Einleitung.

Die allgemeine Gleichung fünften Grades ist algebraisch unlösbar. Diese Thatsache ist seit Abel von den verschiedensten Autoren in der mannigfaltigsten Art bewiesen worden. Das schliefst aber nicht aus, dafs es besondere Gleichungen des fünften Grades giebt, welche eine algebraische Lösung zulassen. Diese Gleichungen aufzusuchen, die Beziehungen, welche zwischen ihren Koëffizienten stattfinden müssen, festzustellen, und die Abhängigkeit ihrer Wurzeln von einander zu ergründen: wird daher eine Aufgabe sein, welche gelöst werden mufs, wenn das Gebiet der Gleichungen des fünften Grades vollständig erforscht werden soll. Die Frage nach den algebraisch lösbaren Gleichungen fünften Grades ist nun bisher nicht gerade häufig, und nicht immer erschöpfend behandelt worden. Zwei Autoren haben meines Wissens einen besonderen Erfolg bei der Bearbeitung dieses Themas aufzuweisen. Der eine ist G. P. Young, dessen Abhandlungen sich im „Americal Journal of mathematics Vol. VI bis X" finden. Der andere ist Dr. E. Dühring, welcher in Gemeinschaft mit seinem Sohne Ulrich Dühring in den „Neuen Grundmitteln und Erfindungen" die Gleichungen höherer Grade untersucht hat[1]). Beide Autoren, Young und Dühring, haben fast gleichzeitig die Ergebnisse ihrer Untersuchungen veröffentlicht; und beiden ward das gleiche Schicksal zu teil, dafs man ihre Ausführungen bezweifelte. Bezüglich Youngs und eines seiner Nacharbeiter — Mc. Clintock — findet man diesen Zweifel in den Fortschritten der Mathematik, Jahrgang 1883 und 1884, vom Berichterstatter ausgesprochen. Über Dühring scheinen gedruckte Ausstellungen nicht vorhanden zu sein; dafür wandern um so mehr Gerüchte über die Unzuverlässigkeit seiner Ausführungen in den mathematischen Kreisen umher, ohne dafs es recht gelingt, die Namen der Urheber oder die angezweifelten Punkte zu erfahren. Ich werde deshalb im Folgenden versuchen, alle algebraisch lösbaren Gleichungen des fünften Grades aufzufinden, und werde mich dabei der Dühring'schen Methode bedienen, weil dieselbe bei geringen Abänderungen gestattet, die Frage sowohl für die Primgrade als auch für die zusammengesetzten Grade endgiltig zu entscheiden, und bei Beschränkung auf das Notwendige durch ihre Kürze und Klarheit das Studium der algebraischen Gleichungen überhaupt ganz bedeutend vereinfacht. Ich hoffe dadurch zu zeigen, dafs die Dühringsche Methode vollständig einwandfrei ist.

---

[1]) Neue Grundmittel und Erfindungen zur Analysis, Algebra, Funktionsrechnung und zugehörigen Geometrie etc. von Dr. E. Dühring und Ulrich Dühring. Leipzig, Fues's Verlag, 1884.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aus Mangel an Raum werde ich zunächst nur das Notwendigste aus der Dühringschen Theorie der Gleichungslösung angeben, um dann sofort zu meinen Ausführungen überzugehen; für das genauere Studium der Dühringschen Methode verweise ich die Leser auf das Originalwerk.

I. Abschnitt.

§ 1.

Ist
$$U_n = x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_{n-1} x + c_n = 0 \tag{1}$$
eine irreduzible Gleichung des nten Grades, in welcher die Koëffizienten c_ν rationale Gröfsen sind, so hat jede Wurzel von (1), wenn die Gleichung algebraisch lösbar sein soll, nach Dühring die Form
$$x_\alpha = e_0 + \varepsilon_\beta^{\varkappa} e_1 + \varepsilon_\beta^{\lambda} e_2 + \ldots + \varepsilon_\beta^{\pi} e_{n-1}. \tag{2}$$
Hierin können α und β jeden Wert $1, 2, \ldots n$ annehmen; $\varkappa, \lambda, \ldots \pi$ dürfen die Werte $1, 2 \ldots (n-1)$ haben, mit der Beschränkung, dafs nicht zwei dieser Gröfsen denselben Wert bekommen. Ebenso müssen die n Gröfsen e_ν, $\nu = 0, 1, 2 \ldots (n-1)$, von einander verschieden sein, sobald die Gleichung (1) irreduktibel ist. Den Fall, dafs eine oder mehrere dieser Gröfsen Null sind, schliefsen wir vorläufig aus. Die e_ν werden als die Elemente der Wurzel x_α bezeichnet und sind Wurzelausdrücke, deren äufserste Wurzeln vom nten Grade sind, während die inneren höchstens den Grad $(n-1)$ besitzen; e_0 allein ist rational. Die ε_β endlich sind die nten Wurzeln der Einheit und treten auf, weil e_ν von der Form $\sqrt[n]{A_\nu}$ ist.

Wir können die Gleichung (1) durch eine lineare Transformation von ihrem ersten Koëffizienten befreien. Im Folgenden soll diese Form der Gleichung zu Grunde gelegt werden. Wir ersetzen (1) durch
$$U_n = x^n + c_2 x^{n-2} + c_3 x^{n-3} + \ldots + c_{n-1} x + c_n = 0. \tag{3}$$
Da
$$c_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0,$$
so wird nach (2)
$$\sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha = n e_0 + e_1 \cdot \sum_{\beta=1}^{n} \varepsilon_\beta^{\varkappa} + e_2 \sum_{\beta=1}^{n} \varepsilon_\beta^{\lambda} + \ldots + e_{n-1} \sum_{\beta=1}^{n} \varepsilon_\beta^{\pi} = 0.$$
Nun ist für jedes r
$$\sum_{\beta=1}^{n} \varepsilon_\beta^{r} = 0,$$
Daher wird
$$n e_0 = 0$$
oder
$$e_0 = 0$$
und
$$x_\alpha = \varepsilon_\beta^{\varkappa} e_1 + \varepsilon_\beta^{\lambda} e_2 + \ldots + \varepsilon_\beta^{\pi} e_{n-1}; \tag{4}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf