II. Abschnitt.

§ 9.

Wir schreiten nunmehr zur Lösung der Gleichung $U_5 = 0$. Es ergab sich

$$e_1 e_4 + e_2 e_3 = d_2 \tag{1}$$

$$e_1^2 e_3 + e_1 e_2^2 + e_2 e_4^2 + e_3^2 e_4 = d_3 \tag{2}$$

$$e_1^3 e_2 - e_1^2 e_4^2 + e_1 e_2 e_3 e_4 + e_1 e_3^3 + e_2^3 e_4 - e_2^2 e_3^2 + e_3 e_4^3 = d_4 \tag{3}$$

$$e_1^5 + e_2^5 + e_3^5 + e_4^5 - 5\,(e_1 e_4 - e_2 e_3)\cdot(e_1^2 e_3 - e_1 e_2^2 + e_2 e_4^2 - e_3^2 e_4) = -\,c_5 \tag{4}$$

$$e_1 e_4 - e_2 e_3 = \beta \tag{5}$$

$$e_1^2 e_3 - e_1 e_2^2 + e_2 e_4^2 - e_3^2 e_4 = \gamma \tag{6}$$

Betrachten wir zunächst nur die trinomische Gleichung $x^5 + c_4 x + c_5$, so ist zu setzen

$$d_2 = 0\,, \qquad d_3 = 0\,.$$

Dann folgt aus

$$e_1 e_4 + e_2 e_3 = 0 \tag{1}$$

und

$$e_1 e_4 - e_3 e_3 = \beta \tag{5}$$

$$e_1 e_4 = \frac{\beta}{2}\,, \tag{7}$$

$$e_2 e_3 = -\frac{\beta}{2}\,. \tag{8}$$

Ferner wird

$$e_1^2 e_3 + e_1 e_2^2 + e_2 e_4^2 + e_3^2 e_4 = 0 \tag{2}$$

und

$$e_1^2 e_3 - e_1 e_2^2 + e_2 e_4^2 - e_3^2 e_4 = \gamma\,,$$

somit

$$e_1^2 e_3 + e_2 e_4^2 = \frac{\gamma}{2}\,, \tag{9}$$

$$e_1 e_2^2 + e_3^2 e_4 = -\frac{\gamma}{2}\,. \tag{10}$$

Aus (7) wird

$$e_4 = \frac{\beta}{2 e_1} \tag{11}$$

und aus (8)

$$e_2 = -\frac{\beta}{2 e_3}\,. \tag{12}$$

Indem wir (11) und (12) in (9) substituieren, erhalten wir

$$e_1^2 e_3 - \frac{\beta^3}{2^3 \cdot e_1^2 e_3} = \frac{\gamma}{2} \qquad \text{oder} \qquad e_1^4 e_3^2 - \frac{\gamma}{2}\cdot e_1^2 e_3 - \frac{\beta^3}{2^3} = 0\,.$$

Diese Gleichung ist quadratisch bezüglich $e_1^2 e_3$ und liefert

$$e_1^2 e_3 = \frac{1}{4}\left(\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + 2\beta^3}\right) \tag{13}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Setzen wir (13) in (9) ein, so ergiebt sich

$$e_2 e_4^2 = \frac{1}{4}(\gamma \mp \sqrt{\gamma^2 + 2\beta^3}). \tag{14}$$

In analoger Weise folgt aus (10), (7) und (8)

$$e_3 = -\frac{\beta}{2e_2} \quad (11a); \qquad e_4 = \frac{\beta}{2e_1} \quad (12a)$$

$$e_1 e_2^2 + \frac{\beta^3}{2^3 \cdot e_1 e_2^2} = -\frac{\gamma}{2} \quad \text{oder} \quad e_1^2 e_2^4 + \frac{\gamma}{2} \cdot e_1 e_2^2 + \frac{\beta^3}{2^3} = 0$$

$$e_1 e_2^2 = \frac{1}{4}(-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 2\beta^3}) \tag{15}$$

$$e_3^2 e_4 = \frac{1}{4}(-\gamma \mp \sqrt{\gamma^2 - 2\beta^3}) \tag{16}$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} +\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + 2\beta^3} &= B_1, & -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 2\beta^3} &= B_1', \\ +\gamma \mp \sqrt{\gamma^2 + 2\beta^3} &= B_2, & -\gamma \mp \sqrt{\gamma^2 - 2\beta^3} &= B_2', \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

so wird

$$e_1^2 e_3 = \frac{1}{4} B_1. \quad (18) \qquad e_1 e_2^2 = \frac{1}{4} B_1'. \quad (20)$$

$$e_2 e_4^2 = \frac{1}{4} B_2. \quad (19) \qquad e_3^2 e_4 = \frac{1}{4} B_2'. \quad (21)$$

Die Berechnung von $(18)^2 \times (20)$ giebt

$$e_1^5 \cdot (e_2 e_3)^2 = \frac{B_1^2 \cdot B_1'}{64}$$

oder wegen $e_2 e_3 = -\frac{\beta}{2}$

$$e_1^5 = \frac{B_1^2 B_1'}{2^4 \cdot \beta^2}. \tag{22}$$

$(19)^2 \times (21)$ giebt

$$e_4^5 = \frac{B_2^2 B_2'}{2^4 \cdot \beta^2}. \tag{23}$$

$(20)^2 \times (19)$ liefert

$$e_2^5 = \frac{B_1'^2 B_2}{2^4 \cdot \beta^2}. \tag{24}$$

Und $(21)^2 \times (18)$ wird

$$e_3^5 = \frac{B_2'^2 B_1}{2^4 \cdot \beta^2}. \tag{25}$$

§ 10.

Weiter erhalten wir aus (7) und (8)

$$e_1 e_2 e_3 e_4 = -\frac{\beta^2}{4}, \qquad e_1^2 e_4^2 = \frac{\beta^2}{4}, \qquad e_2^2 e_3^2 = \frac{\beta^2}{4},$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

also wird

$$-e_1^2 e_4^2 + e_1 e_2 e_3 e_4 - e_2^2 e_3^2 = -\frac{3\beta^2}{4}.$$

Setzen wir dies in (3) ein, so bekommen wir

$$e_1^3 e_2 + e_1 e_3^3 + e_2^3 e_4 + e_3 e_4^3 = d_4 + \frac{3\beta^2}{4}. \tag{26}$$

Nun giebt

(18) × (20) $$e_1^3 e_2 = -\frac{B_1 B_1'}{8\beta}, \tag{27}$$

(18) × (21) $$e_1 e_3^3 = +\frac{B_1 B_2'}{8\beta}, \tag{28}$$

(19) × (20) $$e_2^3 e_4 = +\frac{B_2 B_1'}{8\beta}, \tag{29}$$

(19) × (21) $$e_3 e_4^3 = -\frac{B_2 B_2'}{8\beta}. \tag{30}$$

Durch Substitution von (27) bis (30) in (26) erhalten wir

$$-(B_1 B_1' + B_2 B_2') + (B_1 B_2' + B_2 B_1') = 8\beta\left(d_4 + \frac{3\beta^2}{4}\right). \tag{31}$$

Wir setzen $\sqrt{\gamma^2 + 2\beta^3} = W$ und $\sqrt{\gamma^2 - 2\beta^3} = W'$, dann wird nach (17)

$$B_1 B_1' + B_2 B_2' = (\gamma + W)(-\gamma + W') + (\gamma - W)(-\gamma - W')$$

oder

$$B_1 B_1' + B_2 B_2' = -2(\gamma^2 - W \cdot W') \tag{32}$$

$$B_1 B_2' + B_2 B_1' = (\gamma + W)(-\gamma - W') + (\gamma - W)(-\gamma + W')$$

oder

$$B_1 B_2' + B_2 B_1' = -2(\gamma^2 + W \cdot W') \tag{33}$$

Mit Hilfe von (32) und (33) geht die Gleichung (31) in folgende über

$$2(\gamma^2 - W \cdot W') - 2(\gamma^2 + W \cdot W') = 8\beta\left(d_4 + \frac{3\beta^2}{4}\right)$$

oder

$$W \cdot W' = -2\beta \cdot \left(d_4 + \frac{3\beta^2}{4}\right). \tag{34}$$

Wir betrachten nun die Gleichung (4) und schreiben sie

$$e_1^5 + e_2^5 + e_3^5 + e_4^5 = 5\beta\gamma - c_5. \tag{4}$$

Substituieren wir hierin (22) bis (25), so wird

$$\frac{B_1^2 B_1' + B_2^2 B_2'}{2^4 \cdot \beta^2} + \frac{B_1'^2 B_2 + B_2'^2 B_1}{2^4 \cdot \beta^2} = 5\beta\gamma - c_5$$

oder

$$B_1^2 B_1' + B_2^2 B_2' + B_1'^2 B_2 + B_2'^2 B_1 = 2^4 \cdot \beta^2 \cdot (5\beta\gamma - c_5). \tag{35}$$

Es ist aber

$$B_1 = \gamma + W, \quad B_2 = \gamma - W, \quad B_1' = -\gamma + W', \quad B_2' = -\gamma - W';$$

mithin wird

$$B_1^2 = (\gamma^2 + W^2) + 2\gamma \cdot W = C + D; \qquad B_2^2 = (\gamma^2 + W^2) - 2\gamma \cdot W = C - D;$$

$$B_1' = \quad -\gamma + \quad W' = J + K; \qquad B_2' = \quad -\gamma - \quad W' = J - K;$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und
$$B_1^2 B_1' = (CJ + DK) + (CK + DJ); \quad B_2^2 B_2' = (CJ + DK) - (CK + DJ).$$

Hieraus erhalten wir dann
$$B_1^2 B_1' + B_2^2 B_2' = 2(CJ + DK).$$

Nun war
$$C = \gamma^2 + W^2, \quad J = -\gamma, \quad D = 2\gamma W, \quad K = W',$$

also wird
$$B_1^2 B_1' + B_2^2 B_2' = 2 \cdot [-(\gamma^2 + W^2) \cdot \gamma + 2\gamma \cdot W \cdot W']$$

oder, weil $W^2 = \gamma^2 + 2\beta^3$,
$$B_1^2 B_1' + B_2^2 B_2' = 4\gamma \cdot (-\gamma^2 \quad \beta^3 + W \cdot W'). \tag{36}$$

Analog erhalten wir
$$B_1'^2 = (\gamma^2 + W'^2) - \gamma \cdot W' = E - F; \qquad B_2'^2 = (\gamma^2 + W'^2) + 2\gamma \cdot W' = E + F;$$
$$B_2 = \gamma - W = L - M; \qquad B_1 = \gamma + W = L + M;$$
$$B_1'^2 B_2 = (EL + FM) - (LF + EM); \qquad B_2'^2 B_1 = (EL + FM) + (LF + EM);$$
$$B_1^2 B_2 + B_2'^2 B_1 = 2(EL + FM);$$
$$E = \gamma^2 + W'^2, \quad L = \gamma, \quad F = \gamma \cdot W', \quad M = W;$$
$$B_1^2 B_2 + B_2'^2 B_1 = 2 \cdot [(\gamma^2 + W'^2)\gamma + 2\gamma \cdot W \cdot W'].$$
$$W'^2 = \gamma^2 - 2\beta^3$$
$$B_1^2 B_2 + B_2'^2 B_1 = 4\gamma \cdot (\gamma^2 - \beta^3 + W \cdot W'). \tag{37}$$

Indem wir jetzt (36) und (37) in (35) substituieren, ergiebt sich
$$-\gamma\beta^3 + \gamma \cdot W \cdot W' = 2\beta^2(5\beta\gamma - c_5). \tag{38}$$

Da nun
$$W \cdot W' = -2\beta\left(d_4 + \frac{3\beta^2}{4}\right), \tag{34}$$

so folgt weiter
$$-\gamma\beta^3 - 2\beta\gamma \cdot \left(d_4 + \frac{3\beta^2}{4}\right) = 2\beta^2(5\beta\gamma - c_5)$$

oder
$$-\beta\gamma\left(d_4 + \frac{3\beta^2}{4}\right) = \beta^2(5\beta\gamma - c_5)$$

und endlich
$$-\gamma\left(d_4 + \frac{5\beta^2}{4}\right) = \beta(5\beta\gamma - c_5). \tag{39}$$

Diese Gleichung enthält eine rationale Beziehung zwischen den beiden rein zweiwertigen Hilfsgröfsen β und γ und den Koëffizienten c_4 und c_5. Sie ist von besonderer Wichtigkeit und giebt zusammen mit (34) den Ausgangspunkt unserer weiteren Rechnungen. Die Gleichung (34) wollen wir zu dem Zwecke ebenfalls rationalisieren, indem wir sie quadrieren. Sie wird dann
$$(\gamma^2 - 2\beta^3)(\gamma^2 + 2\beta^3) = \beta^2 \cdot (4d_4 + 3\beta^2)^2;$$
$$4(\gamma^4 - 4\beta^6) = 16d_4^2\beta^2 + 24d_4\beta^4 + 9\beta^6;$$
$$4\gamma^4 = \beta^2(16d_4^2 + 24d_4\beta^2 + 25\beta^4).$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Multiplizieren wir jetzt mit γ^6 und beachten, dafs $\beta \cdot \gamma = -\frac{a}{5}$, so wird

$$4\gamma^{10} = \frac{a^2}{25} \cdot \left(\frac{a^4}{25} + 24 d_4 \cdot \frac{a^2}{25} \cdot \gamma^2 + 16 d_4^2 \cdot \gamma^4\right). \tag{40}$$

Hierin sind a und d_4 rational, nur γ ist rein zweiwertig. Aus (39) und (40) sind nun die weiteren Schlüsse zu ziehen. Wenn wir in (39) den Nenner beseitigen und $5\beta\gamma = -a$ einführen, erhalten wir

$$-\gamma(4 d_4 + 5\beta^2) = -4\beta(a + c_5),$$

$$4 d_4 \gamma + 5\beta^2\gamma = 4 a\beta + 4 c_5 \beta.$$

Hieraus folgt wegen

$$5\beta\gamma = -a$$

$$4 d_4 \gamma - a\beta = 4 a\beta + 4 c_5 \beta,$$

$$4 d_4 \gamma = \beta(5a + 4c_5).$$

Multiplizieren wir mit γ und setzen wieder $\beta\gamma = -\frac{a}{5}$, so wird

$$4 d_4 \gamma^2 = -\frac{a}{5}(5a + 4c_5), \tag{41 a}$$

also

$$\gamma^2 = -\frac{a(5a + 4c_5)}{20 d_4}. \tag{41}$$

Setzen wir (41) in

$$\beta^2\gamma^2 = \frac{a^2}{25}$$

ein, so folgt weiter

$$\beta^2 = -\frac{4 a d_4}{5 \cdot (5a + 4c_5)}. \tag{42}$$

Schreiben wir (40) in der folgenden Form

$$4\gamma^{10} = \frac{a^2}{25} \cdot \left[\frac{a^4}{25} + \frac{6a^2}{25} \cdot 4 d_4 \gamma^2 + (4 d_4 \gamma^2)^2\right]$$

und setzen hierin (41 a) ein, so erhalten wir

$$4\gamma^{10} = \frac{a^2}{25} \cdot \left[\frac{a^4}{25} + \frac{6a^2}{25} \cdot \frac{a}{5} \cdot (5a + 4c_5) + \frac{a^2}{25} \cdot (5a + 4c_5)^2\right],$$

also

$$4\gamma^{10} = \frac{4a^4}{5^5} \cdot (25a^2 + 44 a c_5 + 20 c_5^2).$$

Substituieren wir für γ^2 seinen Wert aus (41), so wird

$$-\frac{a^5(5a + 4c_5)^5}{20^5 \cdot d_4^5} = \frac{a^4}{5^5} \cdot (25a^2 + 44 a c_5 + 20 c_5^2)$$

oder

$$-\left(\frac{5a + 4c_5}{4 d_4}\right)^5 = \frac{25a^2 + 44 a c_5 + 20 c_5^2}{a}. \tag{43}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wir setzen den rationalen Bruch der linken Seite

$$\frac{5a + 4c_5}{4d_4} = l, \tag{44}$$

dann folgt

$$20c_5^2 + 44ac_5 + 25a^2 + al^5 = 0$$

oder

$$c_5^2 + \frac{11}{5}ac_5 + \frac{25a^2 + al^5}{20} = 0.$$

Hieraus wird

$$c_5 = \frac{-11a \pm \sqrt{-(4a^2 + 5al^5)}}{10}. \tag{45}$$

Da a und c_5 rationale Gröfsen sind, mufs auch $\sqrt{-(4a^2 + 5al^5)}$ rational sein. Dies erfordert, wenn m eine rationale Gröfse bedeutet,

$$-a(4a + 5l^5) = m^2$$

Dieser Gleichung wird genügt, wenn wir

$$-a = \frac{m}{n} \tag{46a}$$

und

$$4a + 5l^5 = mn \tag{46b}$$

setzen, wo auch n eine rationale Gröfse bedeutet; zugleich ist dies die allgemeinste Lösung. Substituieren wir (46a) in (46b), so folgt

$$-\frac{4m}{n} + 5l^5 = mn$$

oder

$$5l^5 \cdot n = m(4 + n^2)$$

oder

$$m = \frac{5l^5 n}{4 + n^2}. \tag{47}$$

(45) giebt dann

$$c_5 = \frac{-11a \pm m}{10}. \tag{45a}$$

Setzen wir (47) in (46a) ein, so wird

$$a = -\frac{5l^5}{4 + n^2}. \tag{48}$$

(45a) giebt mit (47) und (48)

$$c_5 = \frac{l^5}{10} \cdot \left(\frac{55 \pm 5n}{4 + n^2}\right)$$

$$c_5 = \frac{l^5(11 \pm n)}{2(4 + n^2)}. \tag{49}$$

Ferner folgt aus (44), (48) und (49)

$$d_4 = \frac{-25l^5 + 2l^5(11 \pm n)}{4l \cdot (4 + n^2)} = \frac{l^5(-3 \pm 2n)}{4l(4 + n^2)},$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

also

$$d_4 = \frac{l^4(-3 \pm 2n)}{4(4+n^2)}. \tag{50}$$

Die Gleichungen (49) und (50) drücken die Koeffizienten der Gleichung $U_5 = 0$ durch zwei neue rationale Hilfsgröfsen m und n aus. Da n jede rationale Gröfse bedeutet, sie mag positiv oder negativ sein, dürfen wir $\pm n$, ohne die Allgemeinheit der Lösung zu beeinträchtigen, durch n ersetzen. Da nun aufserdem

$$d_4 = -\frac{c_4}{5}$$

ist, so folgt endlich

$$c_4 = -\frac{5l^4(2n-3)}{4(4+n^2)}, \tag{51}$$

und

$$c_5 = \frac{l^5(n+11)}{2(4+n^2)}; \tag{52}$$

also

$$U_5 = x^5 - \frac{5l^4(2n-3)}{4(4+n^2)} \cdot x + \frac{l^5(n+11)}{2(4+n^2)} = 0. \tag{53}$$

Diese Form mufs die dreigliedrige Gleichung fünften Grades haben, wenn sie algebraisch lösbar sein soll.

Nach dem Satz 9 des ersten Abschnittes mufs zwischen c_4 und c_5 eine rationale Beziehung bestehen; wir wollen dieselbe ableiten. Dividieren wir (52) durch (51), so erhalten wir

$$\frac{c_5}{c_4} = \frac{-2 \cdot l(n+11)}{5 \cdot (2n-3)}, \text{ also } l = -\frac{5c_5(2n-3)}{2c_4(n+11)} \tag{54}$$

als diese Beziehung. Setzen wir diesen Ausdruck für l in (52) ein, so wird

$$2^6 \cdot c_4^5 \cdot (n+11)^4 \cdot (4+n^2) + 5^5 \cdot c_5^4 (2n-3)^5 = 0 \tag{55}$$

auch eine derartige Beziehung, in der jedoch l eliminiert ist. Wir können endlich noch n eliminieren und erhalten dann eine dritte mögliche rationale Beziehung zwischen c_4 und c_5. Zu dem Zweck berechnen wir n aus (54). Es wird

$$n = \frac{15c_5 - 22c_4 l}{2(5c_5 + c_4 l)},$$

deshalb

$$n + 11 = \frac{125c_5}{2(5c_5 + c_4 l)} \tag{56}$$

und

$$4 + n^2 = \frac{125 \cdot (5c_5^2 - 4c_4c_5 l + 4c_4^2 l^2)}{4(5c_5 + c_4 l)^2}. \tag{57}$$

Setzen wir (56) und (57) in (52) ein, so ergiebt sich

$$(5c_5^2 - 4c_4c_5 l - 4c_4^2 l^2) - l^5 \cdot (5c_5 + c_4 l) = 0. \tag{58}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Das Ergebnis des zweiten Abschnittes läſst sich also in zwei Formen ausdrücken:

1) Eine irreduzible algebraische Gleichung fünften Grades, deren erste drei Koeffizienten, nämlich c_1, c_2 und c_3, verschwinden, ist algebraisch lösbar, wenn

$$c_4 = -\frac{5l^4(2n-3)}{4(4+n^2)} \quad (51) \quad \text{und} \quad c_5 = \frac{l^5(n+11)}{2(4+n^2)} \quad (52)$$

ist, wobei l und n irgend welche rationalen Gröſsen sind.

2) Die irreduzible algebraische Gleichung $x^5 + c_4x + c_5 = 0$ ist algebraisch lösbar, wenn zwischen den Koeffizienten die beiden rationalen Beziehungen zugleich bestehen:

$$2^6 \cdot c_4^5(n+11)^4 \cdot (4+n^2) + 5^5 \cdot c_5^4 \cdot (2n-3)^5 = 0, \quad (55)$$

$$(5c_5^2 - 4c_4c_5l + 4c_4^2l^2) - l^5(5c_5 + c_4l) = 0, \quad (57)$$

wo l und n irgend welche rationalen Gröſsen sind.

§ 11.

Es wird von Vorteil sein, unser Resultat noch mit den Ergebnissen anderer Autoren bezüglich der Gleichung $x^5 + c_4x + c_5 = 0$ zu vergleichen.

1. Paxton Young erhält im Bd. VII des American Journal of Mathematics S. 170 bis S. 177 als Bedingung für die algebraische Lösbarkeit

$$c_4 = \frac{5A^4(3-B)}{16+B^2}, \quad c_5 = \frac{A^5(22+B)}{16+B^2}.$$

Setzen wir hierin $A = l$, $B = 2n$, so erhalten wir unsere Formeln (51) und (52)

$$c_4 = -\frac{5l^4(2n-3)}{4(4+n^2)}, \quad c_5 = \frac{l^5(n+11)}{2(4+n^2)}.$$

Ferner geht Youngs Formel (20) auf S. 173, nämlich

$$p_4^5 \cdot (16+B^2)(22+B)^4 = 5^5 \cdot p_5^4 \cdot (3-B)^5$$

für $p_4 = c_4$, $p_5 = c_5$, $B = 2n$ in unsere Gleichung (55)

$$2^6 \cdot c_4^5(4+n^2)(11+n)^4 + 5^5 \cdot c_5^4 \cdot (2n-3)^5 = 0$$

über; dagegen giebt es eine Gleichung, die unserer Formel (57) entspricht, bei Young nicht.

2. Im Band 22 der Fortschritte der Mathematik werden die Resultate abgedruckt, welche die Russen N. W. Bugaieff und K. L. Lachtine „Über die auflösbaren Gleichungen 5. Grades“ in der Mathematischen Sammlung, herausgegeben von der Mathematischen Gesellschaft in Moskau, Band XV S. 83 bis 98 veröffentlicht haben. Sie erhalten:

$$x^5 + ax + b = 0 \quad (I)$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

hat die Resolvente

$$2^6 \cdot a^5 \cdot (y-11)^4 \cdot (y^2+4) - 5^5 \cdot b^4 \cdot (2y+3)^5 = 0, \tag{II}$$

und damit (II) eine rationale Wurzel habe, was für die Lösung der Gleichung 5. Grades notwendig und hinreichend ist, mufs (I) die Form haben

$$(\lambda x)^5 + \frac{(\mu-1)(\mu-11)}{4(\mu^2+4)}(\lambda x) + \frac{\mu-11}{2(\mu^2+4)} = 0. \tag{III}$$

Setzen wir $a = c_4$, $b = c_5$, $y = -n$, so geht die Resolvente (II) in unsere Formel (55) über, und beide stimmen vollständig überein. Dividieren wir (III) durch λ^5 und setzen $\frac{1}{\lambda} = -l$ sowie $\mu = -n$, so wird aus (III)

$$x^5 + \frac{l^4 \cdot (n+1)(n+11)}{4(n^2+4)} x + \frac{l^5(n+11)}{2(n^2+4)} = 0. \tag{IV}$$

Dieser Gleichung entspricht (53), beide stimmen aber nur teilweis überein; unser Zähler von c_4 lautet nämlich $-5l^4(2n-3)$, derjenige der beiden Russen aber $l^4(n+1)(n+11)$.

3. C. Runge findet in den Acta Mathematica Band 7 S. 173—185 für unsere Gleichung $U_5 = 0$

$$x^5 + \frac{5\mu^4(4\lambda+3)}{\lambda^2+1} \cdot x + \frac{4\mu^5 \cdot (2\lambda+1)(4\lambda+3)}{\lambda^2+1} = 0. \tag{I}$$

Setzen wir hierin $\mu = \frac{l}{2}$, $\lambda = -\frac{n}{2}$, so ergiebt sich

$$x^5 - \frac{5l^4(2n-3)}{4(n^2+4)} \cdot x + \frac{l^5(n-1)(2n-3)}{2(n^2+4)} = 0. \tag{II}$$

Auch diese Gleichung stimmt mit der von uns gefundenen (53) nur z. T. überein. Hier liegt die Abweichung in c_5; wo wir $(n+11)$ haben, hat Runge $(n-1)(2n-3)$.

4. Da nun die Ergebnisse von Runge und Bugaieff weder unter sich noch mit den unsrigen, wohl aber die unsrigen mit denen von Paxton Young übereinstimmen, so halten wir die letzteren für die richtigeren.

§ 12.

Zum Schlufs dieses Abschnittes möge die Berechnung der Wurzel x_α skizziert werden. Um die Gleichung

$$x^5 - \frac{5l^4 \cdot (2n-3)}{4(4+n^2)} x + \frac{l^5 \cdot (n+11)}{2 \cdot (4+n^2)} = 0 \tag{53}$$

zu lösen, berechnen wir (41) und (42), d. h.

$$\gamma = \sqrt{-\frac{a(5a+4c_5)}{20d_4}} \quad \text{und} \quad \beta = \sqrt{-\frac{4ad_4}{5 \cdot (5a+4c_5)}}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

für $a = -\frac{5l^5}{(2+n^2)}$ (48), $d_4 = \frac{l^4(2n+3)}{4(4+n^2)}$ (50) und $c_5 = \frac{l^5(n+11)}{2(4+n^2)}$ (52).

Die Resultate substituieren wir auf Seite 22 in

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + 2\beta^3}, & B_1' &= -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 2\beta^3} \\ B_2 &= \gamma \mp \sqrt{\gamma^2 + 2\beta^3}, & B_2' &= -\gamma \mp \sqrt{\gamma^2 - 2\beta^3} \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

und die so erhaltenen Ausdrücke in (22) bis (25) auf Seite 22, nämlich in

$$e_1^5 = \frac{B_1^2 \cdot B_1'}{2^4 \cdot \beta^2}, \quad e_4^5 = \frac{B_2^2 B_2'}{2^4 \cdot \beta^2}, \quad e_2^5 = \frac{B_1'^2 B_2}{2^4 \cdot \beta^2}, \quad e_3^5 = \frac{B_2'^2 \cdot B_1}{2^4 \cdot \beta^2}.$$

Endlich werden die hieraus berechneten Elemente e_ν in

$$x_\alpha = \varepsilon_\alpha e_1 + \varepsilon_\alpha^2 e_2 + \varepsilon_\alpha^3 e_3 + \varepsilon_\alpha^4 e_4$$

eingeführt, wo ε_α irgend eine 5. Wurzel der Einheit ist. Damit ist dann die Lösung vollendet.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf