Aus Mangel an Raum werde ich zunächst nur das Notwendigste aus der Dühringschen Theorie der Gleichungslösung angeben, um dann sofort zu meinen Ausführungen überzugehen; für das genauere Studium der Dühringschen Methode verweise ich die Leser auf das Originalwerk.

I. Abschnitt.

§ 1.

Ist
$$U_n = x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_{n-1} x + c_n = 0 \tag{1}$$
eine irreduzible Gleichung des nten Grades, in welcher die Koëffizienten c_ν rationale Gröfsen sind, so hat jede Wurzel von (1), wenn die Gleichung algebraisch lösbar sein soll, nach Dühring die Form
$$x_\alpha = e_0 + \varepsilon_\beta^{\varkappa} e_1 + \varepsilon_\beta^{\lambda} e_2 + \ldots + \varepsilon_\beta^{\pi} e_{n-1}. \tag{2}$$
Hierin können α und β jeden Wert $1, 2, \ldots n$ annehmen; $\varkappa, \lambda, \ldots \pi$ dürfen die Werte $1, 2 \ldots (n-1)$ haben, mit der Beschränkung, dafs nicht zwei dieser Gröfsen denselben Wert bekommen. Ebenso müssen die n Gröfsen e_ν, $\nu = 0, 1, 2 \ldots (n-1)$, von einander verschieden sein, sobald die Gleichung (1) irreduktibel ist. Den Fall, dafs eine oder mehrere dieser Gröfsen Null sind, schliefsen wir vorläufig aus. Die e_ν werden als die Elemente der Wurzel x_α bezeichnet und sind Wurzelausdrücke, deren äufserste Wurzeln vom nten Grade sind, während die inneren höchstens den Grad $(n-1)$ besitzen; e_0 allein ist rational. Die ε_β endlich sind die nten Wurzeln der Einheit und treten auf, weil e_ν von der Form $\sqrt[n]{A_\nu}$ ist.

Wir können die Gleichung (1) durch eine lineare Transformation von ihrem ersten Koëffizienten befreien. Im Folgenden soll diese Form der Gleichung zu Grunde gelegt werden. Wir ersetzen (1) durch
$$U_n = x^n + c_2 x^{n-2} + c_3 x^{n-3} + \ldots + c_{n-1} x + c_n = 0. \tag{3}$$
Da
$$c_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0,$$
so wird nach (2)
$$\sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha = n e_0 + e_1 \cdot \sum_{\beta=1}^{n} \varepsilon_\beta^{\varkappa} + e_2 \sum_{\beta=1}^{n} \varepsilon_\beta^{\lambda} + \ldots + e_{n-1} \sum_{\beta=1}^{n} \varepsilon_\beta^{\pi} = 0.$$
Nun ist für jedes r
$$\sum_{\beta=1}^{n} \varepsilon_\beta^{r} = 0,$$
Daher wird
$$n e_0 = 0$$
oder
$$e_0 = 0$$
und
$$x_\alpha = \varepsilon_\beta^{\varkappa} e_1 + \varepsilon_\beta^{\lambda} e_2 + \ldots + \varepsilon_\beta^{\pi} e_{n-1}; \tag{4}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wobei wieder $\varkappa, \lambda, \ldots \pi$ nur die Werte $1, 2, \ldots (n-1)$ haben, während α und β jeden der Werte $1, 2, \ldots n$ annehmen können; auch hier dürfen nicht zwei der Exponenten $\varkappa, \lambda, \ldots \pi$ einander gleich sein.

Für den fünften Grad erhalten wir im besondern

$$U_5 = x^5 + c_2 x^3 + c_3 x^2 + c_4 x + c_5 = 0; \tag{5}$$

$$x_\alpha = \varepsilon_\beta^\varkappa e_1 + \varepsilon_\beta^\lambda e_2 + \varepsilon_\beta^\mu e_3 + \varepsilon_\beta^\nu e_4; \quad e_5 = 0. \tag{6}$$

Hier haben α und β jeden der Werte $1, 2, 3, 4, 5$; $\varkappa, \lambda, \mu, \nu$ können dagegen nur die Werte $1, 2, 3, 4$ erhalten, und zwar dürfen nie zwei dieser Gröfsen denselben Wert haben; ε_β bezeichnet die fünfte Wurzel der Einheit, also ist $\varepsilon_\beta^5 = 1$.

Zur besseren Unterscheidung der mehrwertigen und der einwertigen Gröfsen wollen wir, wenn x_α mehrere Werte besitzt, durch $\mathfrak{G}((x_\alpha))$ oder x_α die Gesamtheit aller Werte oder die Gruppe, durch $((x_\alpha))$ ein Individuum oder einen Einzelwert bezeichnen.

§ 2.

Die irreduzible algebraische Gleichung fünften Grades $U_5 = 0$ hat fünf verschiedene Wurzeln, daher besitzt x_α fünf verschiedene Werte; dasselbe gilt von ε_β. Da nun $\varkappa$ nach Belieben einen der Werte $1, 2, 3, 4$ haben kann, ist in (6) die fünfwertige Vorsetzung ε_β noch mit einer Vierwertigkeit behaftet, und $\varepsilon_\beta^\varkappa$ erscheint zwanzigwertig. In Wirklichkeit hat $\varepsilon_\beta^\varkappa$ nur fünf Werte, weil eine Fünfwertigkeit beim Potenzieren i. a. fünfwertig bleibt. Das Gleiche gilt für $\varepsilon_\beta^\lambda, \varepsilon_\beta^\mu, \varepsilon_\beta^\nu$. Wären die e_ν[1]) ganz unabhängig von einander, so würde dasselbe von ihren Vorsetzungen ε_p^q gelten, und der Ausdruck x_β müfste, wenn wir A_ν vorläufig einwertig annehmen, im ganzen 5^4 Werte haben. Er darf nur fünf besitzen, folglich sind die e_ν und desgleichen ihre Vorsetzungen abhängig von irgend einem derselben, d. h. also auch von einander. Da wir aufserdem über keins der e_ν eine besondere Voraussetzung machen, vielmehr alle e_ν als gleichartig und gleichvielwertig betrachten, mufs infolge der zwischen den e_ν nachgewiesenen Abhängigkeit jedes einzelne e_ν durch jedes andere rational ausdrückbar, und diese Abhängigkeit mufs deshalb umkehrbar, also linear sein. Wenn aber jedes e_ν durch irgend eins derselben z. B. durch e_1 rational ausdrückbar ist, dann können wir nach (6) auch x_α durch dieses e_1 rational darstellen und der Ausdruck (6) hat dann in der That genau so viele Werte, wie die Vorsetzung ε_p^q von e_1, nämlich fünf. Also bedingen die Fünfwertigkeit der Wurzel x_α und die rationale Abhängigkeit der einzelnen Wurzelelemente einander gegenseitig, und es ergiebt sich

Satz 1: Die Fünfwertigkeit der x_α ist die Folge der Fünfwertigkeit der e_ν und ihrer rationalen Abhängigkeit von einander — und umgekehrt.

Die fünf verschiedenen Gleichungswurzeln erhalten wir hiernach, wenn wir für α und für β die Werte $1, 2, 3, 4, 5$ in irgend einer Folge setzen.

---

[1]) Dieser Index ν in e_ν ist nicht gleich dem Exponenten ν in ε_β^ν von Formel 6. Die Wahl des gleichen Buchstabens ist zufällig.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 3.

Die rationale Beziehung der e_ν und der davon abhängigen Vorsetzungen mufs in allen x_α die gleiche sein. Sie ist so beschaffen, dafs der Vorsetzung $\varepsilon_\beta^\varkappa$ bei e_1 immer die Vorsetzungen $\varepsilon_\beta^\lambda$, ε_β^μ, ε_β^ν bei e_2 bezw. e_3 und e_4 entsprechen. Die drei letzten Vorsetzungen kann man als Potenzen der ersten darstellen. Es ist

$$\varepsilon_\beta^\lambda = (\varepsilon_\beta^\varkappa)^{\frac{\lambda}{\varkappa}}; \quad \varepsilon_\beta^\mu = (\varepsilon_\beta^\varkappa)^{\frac{\mu}{\varkappa}}; \quad \varepsilon_\beta^\nu = (\varepsilon_\beta^\varkappa)^{\frac{\nu}{\varkappa}}.$$

Für ein primitives ε_β, das wir mit $\widehat{\varepsilon}_\beta$ bezeichnen, ist wegen $\varkappa < 5$

$$\widehat{\varepsilon}_\beta^\varkappa = \widehat{\varepsilon}_\gamma,$$

also

$$\widehat{\varepsilon}_\beta^\lambda = \widehat{\varepsilon}_\gamma^{\frac{\lambda}{\varkappa}}; \quad \widehat{\varepsilon}_\beta^\mu = \widehat{\varepsilon}_\gamma^{\frac{\mu}{\varkappa}}; \quad \varepsilon_\beta^\nu = \widehat{\varepsilon}_\gamma^{\frac{\nu}{\varkappa}}.$$

Für das primitive $\varepsilon_\beta = 1$ können wir ebenfalls $\varepsilon_\beta^\varkappa = \varepsilon_\gamma$ setzen, denn beide sind gleich Eins. Wir können also in jedem der beiden Fälle (6) auf die folgende Form bringen

$$x_\alpha = \varepsilon_\gamma e_1 + \varepsilon_\gamma^{\frac{\lambda}{\varkappa}} e_2 + \varepsilon_\gamma^{\frac{\mu}{\varkappa}} e_3 + \varepsilon_\gamma^{\frac{\nu}{\varkappa}} e_4, \qquad \gamma = 1, 2, 3, 4, 5. \tag{7}$$

Das bedeutet: Die Abhängigkeit der e_ν kann auch derart dargestellt werden, dafs, wenn e_1 die Vorsetzung ε_γ hat, e_2, e_3 und e_4 bezw. mit den Vorsetzungen $\varepsilon_\gamma^{\frac{\lambda}{\varkappa}}$, $\varepsilon_\gamma^{\frac{\mu}{\varkappa}}$ und $\varepsilon_\gamma^{\frac{\nu}{\varkappa}}$ zu versehen sind, wo $\varkappa$, λ, μ, ν die Werte 1, 2, 3, 4 unter Ausschlufs gleicher Werte haben.

Weil die e_ν fünfte Wurzeln aus A_ν sind, sind sie fünfwertig, und wir dürfen darum in (6) jederzeit e_1 durch $\varepsilon_\delta e_1$ ersetzen, wo $\delta = 1, 2, 3, 4, 5$ sein kann. Von diesen fünf Werten wollen wir dem δ irgend einen zuteilen, δ also einwertig nehmen und e_1 mit $((\varepsilon_\delta))e_1$ vertauschen. Wir können dann ε_β auf $((\varepsilon_\delta))$ reduzieren, denn es gilt die Gleichung

$$\varepsilon_\beta = ((\varepsilon_\delta))^{\mathrm{a}}, \qquad \mathrm{a} = 1, 2, 3, 4, 5, \tag{8a}$$

wo a ebenso wie β die fünf Werte 1, 2, 3, 4, 5 hat, nur in anderer Reihenfolge. Substituieren wir daher in (6) statt e_1 jetzt $((\varepsilon_\delta))e_1$, bezeichnen diese Substitution mit $\mathfrak{S}_5$ und deuten ihre Ausführung durch eine eckige Klammer an; reduzieren wir ferner ε_β gemäfs (8a) auf $((\varepsilon_\delta))$ und beachten die Formel (7) bezw. die Bemerkung dazu: so wird

$$[x_\alpha] = ((\varepsilon_\delta))^{\mathrm{a}\varkappa} \cdot ((\varepsilon_\delta)) \cdot e_1 + ((\varepsilon_\delta))^{\mathrm{a}\lambda} \cdot ((\varepsilon_\delta))^{\frac{\lambda}{\varkappa}} \cdot e_2 + ((\varepsilon_\delta))^{\mathrm{a}\mu} \cdot ((\varepsilon_\delta))^{\frac{\mu}{\varkappa}} \cdot e_3 + ((\varepsilon_\delta))^{\mathrm{a}\nu} \cdot ((\varepsilon_\delta))^{\frac{\nu}{\varkappa}} \cdot e_4$$

oder

$$[x_\alpha] = ((\varepsilon_\delta))^{\mathrm{a}\varkappa+1} \cdot e_1 + ((\varepsilon_\delta))^{\frac{\lambda}{\varkappa}\cdot(\mathrm{a}\varkappa+1)} \cdot e_2 + ((\varepsilon_\delta))^{\frac{\mu}{\varkappa}\cdot(\mathrm{a}\varkappa+1)} \cdot e_3 + ((\varepsilon_\delta))^{\frac{\nu}{\varkappa}\cdot(\mathrm{a}\varkappa+1)} \cdot e_4.$$

Wir bestimmen den Rest von $(\alpha\varkappa + 1)$ mod. 5 und nennen ihn r; dabei setzen wir zunächst $\varkappa$ als einwertig voraus, wie wir es schon mit δ thaten; dann sind die Reste

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

von $a((\varkappa))$ mod. 5 und ebenso die Reste r von $a((\varkappa)) + 1$ mod. 5, wie die folgenden Tafeln zeigen, für ein bestimmtes $((\varkappa))$ und für die fünf verschiedenen Werte von a inkongruent mod. 5.

Reste von $a((\varkappa))$ mod. 5 für

(8b)

	a=1	a=2	a=3	a=4	a=5
$\varkappa=1$	1	2	3	4	5
$\varkappa=2$	2	4	1	3	5
$\varkappa=3$	3	1	4	2	5
$\varkappa=4$	4	3	2	1	5

Reste r von $a((\varkappa)) + 1$ mod. 5 für

(8c)

	a=1	a=2	a=3	a=4	a=5
$\varkappa=1$	2	3	4	5	1
$\varkappa=2$	3	5	2	4	1
$\varkappa=3$	4	2	5	3	1
$\varkappa=4$	5	4	3	2	1

Wir haben also

$$a((\varkappa)) + 1 \equiv r \bmod. 5,$$

und hier hat r wieder die fünf Werte 1, 2, 3, 4, 5, aber in anderer Folge als a.

Es ist daher

$$a((\varkappa)) + 1 = 5\,m + r,$$

und es wird

$$((\varepsilon_\delta))^{a((\varkappa))+1} = ((\varepsilon_\delta))^{5\,m+r} = ((\varepsilon_\gamma))^r.$$

Für $((\varepsilon_\delta))^r$ können wir schreiben

$$((\varepsilon_\delta))^r = \varepsilon_s, \tag{8d}$$

wo dann s, ebenso wie r, die Werte 1, 2, 3, 4, 5, nur in anderer Folge, hat. Folglich ist

$$[x_\alpha] = \varepsilon_s \cdot e_1 + \varepsilon_s^{\frac{\lambda}{\varkappa}} \cdot e_2 + \varepsilon_s^{\frac{\mu}{\varkappa}} \cdot e_3 + \varepsilon_s^{\frac{\gamma}{\varkappa}} \cdot e_4, \qquad s = 1, 2, 3, 4, 5. \tag{9}$$

$[x_\alpha]$ in (9) hat dieselbe Form wie x_α in (7). Durch Vergleich von (7) und (9) finden wir, dafs das einzelne $((x_\alpha))$ sich von dem mit dem gleichen Index α versehenen $(([x_\alpha]))$ unterscheidet, weil dasselbe von $((\varepsilon_\beta))$ und $((\varepsilon_s))$ gilt. Denn, wäre $((\varepsilon_\beta)) = ((\varepsilon_s))$, so müfste, da nach (8a) $((\varepsilon_\beta)) = ((\varepsilon_\delta))^{((a))}$ ist, nach (8d) $((\varepsilon_s)) = ((\varepsilon_\beta)) = ((\varepsilon_\delta))^{((r))}$ und folglich auch $((\varepsilon_\delta))^{((r))} = ((\varepsilon_\delta))^{((a))}$ für irgend einen Einzelwert $((\varkappa))$ sein, und folglich wäre auch $((r)) = ((a))$; d. h. für irgend einen Einzelwert von $\varkappa$ müfste jeder Einzelwert von a gleich dem in (8c) zugehörigen Einzelwert von r sein, was deshalb unmöglich ist, weil r und a dieselben Werte 1, 2, 3, 4, 5 in verschiedener Folge bedeuten. Bedeutet das Zeichen $\parallel$ die Verschiedenheit zweier Gröfsen, so ist also $((x_\alpha)) \parallel (([x_\alpha]))$. Daraus folgt, dafs durch die Substitution $\mathfrak{S}_5$ jedes $((x_\alpha))$ in ein anderes $((x_\alpha))$ übergeführt wird. Da nun $\mathfrak{S}((\varepsilon_\beta))$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

dieselben Werte enthält wie $\mathfrak{G}((\varepsilon_s))$, gilt dasselbe von $\mathfrak{G}((x_\alpha))$ und $\mathfrak{G}(([x_\alpha]))$. Die fünf Wurzeln x_α werden also simultan unter einander vertauscht, sodafs an die Stelle desjenigen x_α, das mit ε_γ beginnt, nunmehr ein anderes $[x_\alpha]$ tritt, welches mit ε_s anfängt. Die beiden Gruppen $\mathfrak{G}((x_\alpha))$ und $\mathfrak{G}(([x_\alpha]))$ unterscheiden sich also nur durch die Reihenfolge der Individuen.

Die Betrachtung beschränkte sich auf einen Einzelwert $((\varepsilon_\delta))$ des fünfwertigen ε_δ. Für jeden der fünf Werte von δ werden wir nach (8a) eine andere Folge der a erhalten und somit nach (8c) auch eine andere Folge der r und endlich nach (8d) der s bekommen; d. h. zu jeder andern Substitution $\mathfrak{S}_5$ wird auch eine andere simultane Vertauschung der fünf Wurzeln x_α gehören. Da es nun gerade fünf solcher Vertauschungen uud fünf Substitutionen $\mathfrak{S}_5$ giebt, so folgt, dafs sie einander entsprechen. Wir erhalten hieraus den

Satz 2: Wenn wir in der Wurzel x_α dem Elemente e_1 und zugleich jedem der davon abhängigen Elemente e_ν einen andern seiner fünf Werte geben, so hat das dieselbe Wirkung, als wenn wir für ε_β einen andern seiner fünf Werte einsetzen oder die fünf Einheitswurzeln ε_β simultan vertauschen; in jedem Falle wird dadurch eine simultane Vertauschung der fünf Wurzeln x_α hervorgerufen.

Hiermit ist die Fünfwertigkeit der ε_β erledigt. Derselben entsprechen die fünf simultanen Vertauschungen aller fünf Wurzeln unter einander. Wir wenden uns nunmehr zur Vierwertigkeit, die von den $\varkappa$, λ, μ, ν herrührt. Es war

$$x_\alpha = \varepsilon_\beta^{\varkappa} e_1 + \varepsilon_\beta^{\lambda} e_2 + \varepsilon_\beta^{\mu} e_3 + \varepsilon_\beta^{\nu} e_4 \tag{6}$$

oder

$$x_\alpha = (\varepsilon_\beta^{\varkappa}) \cdot e_1 + (\varepsilon_\beta^{\varkappa})^{\frac{\lambda}{\varkappa}} \cdot e_2 + (\varepsilon_\beta^{\varkappa})^{\frac{\mu}{\varkappa}} \cdot e_3 + (\varepsilon_\beta^{\varkappa})^{\frac{\nu}{\varkappa}} \cdot e_4. \tag{7}$$

Setzen wir in (6) statt $\varkappa$ den Wert λ ein, so wird es nach (7)

$$[x_\alpha] = \varepsilon_\beta^{\lambda} \cdot e_1 + \varepsilon_\beta^{\frac{\lambda^2}{\varkappa}} \cdot e_2 + \varepsilon_\beta^{\frac{\lambda\mu}{\varkappa}} \cdot e_3 + \varepsilon_\beta^{\frac{\lambda\nu}{\varkappa}} \cdot e_4. \tag{10}$$

das bedeutet: Wenn $\varkappa$ geändert wird, werden zugleich die übrigen Exponenten in ganz bestimmter Weise geändert. Die Formel (10) können wir schreiben

$$[x_\alpha] = \left(\varepsilon_\beta^{\frac{\lambda}{\varkappa}}\right)^{\varkappa} \cdot e_1 + \left(\varepsilon_\beta^{\frac{\lambda}{\varkappa}}\right) \cdot e_2 + \left(\varepsilon_\beta^{\frac{\lambda}{\varkappa}}\right)^{\mu} \cdot e_3 + \left(\varepsilon_\beta^{\frac{\lambda}{\varkappa}}\right)^{\nu} \cdot e_4.$$

Hierin kann $\varepsilon_\beta^{\frac{\lambda}{\varkappa}}$ durch ε_γ ersetzt werden, wie wir jetzt nachweisen wollen. Es läfst sich nämlich stets eine ganze Zahl ϱ finden, welche für ein bestimmtes Wertepaar $(\varkappa, \lambda)$ der Kongruenz

$$\varrho\varkappa \equiv \lambda \text{ mod. } 5$$

genügt, wie sich aus der beifolgenden Tabelle ersehen läfst, deren innerhalb der starken Umrahmung befindliche Karos die mod. 5 reduzierten Produkte $\varrho\varkappa$ d. h. die λ enthalten.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Tabelle der λ für

	$\varrho=1$	$\varrho=2$	$\varrho=3$	$\varrho=4$
$\varkappa=1$	1	2	3	4
$\varkappa=2$	2	4	1	3
$\varkappa=3$	3	1	4	2
$\varkappa=4$	4	3	2	1

Da nach den früheren Festsetzungen $\varkappa = 5$ und $\lambda = 5$ ausgeschlossen sind, kann ϱ nur die Werte 1, 2, 3, 4 haben, und zwar für jedes bestimmte Wertepaar $(\varkappa, \lambda)$, d. h. für jede einzelne Ersetzung des $\varkappa$ durch λ, nur einen einzigen dieser vier Werte. Dann ist also

$$\varrho\varkappa = 5\,\mathrm{m} + \lambda,$$

und ϱ ist einwertig, sobald wir $\varkappa$ und λ einwertig betrachten. Wegen $\varepsilon_\beta{}^5 = 1$ ergiebt sich hieraus für ein primitives ε_β

$$\hat{\varepsilon}_\beta{}^\lambda = \hat{\varepsilon}_\beta{}^{5\mathrm{m}+\lambda} = \hat{\varepsilon}_\beta{}^{\varrho\varkappa}$$

und hieraus

$$\hat{\varepsilon}_\beta{}^{\frac{\lambda}{\varkappa}} = \hat{\varepsilon}_\beta{}^\varrho$$

und endlich

$$[\mathrm{x}_\alpha] = (\hat{\varepsilon}_\beta{}^\varrho)^\varkappa\,\mathrm{e}_1 + (\hat{\varepsilon}_\beta{}^\varrho)^\lambda\,\mathrm{e}_2 + (\hat{\varepsilon}_\beta{}^\varrho)^\mu\,\mathrm{e}_3 + (\hat{\varepsilon}_\beta{}^\varrho)^\nu \cdot \mathrm{e}_4.$$

Wir setzen

$$\hat{\varepsilon}_\beta{}^\varrho = \hat{\varepsilon}_\gamma, \qquad \varepsilon_\beta = \varepsilon_\gamma = 1. \tag{11}$$

Dann ist $\hat{\varepsilon}_\gamma$ von $\hat{\varepsilon}_\beta$ verschieden und hat ebenso viele Werte wie $\hat{\varepsilon}_\beta$; und es wird, wie wir behaupteten,

$$[\mathrm{x}_\alpha] = \hat{\varepsilon}_\gamma{}^\varkappa \cdot \mathrm{e}_1 + \hat{\varepsilon}_\gamma{}^\lambda \cdot \mathrm{e}_2 + \hat{\varepsilon}_\gamma{}^\mu \cdot \mathrm{e}_3 + \hat{\varepsilon}_\gamma{}^\nu \cdot \mathrm{e}_4 \tag{12}$$

Dieses $[\mathrm{x}_a]$ hat dieselbe Form wie x_α in (6).

Für das nicht primitive $\varepsilon_\beta = 1$ ist

$$\varepsilon_\beta{}^\varrho = \varepsilon_\beta = \varepsilon_\gamma. \tag{11a}$$

Bezeichnen wir das dazu gehörige x_α mit x_r, so ist also $[\mathrm{x}_\mathrm{r}] = \mathrm{x}_\mathrm{r}$. Dieses x_r hat die Form

$$\mathrm{x}_\mathrm{r} = \mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_2 + \mathrm{e}_3 + \mathrm{e}_4.$$

Wir schliefsen es vorläufig von unserer Betrachtung aus, bezeichnen die noch verbleibenden vier Werte von x_α durch $\hat{\mathrm{x}}_\alpha$ und nennen sie primitiv, x_r aber imprimitiv. Unter diesen Bedingungen ist β bezw. $\hat{\varepsilon}_\beta$ nur noch vierwertig, das Gleiche gilt dann von γ bezw. $\hat{\varepsilon}_\gamma$, und

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

auch die primitiven Wurzeln $\hat{x}_\alpha$ und $[\hat{x}_\alpha]$ in (6) bezw. in (12) sind nur vierwertig. Da die Gesamtheit der $\hat{\varepsilon}_\beta$ mit der Gesamtheit der $\hat{\varepsilon}_\gamma$ übereinstimmt, so mufs auch die Gesamtheit der $\hat{x}_\alpha$ mit der Gesamtheit der $[\hat{x}_\alpha]$ übereinstimmen. Da weiter nach (11)

$$\hat{\varepsilon}_\beta \parallel \hat{\varepsilon}_\gamma \tag{13}$$

so mufs auch

$$[\hat{x}_\alpha] \parallel \hat{x}_\alpha$$

sein. Also unterscheiden sich die Gruppen $\mathfrak{G}((\hat{x}_\alpha))$ und $\mathfrak{G}(([\hat{x}_\alpha]))$ nur durch die Aufeinanderfolge der einzelnen $\hat{x}_\alpha$. Weiter folgt aus (13)

$$\hat{\varepsilon}_\beta^{\,s} \parallel \hat{\varepsilon}_\gamma^{\,s} \tag{13a}$$

Drücken wir $\hat{\varepsilon}_\gamma$ durch $\hat{\varepsilon}_\beta$ aus, d. h. setzen wir

$$\hat{\varepsilon}_\gamma = \hat{\varepsilon}_\beta^{\,t},$$

so wird

$$\hat{\varepsilon}_\beta^{\,s} \parallel \hat{\varepsilon}_\beta^{\,st}$$

oder für $st = s'$

$$\hat{\varepsilon}_\beta^{\,s} \parallel \hat{\varepsilon}_\beta^{\,s'}.$$

Hieraus folgt

$$s \parallel s' \text{ mod. } 5.$$

Dadurch bekommt (12) die Form

$$[\hat{x}_\alpha] = \hat{\varepsilon}_\beta^{\,\varkappa'} \cdot e_1 + \varepsilon_\beta^{\,\lambda'} \cdot e_2 + \varepsilon_\beta^{\,\mu'} \cdot e_3 + \varepsilon_\beta^{\,\nu'} \cdot e_4,$$

und es ist

$$\varkappa' \parallel \varkappa, \quad \lambda' \parallel \lambda, \quad \mu' \parallel \mu, \quad \nu' \parallel \nu.$$

Wenn wir also in der Aufeinanderfolge der Exponenten $\varkappa$, λ, μ, ν irgend einen andern Wert $\varkappa'$ an die erste Stelle setzen, so ist damit bereits die ganze Folge der Exponenten eindeutig bestimmt, und es findet eine simultane Vertauschung sowohl der vier $\hat{x}_\alpha$ als auch der Exponenten statt. Es ergiebt sich daher der

Satz 3: Wenn wir in der Wurzel x_α die vier Exponenten $\varkappa$, λ, μ, ν irgend wie vertauschen wollen, so kann es nur simultan geschehen und hat dieselbe Wirkung, wie die simultane Vertauschung der vier primitiven fünften Wurzeln der Einheit; zugleich wird dadurch eine simultane Vertauschung von vier der fünf Wurzeln x_α hervorgerufen.

Wir müssen nun zu Satz 2 und 3 einige ergänzende Betrachtungen anstellen. Ersetzen wir e_1 durch $\varepsilon_\delta e_1$, so geht nach Satz 2 jedes x_α in ein anderes über, das wir mit $[x_\alpha]$ bezeichneten; x_r ist davon nicht ausgenommen. Es wird also dadurch eine andere der fünf Gleichungswurzeln der Form nach imprimitiv, und x_r tritt in die Gruppe der primitiven Gleichungswurzeln ein. Wir sehen, dafs die Imprimitivität nur eine relative, keine absolute, und dafs die Vertauschung der vier primitiven Gleichungswurzeln deshalb gleichbedeutend ist mit derjenigen von irgend vier der x_α.

Für jede imprimitive Gleichungswurzel des fünften Grades giebt es vier simultane Vertauschungen der vier primitiven Wurzeln, mithin haben wir im ganzen, da jedes der

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

fünf x_α zum primitiven gemacht werden kann, $5 \cdot 4 = 20$ simultane Vertauschungen S' von je vier der x_α im Vorhergehenden betrachtet, und, da dies alle überhaupt möglichen derartigen Vertauschungen sind, kann es sich im Folgenden nur noch um die Vertauschungen von drei oder zwei der x_α handeln.

Hiermit ist nunmehr auch die Vierwertigkeit der Vorsetzungen ε_p^q erledigt. Wir verfolgten sie durch die Versetzung der $\varkappa, \lambda, \mu, \nu$ unter einander bei fester Stellung der e_ν und kamen dabei auf die simultane Vertauschung der $\hat{x}_\alpha$. Die letztere können wir aber auch dadurch erreichen, dafs wir die Exponenten $\varkappa, \lambda, \mu, \nu$ fest halten und statt ihrer die e_ν versetzen. Jeder simultanen Vertauschung der $\varkappa, \lambda, \mu, \nu$ entspricht dann eine simultane Vertauschung der vier Wurzelelemente e_ν. Hieraus ergiebt sich als Zusatz zum Satz 3 der

Satz 4: Eine simultane Vertauschung der vier Elemente e_ν bewirkt eine simultane Vertauschung von vier der Wurzeln x_α — und umgekehrt.

Durch Zusammenfassung der hisherigen Ergebnisse erhalten wir

Satz 5: In der Wurzelform (6) ist jedes der vier Wurzelelemente mit einer Zwanzigwertigkeit versehen, indem eine fünfwertige Vorsetzung mit einer Vierwertigkeit verbunden wird. Die Fünfwertigkeit entspricht der simultanen Vertauschung der fünf Wurzeln. Die Vierwertigkeit entspricht einerseits der simultanen Vertauschung von vier der Wurzeln, andrerseits der simultanen Vertauschung der vier Elemente e_ν.

Im Folgenden wollen wir die Gesamtheit derjenigen Substitutionen, welche die fünf Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 simultan vertauschen, also kein x_ν an seiner alten Stelle lassen, mit S_5 bezeichnen. Alle diejenigen Substitutionen, welche nur vier der Wurzeln x_α, nämlich die $\hat{x}_\alpha$, versetzen, mögen durch S_4, und alle diejenigen, welche nur drei bezw. zwei noch zu bestimmende Wurzeln versetzen, durch S_3 bezw. S_2 bezeichnet werden. Dann erhalten wir die 20 simultanen Vertauschungen S' von je vier der fünf x_α dadurch, dafs jede der fünf Substitutionen S_5 mit jeder der vier Substitutionen S_4 verbunden wird. Es ist also

$$S' = S_4 \cdot S_5$$

d. h. S' ist das Produkt der Substitutionen S_4 und S_5. Entsprechend soll $\mathfrak{S}_4$ alle vier Elemente e_ν, $\mathfrak{S}_3$ nur drei derselben und $\mathfrak{S}_2$ ihrer zwei umsetzen, während $\mathfrak{S}_5$ nach dem Früheren e_1 durch $\varepsilon_\vartheta e_1$ ersetzt.

Da die fünf x_α linear durch die vier e_ν dargestellt sind, so lassen sich (cfr. § 5) die e_ν als rationale Funktionen der x_α ausdrücken. Darum wird jede rationale Funktion der e_ν auch zugleich eine rationale Funktion der x_α sein. Hieraus erhalten wir mit Rücksicht auf Satz 4 den

Satz 6: Wenn eine rationale Funktion der e_ν die Substitutionen $\mathfrak{S}_4$ der e_ν zuläfst, so mufs sie auch — als Funktion der x_α — die Substitutionen S_4 der x_α gestatten.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 4.

Da wir über keine der Wurzeln der Gleichung $U_5 = 0$ eine besondere Voraussetzung gemacht haben, so müssen sich alle Wurzeln gleichartig verhalten, man mufs sie daher auch beliebig mit einander vertauschen dürfen. Die Anzahl der so entstehenden Wurzelpermutationen ist im ganzen 5!, und sie lassen sich aus irgend einer derselben z. B. P durch die Substitutionen S_ν ableiten. Wenden wir nämlich auf P die fünf Substitutionen S_5 an, so erhalten wir im ganzen fünf Permutationen P_5. Lassen wir hierin irgend ein x_α z. B. x_5 an seiner Stelle und permutieren die übrigen x_1, x_2, x_3, x_4 durch die vier Substitutionen S_4, so ergeben sich aus jedem P_5 vier neue Permutationen, im ganzen also $5 \cdot 4 = 20$ Formen. Lassen wir hierin jetzt zwei der x_α z. B. x_4 und x_5 an ihrer Stelle, so erhalten wir durch die Anwendung der drei Substitutionen S_3 zwischen x_1, x_2, x_3 nunmehr $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ Formen, und die Anwendung von S_2 verdoppelt diese Zahl. Wir bekommen auf diese Art alle 5! Permutationen. Dabei ist es gleichgiltig, ob wir erst x_5, dann x_4 und darauf x_3 an seiner Stelle lassen, oder ob wir eine andere Auswahl unter den x_α treffen; immer ergeben sich 5! d. h. alle Permutationen. Die fünf Substitutionen S_5 und die vier Substitutionen S_4 sowie ihr Produkt $S_4 \cdot S_5$ sind nach den abgeleiteten Sätzen die Folge der wertigen Vorsetzungen ε_p^q. Wenn es daher gleichgiltig ist, welche der Permutationen wir der Rechnung zu Grunde legen, so mufs es mit der Wahl der Wertigkeiten ebenso sein. Wir dürfen daher, um eine gröfsere Übersichtlichkeit zu erlangen, in den weiteren Rechnungen einen bestimmten Fall der Wertigkeiten ansetzen, ohne darum die Allgemeinheit der Resultate zu beschränken. Wir setzen $\varepsilon_\alpha = \varepsilon$ und verstehen dabei unter ε eine primitive Wurzel der Einheit; für $\varkappa, \lambda, \mu, \nu$ nehmen wir die Zahlen 1, 2, 3, 4, für α und β die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 in ihrer natürlichen Folge und bestimmen $\varepsilon_\alpha = \varepsilon^\alpha$. Dann wird, wenn wir noch die Potenzexponenten von ε mod. 5 reduzieren,

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \varepsilon e_1 + \varepsilon^2 e_2 + \varepsilon^3 e_3 + \varepsilon^4 e_4 \\ x_2 &= \varepsilon^2 e_1 + \varepsilon^4 e_2 + \varepsilon e_3 + \varepsilon^3 e_4 \\ x_3 &= \varepsilon^3 e_1 + \varepsilon e_2 + \varepsilon^4 e_3 + \varepsilon^2 e_4 \\ x_4 &= \varepsilon^4 e_1 + \varepsilon^3 e_2 + \varepsilon^2 e_3 + \varepsilon e_4 \\ x_5 &= e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

oder

$$x_\alpha = \varepsilon^\alpha e_1 + \varepsilon^{2\alpha} e_2 + \varepsilon^{3\alpha} e_3 + \varepsilon^{4\alpha} e_4 = \varepsilon_\alpha e_1 + \varepsilon_\alpha^2 e_2 + \varepsilon_\alpha^3 e_3 + \varepsilon_\alpha^4 e_4 \tag{14'}$$

$$\alpha = 1, 2, 3, 4, 5.$$

§ 5.

Multiplizieren wir die Gleichungen (14) der Reihe nach mit $\varepsilon^4, \varepsilon^3, \varepsilon^2, \varepsilon, 1$ und addieren sie, so finden wir

$$e_1 = \tfrac{1}{5}(\varepsilon^4 x_1 + \varepsilon^3 x_2 + \varepsilon^2 x_3 + \varepsilon x_4 + x_5),$$

und entsprechend

$$\left.\begin{aligned} e_2 &= \tfrac{1}{5}(\varepsilon^3 x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^4 x_3 + \varepsilon^2 x_4 + x_5) \\ e_3 &= \tfrac{1}{5}(\varepsilon^2 x_1 + \varepsilon^4 x_2 + \varepsilon x_3 + \varepsilon^3 x_4 + x_5) \\ e_4 &= \tfrac{1}{5}(\varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3 + \varepsilon^4 x_4 + x_5). \end{aligned}\right\} \tag{14''}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Hiermit ist bewiesen, dafs die e_ν lineare rationale Funktionen der Wurzeln x_α sind. Als Gleichungswurzel ist jedes x_α fünfwertig, denn es kann noch die Werte der andern vier Wurzeln annehmen. Deshalb müssen die rationalen Wurzelfunktionen auf der rechten Seite von (14″) alle möglichen Vertauschungen der x_α gestatten, ohne ihren Wert zu ändern. Die Anzahl dieser Vertauschungen ist $5! = 120$. Durch jede derselben erhält jedes e_ν eine neue von allen übrigen Formen abweichende Gestalt, mithin, solange über die x_ν keine besonderen Voraussetzungen gemacht werden, auch einen neuen Wert. Dennoch darf kein neuer Wert erzeugt werden; das ist nur möglich, wenn die e_ν an sich schon 120 wertig sind. Es folgt also der

Satz 7: Die Wurzelelemente e_ν sind 120 wertige lineare Funktionen der Gleichungswurzeln x_α; sie sind deshalb[1]) ähnliche Funktionen und lassen sich, wie schon in Satz 1 ausgeführt wurde, alle rational durch eine derselben und die rationalen symmetrischen Funktionen der x_α d. h. durch die Gleichungskoëffizienten c_ν ausdrücken.

Da sie nun in (6) mit einer Fünf- und einer Vierwertigkeit behaftet dargestellt sind, so müssen sie aufserdem noch sechswertig sein. Diese Sechswertigkeit mufs die Folge der sechs noch nicht näher betrachteten zyklischen Substitutionen S_3 und S_2 sein, denn die S_5 und S_4 entsprachen der Fünf- bezw. der Vierwertigkeit der e_ν. Wie nach (14) und (14″) nun die S_4 die Folge der $\mathfrak{S}_4$ sind und umgekehrt, so mufs es sich auch bezüglich der S_3 und S_2 auf der einen und der $\mathfrak{S}_3$ und $\mathfrak{S}_2$ auf der andern Seite verhalten; beide bedingen einander.

Vertauschen wir irgend zwei der e_ν, so werden wegen der rationalen Abhängigkeit der e_ν von einander, auch die übrigen geändert; eine Vertauschung von nur zwei oder drei der e_ν d. h. die Substitutionen $\mathfrak{S}_2$ und $\mathfrak{S}_3$ sind also unmöglich. Wir können daher in (14) nur die fünf Substitutionen $\mathfrak{S}_5$ und die vier Substitutionen $\mathfrak{S}_4$ ausführen. Die ersten liefern die fünf Umsetzungen der x_α durch die S_5, die letzten bewirken die vier Umsetzungen der primitiven $\hat{x}_\alpha$ durch die S_4 und lassen $x_r = x_5$ unverändert. Sowohl die $\hat{x}_\alpha$ als das imprimitive x_r sind fünfwertig. Während aber x_r einfach fünfwertig ist, besitzen die $\hat{x}_\alpha$ eine vierfache Fünfwertigkeit, weil jede der Substitutionen $\mathfrak{S}_4$ die Wertfolge der $((\hat{x}_\alpha))$ in $\hat{x}_\alpha$ ändert. Daraus ergiebt sich der

Satz 8: Die imprimitive Gleichungswurzel x_r läfst die Substitutionen $\mathfrak{S}_4$ zu, während jede der primitiven Wurzeln $\hat{x}_\alpha$ dadurch geändert wird.

Da nun weiter die S_3 und S_2 die $\mathfrak{S}_3$ und $\mathfrak{S}_2$ bedingen und umgekehrt, so müssen die S_3 und S_2 zugleich mit den $\mathfrak{S}_3$ und $\mathfrak{S}_2$ unmöglich werden. Dann kommen aber für die e_ν in (18) nur noch die Substitutionen S_5 und S_4 als wertändernd in Betracht, die e_ν können deshalb nur noch $5 \cdot 4 = 20$ Werte besitzen, und ihre Sechswertigkeit mufs fortfallen. Daher folgt als beschränkender Zusatz zu Satz 7 der

Satz 7a. Die Wurzelelemente e_ν sind nur 20 wertig.

---

[1]) Nach einem Satze von Lagrange.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 6.

Wir wollen nun für (14) die $\mathfrak{S}_4$ und die S_4 bestimmen. Setzen wir dazu in (14) für e_1 einen andern seiner fünf Werte ein, so müssen auch für e_2, e_3, e_4, dementsprechende, aber durch e_1 fest bestimmte, andere Werte gesetzt werden; jedes x_α geht dann in ein anderes über. Die fünf Wurzeln werden dabei simultan vertauscht, und es zeigt sich, dafs jedes x_α fünfwertig dargestellt ist. Diese Fünfwertigkeit der Gleichungswurzel beruht in (14) also auf der Fünfwertigkeit des e_1, nicht aber auf der Fünfwertigkeit des ε. In der That ist ε in (14) auch gar nicht mehr fünfwertig, sondern wegen der ausbedungenen Primitivität nur noch vierwertig. Wollen wir daher mit Hilfe von (14) irgend etwas aus der Fünfwertigkeit der x_α schliefsen, so müssen wir zu e_1 noch die neue fünfwertige Vorsetzung ε oder ε^a setzen. Dadurch geht dann x_α in $x_{\alpha+1}$ bezw. in $x_{\alpha+a}$ über, wobei $\alpha + a$ mod. 5 zu reduzieren ist.

Setzen wir dagegen in (14) statt ε einen andern seiner vier Werte d. h. eine andere primitive Wurzel z. B. ε^2, so wird

$$\left.\begin{aligned}
[x_1] &= \varepsilon^2 e_1 + \varepsilon^4 e_2 + \varepsilon e_3 + \varepsilon^3 e_4 = x_2\\
[x_2] &= \varepsilon^4 e_1 + \varepsilon^3 e_2 + \varepsilon^2 e_3 + \varepsilon e_4 = x_4\\
[x_4] &= \varepsilon^3 e_1 + \varepsilon e_2 + \varepsilon^4 e_4 + \varepsilon^2 e_4 = x_3\\
[x_3] &= \varepsilon e_1 + \varepsilon^2 e_2 + \varepsilon^3 e_3 + \varepsilon^4 e_4 = x_1\\
[x_5] &= x_5
\end{aligned}\right\} \tag{14a}$$

Dadurch geht also x_1 in x_2, x_2 in x_4, x_1 in x_3 und x_3 in x_1 über, d. h. die x_α werden gemäfs der Substitution

$$S_4^1 = (x_1 x_2 x_4 x_3)$$

permutirt. Die der Substitution S_4^1 der x_α entsprechende Substitution $\mathfrak{S}_4^1$ der e_ν finden wir, wenn wir in (14a) nach steigenden Potenzen von ε ordnen. Es wird

$$\left.\begin{aligned}
[x_1] &= \varepsilon e_3 + \varepsilon^2 e_1 + \varepsilon^3 e_4 + \varepsilon^4 e_2\\
[x_2] &= \varepsilon e_4 + \varepsilon^2 e_3 + \varepsilon^3 e_2 + \varepsilon^4 e_1\\
[x_4] &= \varepsilon e_2 + \varepsilon^2 e_4 + \varepsilon^3 e_1 + \varepsilon^4 e_1\\
[x_3] &= \varepsilon e_1 + \varepsilon^2 e_2 + \varepsilon^3 e_3 + \varepsilon^4 e_4
\end{aligned}\right\} \tag{14b}$$

Der Vergleich von (14b) mit (14) liefert

$$\mathfrak{S}_4^1 = (e_1 e_3 e_4 e_2).$$

Setzen wir weiter ε^2 in (14a) d. h. $(\varepsilon^2)^2 = \varepsilon^4$ in (14), so wird die Folge $x_2 x_4 x_3 x_1$ in (14a) zyklisch permutiert; denn es wird

$$\left.\begin{aligned}
[[x_1]] &= [x_2] = \varepsilon^4 e_1 + \varepsilon^3 e_2 + \varepsilon^2 e_3 + \varepsilon e_4 = x_4\\
[[x_2]] &= [x_4] = \varepsilon^3 e_1 + \varepsilon e_2 + \varepsilon^4 e_3 + \varepsilon^2 e_4 = x_3\\
[[x_4]] &= [x_3] = \varepsilon e_1 + \varepsilon^2 e_2 + \varepsilon^3 e_3 + \varepsilon^4 e_4 = x_1\\
[[x_3]] &= [x_1] = \varepsilon^2 e_1 + \varepsilon^4 e_2 + \varepsilon e_3 + \varepsilon^3 e_4 = x_2\\
[[x_5]] &= [x_5] = x_5
\end{aligned}\right\} \tag{15a}$$

Ordnen wir nach ε, so erhalten wir weiter

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\left.\begin{aligned}[x_2] &= \varepsilon e_4 + \varepsilon^2 e_3 + \varepsilon^3 e_2 + \varepsilon^4 e_1\\ [x_4] &= \varepsilon e_3 + \varepsilon^2 e_4 + \varepsilon^3 e_1 + \varepsilon^4 e_3\\ [x_3] &= \varepsilon e_1 + \varepsilon^2 e_2 + \varepsilon^3 e_3 + \varepsilon^4 e_4\\ [x_1] &= \varepsilon e_3 + \varepsilon^2 e_1 + \varepsilon^3 e_3 + \varepsilon^4 e_4\end{aligned}\right\} \tag{15b}$$

Die rechten Seiten in (15b) entstehen aus (14b) durch die Substitution $(e_3 e_4 e_2 e_1)$ oder, was dasselbe ist, durch $(e_1 e_3 e_4 e_2) = \mathfrak{S}_4^1$; die linke Seite dagegen ist die Folge der Substitution $S_4^1 = (x_1 x_2 x_4 x_3)$.

Setzen wir endlich ε^2 in (15a) d. h. $(\varepsilon^4)^2 = \varepsilon^3$ in (14), so ist das wieder gleichbedeutend mit der Ausführung der Substitution S_4^1 auf der linken und $\mathfrak{S}_4^1$ auf der rechten Seite von (15a). Legen wir daher von vornherein die Folgen $x_1\, x_2\, x_4\, x_3$ und $e_1\, e_3\, e_4\, e_2$ zu Grunde, d. h. schreiben wir (14)

$$\left.\begin{aligned}x_1 &= \varepsilon e_1 + \varepsilon^3 e_3 + \varepsilon^4 e_4 + \varepsilon^2 e_2\\ x_2 &= \varepsilon^2 e_1 + \varepsilon e_3 + \varepsilon^3 e_4 + \varepsilon^4 e_2\\ x_4 &= \varepsilon^3 e_1 + \varepsilon^2 e_3 + \varepsilon e_4 + \varepsilon^3 e_2\\ x_3 &= \varepsilon^3 e_1 + \varepsilon^4 e_3 + \varepsilon^2 e_4 + \varepsilon e_2\\ x_5 &= e_1 + e_3 + e_4 + e_2\end{aligned}\right\}, \tag{16}$$

so entspricht der Einsetzung von ε^2 an die Stelle von ε einerseits die Substitution $S_4 = (x_1 x_2 x_4 x_3)$ der $\hat{x}_\alpha$ und andrerseits die Substitution $\mathfrak{S}_4^1 = (e_1 e_3 e_4 e_2)$ der e_ν. Der Einsetzung von $\varepsilon^4 = (\varepsilon^2)^2$ entpricht die zweimalige, und der Einsetzung von $\varepsilon^3 = (\varepsilon^4)^2$ die dreimalige Anwendung dieser Substitutionen. Die wiederholte Anwendung einer Substitution nennt man die Potenz derselben und schreibt sie dementsprechend. Es bedingen daher einander die Substitutionen:

$$\left.\begin{array}{llll}1) & (\varepsilon, \varepsilon^2), & S_4^1 = (x_1 x_2 x_4 x_3) & \text{und} \quad \mathfrak{S}_4^1 = (e_1 e_3 e_4 e_2)\\ 2) & (\varepsilon, \varepsilon^4), & S_4^2 = (x_1 x_4)(x_2 x_3) & \text{und} \quad \mathfrak{S}_4^2 = (e_1 e_4)(e_3 e_2)\\ 3) & (\varepsilon, \varepsilon^3), & S_4^3 = (x_1 x_3 x_4 x_2) & \text{und} \quad \mathfrak{S}_4^3 = (e_1 e_2 e_4 e_3)\\ 4) & (\varepsilon, \varepsilon) = 1, & S_4^0 = 1 & \text{und} \quad \mathfrak{S}_4^0 = 1.\end{array}\right\} \tag{17}$$

Hieraus schliefsen wir als Ergänzung zu Satz 6 den

Satz 6a: Wenn eine rationale Funktion der e_ν die Substitution $\mathfrak{S}_4 = (e_1 e_3 e_4 e_2)$ zuläfst, so gestattet sie, als Funktion der x_α, auch die Substitution $S_4 = (x_1 x_2 x_4 x_3)$ — und umgekehrt. Dasselbe gilt von den gleichhohen Potenzen dieser Substitutionen.

§ 7.

Wir substituieren nun

$$x_\alpha = \varepsilon^\alpha e_1 + \varepsilon^{2\alpha} e_2 + \varepsilon^{3\alpha} e_3 + \varepsilon^{4\alpha} e_4 = \varepsilon_\alpha e_1 + \varepsilon_\alpha{}^2 e_2 + \varepsilon_\alpha{}^3 e_3 + \varepsilon_\alpha{}^4 e_4 \tag{14'}$$

in

$$U_5 = 0 \tag{5}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und ordnen nach Potenzen von ε_α. Dann nimmt (5) folgende Form an

$$\varepsilon_\alpha E_1 + \varepsilon_\alpha^2 E_2 + \varepsilon_\alpha^3 E_3 + \varepsilon_\alpha^4 E_4 + \varepsilon_\alpha^5 E_5 = 0, \tag{18}$$

worin die E_ν ganze rationale Funktionen der e_ν und der c_ν sind. Nach den Lehrsätzen der Wertigkeitsrechnung im 4. Kapitel der Dühringschen „Neuen Grundmittel" ist dieses Polynom nur dann gleich Null, wenn die E_ν einzeln verschwinden. Wir erhalten daher statt der ursprünglichen Gleichung (5) fünf neue Gleichungen

$$E_1 = 0, \quad E_2 = 0, \quad E_3 = 0, \quad E_4 = 0, \quad E_5 = 0. \tag{19}$$

Diese Operation bezeichnet Dühring als Gleichungsspaltung. Die Berechnung der E_ν ist sehr umständlich, liefert aber nach einigen Transformationen schliefslich das verhältnismäfsig einfache Resultat:

$$\left.\begin{aligned}
c_2 &= -5\cdot(e_1e_4 + e_2e_3)\\
c_3 &= -5\cdot(e_1^2e_3 + e_1e_2^2 + e_2e_4^2 + e_3^2e_4)\\
c_4 &= -5\cdot(e_1^3e_2 - e_1^2e_4^2 + e_1e_2e_3e_4 + e_1e_3^3 + e_2^3e_4 - e_2^2e_3^2 + e_3e_4^3)\\
c_5 &= -(e_1^5 - 5e_1^3e_3e_4 + 5e_1^2e_2^2e_4 + 5e_1^2e_2e_3^2 - 5e_1e_2^3e_3 - 5e_1e_2e_4^3 - 5e_1e_3^2e_4^2 + e_2^5\\
&\qquad + 5e_2^2e_3e_4^2 - 5e_2e_3^3e_4 + e_3^5 + e_4^5).
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Die Berechnung kann vereinfacht werden (D. p. 157, 158), wenn wir die Substitution (14a) statt in $U_5 = 0$ sofort in

$$\left.\begin{aligned}
-c_1 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = C_5^{(1)}(x_\nu^i) = 0\\
c_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_1x_5 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_2x_5 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5 = C_5^{(2)}(x_\nu)\\
-c_3 &= x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_2x_5 + x_1x_3x_4 + x_1x_3x_5 + x_1x_4x_5 + x_2x_3x_4 + x_2x_3x_5\\
&\qquad + x_2x_4x_5 + x_3x_4x_5 = C_5^{(3)}(x_\nu)\\
c_4 &= x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3x_5 + x_1x_2x_4x_5 + x_1x_3x_4x_5 + x_2x_3x_4x_5 = C_5^{(4)}(x_\nu)\\
-c_5 &= x_1x_2x_3x_4x_5 = C_5^{(5)}(x_\nu)
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

vornehmen, wo das Symbol $C_5^{(\lambda)}(x_\nu)$ die Summe aller Kombinationen von fünf Elementen zur λten Klasse bedeutet. Weil ε_α primitiv ist, liefert die Substitution für jedes c_ν einen vierwertigen Ausdruck. Berechnen wir diese Ausdrücke, so finden wir, dafs in jedem derselben die Vierwertigkeiten infolge der Gleichung $\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\alpha^2 + \varepsilon_\alpha^3 + \varepsilon_\alpha^4 + \varepsilon_\alpha^5 = 0$ verschwinden und nur Einwertiges übrig bleibt. Diese Thatsache gilt für jeden Primgrad, und da sie, als bekannt vorausgesetzt, eine beträchtliche Abkürzung der Rechnung herbeiführt, versucht Dühring sie a priori abzuleiten (S. 157 u. 158). Wir wollen auf diese Ableitung verzichten, da sie uns nicht verständlich erscheint. Sie wird auch vollkommen überflüssig, wenn wir die — wie er es nennt — äufserste Abkürzung der Rechnung wählen, welche sich ergiebt, wenn wir die Koëffizienten durch die Summe der Wurzelpotenzen darstellen.

Es ist bekanntlich

$$\left.\begin{aligned}
c_2 &= -\tfrac{1}{2}\,S(x^2)\\
c_3 &= -\tfrac{1}{3}\,S(x^3)\\
c_4 &= \tfrac{1}{8}\,[S(x^2)]^2 - \tfrac{1}{4}\,S(x^4)\\
c_5 &= \tfrac{1}{6}\,S(x^2)\cdot S(x^3) - \tfrac{1}{5}\,S(x^5),
\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wenn

$$S(x^n) = x_1^n + x_2^n + x_3^n + x_4^n + x_5^n.$$

Bilden wir die n te Potenz von

$$x_\alpha = \varepsilon_\alpha e_1 + \varepsilon_\alpha^2 e_2 + \varepsilon_\alpha^3 e_3 + \varepsilon_\alpha^4 e_4, \tag{14a}$$

so ist dieselbe eine Summe von Gliedern nter Dimension bezüglich der e_ν. Jedes dieser Glieder ist mit einer wertigen Vorsetzung behaftet. Wir wollen nun bezüglich derselben eine Festsetzung treffen. Multiplizieren wir den Index ν in ε_ν^μ mit dem Exponenten μ, und addieren wir die so entstehenden Produkte innerhalb eines jeden Summanden $\varepsilon_{\nu_1}^{\mu_1} \cdot \varepsilon_{\nu_2}^{\mu_2} \cdot \varepsilon_{\nu_3}^{\mu_3} \cdots$ von x_α^n, so soll die resultierende Zahl $\Sigma_\alpha \mu_\alpha \nu_\alpha$ mit dem Namen „Weiser" und der Abkürzung w bezeichnet werden. Dauach wäre z. B. der Weiser des Gliedes $e_3^4 \cdot e_4^2 \cdot e_5^3 = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 25$. Wenn der Weiser eines bei der Potenzierung von (14a) entstehenden Gliedes gleich w ist, so wird die wertige Vorsetzung dieses Gliedes ε_α^w oder $\varepsilon^{\alpha w}$, wobei wir αw mod. 5 reduzieren dürfen und auch wollen. Ist dann $w \equiv 0$ mod. 5, so wird das Glied reell, und umgekehrt; die Vierwertigkeit geht dabei in die Einwertigkeit über. Nun ist

$$x_\alpha^n = \varepsilon_\alpha \cdot E_{1,n} + \varepsilon_\alpha^2 \cdot E_{2,n} + \varepsilon_\alpha^3 \cdot E_{3,n} + \varepsilon_\alpha^4 \cdot E_{4,n} + \varepsilon_\alpha^5 \cdot E_{5,n}, \tag{23}$$

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon^\alpha.$$

Also ist

$$S(x_\alpha^n) = E_{1,n} \cdot \sum_{\alpha=1}^{5} \varepsilon_\alpha + E_{2,n} \cdot \sum_{\alpha=1}^{5} \varepsilon_\alpha^2 + E_{3,n} \cdot \sum_{\alpha=1}^{5} \varepsilon_\alpha^3 + E_{4,n} \cdot \sum_{\alpha=1}^{5} \varepsilon_\alpha^4 \cdot E_{5,n} \cdot \sum_{\alpha=1}^{5} \varepsilon_\alpha^5.$$

Es ist aber

$$\sum_{\alpha=1}^{5} \varepsilon_\alpha^\nu = \sum_{\alpha=1}^{5} \varepsilon^{\alpha\nu} = \sum_{\alpha=1}^{5} \varepsilon^\alpha = 0, \qquad \nu = 1, 2, 3, 4$$

und

$$\sum_{\alpha=1}^{5} \varepsilon_\alpha^5 = 5,$$

folglich

$$S(x_\alpha^n) = 5 \cdot E_{5,n}. \tag{24}$$

Der Beweis ist analog für jeden Primgrad. $E_{5,n}$ können wir aus irgend einem x_α ableiten, denn es ist für alle dasselbe; es enthält nur solche Glieder, deren Weiser $\equiv 0$ mod. 5 sind, weil die dazu gehörige Vorsetzung $\varepsilon_\alpha^5 = \varepsilon^{5\alpha}$ einen Exponenten $\equiv 0$ mod. 5 besitzt. Wir brauchen daher bei der Berechnung von $S(x_\alpha^n)$ nur ein einzelnes $((x_\alpha^n))$ und von diesem nur Glieder, deren Weiser $\equiv 0$ mod. 5 ist, zu berücksichtigen. In (22) treten aber aufserdem noch Ausdrücke von der Form $S(x^n) \cdot S(x^m)$ auf. Da nun $S(x^n)$ und $S(x^m)$ nach (24) nur einwertige Glieder von nter bezw. mter Dimension enthalteu, besteht $S(x^n) \cdot S(x^m)$ auch nur aus einwertigen Gliedern, und zwar $(n+m)$ter Dimension. Dasselbe gilt von der Potenzsumme $S(x^{n+m})$. Indessen hat diese alle überhaupt einwertigen Glieder $(n+m)$ter Dimension, während das Produkt $S(x^n) \cdot S(x^m)$ nur einen Teil derselben zu enthalten braucht. Denn nicht, alle einwertigen Glieder $(n+m)$ter Dimension müssen notwendigerweise durch Multiplikation eines einwertigen Faktors nter Dimension mit einem

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

einwertigen Faktor mter Dimension erzeugt werden; vielmehr kann die Dimension $(n+m)$ auch durch Addition anderer Zahlen als n und m entstehen, wenn sich nur wieder die Einwertigkeit als die Folge der Multiplikation der dabei auftretenden mehrwertigen Vorsetznngen einfindet, wie z. B. bei $\varepsilon^4 \cdot \varepsilon^2 \cdot \varepsilon^8 \cdot \varepsilon = \varepsilon^{15} = 1$; d. h. wenn nur der Weiser wieder $\equiv 0$ mod. 5 wird. Das Eine ist aber sicher: $S(x^{n+m})$ enthält alle überhaupt möglichen einwertigen Glieder $(n+m)$ter Dimension. Die additive oder subtraktive Vereinigung von $A \cdot S(x^{n+m})$ mit $B \cdot S(x^n) \cdot S(x^m)$, wo A und B Zahlenkoëffizienten bedeuten, kann daher nur eine Änderung der Zahlenkoëffizienten in $S(x^{n+m})$ herbeiführen. Wir werden deshalb, um bei der Berechnung der c_ν in (22) alle überflüssigen Glieder zu vermeiden, zunächst alle diejenigen von $S(x^{n+m})$ bezw. x_α^{n+m} heraussuchen, deren Weiser $\equiv 0$ mod. 5 ist, und dann ihre Zahlenkoëffizienten bestimmen. Hierdurch wird die Berechnung der c_ν ganz bedeutend abgekürzt. Wir bemerken noch, ehe wir die Rechnung durchführen, dafs auch diese Betrachtungen für jeden Primgrad gelten.

Es ist

$$S(x_\nu) = 0,$$

$$S(x_\nu^2) = 5 \cdot E_{5,2},$$

$$x_1^2 = (\varepsilon e_1 + \varepsilon^2 e_2 + \varepsilon^3 e_3 + \varepsilon^4 e_4)^2 = \varepsilon E_{1,2} + \varepsilon^2 E_{2,2} + \varepsilon^3 E_{3,2} + \varepsilon^4 \cdot E_{4,2} + \varepsilon^5 E_{5,2}.$$

Wir erhalten $E_{5,2}$, wenn wir in x_1^2 diejenigen Glieder feststellen, deren Weiser $\equiv 0$ mod. 5 ist. Sie sind $e_1 e_4$ und $e_2 e_3$. Nach dem polynomischen Lehrsatz bekommt jedes von ihnen den Faktor 2. Also wird

$$\underline{S(x_\nu^2) = 5 \cdot 2 \cdot (e_1 e_4 + e_2 e_3).} \tag{25}$$

Weiter ist

$$S(x_\nu^3) = 5\, E_{5,3}$$

$$x_1^3 = (\varepsilon e_1 + \varepsilon^2 e_2 + \varepsilon^3 e_3 + \varepsilon^4 e_4)^3 = \varepsilon E_{1,3} + \varepsilon^2 E_{2,3} + \varepsilon^3 E_{3,3} + \varepsilon^4 E_{4,3} + \varepsilon^5 E_{5,3}.$$

Es wird daher, wenn wir in x_1^3 diejenigen Kombinationen der e_ν heraussuchen, deren Weiser $\equiv 0$ mod. 5 ist, und dann die dazu gehörigen Koëffizienten mittels des polynomischen Lehrsatzes bestimmen

$$\underline{S(x_\nu^3) = 5 \cdot 3 \cdot (e_1^2 e_3 + e_1 e_2^2 + e_2 e_4^2 + e_3^2 e_4).} \tag{26}$$

Ferner wird

$$S(x_\nu^4) = 5\, E_{5,4}$$

$$x_1^4 = (\varepsilon e_1 + \varepsilon^2 e_2 + \varepsilon^3 e_3 + \varepsilon^4 e_4)^4 = \varepsilon E_{1,4} + \varepsilon^2 E_{2,4} + \varepsilon^3 E_{3,4} + \varepsilon^4 E_{4,4} + \varepsilon^5 E_{5,4}$$

$$\underline{S(x_\nu^4) = 5 \cdot (4 e_1^3 e_2 + 6 e_1^2 e_4^2 + 4 \cdot 6 \cdot e_1 e_2 e_3 e_4 + 4 e_1 e_3^3 + 4 e_2^3 e_4 + 6 e_2^2 e_3^3 + 4 e_3 e_4^3).} \tag{27}$$

$$S(x_\nu^5) = 5 \cdot E_{5,5}$$

$$x_1^5 = (\varepsilon e_1 + \varepsilon^2 e_2 + \varepsilon^3 e_3 + \varepsilon^4 e_4)^5 = \varepsilon E_{1,5} + \varepsilon^2 E_{2,5} + \varepsilon^3 E_{3,5} + \varepsilon^4 E_{4,5} + \varepsilon^5 E_{5,5}$$

$$\underline{\begin{aligned} S(x_\nu^5) = 5 \cdot (&e_1^5 + e_2^5 + e_3^5 + e_4^5 + 5 \cdot 2 \cdot e_1^3 e_3 e_4 + 5 \cdot 6 \cdot e_1^2 e_2^2 e_4 + 5 \cdot 6 \cdot e_1^2 e_2 e_3^2 + 5 \cdot 2 \cdot e_1 e_2^3 e_3 \\ &+ 5 \cdot 2 e_1 e_2 e_4^3 + 5 \cdot 6 \cdot e_1 e_3^2 e_4^2 + 5 \cdot 2 \cdot e_2^2 \cdot e_3 e_4^2 + 5 \cdot 2 \cdot e_2 e_3^3 e_4) \end{aligned}} \tag{28}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aus (25) folgt

$$[S(x_\nu^2)]^2 = 5^2 \cdot 2^2 \cdot (e_1^2 e_4^2 + 2 e_1 e_2 e_3 e_4 + e_2^2 e_3^2). \tag{29}$$

Aus (25) und (26) finden wir

$$S(x_\nu^2) \cdot S(x_\nu^3) = 5^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (e_1^3 e_3 e_4 + e_1^2 e_2^2 e_4 + e_1^2 e_2 e_3^2 + e_1 e_2^3 e_3 + e_1 e_2 e_4^3 + e_1 e_3^2 e_4^2 + e_2^2 e_3 e_4^2 + e_2 e_3^2 e_4). \tag{30}$$

Substituieren wir (25) bis (30) in (22), so erhalten wir nach Vereinigung der Glieder mit gleicher Hauptgröfse die schon angeführten Dühringschen Formeln

$$\left.\begin{aligned}
c_2 &= -5(e_1 e_4 + e_2 e_3)\\
c_3 &= -5(e_1^2 e_3 + e_1 e_2^2 + e_2 e_4^2 + e_3^2 e_4)\\
c_4 &= -5(e_1^3 e_2 - e_1^2 e_4^2 + e_1 e_2 e_3 e_4 + e_1 e_3^3 + e_2^3 e_4 + e_2^2 e_3^2 + e_3 e_4^3)\\
c_5 &= -(e_1^5 - 5 e_1^3 e_3 e_4 + 5 e_1^2 e_2^2 e_4 + 5 e_1^2 e_2 e_3^2 - 5 e_1 e_2^3 e_3 - 5 e_1 e_2 e_4^3 + 5 e_1 e_3^2 e_4^2 + e_2^5\\
&\quad + 5 e_2^2 e_3 e_4^2 - 5 e_2 e_3^3 e_4 + e_3^5 + e_4^5).
\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Hierin setzen wir

$$-\frac{c_2}{5} = d_2; \qquad -\frac{c_3}{5} = d_3; \qquad -\frac{c_4}{5} = d_4 \tag{32}$$

$$-5 \cdot (e_1^3 e_3 e_4 - e_1^2 e_2^2 e_4 - e_1^2 e_2 e_3^2 + e_1 e_2^3 e_3 + e_1 e_2 e_4^3 - e_1 e_3^2 e_4^2 - e_2^2 e_3 e_4^2 + e_2 e_3^3 e_4) = a \tag{33}$$

und zerlegen die linke Seite von (33) in folgender Weise

$$-5(e_1 e_4 - e_2 e_3)(e_1^2 e_3 - e_1 e_2^2 + e_2 e_4^2 - e_3^2 e_4) = a, \tag{34}$$

dann erhalten wir

$$E_2 = e_1 e_4 + e_2 e_3 = d_2 \tag{35}$$

$$E_3 = e_1^2 e_3 + e_1 e_2^2 + e_2 e_4^2 + e_3^2 e_4 = d_3 \tag{36}$$

$$E_4 = e_1^3 e_2 - e_1^2 e_4^2 + e_1 e_2 e_3 e_4 + e_1 e_3^3 + e_2^3 e_4 - e_2^2 e_3^2 + e_3 e_4^3 = d_4 \tag{37}$$

$$E_5 = e_1^5 + e_2^5 + e_3^5 + e_4^5 - 5 \cdot (e_1 e_4 - e_1 e_3) \cdot (e_1^2 e_3 - e_1 e_2^2 + e_2 e_4^2 - e_3^2 e_4) = -c_5 \tag{38}$$

Zur Abkürzung setzen wir noch

$$e_1 e_4 - e_2 e_3 = \beta. \tag{39}$$

$$e_1^2 e_3 - e_1 e_2^2 + e_2 e_4^2 - e_3^2 e_4 = \gamma. \tag{40}$$

$$e_1^5 + e_2^5 + e_3^5 + e_4^5 = u. \tag{41}$$

§ 8.

Nach Satz 7a sind die e_ν zwanzigwertig, und aufserdem ist jedes derselben nach Satz 1 und Satz 7 durch jedes andere e_μ rational darstellbar. Daraus folgt, dafs auch die Funktionen E_ν, u und a des § 7 höchstens 20 Werte haben. Diese Zwanzigwertigkeit rührt nach § 6 her

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

1) von der reinen Fünfwertigkeit der Elemente e_ν, weil $e_\nu = \sqrt[5]{A_\nu}$
2) von der Vierwertigkeit des primitiven ε_α, welche den Substitutionen $\mathfrak{S}_4$ der e_ν äquivalent ist.

Nun kann aber die Fünfwertigkeit der e_ν in den E_ν sowie in u und a nicht mehr wertändernd wirken, weil der Weiser jedes einzelnen Gliedes in den E_ν kongruent 0 mod. 5 ist. Das Gleiche können wir von der Vierwertigkeit nachweisen, indem wir die vier Substitutionen $\mathfrak{S}_4$ nämlich

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{S}_4^{\,0} &= 1 \\ \mathfrak{S}_4^{\,1} &= (e_1 e_3 e_4 e_2) \\ \mathfrak{S}_4^{\,2} &= (e_1 e_4)(e_2 e_3) \\ \mathfrak{S}_4^{\,3} &= (e_1 e_2 e_4 e_3) \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

in den E_ν, in u und a ausführen. Sie bringen keine Wertänderung hervor, also sind E_ν, u und a einwertig, sobald $U_5 = 0$ algebraisch lösbar ist.

Aus demselben Grunde verhalten sich die Funktionen β und γ in (39) und (40) gleichgiltig gegen die Fünfwertigkeit der e_ν; dagegen bringen die Substitutionen (17) eine Wertänderung hervor. Es ergiebt

die Substitution 1		den Wert	$e_1 e_4 - e_2 e_3 = \beta$	bezw.	$e_1^2 e_3 - e_1 e_2^2 + e_2 e_4^2 - e_3^2 e_4 = \gamma$
,,	,,	$(e_1 e_3 e_4 e_2)$	,, ,,	$e_2 e_3 - e_4 e_1 = -\beta$	,, $e_2^2 e_1 - e_2 e_4^2 + e_4 e_3^2 - e_1^2 e_3 = -\gamma$
,,	,,	$(e_1 e_4)(e_2 e_3)$	,, ,,	$e_4 e_1 - e_3 e_2 = +\beta$	,, $e_4^2 e_2 - e_4 e_3^2 + e_3 e_1^3 - e_2^2 e_1 = \gamma$
,,	,,	$(e_1 e_2 e_4 e_3)$	,, ,,	$e_3 e_2 - e_1 e_4 = -\beta$	,, $e_3 e_4^2 - e_3 e_1^2 + e_1^2 e_2 - e_4^2 e_2^2 = -\gamma$

während $\beta\gamma = -\frac{a}{5}$ nicht geändert wird. Daraus folgt, dafs die Funktionen E_ν, u und a ähnlich und deshalb rational durch einander ausdrückbar sind. Das Gleiche gilt für β und γ. Nach (35) bis (38) sind aber die E_ν den Koëffizienten c_ν bis auf eine multiplikative Konstante gleich, also ergiebt sich

Satz 9: Zwischen den Koëffizienten von $U_5 = 0$ müssen rationale Beziehungen bestehen oder: die Gleichung $U_5 = 0$ ist eine besondere, wenn sie algebraisch lösbar ist.

Ebenso folgt:

Satz 10: Die Gleichung $U_5 = 0$ ist nur dann algebraisch lösbar, wenn die Elementefunktion $e_1^5 + e_2^5 + e_3^5 + e_4^5$ sich rationalisieren läfst.

Diesen im allgemeinen sechswertigen Ausdruck nennt Dühring die kritische Funktion; mit ihrer Rationalisierung sind alle übrigen Sechswertigkeiten aufgehoben.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf