\ z &= (r^2+s^2)\,(p^2+q^2) \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Setzt man für p, q, r, s beliebige positive oder negative ganze Zahlen, so erhält man alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung (1) bis auf einen Proportionalitätsfaktor. Wir wollen auch diesen (t) noch aufnehmen und den Bedingungen der Aufgabe entsprechend in der Form t^3 zu x und y und in der Gestalt t^2 zu z hinzufügen. Die allgemeinste Lösung ist dann also
$$\left.\begin{aligned} x &= t^3\,(r^2+s^2)\,(p^3r-3p^2qs-3pq^2r+q^3s) \\ y &= t^3\,(r^2+s^2)\,(p^3s+3p^2qr-3pq^2s-q^3r) \\ z &= t^2\,(r^2+s^2)\,(p^2+q^2) \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Schlußbemerkungen.

Wir erinnern an die Bedingung (2) des § 1. Dort war $\mu = 3k$, $\nu = 2k$ gefunden worden. Das bedeutete x und y sind ganze rationale Funktionen $3k^{ten}$ Grades von a und b, z ist eine solche Funktion $2k^{ten}$ Grades. Wir hatten $k=1$ gesetzt und haben diesen Fall soeben erledigt. Setzt man $k=2$, so werden x und y vom 6ten Grade, z wird vom 4ten Grade. Für $k=3$ erhalten wir Ausdrücke 9ten bzw. 6ten Grades. Die Betrachtung dieser Fälle ist etwas umständlicher, aber nicht ohne Interesse, weil sie einige Fingerzeige für die Behandlung höherer Dreipotenzen-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

gleichungen gibt. Wir können die Rechnungen aus Mangel an Raum hier nicht wiedergeben, wollen aber bemerken, daß sich dabei keine neuen Resultate finden. Die Lösung für ein beliebiges k ergibt sich aus den Fundamentallösungen in § 1, wenn man a und b durch ihre k^{ten} Potenzen ersetzt. Bei zwei wesentlich andern Methoden, die ich früher der Behandlung der Gleichung $x^2+y^2=z^3$ zugrunde legte, sind diese Lösungen nicht als besondere Formen aufgetreten. Sie können daher übergangen werden.

Zum Schluß noch eine Bemerkung, um etwaigen Gegenäußerungen zuvorzukommen. Meine Methode ist nicht die Dühringsche, diese ist mir unbekannt. Das, was ich gegeben habe, entspricht auch nicht einmal den Anforderungen Dührings, der die Bedingung stellte, i und die Einheitswurzeln überhaupt als letzten zahlentheoretischen Rest zu vermeiden. Ich besaß die hier entwickelte Methode noch nicht, als ich meinen „Tag"-Artikel 1913 Nr. 33 verfaßte, vielmehr benutzte ich damals eine rein algebraische Methode ohne i und ε_n. Ich durfte daher sehr wohl behaupten, daß ich Dührings Herausforderung entsprechen könnte. Indessen ist jene Methode weder so rechnungsarm wie die hier vorgetragene, noch auch in gleichem Grade mit Erfolg erweiterungsfähig. Darum habe ich es vorgezogen, sie hier nicht wiederzugeben.

Unter Hinzufügung weiterer hier nicht angedeuteter abstrakter Wendungen ist es mir gelungen, sowohl die Gleichung $x^p+y^p=z^{p+1}$ zu lösen, welche Dühring den Mathematikern als zweite Herausforderung vorgelegt hat, als auch zu ergründen, warum $x^p+y^p=z^p$ keine rationale Lösung hat. Es hat sich mir ergeben, daß die Gleichung $x^p+y^p=z^q$, in welcher p eine ungerade Primzahl bedeutet, lösbar wird, wenn q gleich $p+1$, ein Teiler von $p+1$ oder eine dieser Zahlen vermehrt um ein beliebiges Vielfaches von p ist. Es muß also, wenn man mit m, n, q ganze Zahlen und mit p eine ungerade Primzahl bezeichnet, sein

$$q = \frac{p+1}{n} + m.p. \qquad (15)$$

Weiter zeigt sich, daß die Lösbarkeit auch noch bestehen bleibt, wenn q irgend ein Teiler von (15) wird. Dadurch erhält man für q alle Werte von 1 bis $(p-1)$ bezw. diese Werte vermehrt um p; nur p selbst und seine Vielfachen erscheinen nicht, und es entsteht der Satz:

Die Gleichung $x^p+y^p=z^q$ ist rational lösbar für alle Werte von q außer für $q=mp$, wo m jede beliebige ganze Zahl und p eine ungerade Primzahl ist. Für $q=p$ oder $q=mp$ ist die Gleichung rational unlösbar.

Das sind durchaus bedeutende Ergebnisse, und darum wiederhole ich auch heute wieder — ja nun erst recht — meine bereits im „Tag" vorgetragene Meinung: „Die Anwendung meiner durch Dühringsche Anregungen entstandenen Methode auf das eigentliche Fermatproblem hat mir die Gewißheit gegeben, daß Dühring die vielumstrittene Lösung besitzt."

Es ist ein Irrtum, wenn Herr Fleck glaubt, die algebraische Methode könne das Fermatproblem nicht bewältigen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf