Wissenschaftliche Beilage zum Jahresbericht
des Friedrichs-Realgymnasiums zu Berlin. Ostern 1899.

Erstmaliges Auftreten

der

einzelnen Bestandteile unserer Schulmathematik.

Von

Dr. Johannes Tropfke.

I. Teil.

Bibliothek des Städt. Gymnasiums Düsseldorf

BERLIN 1899.
R. Gaertners Verlagsbuchhandlung
Hermann Heyfelder.

1899. Programm Nr. 99.

9be
22

99b

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

HT 010431517

UNIVERSITÄTS- UND LANDESBIBLIOTHEK DÜSSELDORF

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nachfolgende gedrängte Zusammenstellung geht aus Notizen hervor, welche Verfasser sich bei der Lektüre mathematisch-historischer Schriften gemacht hat, um sie gelegentlich im Unterricht zu verwenden. Ein Aufsuchen des ersten Auftretens der einzelnen mathematischen Lehrsätze, Kunstwörter, Zeichen u. a. hat seine grofsen Schwierigkeiten. Steht im Anfang unserer Wissenschaft, mit welchem der Beginn der schriftlichen Überlieferung zusammenfällt, zu wenig Quellenmaterial zur Verfügung, so schwillt besonders gegen die Neuzeit hin die Litteratur zu mächtiger Fülle an. Stellt sich dem Suchenden nun wirklich bei einem Schriftsteller ein Satz als erstmalig dar oder ist es nicht möglich, ein früheres Vorkommen von Kunstwörtern oder technischen Zeichen aufzufinden, so ist noch lange nicht damit gesagt, dafs nun auch absolut keine Vorexistenz nachzuweisen ist. Die gebräuchlichsten Rechenzeichen z. B. + und — treten zum ersten Mal in dem Rechenbuch des Johannes Widmann 1489 auf, werden aber sofort in einer Weise angewandt, dafs man sich der Überzeugung nicht verschliefsen kann, Widmann sei nur dem damaligen Gebrauch gefolgt. Wann sind diese Zeichen also nun entstanden? Hierüber lassen sich nur mehr oder weniger ansprechende Vermutungen aufstellen. — Oft führt ferner die zum Mythos gewordene Tradition viele Sätze auf bedeutende Männer zurück (Thales, Pythagoras), welche sicher nicht die Entdecker, sondern höchstens Übermittler, etwa von Ägypten her, waren. — Gerade mathematische Wahrheiten treten auch häufig mehrere Male, zu verschiedenen Zeitperioden und in verschiedenen Ländern, wie erstmalig, auf. Bei gewissen Entdeckungen liegt in der That mehrfache, selbständige Entwicklung vor, bei anderen freilich gelingt es, wenn auch manchmal erst nach mühseligen Untersuchungen, eine historische Verbindung herzustellen. — Auch das trifft nicht selten zu, dafs dieselbe Entdeckung zu gleicher Zeit von mehreren Forschern unabhängig von einander gemacht wird. Es sind gerade einige der wichtigsten mathematischen Errungenschaften, welche dieses eigenartige Entstehen aufweisen. Man erinnere sich der Doppelentdeckung der Logarithmen durch Bürgi und Neper, der analytischen Geometrie durch Fermat und Descartes, der Infinitesimalrechnung durch Leibniz und Newton.

Was die Kunstzeichen und Kunstwörter der Mathematik betrifft, so ist wohl die geringste Anzahl von ihnen — wenn wir wenigstens von der Neuzeit absehen — mit wohlbedachter Absicht in Rücksicht auf ihre Nützlichkeit eingeführt. Es existiert hier eine natürliche Zuchtwahl, die das Praktische in Aufnahme kommen und sich erhalten läfst, die freilich auch oft durch althergebrachte Übung soweit aufser Thätigkeit gesetzt wird, dafs dringend nötige Neuerungen (wie etwa die Dezimalteilung) nicht oder nur sehr langsam zur Herrschaft gelangen können.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Geschichten der Mathematik giebt es zur Genüge, an ihrer Spitze steht das bewunderungswürdige Lebenswerk unseres Altmeisters M. Cantor, das jüngst vollendet ist. Sie beleuchten das Entstehen und Wachsen der Mathematik und ihrer Einzelwissenschaften in historischem Zusammenhange. In der Praxis stellt sich jedoch zweifelsohne das Bedürfnis nach einer stofflich geordneten Geschichte unserer Wissenschaft heraus. Nun liegen Monographieen vor; dieselben sind indes teils zu spezialisiert teils zu wenig für den Schulmann geeignet. Finks Geschichte der Elementarmathematik ist ein erster dankenswerter Versuch. Doch dürfte Übersichtlichkeit, Reichhaltigkeit und Genauigkeit nicht in dem wünschenswerten Grade erzielt sein; jedenfalls gelingt es schwer bei der gewählten Anordnung über einen bestimmten Punkt schnell und genügend Auskunft zu erhalten. Aus diesem Grunde ist im Folgenden die Anordnung unseres modernen Schulpensums gewählt. Sie gestattet in Kürze eine gewünschte historische Notiz über das erstmalige Auftreten dieses oder jenes Satzes zu finden, — falls nicht gerade an dieser Stelle der Zusammenstellung eine Lücke vorhanden ist. Auf Vollständigkeit kann selbstverständlich kein Anspruch erhoben werden; dafür ist der zu bewältigende Litteraturstoff zu grofs, oft auch die gegenwärtige historische Kenntnis noch nicht ausreichend. Mit Dankbarkeit würde Verfasser jede einschlägige Notiz für eine spätere ausführliche Bearbeitung der nachstehenden Stoffsammlung annehmen. Durch die Beschränktheit des zur Verfügung gestellten Raumes ist auch die Knappheit der Darstellung bedingt; leider mufsten auch aus diesem Grunde genauere Litteraturangaben bei den einzelnen Daten unterdrückt werden.

Benutzt sind die Werke von Brettschneider, Cantor, Chasles, Fink, Friedlein, Günther, Hankel, Klügel, Matthiessen, Nesselmann, Suter, Treutlein, Unger, die Zeitschrift für Mathematik und Physik und die Bibliotheca mathematica, ferner die Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik. Die Zeitangaben sind gröfstenteils dem trefflichen Tabellenwerk von Felix Müller entnommen.

Der Umfang der Arbeit machte eine Verteilung auf zwei Programmabhandlungen nötig. Der Stoff ist in folgender Weise geordnet:

Teil I.

I. Das Rechnen.
- A. Die Zahlen.
  - 1) Die modernen Ziffern, S. 5,
  - 2) Die Zahlwörter, S. 6.
- B. Die Mafse, S. 7.
- C. Das Rechnen mit ganzen Zahlen.
  - 1) Kopfrechnen, S. 8,
  - 2) Schriftliches Rechnen, S. 8.
- D. Eigenschaften der ganzen Zahlen, S. 10,
- E. Das Rechnen mit Brüchen.
  - 1) Gewöhnliche Brüche, S. 10,
  - 2) Dezimalbrüche, S. 11.
- F. Angewandtes Rechnen, S. 12.

II. Algebra.
- A. Geschichtlicher Überblick, S. 14.

Teil II.

III. Geometrie.
- A. Geschichtlicher Überblick.
- B. Allgemeines.
- C. Gerade Linie und Winkel.
- D. Das Dreieck.
- E. Construktionsaufgaben.
- F. Das Viereck.
- G. Der Kreis.
- H. Flächenvergleichung und -berechnung.
- I. Proportionalität an Figuren.
- K. Regelmäfsige Polygone, Kreisberechnung.

IV. Logarithmen.

V. Ebene Trigonometrie.

VI. Sphaerische Trigonometrie.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

B. Stufen der algebraischen Entwicklung, S. 15.
C. Einführung der Buchstabengröfsen, S. 15.
D. Moderne Operationszeichen, S. 16.
E. Entwicklung des Zahlbegriffes, S. 17.
F. Die 4 ersten Rechnungsarten, S. 19.
G. Potenzierung, S. 19.
H. Radizierung, S. 20.
I. Proportionen, S. 21.
K. Gleichungen, S. 22.
VII. Arithmetische und geometrische Reihen.
VIII. Zinseszins- und Rentenrechnung.
IX. Combinatorik. Binomischer Lehrsatz.
X. Unendliche Reihen.
XI. Stereometrie.
XII. Maxima und Minima.
XIII. Analytische Geometrie.
XIV. Kegelschnitte.

Das Rechnen.

Die Zahlen.

Die modernen Ziffern.

In Indien bildeten sich — vielleicht aus den Anfangsbuchstaben der Zahlwörter — Zahlzeichen, nach Ort und Zeit von verschiedener Form, zunächst ohne Null, deren Erfindung erst nach dem II Saec. p. anzunehmen ist. — Erstes Auftreten der Null in Indien 738 p. in einer Urkunde.

Indische Buchstabenabkürzungen des II Saec. p. ohne Null kamen nach Alexandria; aus ihnen bildeten sich die apices des Boethius (Rom 480 — Pavia 524), Aufschriften auf Rechenmarken 1, 2, . . . 9, die zum Kolumnenrechnen auf dem Abakus benutzt wurden. Diese apices, durch Gerbert (Papst Sylvester II Auvergne 940 — Rom 1003) weitverbreitet, werden von den Abacisten bis zum XII Saec. angewendet, vereinzelt auch später.

Denselben Ursprung haben die Zahlzeichen der Westaraber (Gobarziffern). — Zu den Ostarabern brachte ein indischer Gelehrter um 722 p. anders gestaltete indische Ziffern mit der Null, welche inzwischen in Indien sich gebildet hatte. Den Gebrauch der Null übernahmen von ihnen die Westaraber, ohne ihre bisherigen Zahlzeichen zu ändern.

Aus diesen westarabischen Zahlzeichen mit der Null sind unsere modernen Ziffern allmählich entstanden.

Durch die Übersetzungen und Bearbeitungen arabischer Rechenbücher von Atelhart von Bath (um 1120), Johannes von Luna (um 1140), Gerhard von Cremona (1114 — Toledo 1187), vor allem durch Leonardo Pisano (Fibonacci) (Pisa 1180—1250), dessen *liber abaci* die Grundlage des neueren Rechnens ist, und durch den *Algorithmus demonstratus* des Jordanus Nemorarius (Deutscher Ordensgeneral, † 1236) wurde das Rechnen mit den indischen Ziffern wissenschaftlich erklärt und verbreitet. Zunächst — abgesehen von Gelehrten — nur von Kaufleuten benutzt, wurden sie in Schrift und Druck allgemein verwendet nicht vor der Mitte des XVI Saec.

Älteste Berichte über die indischen Ziffern:

1) bei Masudi, einem arabischen Schriftsteller des X Saec.
2) bei Abu Sahl ben Tamim, einem Commentator der kabbalistischen Schrift *Sephir Yecira*, um 950.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3) bei Maximus Planudes (Byzanz, um 1330) im Rechenbuch *ψηφορία κατ' Ἰνδους*; hier ist zuerst die Null erwähnt.

Ältestes, sicher festgestelltes Auftreten der indischen Ziffern im Abendland bei Nichtmathematikern:

1) In einer Handschrift eines Lehrgedichtes „*Der Wälsche Gast*" unter einem Bilde der Arithmetik — zweite Hälfte des XIII Saec.
2) 1299, Florenz, amtliches Verbot des Gebrauches der indischen Ziffern bei den Kaufleuten (der Kontrolle wegen).
3) 1471, Druck eines Werkes von Petrarca mit Ziffern als Seitenzahlen.
4) 1482, erstes deutsches Rechenbuch, Bamberg. —

Auftreten auf Münzen seit 1549. — Auftreten auf Baudenkmälern u. a. sehr unsicher infolge event. Restaurationen nach dem 30jährigen Krieg.

Moderne Form der Ziffern:

0 und 1 haben stets ihre Form behalten; 2 tritt in heutiger Form zuerst im XIII Saec. auf; 3 hat die Form des entsprechenden Sanskritbuchstabens des II Saec. p. am reinsten bewahrt; 4 erscheint modern im XIII Saec. vereinzelt, regelmäfsig seit Petzensteiners Drucken (1482, 1483); 5 und 7 haben auch erst seit Erfindung der Buchdruckkunst die jetzige Form angenommen; die moderne 6 findet sich schon bei Maximus Planudes (um 1330), auch die entsprechende Gobarziffer gleicht derselben; die Form der 8 ist seit den apices des Boethius (um 1000) eingebürgert; die heutige 9 erscheint seit Maximus Planudes (um 1330) regelmäfsig.

Die Zahlwörter.

Das Wort Null (indisch sunya = leer, arabisch as-sifr)

1202, Leonardo Pisano, *liber abaci*: zephirum. — 1484 Nicolas Chuquet, *Le triparty en la science des nombres*: chiffre, nulle. — 1494 Luca Paciuolo (Florenz), *summa*: nulla, çero. — 1515 Köbel, *Vysirbuch*: nulla.

Das Wort Ziffer in der allgemeinen Bedeutung (ursprünglich Figuren) zuerst: 1525 *Bökeschen vor de leyen und Kinder* — dann: 1530 Schrift von Johannes Kolrofs, tüdtsch Leermeystern zu Basel, 1534 Rechenbuch von Jacob Köbel (hier die römischen Zahlen als die 'gewenlich teutsch Zal' im Gegensatz zu den 'ziffern zale' genannt).

Die Wörter Million, Billion, Trillion u. s. w. 1484, Nicolas Chuquet, *Le triparty*. — praktisch eingeführt durch Alb. Girard 1629 *Invention*.

Das Wort Milliarde: 1552 Jacques Peletier, *Arithmétique* (milliars = million de millions) — 1566 Jan Frenchant, *L'Arithmétique* (miliars = 1000 Millionen). In letzterer Bedeutung in der ersten Hälfte des XIX Saec. in Frankreich gebräuchlich geworden.

Die moderne Art Zahlen zu lesen mit Benutzung des Wortes Million hat sich erst nach dem XVII Saec. allgemein verbreitet (in Deutschland: zuerst 1681 Hechenberg, Hannover).

Das Abteilen zu je 3 bez. 6 Ziffern findet man zuerst bei Johannes de Sacrobosco († 1256), *tractatus de arte numerandi*.

Ein Erweitern des dekadischen Zahlensystems auf sehr grofse Zahlen bei Archimedes (287—212 a., Syrakus), *Sandrechnung* — Apollonius (zw. 250 und 200 i. Alexandria) nach Überlieferung von Pappus — bei den Indern in verschiedenen Schriften (z. B. in buddhistischen Schriften bis $m^{(2^{128})}$, $m = 10^7$).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Andere Zahlensysteme, als das dekadische betrachten zuerst wissenschaftlich: Blaise Pascal (1632—1662, Paris), *Caractères de divisibilité des nombres;* Joh. Caramuel y Lobkowitz 1670, *Matthesis biceps vetus et nova.*

Die Maſse.

Zeitmaſs.

Die Einteilung der Woche in 7 Tage ist babylonischen Ursprungs. Älteste Überlieferungen sind: 1) die *Bibel;* 2) *Namar Bili*, ein für den König Sargon I. von Babylon verfaſstes astrologisches Werk, um 1700 a.

Die Einteilung des Jahres in 365 Tage wird von den Ägyptern auf eine sagenhafte Urzeit verlegt.

Die Einführung des Schaltjahres (jedes 4. Jahr = 366 Tage) geht zurück auf das *Edikt von Kanopus* vom 7. III. 238 a. unter Ptolemaeus III Euergetes (Zusammenhang mit der Chronologie des Eratosthenes (276—194 Alexandria)). Es geriet bald in Vergessenheit. Dieselbe Kalenderform 46 a. durch Julius Caesar mit Hilfe des Sosigenes wiederholt.

Osterrechnung 1) 457 p. Victorius v. Aquitanien (zugleich Einführung des Jahres 1 als 754 p. urb. cond.). 2) 562 p. Cassiodorius (475—570, Bruttien), *computus paschalis* (nötig geworden nach den noch heute geltenden Festsetzungen des Conzils zu Nicaea 325 p.).

Die Verlegung des Jahranfanges auf den 1. Januar geschah 525 durch Dionysius Exiguus.

Die Gregorianische Kalenderform datiert vom 24. II. 1582 — Mitarbeiter Chr. Clavius (1537—1612); von den katholischen Ständen in Deutschland 1583, von den evangelischen 1699 angenommen.

Die Monatsnamen sind römischen Ursprungs.

Die Wörter Minuten, Sekunden stammen aus den lateinischen Übersetzungen der *μεγάλη σύνταξις* des Ptolemaeus, in welchen die Unterabteilungen eines Grades zu je 60 hieſsen: partes minutae primae, p. minutae secundae.

Winkelmaſs.

Die Teilung eines Kreises in 360 Grad, eines Grades in 2 weitere Unterabteilungen zu je 60 ist babylonischen Ursprungs, abgeleitet aus der Einteilung des Jahres in 360 Tage (die Chinesen haben bei verbesserter Jahreseinteilung den Kreis in $365^1/_4{}^\circ$ zerlegt). — Einführung der Sexagesimalteilung in Alexandria um 200 a. durch Hypsikles.

Das Wort Grad. Ptolemaeus (87—165 p. Alexandria) teilt den Durchmesser in 120 Teile (*μοῖραί*), jeden von diesen in weitere Unterabteilungen zu je 60 (vgl. Zeitmaſs, Minuten, Sekunden). Ins Arabische übersetzt hieſsen die Hauptteile darajah, von hier ins Lateinische wörtlich übersetzt: scala, gradus; das französische degré stammt direkt aus dem Arabischen.

Das Zeichen ° findet sich zuerst bei Beyer 1619 *Logistica decimalis.*

Das Wort Transporteur geht zurück auf Christian Wolf 1741 *Elementa Mattheseos:* instrumentum transportatorium.

Dezimalmaſse:

Einführung des metrischen Maſs- und Gewichtsystemes: 17. VIII. 1868 im Nord-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

deutschen Bund, 1. I. 1872 im Deutschen Reich. — Einführung des metrischen Münzsystemes 4. XII. 1871 im Deutschen Reich.

Das Wort Resolvieren erscheint in moderner Auffassung zuerst im *Algorithmus linealis* von Heinr. Stromer (1520 Wien).

Das Wort Reduzieren kommt ebendaselbst vor, jedoch sowohl in moderner Bedeutung, als auch in der des Resolvierens.

Das früher übliche Zeichen ℔ ist ein Compendium für libra.

Das Rechnen mit ganzen Zahlen.

Kopfrechnen

Dasselbe ist zu allen Zeiten getrieben worden, am höchsten ausgebildet bei den Indern (in einer arabischen Schrift aus dem XIV—XV Saec. als Luftrechnen bezeichnet).

Als gesonderte Übung im Unterricht trat dasselbe erst gegen das XVIII Saec. auf (z. B. im Philantropin zu Dessau).

Älteste Einmaleinstabelle, um 100 p. Nicomachus von Gerasa (Arabien), *εἰσαγωγὴ ἀριθμητική* (hieraus schöpft Boethius, dann Bernelinus).

Grofses Einmaleins zuerst bei Petrus de Dacia (um 1290—1347), *tabula ad inveniendam propositionem cuiusvis numeri.*

Dreiecksform des Einmaleins 1489, Johannes Widman v. Eger, *behende und hubsche Rechnung auf allen kauffmannschaft.*

Erste Rechenmaschinen: 1) 1640 Johann Ciermans, *disciplinae mathematicae* (nur Beschreibung). 2) 1642 Blaise Passcal (wirklich hergestellt).

Schriftliches Rechnen.

Älteste gedruckte deutsche Rechenbücher: 1) von Ulrich Wagner 1482 zu Nürnberg von Heinrich Petzensteiner gedruckt (sehr wenig erhalten). 2) Bamberger Rechenbuch von 1483. 3) Rechenbuch von Johannes Widmann 1489, Leipzig.

Die Operationszeichen sind aus der Algebra entlehnt, vergl. S. 16.

Duplicatio und Mediatio als besondere Rechnungsarten zuerst fortgelassen: 1494 Luca Pacinolo, *summa.*

Begriff der Spezies zuerst aufgestellt durch Gemma-Frisius 1540, *methodus.*

Auf genaues und sorgfältiges Untereinanderschreiben der Ziffern beim Rechnen legt zuerst Gewicht: 1748 Joh. G. Gottl. Hübsch, *Arithmetica portensis.*

Erste umfassendere Zusammenstellung von Rechenvorteilen mit Beweisen: 1732, Clausberg, *demonstrative Rechenkunst.*

Addieren.

Die moderne Art wurde zuerst von den Indern gebraucht; ausführliche Beschreibung im Rechenbuch des Muhammed ibn Musa Alchwarizmi (um 820 p, Bagdad, Damaskus) mit besonderer Berücksichtigung des Falles, dafs eine Teilsumme gröfser als 10.

Die Gewohnheit von rechts nach links zu addieren, wobei das Verbessern schon erhaltener Resultatsziffern wegfällt, tritt zuerst auf bei Johannes de Sacrobosco († 1256, Paris), *tractatus de arte numerandi.*

Die Probe durch Hinauf- und Herunteraddieren: 1494 Luca Paciuolo, *summa.*

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Subtraktion:

Die moderne Art (mit Borgen) von den Indern gebraucht; ausführliche Beschreibung im Rechenbuch des Alchwarizmi (820 p.) und des Maximus Planudes (u. 1330, Byzanz).

Von rechts nach links zu subtrahieren empfiehlt Johannes de Sacrobosco († 1256, Paris), *tractatus*.

Die sog. österreichische oder additive Subtraktion im XIX Saec. eingeführt.

Die Probe durch Addition: Jordanus Nemorarius (deutscher Ordensgeneral, † 1236), *Algorithmus demonstratus*.

Multiplikation.

Eine der modernen freilich nur entfernt ähnliche Art der Multiplikation durch Einzelmultiplikation der Einer-, Hunderter- u. s. w. Ziffern (πυθμένες) findet sich bei Apollonius (zw. 250 u. 200 in Alexandria), überliefert von Pappus.

Die moderne Art ist von den Indern erfunden (zum Teil infolge des aufserordentlich ausgebildeten Kopfrechnens und der Möglichkeit, die im Staube geschriebenen Ziffern auszulöschen, in sehr erheblich verkürzten Methoden). Das Resultat erscheint stets über der Aufgabe.

Die moderne Anordnung mit dem Ausrücken nach links tritt auf: 1483 *Bamberger Rechenbuch*, 1494 Luca Paciuolo, *summa* (hier auch Ausrücken nach rechts).

Die Probe durch Division: Jordanus Nemorarius († 1237), *Algor. demonstr.*

Die abgekürzte Multiplikation wird zuerst gelehrt in d. *Arithmetica* von Jost Bürgi (um 1592) und etwa gleichzeitig von Joh. Praetorius Joachimicus in kleinen Nachträgen zu einer Abschrift der Tafeln des Rhaeticus.

Division.

Das Wort Divisor zuerst 1494, Luca Paciuolo (Florenz), *summa*.

Das Wort Quotient: 1532, Apianus, deutsches Rechenbuch.

Die moderne Divisionsmethode von den Indern erfunden.

Die moderne Anordnung beim Dividieren (Untersichdividieren) erscheint zuerst 1494 (Florenz) Luca Paciuolo, *summa* (unter dem Namen: divisio a danda), in Deutschland zuerst: 1532, Apian, Deutsches Rechenbuch. Sie wird erst vom XVIII Saec. an gebräuchlich, während bis dahin die alte beschwerliche Methode des sog. Übersichdividierens vorherrschend war.

Praktische Winke über die Anzahl der Quotientenziffern, das Maximum des Restes, das Auftreten der Null im Quotienten, die Ermittelung der Quotientenziffer durch die erste Divisorziffer gab zuerst ausführlich Clavius 1611 (Jesuit, Rom), *opera mathematica*.

Die österreichische Divisionsmethode im XIX Saec. eingeführt.

Der Unterschied zwischen Teilen und Enthaltensein zuerst scharf hervorgehoben durch Tartaglia 1556, *General trattato*.

Die abgekürzte Division erscheint zuerst bei Joh. Praetorius Joachimicus (vgl. abgekürzte Multiplikation), auseinandergesetzt von Kepler, 1623, in einem Brief.

Die Probe durch Multiplikation: Jordanus Nemorarius († 1237), *Algorithmus demonstratus*.

Neunerprobe. Diese seit den Indern, welche infolge des Weglöschens der in Sand gegeschriebenen Zahlen eine entgegengesetzte Spezies als Rechenprobe nicht benutzen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

konnten, für alle 4 Rechnungsarten übliche Methode erkannte zuerst als unzureichend: 1494 Luca Paciuolo, *summa.*

Beweise für die Neunerprobe gab zuerst Wallis (1616—1703, Oxford), *Mathesis universalis.*

Eigenschaften der ganzen Zahlen.

Besondere Zahlengruppen.

Gerade und ungerade Zahlen: altägyptischen Ursprungs, dann besonders: Pythagoras (580—501 a. Chr., Unteritalien).

Vollkommene Zahlen: spätere Pythagoräer; Euclid (um 300 a., Alexandria), *Elemente Buch IX.*

Mangelhafte und überschiefsende Zahlen: Neupythagoräer (z. B. Nikomachus von Gerasa, um 100 p., Arabien).

Befreundete Zahlen: Pythagoras (580—501 a., Unteritalien), Jamblichus, *συναγωγὴ τῶν Πυθαγορικῶν δογμάτων* (um 325 p., Chalkis, Rom). — Eine Vorschrift zu ihrer Bildung giebt der Araber Tabit ibn Kurra (833 — Bagdad 808).

Figurierte Zahlen, siehe Reihen.

Teilbarkeit der Zahlen.

Primzahlen. Der Begriff derselben wird von der pythagoräischen Schule festgelegt (mit Einschlufs der 2, die Jamblichus nicht dazu rechnet). Euclid (um 300 a., Alexandria) zeigt, dafs ihre Anzahl unendlich grofs ist. Eratosthenes (Cyrene 276 — Alexandria 194) giebt eine Methode, die Primzahlen aufzusuchen (Sieb d. E.). Direkte Primzahlkriterien suchten vergeblich Stifel (1487—1567) in $2^{2n+1}-1$ (versagt in $2^3-1=511=13\cdot 37$), ferner Fermat (1601 — Toulouse 1665) in $2^{(2^n)}+1$ (versagt in $2^{(2^5)}+1$); beschränkte Primzahlreihen stellt Euler (1707—1766, Berlin, Petersburg) und Legendre (1752—1833, Paris) analytisch auf. Auf Vorarbeiten von Gaufs (1777—1855, Göttingen) hin gelang es Riemann (1826—1866, Göttingen) das Primzahlgesetz in analytische Form zu bringen.

Teilbarkeit durch 2: altägyptischen Ursprungs.

Teilbarkeit durch 9: indischen Ursprungs.

Regeln für 2, 5, 9, 3. — Probieren durch 7, 11, 13 u. s. w. bis zur Quadratwurzel aus der untersuchten Zahl: 1202, Leonardo Pisano, *liber abaci.* Dieselben Regeln zuerst deutsch: 1526, Chr. Rudolff, Rechenbuch.

Regeln für 2, 3 . . . 10: 1544 Michael Stifel, *arithmetica integra.*

Regeln für beliebigen Teiler: Blaise Pascal (1632—1662, Paris), *caractères de divisibilité des nombres.*

Aufsuchen des gemeinsamen Teilers zweier Zahlen 1) Euclid (um 300 a., Alexandria), *Elem. VII* 2. 2) Bhaskara (um 1160, Indien), *Siddhantaciromani.*

Aufsuchen des kleinsten Vielfachen: 1) Euclid, *Elem. VII 36.* 2) 1202 Leonardo Pisano, *liber abaci.*

Das Rechnen mit Brüchen.

Gewöhnliche Brüche.

Moderne Schreibart mit Bruchstrich zuerst in einer Schrift des XII Saec.: *Rego-*

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

luzze di Maestro Paolo dall Abbaco, dann 1494 Luca Paciuolo, *summa*. — Wahrscheinlich so entstanden, dafs man Stammbrüche, wie $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, mit den überstrichenen Nennerziffern schrieb: $\bar{3}$, $\bar{4}$ (z. B. in einer späteren lateinischen Euclidübersetzung von Zambertus, um 1500), analog den griechischen Stammbrüchen α', β', γ' . ., dann bei $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ die entsprechende Anzahl der Untereinheiten darüber setzte. — Das Übereinanderschreiben von Zähler und Nenner ohne Bruchstrich bereits bei den Indern.

Die Wörter Zähler und Nenner treten auf bei Jordanus Nemorarius (Deutscher Ordensgeneral, † 1236), *Algorithmus demonstratus:* numerans, denominans — 1494 Luca Paciuolo (Florenz), *summa*: numeratore, denominatore.

Definition eines Buches: Euclid (um 300 a., Alexandria), *Elem. lib. VII, Erkl. 2.*

Ganze Zahlen, als Brüche mit dem Nenner 1 geschrieben im indischen Rechenbuch von Bakhshali (entstanden III—IV Saec. p., niedergeschrieben VIII—IX Saec. p.)

Die Stammbrüche (mit dem Zähler 1) sind altägyptischen Ursprungs: Rechenbuch des Ahmes (Papyrus Rhind, zw. XX u. XVII Saec. a.), von den Griechen übernommen.

Die Zerlegung von Nichtstammbrüchen in Stammbrüche findet sich schon im Rechenbuch des Ahmes; daselbst wird eine schon längeren Gebrauch voraussetzende Tabelle von Zerlegungen gegeben — also um XX Saec. a.).

Das Verwandeln von gemischten Brüchen in unechte Brüche und umgekehrt, sowie Gleichnamigmachen als besondere Rechnungsart gelehrt von Johannes von Gmunden († 1442), *tractatus de minuciis phisicis.*

Das Heben der Brüche mit 2 bereits im altaegyptischen Rechenbuch des Ahmes (XX—XVII Saec. a.) — allgemein: Jordanus Nemorarius (Deutscher Ordensgeneral, † 1236), *Algorithmus demonstratus.*

Das Heben von zusammengesetzten Bruchstrichen zuerst: 1526 Rudolff, Rechenbuch.

Regeln für die Multiplikation zweier Brüche:

1) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = [(a \cdot c) : b] : d$: 1202 Leonardo Pisano, *liber abaci.*

2) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$: Jordanus Nemorarius († 1237), *Algorithmus demonstr.*

Erörterung der anscheinend vorhandenen Schwierigkeit, dafs beim Multiplizieren mit einem Bruch etwas Kleineres resultiert gegen die Definition der Multiplikation, zuerst bei Luca Paciuolo (Florenz), 1494, *summa.*

Regeln für die Division durch einen Bruch 1) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{acd}{bcd} : \frac{c}{d} = \frac{acd : c}{bcd : d} = \frac{ad}{bc}$ Jordanus Nemorarius († 1237), *Algorithmus demonstr.*

2) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ 1483 Bamberger Rechenbuch.

Regeln für die Addition und Subtraktion: $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{ad}$. 1483. Bamberger Rechenbuch.

Die moderne Anordnung, dafs die Multiplikation und Division der Brüche vor der Addition und Subtraktion derselben gelehrt wird, zuerst: 1494, Luca Paciuolo, *summa.*

Dezimalbrüche:

Vorläufer der Dezimalbrüche sind die Sexagesimalbrüche, welche altbabyloni-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

schen Ursprungs sind. Älteste Urkunde über letztere: die Täfelchen von Senkereh (XXIII—XVI Saec. a.), enthaltend eine Tabelle von Quadrat- und Kubikzahlen (es bedeutet hier $1 \cdot 4$ die Zahl $64 = 1 \cdot 60 + 4$). Ähnlich treten weitere 2 Unterabteilungen zu je 60 in der babylonischen Astronomie auf. —

Einführung der Sexagesimalbrüche in Alexandria durch Hypsikles um 200 a. — Benutzung derselben in allen wissenschaftlichen Werken bis zum Mittelalter; schliefslich werden sie (z. B. Jordanus Nemorarius († 1237), *Algorithmus dem.*) unter vollständiger Abstraktion von der Kreiseinteilung als reine Bruchart verwendet und als minutiae philosophicae oder phisicae im Gegensatz zu den m. vulgares bezeichnet.

Auftreten von Brüchen mit dekadischen Einheiten als Nenner.

1) Johannes von Sevilla (um 1150 p.), in einer Übersetzung eines unbekannten arabischen Rechenbuches.
2) Johannes von Gmunden († 1442), *tractatus de minut. phisicis* (Wurzelausziehen unter Kombination von Sexagesimal- und Dezimalbrüchen).
3) Peurbach (1423—1461, Wien), *tractatus super propositiones Ptolemaei de sinubus et chordis*, Sinustabelle mit $r = 600\,000$.
4) Regiomontanus, 1490, *Opus tabularum directionum profectionumque*, enthaltend eine Tangententabelle mit $r = 100\,000$.

Hervorheben der Wichtigkeit der Dezimalbrüche und Betonung der dezimalen Währung in Mafs, Münzen und Gewicht bei Simon Stewin, 1585, *La disme*, aber hier noch mit der Schreibweise $237^{(0)}\,5^{(1)}\,7^{(2)}\,8^{(3)} = 237,578$; unabhängig von ihm: 1603 Joh. Hartmann Beyer, *Logistica decimalis.*

Einführung eines Pünktchens oder Kommas an Stelle jeder Nennerbezeichnung zuerst bei Jost Bürgi (1552—1632, Prag), *Arithmetica* (nur handschriftlich vorhanden).

Erste Tabellen mit Benutzung des Dezimalpunktes, 1612, Bartholomaeus Pitiscus, *Trigonometrie.*

Ersetzung der Minuten und Sekunden durch dezimale Teile des Grades, 1633, Logarithmentafel von Briggs (nach seinem Tode veröffentlicht), leider unbeachtet bis auf die Neuzeit, wo wenigstens die Sekunden durch die Dezimalteile der Minuten ersetzt sind.

Schulpensum sind die Dezimalbrüche nach Einführung der dezimalen Währung geworden, in Frankreich schon seit Anfang des XIX Saec.

Unendliche Dezimalbrüche mit Perioden zuerst behandelt, 1693, Wallis, *Algebra* (Oxford).

Angewandtes Rechnen.

Bevorzugte Regeln sind im XVI Saec. der Dreisatz, im XVII Saec. die Welsche Praktik, im XVIII Saec. der Kettensatz, im XIX Saec. der Bruchsatz.

Das Wort „politische Arithmetik“ stammt von Nicolaus Rhabda (um 1340, Griechenland), *Briefe über Arithmetik*; es wurde in der 2. Hälfte des XVII Saec. gebräuchlich.

Regeldetri.

Das Wort Regeldetri aus den lateinischen bezw. italienischen Rechenbüchern des Mittelalters. 'Die gulden Regel' genannt im Bamberger Rechenbuch 1483.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Älteste überlieferte Aufgaben bei dem Inder Aryabhatta (geb. 476 p.) in seinem Werke *Aryabhattijam.*

Zusammengesetzte und sogenannte umgekehrte Regeldetri zuerst bei dem Inder Brahmagupta (geb. 598 p.). Die indische Behandlungsweise wurde von den Arabern übernommen und weiter vervollkommnet.

Aufstellung eines Ansatzes bei Lösung einer Regeldetriaufgabe: 1202, Leonardo Pisano, *liber abaci*, *Absch. VIII u. IX*, doch hier die gesuchte Bezeichnung immer links. Dieselbe rechts, wie im heutigen Verfahren: 1500 Balthasar Licht, *algorithmus linealis.*

Heben des Bruchstriches vor dem Ausrechnen: 1526 Rudolff, Rechenbuch.

Der moderne Bruchsatz zuerst behandelt von Stern, 1832, *Lehrgang des Rechenunterrichtes.*

Bei Anwendung der Regeldetri auf das praktische Leben entstand im XV bis XVI Saec. eine grofse Anzahl von Sonderregeln, z. T. mit merkwürdigen Namen. Tartaglia, 1556, *General trattato* vereinigte sie unter der noch heute üblichen Einteilung: Zins-, Sconto-, Termin-, Zinseszins-, Gesellschafts, Wechsel-, Mischungs-Rechnung.

Falscher Ansatz.

Vielfach verwertet im altägyptischen Rechenbuch der Ahmes (Papyrus Rhind, XX—XVII Saec. a.); er tritt auf bei Diophant (um 275 p., Alexandria), im altindischen Rechenbuch von Bakhshali (III—IV Saec. p.). Von den Arabern übernommen und vervollkommnet. — 1202, Leonardo Pisano, *liber abaci*, *Absch. 12.* Heut nur selten angewandt.

Zinsrechnung.

Ältestes Auftreten bei den Römern. Von ihnen bereits in der Gesetzgebung behandelt: 342 a. *lex Genucia*, Verbot der Zinsverleihung. Zu Ciceros Zeit 48 % nicht ungewöhnlich, zur Zeit der Kaiser 25 % u. s. w.

Zinsaufgaben, auch mit Zinseszins, bei Aryabhatta (Indien, geb. 476 p.) — monatlich 5 %.

Zinstafeln im Gebrauch zur Zeit des Luca Paciuolo (Toscana 1445? — Florenz 1509).

Die ersten gedruckten Zinstafeln: 1584, Simon Stevin.

Terminrechnung.

Die Bestimmung eines Einzeltermins zur Zahlung verschiedener, ungleichzeitig fälligen Schuldsummen nimmt Luca Paciuolo, 1494, *summa*, mit ausführlicher Berechnung der Zinsen vor, während Widmann, 1489 Rechenbuch, und Tartaglia, 1556, *General trattato*, wie heute, nur mit den 'Zinsnummern' (Produkt aus Kapital und Tagen) statt der Zinsen selbst operieren.

Gewinn- und Verlustrechnung

zuerst im Bamberger Rechenbuch 1483.

Rabattrechnung.

Rabatt in Hundert.

Eine Art Rab. i. 100 stellt das römische Interusurium dar (z. B. in den *Kesten* des Sextus Julius Africanus, um 220 p.), welches den Barwert eines später zu erwartenden Erbteils berechnet.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die unter dem Namen „Rabatt in Hundert“ übliche Rechnungsweise wurde zuerst benutzt von Benedict Carpzow (1595—1666, Jurist) und hat sich, trotzdem sie falsch ist, bis heute bei der Diskontierung von Wechseln in Gebrauch gehalten.

Rabatt auf Hundert wurde 1731 von Gottfr. Aug. Hoffmann (*Prudentia oeconomica*) in einer Polemik gegen Leibniz aufgestellt.

Zusammengesetzter Rabatt (mit Zinseszinsanrechnung) von Leibniz, *Acta eruditorum*, 1682, angegeben.

Rabattierungstafeln mit Benutzung als Zinseszinstafeln wurden zuerst zusammengestellt 1585 von Simon Stevin, *Practique d'Arithmétique*. Die Erfindung solcher Tafeln dürfte den Italienern zuzuschreiben sein, da Luca Paciuolo bereits 1494 von der Bildung von Interessetafeln spricht.

Tararechnung.

Das Wort Tara gleichen Stammes mit dem westarabischen tarh = Subtraktion (von taraha = wegwerfen).

Die Aufgabenbehandlung zuerst im Bamberger Rechenbuch von 1483, dann in Widmanns Rechenbuch 1489.

Wechselrechnung.

Wechselbriefe im VII Saec. durch vertriebene Juden aus Frankreich nach der Lombardei gebracht, von hier aus nach Antwerpen durch politische Flüchtlinge. In Nürnberg zuerst 1445.

Wechselrechnung, Unterweisung in doppelter Buchführung zuerst bei Luca Paciuolo, 1494, *summa*.

Ältestes ausführliches Lehrbuch: 1732, Chr. v. Clausberg, *demonstrative Rechenkunst*. Hierselbst auch erstmalig das Wort Arbitrage.

Gesellschaftsrechnung.

Das Auftreten dieser sehr vielseitigen Aufgabenarten ist sehr alt; einige finden sich schon im altägyptischen Rechenbuch des Ahmes (Papyrus Rhind, XX—XVII Saec. a.), bei Archimedes, Kronenrechnung (287—212 a., Syrakus), bei den Römern in ihren Erbteilungsaufgaben, im altindischen Rechenbuch von Bakhshali (III—IV Saec. p.), bei den Arabern, in dem chinesischen Werk '*Neun Abschnitte der Tsin kiu tschau*' (um 1240 p.), bei Alcuin (736—804 p.), Leonardo Pisano (1202), Bamberger Rechenbuch 1483, Luca Paciuolo (1494) u. a.

Mischungsrechnung.

Die ersten Aufgaben finden sich bei den Indern, dann bei den Arabern, ferner auch in den '*Neun Abschnitten der Tsin kiu tschau* (um 1240 p.).

Legierungsaufgaben zuerst: 1202, Leonardo Pisano, *liber abaci*, Abschn. 11.

Algebra.

Geschichtlicher Überblick.

Älteste sehr geringe Spuren finden sich bei den Ägyptern. Bei den Griechen wandte sich das Interesse der Mathematiker der Algebra weniger als der Geometrie zu. Ziemlich unvermittelt — vielleicht nur infolge mangelhafter Überlieferung — erscheint Diophants grofses Werk (um 275 p.) [mit einer schon hoch ausgebildeten

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Algebra. Griechische Kenntnisse gelangen nach Indien und finden dort günstigsten Boden zur Weiterentwicklung (Aryabhatta um 500 p., Brahmagupta VII Saec. p. u. a.). Aus griechischen und indischen Quellen schöpfen die Araber (VIII—XI Saec.). Die Werke der letzteren werden im XII Saec. in lateinischen Übersetzungen ins Abendland gebracht und rufen hier im XIII—XV Saec. durch Leonardo Pisano (1202, *liber abaci*) eine kaufmännische, durch Jordanus Nemorarius († 1236) eine geistliche Schule hervor. Nach ihrer Vereinigung im XV Saec. beginnt im XVI Saec. (Vieta, 1591, *Isagoge*) der Aufschwung zur jetzigen Blüte.

Das Wort Algebra ist aus dem Titel eines Lehrbuches des Muhammed ibn Musa Alchvarizmi (um 820, Bagdad, Damaskus): *Aldschebr w Almukabala* (lat. *Algebra et Almucabala*) allmählich entstanden. [Aldschebr bedeutet bei der Behandlung der Gleichungen das Hinüberbringen negativer Gröfsen auf die andere Seite, Almucabala das Zusammenziehen gleichartiger Gröfsen.]

Beide Namen treten auf im XII Saec., im XIV Saec. beginnt das Wort Algebra allein aufzutreten, vom XV Saec. wird das zweite Wort selten; zum letzten Mal erscheint es 1577 in einem Werke von Gosselin.

Das Adjektivum algebraticus zuerst: 1494, Luca Paciuolo, *summa*.

Stufen der algebraischen Ausdrucksweise:

I. Rhetorische Algebra, Wortrechnung ohne Zeichen: Griechen (aufser Diophant), Ostaraber, älteste italienische Schule (einschl. Regiomontan).

II. Synkopierte Algebra, Wortrechnung mit Abbreviaturen für oft wiederkehrende Wörter: Diophant, Westaraber, spätere Europäer bis zum XVII Saec.

III. Symbolische Algebra, reine Buchstabenrechnung ohne Text: Indische Mathematiker, Europäer vom XVII Saec. an.

Einführung der Buchstabengröfsen.

Allgemeine Buchstabengröfsen sind vereinzelt im Altertum nachzuweisen: so bezeichnet schon Aristoteles (Stagira, 384 — Chalkis, 322 a.) unbekannte Gröfsen mit Buchstaben; Apollonius (zw. 250 u. 200, Alexandria) spricht an einer Stelle von einer $\varkappa$-fachen Myriade. Derselbe bezeichnet, wie Euclid (um 300 a., Alexandria), Zahlengröfsen mit Buchstaben zu geometrischer Veranschaulichung, letztere läfst Pappus (um 295 p., Alexandria) bereits fallen. Ein beliebiges Vielfache benutzt Diophant (II 8) (um 225 p.). Bei Leonardo Pisano, 1202, liber abaci, treten Regeldetriaufgaben mit Buchstabengröfsen auf. Umfangreiche Verwendung von Buchstabengröfsen bei Jordanus Nemorarius († 1237) in seiner *Arithmetik* (doch noch ohne ausreichende Operationszeichen, so dafs im Laufe der Rechnung immer neue Buchstaben eingeführt werden müssen).

Den Hauptschritt that Vieta, 1591, *Isagoge*, indem er die unbekannten Gröfsen durch Vokale, die bekannten durch Konsonanten bezeichnete. Die von Vieta gewählten grofsen Buchstaben ersetzte Harriot (Oxford 1560 — London 1621) durch kleine. Descartes (1637, *Géometrie*) führt für die bekannten Gröfsen a, b . . ., für die Unbekannten x, y, z ein.

Die Unbekannte x: Die erste Potenz der Unbekannten hiefs im Mittelalter causa (= coss) oder *r*adix, dargestellt schon seit Mitte des XV Saec. durch ein ver-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

schnörkeltes r, dessen Gestalt sich kaum von x unterschied. Wallis soll es zuerst mit dem Namen x bezeichnet haben.

Buchstaben mit Indices führte Leibniz ein, zuerst 1676, *compendium quadraturae arithmeticae.*

Formeln treten erst seit Vieta (1540—1603, Hugenott) auf; bis zu dieser Zeit gab es nur Wortregeln.

Erstes Auftreten der Algebra auf deutschem Boden in einem aus dem Jahre 1461 stammenden Bruchstück eines Auszuges aus der Algebra des Mohammed ben Musa.

Moderne Operationszeichen.

Addition: Das Zeichen + tritt zum ersten Mal auf: 1489, Joh. Widmann von Eger, Rechenbuch; wahrscheinlich damals schon längere Zeit in Deutschland gebräuchlich, während in Italien noch viel später $\overline{p}$, bez. für $-\overline{m}$ gebraucht wurden. — Nach einer neueren Erklärung ist das Pluszeichen auf ein Compendium für et zurückzuführen, wie es in Schriften vom XIV und XV Saec. nachzuweisen ist.

Subtraktion: Das Zeichen — zum ersten Mal 1489 Joh. Widmann von Eger, Rechenbuch. Vielleicht eine Art Compendium für den griechischen ὀβελός, der in der Prosodie beim Wegfallen eines Verses zur Andeutung des Ausfalles benutzt wurde (Alexandriner, Sueton, Isidorus).

Multiplikation: Das Zeichen × zuerst bei William Oughtred (1574—1660), entstanden aus einer Hülfslinienanordnung bei der komplementären Multiplikation.

Der Multiplikationspunkt ist eingeführt durch Leibniz, 1676, *Compendium quadraturae arithmeticae*, und Christian Wolf (1679—1754).

Multiplikation ohne Zeichen findet sich schon bei Leonardo Pisano, 1202, *liber abaci*, dann bei Girard, 1629, *Invention nouvelle en l'algèbre.*

Division: Der Doppelpunkt erstmalig bei Leibniz 1684 *Nova methodus*, der Bruchstrich zuerst bei Vieta, 1591, *Isagoge.*

Potenzierung: a^3, a^4 . . mit positiven ganzen Zahlen im Exponent zuerst bei Descartes (1596—1649); doch schreibt Descartes, wie auch noch Gaufs, aa statt a^2, da hier keine Abkürzung vorliege.

Allgemeine, negative und gebrochene Exponenten in unserer Schreibart zuerst bei Leibniz (1646—1716).

Radizierung: Ein Wurzelhaken tritt auf in der *Coss* von Rudolff 1525, verallgemeinert durch exponentenartiges Beifügen der mittelalterlichen Potenzbezeichnungen bei Stifel, 1544, *arithmetica integra.* — Zifferexponenten fügte zuerst bei: Simon Stevin (1548 bis 1620, Holland), Wurzelzeichen mit übergesetztem Exponenten zuerst bei Alb. Girard, 1629, *Invention nouvelle en l'algèbre.* — Wurzelhaken mit verlängertem Strich: Descartes, 1637, *Geometrie.*

Das Zeichen der imaginären Einheit $i = \sqrt{-1}$ durch Gaufs eingeführt.

Das Gleichheitszeichen = erstmalig bei Robert Recorde, 1556, *the Whetstone of witte.*

Die Ungleichheitszeichen > und < zuerst bei Harriot, 1631, *artes analyticae praxis.*

Klammern: Albert Girard, 1629, *Invention nouvelle en l'algèbre.*

Das Summenzeichen Σ geht auf Euler zurück, 1755, *Differentialrechnung.*

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Das Differenzenzeichen Δ rührt her von Joh. Bernoulli, 1706, Abhdlg. der Académie d. Sc.; im modernen Sinne jedoch erst von Euler benutzt.

Das Zeichen n! für $n(n-1)\ldots 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ führt ein: Kramp 1808, *Elements d'Arithmétique universelle.*

Ein Funktionszeichen f(x) wendet zuerst an Euler 1734/35, *comm. acad. Petrop.*, ihm folgt Clairant 1734, *acad. d. sciences.*

Das Unendlichkeitszeichen ∞ erscheint erstmalig bei John Wallis 1655, *Arithm. infinitorum prop. 5.*

Entwicklung des Zahlbegriffes.

Die Zahl 1 wird in der pythagoreischen Schule und von allen, die aus den Schriftwerken derselben schöpfen, nicht als Zahl, sondern nur als Ursprung der Zahlen aufgefafst so Theon von Smyrna (um 130 p.), Boethius (Rom 480 — Pavia 524), Mohammed ibn Musa (um 820 p., Bagdad, Damaskus), Psellus (um 1092, Griechenland).

Die Zahl 0 ist weder bei Ägyptern und Babyloniern noch bei den Griechen eine Zahl. In den ptolemäischen Sehnentafeln tritt, wenn Minuten fehlen, ein Nullzeichen ($\bar{0}$) auf, welches jedoch nur als Abkürzung von *οὐδέν* aufzufassen ist. Eine Null als Gleichungslösung wird z. B. von Diophant nicht geduldet, ebenso bis tief in das XVII. Saec. hinein (Chuquet 1484, Paciuolo 1494, Ghetaldi 1630). Die Inder hingegen rechneten mit der Null selbst in Fällen wie $\frac{a}{0}$.

Das Unendliche.

Der Begriff des Unendlichen wurde zuerst in der Akademie Platons (IV. Saec. a.) einer Untersuchung unterzogen. — Eine Erweiterung des Zahlensystems auf sehr grofse Zahlen giebt Archimedes (287—212 a., Syrakus) in seiner Sandrechnung, ihm ähnlich die Inder (vgl. S. 6).

Der Begriff des Unendlichkleinen liegt in der sog. Exhaustionsmethode der Alten, die in der platonischen Schule entstanden, von Eudoxus von Knidos (408—355 a.) wiederholt benutzt, von Archimedes mit gröfster Gewandheit angewendet wurde.

Unterschied zwischen 'transfinit' und 'infinit' bei Bradwardinus (1290—1349, England), *tractatus de continuo.*

Der Begriff des unendlich fernen Punktes eingeführt durch Desargues, 1639.

Unendlichkeitsbetrachtungen zur Ausführung von Quadraturen und Cubaturen zuerst von Kepler, 1615, *stereometria doliorum*, dann Cavalieri, 1635, *geometria.*

Infinitesimalrechnung begründet von Newton (1642—1717, England) und Leibniz (1646—1716).

Die gebrochenen Zahlen.

Die griechische Algebra erkannte nur ganze Zahlen an. Brüche treten nur in Gestalt von Verhältnissen ganzer Zahlen auf. Irrationalitäten wurden durch Ungleichungen zwischen ganzzahlige Verhältnisse als immer mehr zu nähernde Grenzen gebracht. Diophant (um 275 p., Alexandria) erkannte zuerst den Bruch als Zahl an, dann ähnlich die Inder.

Die irrationalen Zahlen.

Das Wort 'irrational' tritt zuerst auf bei Bradwardinus (1290—1349, England), *geometria speculativa.*

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Der Gegensatz 'rational-irrational' erstmalig bei Nicole Oresme (1320—1382, Bischof von Lisieux), *tractatus proportionum.*

Der Begriff des Irrationalen findet sich zuerst bei Pythagoras (580—501 a., Unteritalien). Die Lehre vom Irrationalen wurde besonders von Theätet (um 390 a., Heraklea) ausgebildet, überliefert von Euclid (um 300 a., Alexandria) in den *Elementen lib. X.* Auf dieser Grundlage arbeiteten im Mittelalter weiter: Luca Paciuolo, 1494, *summa,* in erster Reihe M. Stifel, 1544, *Arithmetica integra.*

Die Möglichkeit ihrer Anerkennung als wirkliche Zahlen giebt Johannes Müller, Regiomontanus (Königsberg i. Franken, 1436 — Rom, 1476) durch einen neuen Gröfsenbegriff. Vollendet ist die Theorie der irrationalen Zahlen erst in neuester Zeit.

Die negativen Zahlen.

Das Wort 'negativ' findet sich zuerst in einer Göttinger Algebrahandschrift, die dem 1574 gestorbenen Stephan Brechtel gehörte (hier affirmativ-negativ). Im Druck zuerst bei Petrus Ramus, 1569, *Scholae mathematicae.*

Das Wort 'affirmativ' von Vieta (1540—1603, Hugenott) eingeführt. Diophant (um 275 p., Alexandria) rechnete zwar mit „hinzuzufügenden" und „abzüglichen" Zahlen, aber nur bei Differenzen mit positivem Ergebnis.

Rein negative Zahlen treten zuerst bei den Indern auf (Rechenbuch von Bakhshali, III.—IV. Saec. p., u. später), erläutert durch den Gegensatz von Vermögen und Schulden und dem der Richtung. Wiederaufnahme der Richtungserklärung erst durch Alb. Girard 1629, *Invention.* — Negative Lösung einer Gleichung werden jedoch durch die Inder ebensowenig anerkannt, wie bis ins XVII. Saec. hinein (z. B. Vieta, 1540—1603; Harriot, 1560—1621).

Mit rein negativen Zahlen rechnet zuerst Joh. Widmann von Eger, 1489, Rechenbuch.

Negative Gleichungslösungen werden zuerst anerkannt in einer anonymen Aufgabensammlung vom Ende des XV. Saec., dann von Cardano, 1539, *Practica arithmetica* (Italien), Mich. Stifel, 1544, *arithmetica integra.*

Wallis (1616—1703, Oxford) hält negative Zahlen noch für gröfser als ∞.

Endgültige Anerkennung der negativen Zahlen durch Alb. Girard, 1629, *invention nouvelle en l'algèbre*; vor allem durch Descartes, 1637, *Geometrie,* der ihre geometrische Darstellbarkeit zeigte.

Die komplexen Zahlen.

Die Wörter 'reell-imaginär' zuerst bei Descartes, 1637, *Geometrie.*

Das Wort 'komplex' von Cauchy (1787—1857, Paris) eingeführt.

Das Wort 'Modul' für $\sqrt{a^2+b^2}$ bei $a+bi$ rührt von Argand, 1814, her. —

Die erste historisch festgestellte imaginäre Wurzel tritt bei Hero (um 110 a., Alexandria) auf. Derselbe rechnet mit Vernachlässigung des Vorzeichens im Radikanden falsch weiter.

Der Inder Bhâskara (geb. 1114 p.) kennt die Unmöglichkeit von $\sqrt[2]{-a}$. Cardano (Italien) bezeichnet noch in seiner *Practica arithmetica* (1539) imaginäre Wurzeln als unmöglich, in seiner *ars magna* (1545) rechnet er, als der erste, bereits formal mit solchen Wurzeln. Ähnlich Bombelli, 1579, *L'algebra.*

Alb. Girard, 1629 (*Invention nouvelle*), kennt das Auftreten imaginärer Wurzeln bei

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Gleichungen und spricht allgemein aus, dafs die Gleichung n^{ten} Grades n Wurzeln besitze. Descartes (1637, *Geometrie*) erkennt imaginäre Lösungen an, doch „gäbe es für sie inzwischen keine Gröfse, welche unserer Vorstellung entspricht". Der nunmehr zu immer gröfserem Umfange anwachsenden Verwendung der imaginären Gröfsen giebt Gaufs (1799, 1831) die notwendige Grundlage.

Versinnbildlichung imaginärer Gröfsen, zuerst versucht von Heinrich Kühn, *comm. acad. Petrop.* 1750/51; erste befriedigende Darstellung von Argand, 1806, wiederholt von Français, 1813, zur Anerkennung gebracht durch Gaufs, 1831.

Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division.

Das algebraische Rechnen wurde von den Griechen durch geometrische Konstruktionen ersetzt. Rein algebraisches Rechnen zuerst bei Diophant (um 275 p., Alexandria), dann bei den Indern.

Addition, Subtraktion, Multiplikation algebraischer Summen zuerst bei Diophant (um 275 p., Alexandria), *ἀριθμητικῶν βιβλία.*

Additions- und Subtraktionsregeln positiver und negativer Zahlen erscheinen zuerst bei Luca Paciuolo, 1494, *summa.*

Multiplikationsregeln giebt, als der erste, Diophant (um 275 p., Alexandria): *λεῖψις ἐπὶ λεῖψιν πολλαπλασιασθεῖσα ποιεῖ ὕπαρξιν, λεῖψις δὲ ἐπὶ ὕπαρξιν ποιεῖ λεῖψιν*; ähnliche Regeln bei Luca Paciuolo, 1494. Die kurzgefafste Zeichenregel $+\cdot+=+$ u. s. w. zuerst in einer Wiener Handschrift von 1520, *Regulae cosae vel Algebrae*, übernommen in Rudolffs *Cofs* (1525).

Divisionsregeln positiver und negativer Zahlen bei Luca Paciuolo, 1494, *summa.*

Die Division algebraischer Summen zusammengestellt in Wallis *Algebra*, 1685.

Die Division $\frac{1}{1+a}$ zu einer unendlichen Reihe zuerst von Nicolaus Mercator, 1668, *Logarithmotechnica.*

Betonung des Ordnens vor Beginn der Division in Newtons Vorlesungen *arithmetica universalis* (1707 v. Whiston herausgegeben).

Die Divisionsaufgabe $(a^3 - b^3) : (a - b)$ ist Diophant (um 295 p., Alexandria) bereits bekannt; die allgemeine Formel $(a^n - b^n) : (a - b)$ kennt Tartaglia, 1556, *General trattato.*

Den gröfsten gemeinsamen Teiler zweier algebraischen Summen sucht zuerst Simon Stevin (1585), *l'Arithmétique.*

Potenzierung.

Das Wort Potenz (Übersetzung des griechischen *δύναμις*, womit Hippocrates von Chios (um 440 a.) das Quadrat einer Gröfse bezeichnete) erscheint zuerst bei Bombelli, 1572, *l'Algebra* für das Quadrat der Unbekannten; schon bei Simon Stevin (1585, *l'Arithmétique*) findet sich die Erweiterung „potence cubique".

Das Wort Exponent findet sich zuerst bei Michael Stifel, 1544, *arithmetica integra*, dann bei Dechales, 1674, *mundus mathematicus.*

Für die Potenzen der Unbekannten bildeten sich zunächst nur Kunstausdrücke

Diophant: $x = \dot{\alpha}\rho\iota\vartheta\mu\acute{o}\varsigma$, $x^2 = \delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu\iota\varsigma$, $x^3 = \kappa\acute{\upsilon}\beta o\varsigma$, $x^4 = \delta\upsilon\nu\alpha\mu o\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu\iota\varsigma$, $x^5 = \delta\upsilon\nu\alpha\mu o\kappa\acute{\upsilon}\beta o\varsigma$

Muhammed.: x = schai (Sache) oder dschidr (Wurzel), x^2 = mâl (Vermögen) u. s. w.

Lat. übers.: x = res oder radix, x^2 = census

Italienisch: x = cosa (deutsch cofs), x^2 = censo.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Erweiterung über die 5. Potenz fand nur sehr allmählich statt, zuerst bei Luca Paciuolo, 1494, *summa*; exponentartige Bezeichnungen benutzte zuerst Bombelli, 1572, *l'Algebra.*

Die Moderne Bezeichnung rührt her von Descartes und Leibniz.

Potenzformeln (nicht in moderner Form) entwickelt zuerst Nicole Oresme (1320—1382, Normandie), *tractatus proportionum.*

Die Lehre von den Potenzen wurde in der mittelalterlichen Cofs ausgebildet.

$(a \pm b)^2$ bei den Griechen geometrisch, bei den Indern algebraisch zuerst abgeleitet.

$(a \pm b)^3$ von den Indern zum Kubikwurzelziehen benutzt (vgl. binomischer Lehrsatz).

Exponent Null für eine konstante Zahl erstmalig bei Simon Stevin, 1585, *L'arithmetique.*

Negative Exponenten zuerst benutzt von Nicolas Chuquet (um 1484, Paris, *Le Triparty*) (doch hier 7^{-1} noch in der Bedeutung $\frac{1}{7x}$) und Wallis, 1655, *arithmetica infinitorum.*

Gebrochene Exponenten: 1. Nicole Oresme (1320—1382, Normandie), *tractatus proportionum*; 2. Simon Stevin, 1585, *L'arithmetique.*

Definitive Einführung negativer und gebrochener Exponenten durch Newton (1642—1727, London).

Imaginäre Potenzexponenten bei Euler, 1746.

Radizierung.

Das Wort Wurzel: griechisch ῥίζη, zuerst bei Nicomachus von Gerasa (um 100 p.); indisch mûla (ebenfalls mit zweifacher Bedeutung) bei Aryabhatta (geb. 476 p.), ähnlich arabisch dschidr. Letzteres von Johannes v. Sevilla (um 1140) mit radix übersetzt.

Das deutsche Wort: Wurtz zuerst 1461 in einer deutschen Algebra.

Das Rechnen mit Wurzelgröfsen in geometrischem Gewande bei den Griechen, Euclid, *Elemente X*; jedoch treten nur solche Irrationalitäten auf, die mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind.

Der Beweis, dafs $\sqrt[2]{a}$ kein Bruch sein kann, zuerst bei Eutokius von Askalon (geb. 480 p.).

Die Doppeldeutigkeit der Quadratwurzel erkannte zuerst Bhâskara (Indien, geb. 1114 p.).

Ein (uns unbekanntes) Verfahren, Quadratwurzeln zu ziehen, hat es seit Platons Zeiten gegeben; vgl. die sehr genauen Werke in Archimedes' Kreismessung, die vielleicht auf die Umgleichung $a \pm \frac{r}{2a} > \sqrt{a^2 + r} > a \pm \frac{r}{2a \pm 1}$, zurückzuführen sind, welche bei den Arabern benutzt wurde. Für die Heronsche Werte ist neuerdings die Anwendung dieser Formel nachgewiesen.

Das moderne Verfahren findet sich (nur mit Sexagesimalbrüchen) bei Theon von Smyrna (um 130 p.). Bei den Indern gehört das Quadrat- und Kubikwurzelziehen (mit Hülfe von $(a + b)^2$ und $(a + b)^3$) zu den elementaren Rechenoperationen. Aryabhatta (Indien, 476 p. geb.) schreibt das Einteilen des Radikanden in Fächer zu je 2 (bezw. 3) vor. Bei Rainer Gemma-Frisius (1540, in einem lateinisch verfafsten Lehrbuch) ist unser Verfahren, auch schematisch beinahe ebenso, angewendet. Im Mittelalter wird die

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Anwendung der Formeln $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{1}{b \cdot c}\sqrt{a \cdot b \cdot c^2}$ und $\sqrt{a} = \frac{1}{b}\sqrt{a b^2}$ empfohlen. (Von Regiomontan aufgestellt und bewiesen zugleich mit der Formel $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{a \cdot c}{\sqrt{a b c^2}}$.)

Quadratwurzeln aus algebraischen Summen bei Rob. Recorde (1510—1558) und bei M. Stifel, 1553, *Neuausgabe der Rudolffschen Coſs.*

$\sqrt[2]{1 - x^2}$ zur Erzielung einer unendlichen Reihe zuerst von Newton ausgerechnet (1676, Brief an Oldenburg).

Für die Kubikwurzel müssen die Griechen auch ein angenähertes Verfahren besessen haben. Für die Heronschen Wurzeln ist ein Verfahren neuerdings aufgefunden worden: wenn $A = p^3 - a = q^3 + b$, so ist $\sqrt[3]{A} = q + \frac{b \cdot \sqrt{a}}{A + b \cdot \sqrt{a}}$.

Das moderne Verfahren für $\sqrt[3]{a}$ findet sich zuerst in dem deutschen Rechenbuch des Apianus, 1537.

Das Ausziehen höherer Wurzeln lehrte der Araber Omar Alchaijami († 1123, Melikschah) mit Hilfe der Binomialentwicklung $(a + b)^n$. Ebenso Vieta, 1591, *Isagoge.*

Daſs $\sqrt[n]{n}$ n verschiedene Werte hat, lehrt zuerst Rolle, 1690, *Traité d'algèbre.*

Die Werte von $\sqrt[3]{1}$ berechnete zuerst John Colson, 1707.

Anleitung zum formalen Rechnen mit irrationalen Wurzeln giebt zuerst Rudolff, 1524, *Coſs*, dann besonders Stifel, 1544, *arithmetica integra.*

Formeln für das Rechnen mit Wurzeln in einer eigenartigen Potenzbezeichnung mit gebrochenem Exponenten giebt Nicole Oresme (1323—1382, Normandie), *tractatus proportionum.*

Das Rationalmachen von Brüchen von der Form $\frac{a}{\sqrt{b}}$, $\frac{a}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}$ zuerst gelehrt von Bhâskara (Indien, geb. 1114 p.). Derselbe kennt auch die Formel $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$ und das Beispiel:

$$\sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}.$$

Das Rationalmachen eines Bruches $\frac{a}{b - \sqrt[3]{c}}$ mit der Formel $(b - \sqrt[3]{c}) \cdot \left(b + \sqrt[3]{c} + \sqrt[3]{\frac{a^2}{b^3}}\right)$ führt Cardano auf Gabriel de Aratoribus (XIV. Saec.) aus Mailand zurück.

Allgemeine Regeln für das Rationalmachen von Brüchen giebt Tartaglia 1556, *General trattato.*

Proportionen.

Die Lehre von den Proportionen, deren Anfänge auf Babylon weisen, ist begründet durch Pythagoras und seine Schüler (VI. Saec. a., Unteritalien). Sie kannten das arithmetische, geometrische und harmonische Mittel (nach Jamblichus). Hoch ausgebildet wurde die Lehre von Archytas von Tarent (430—365 a.) und besonders von

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Eudoxus v. Knidos (408—355 a.). Auf Grund der erhaltenen Ergebnisse leitet Euclid (um 100 a., Alexandria) die Proportionslehre in seinen *Elementen lib. V* geometrisch ab, im *7. Buch* überträgt er sie auf das Zahlengebiet. Die geometrischen Proportionen mit 4 Gröfsen ersetzen den Griechen bis zu einem gewissen Grade die Gleichungen.

Besonderes: Aus $a : b = c : d$ folgt $ad = bc$ *Eucl. VI S. 16* (geom.), *VII S. 19* (arithm.). Der Satz, dafs zwischen 2 Quadratzahlen eine mittlere Proportionale, zwischen 2 Kubikzahlen zwei mittlere Proportionalen einzuschalten sind, wird dem Platon (429—348 Athen) zugeschrieben (Eucl. *VIII 11. 12*). Die Umstellungen von $a : b = c : d$, wie die abgeleiteten Formeln: $\frac{a \pm c}{b \pm d} = \frac{a}{b}$, $\frac{a \pm b}{c \pm d} = \frac{a}{c}$ und die entsprechenden für fortlaufende Proportionen werden dem Eudoxus von Knidos (408—355 a.) zugeschrieben.

Der Satz von der mittleren Proportionalen findet sich zuerst *Euclid VI 17* geometrisch, *VII 20* arithmetisch.

Eine symbolische Form für die Proportion tritt zum ersten Mal auf bei dem Araber Alkalsadi († 1486, Spanien). Die moderne Form entstand aus der Schreibweise $a \cdot b :: c \cdot d$ des William Oughtred (1574—1660), worin später Doppelpunkt und Gleichheitszeichen auftraten.

Gleichungen.

Das Wort Wurzel (radix) in erweiterter Bedeutung zuerst in der Arithmetik des Boethius (480—524 p., Rom, Pavia).

Das Wort Koeffizient zuerst von Vieta 1591, *Isagoge*, gebraucht.

Die Bezeichnung „Grad einer Gleichung“, geht auf Descartes, 1637, *Geometrie* zurück.

Der Begriff der gegebenen und der unbekannten Gröfse und Aufstellung entsprechender Kunstwörter findet sich zuerst in der pythagoräischen Schule (VI.—IV. Saec. a.) (z. B. Thymaridas, um 390 a.).

Buchstabenkoeffizienten wurden durch Vieta 1591, *Isagoge*, eingeführt.

x, y, z als Unbekannte, a, b, c als Konstante von Descartes 1637, *Geometrie*, zuerst benutzt.

Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten.

Ältestes Auftreten derselben im altägyptischen Rechenbuch des Ahmes (Papyrus Rhind, XX.—XVIII. Saec. a.)

Algebraische Behandlung der Gleichungen zuerst bei Diophant (um 275 p., Alexandria); Transposition auf die Form $ax = b$, woraus $x = \frac{b}{a}$. Diese Grundoperation ging auch bei den Indern vorauf (vgl. Bhaskara, *Vija ganita T. 4.*). Aus beiden Quellen schöpften die Araber; so gebraucht Mohammed ben Musa diese Reduktion unter dem Namen Aldschebra w Almukabala (vgl. S. 15).

Eine andere Lösungsmethode mit Hülfe der regula falsi ist rein indischen Ursprungs, von den Arabern zuerst weiter ausgebildet.

Erste Erwähnung der Gleichungen in Deutschland, 1461 in einem Bruchstücke eines Auszuges der Algebra des Mohammed ibn Musa.

Ausführlichere Behandlung der Gleichungen in Widmanns Rechenbuch 1489.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Das Rationalmachen einer Gleichung, falls Irrationalitäten auftreten, zeigt zuerst Nic. Chuquet (um 1484, Paris, *Le Triparty*).

Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten.

Diophant hatte nur ein Zeichen für die Unbekannte; er wufste sich in dem Falle mehrerer Unbekannten durch geschickte Substitutionen oder durch Zwischengleichungen zu helfen. Die Inder unterschieden verschiedene Unbekannte durch die Farbe. Verschiedenartig benannte Unbekannte benutzte zuerst Alkarchi (um 1010, Bagdad), in weiterer Ausdehnung dann Stifel, 1544, *arithmetica integra*.

Die Kombinations- und Substitutionsmethode lehrt zuerst Newton in der *Arithmetica universalis* (Vorlesungen Newtons, 1707, herausgegeben von Whiston).

Durch Addieren sucht Maclaurin (1748 Algebra) Gleichungen mit mehreren Unbekannten zu lösen.

Um den Zusammenhang der Koeffizienten in den Lösungen, den Maclaurin z. Teil schon erkannt hatte, besser zu übersehen, führt Leibniz doppelte Indices ein, (1676, *Compendium quadraturae arithmeticae*) und giebt damit den Anstofs zur Determinantentheorie.

Die Gleichungsauflösung mit Determinanten (abgesehen von Namen und schriftlicher Anordnung) zuerst angegeben von Gabriel Cramer (1750, *Introduction*).

Das Wort Determinante rührt von Cauchy (1789—1857, Paris) her.

Eingekleidete Gleichungen.

Das Auftreten von Gleichungen überhaupt geht auf Wortaufgaben zurück. Abstrakte Gleichungen werden erst spät betrachtet.

Beispiele: Brunnenaufgabe zuerst bei Hero (um 110 a., Alexandria), Courieraufgabe zuerst bei Arryabhatta (Indien, geb. 476 p.) u. a.

Am meisten ausgebildet bei den Indern.

Die Behandlung geometrischer Aufgaben durch Gleichungen geht in erster Reihe auf die Araber zurück, besonders: Abul Dschud (um 1050 p.). Eine grofse Mannigfaltigkeit dieser Aufgaben giebt Leonardo Pisano (1202, *liber abaci*), Widmann, (1489, Rechenbuch), Regiomontanus, Luca Paciuolo.

Gleichungen zweiten Grades.

Die älteste Lösung der quadratischen Gleichung ist bei den Griechen zu finden, und zwar zunächst eine solche geometrischer Art.

Fall I: $x^2 = px + q$ $(p > 0,\ q > 0)$ ist geometrisch gelöst: Euclid (um 300 a., Alexandria), *Data*, *S. 84*, *85*.

Fall II: $x^2 + px = q$ und III: $x^2 + q = px$, *Euelid Elem. VI 28*, *29*.

Fall IV: $x^2 + px + q = 0$ wird, da er imaginäre Werte liefert, erst im XVII. Saec. genau betrachtet (Albert Girard, 1629, *Nouvelle Invention*). Die Unmöglichkeit, ihn zu lösen, kannte bereits der Inder Bhaskara (geb. 1114 p.).

Eine einfach-rechnerische Lösung von Zahlengleichungen II. Grades müssen die Griechen ebenfalls besessen haben, wenn auch keine allgemeine Lösungsmethode uns erhalten ist. — Arabischen Autoren zufolge soll Hipparch (180—125, Rhodus, Alexandria) über quadratische Gleichungen geschrieben haben, die er bei Anfertigung seiner Sehnentafel oft hat anwenden müssen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die älteste, numerische Lösung einer quadratischen Gleichung (ohne Ableitung) findet sich bei Hero (110 a., Alexandria), Lehrbuch für Feldmesser, in moderner Weise rekonstruiert: $ax^2 + bx = c$ liefert $x = \frac{\sqrt{ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}}{a}$.

In Diophants ἀριθμητικῶν βιβλία 6 (um 275 p., Alexandria) werden folgende Fälle unterschieden und zahlenmäfsig gelöst

I. $ax + b = cx$ Beispiel lib. IV 33, 45
II. $ax^2 + bx = c$ „ lib. VI 6.
III. $ax^2 + b = cx$ „ lib. VI 24.

Die Stelle des Diophantischen Werkes, welche die allgemeine Lösung giebt, ist verloren gegangen. Wahrscheinlich ist die Auffindung der arithmetischen Lösung bei den Griechen so vor sich gegangen, dafs sie die ihnen bekannte geometrische Konstruktion in die Sprache der Algebra umsetzten.

Die Vereinigung der 3 Fälle zu einer Normalform geschah bei den Indern (Aryabhatta geb. 476, Brahmagupta geb. 598, Cridhara VII.—IX. Saec.), da sie mit negativen Gröfsen rechnen konnten. Im Mittelalter geschah diese Reduktion auf eine Grundförm erst wieder durch Stifel (1544, *Arithmetica integra*).

Die Existenz zweier Lösungen kannte — im Gegensatz zu den Griechen, die stets nur einen positiven Wert kannten — der Inder Bhaskara (geb. 1114 p.), wenn er auch zwei Lösungen nur dann zuliefs, falls sie beide positiv und beim Rechnen ein Durchgang durch das Negative vermieden wird.

Geometrische Beweise für die 3 Diophantischen Lösungen giebt Muhammed ibn Musa Alchwarizmi (um 820 p., Bagdad, Damaskus) und Omar Alkhayami († 1123, Nissabur).

Die 3 Lösungsformeln in Versen in einer arabischen Abhandlung, übersetzt von Gerhard v. Cremona (1114—1187).

Gleichungen nach der Form $ax^{2p} + bx^p = c$; $ax^{2p} + b = cx^p$; $ax^p + b = cx^{2p}$ betrachtete zuerst der Araber Alkarchi (um 1010, Bagdad).

Dafs bei $x + px + q = 0$: $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$, lehrte zuerst Vieta, 1591, *Isagoge*.

Die negativen Wurzeln berücksichtigt zuerst Cardano 1543.

Geometrische Lösung: Mollweide, 1810.

Reciproke Gleichungen:

Euler, 1732, *comm. acad. Petrop. 1732/33.*

Quadratische Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

Eine ganz Zahl dieser Aufgaben löste bereits Diophant (um 275, Alexandria); ferner findet sich eine reiche Auswahl bei Jordanus Nemorarius († 1236), *de numeris datis*, Luca Paciuolo, 1494, *summa* u. a.

Gleichungen dritten Grades.

Veranlassung zur ersten kubischen Gleichung gab die Aufgabe der Würfelverdoppelung ($x^3 = 2a^3$), welche bereits zur Zeit des Euripides (480—406 a.) ein allgemein bekanntes Problem war. Es wurde eine ganze Anzahl von Lösungen gefunden, die teils auf Bewegungsgeometrie, wie die des Plato (Athen, 429—348 a.), Eratosthenes (276—194 a., Alexandria), Hero (um 110 a., Alexandria), teils auf Kegelschnitte, wie die des Menächmus (um 350 a.), teils auf höhere Kurven, wie die des Archytas

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

(430—365 a., Tarent), Eudoxus (408—355 a., Knidos), Nikomedes (um 180 a., Gerasa), Diocles (um 180 a.) zurückgeführt wurden.

Die zweite kubische Gleichung, die des Archimedes (287—212, Syrakus), welche bei der Aufgabe, eine Kugel durch eine Ebene in gegebenem Verhältnis zu schneiden, auftrat, soll von Archimedes selbst mit Hilfe nur einer Parabel gelöst worden sein.

Eine vollständige wissenschaftliche Behandlung der kubischen Gleichung (Einteilung, geometrische Lösungen durch Kegelschnitte mit Beweisen, die sich auf Apollonius (zw. 250 und 200 a. in Alexandria, dann Pergamum) stützen) rührt her von dem Araber Omar Alkhayami († 1123; Astronom am Hofe von Melikschah).

Die arithmetische Lösung der Gleichung dritten Grades $x^3 + px = q$ fand zwischen 1506 und 1516 Scipione del Ferro (1496—1526, Professor in Bologna) und teilte sie Bekannten mit. Veröffentlicht wurde sie durch Cardano, 1545, *Ars magna*, welcher sie von Tartaglia (1500—1557) unter dem Eide, sie nicht zu veröffentlichen, erhalten hatte. Es ist nach den übrigen Leistungen Tartaglias zweifelhaft, ob dieser die Lösung selbständig gefunden oder von einem Mitwisser der Ferroschen Lösung erhalten hat. Der vermeintliche Wortbruch des Cardano wird dadurch in ein anderes Licht gestellt, dafs Cardano, 1542, Einsicht in die Ferroschen Papiere nehmen und so konstatieren konnte, dafs Tartaglia mindestens kein Anrecht auf die Priorität hatte; aufserdem werden von ihm auch Ferro und Tartaglia als die Erfinder genannt.

Beweis der Ferroschen Formel, deren Herleitung unbekannt ist, durch Cardano auf geometrischem Wege: 1545, *Ars magna*.

Reduktion der allgemeinen Form auf die Normalform ebenfalls durch Cardano, 1545, *Ars magna*.

Andere Lösungsarten:

I. Methode von Hudde durch Substitution von $x^2 = z + z$ in $x^3 = qx + r$ und Zerfällung in zwei lösbare Gleichungen für x und z. 1658, *Epist. I de reductione aequationum*.

II. Methode von Tschirnhausen durch Substitution von $x^2 + vx + w = y$ in $x^3 + qx + q = 0$ und Reduktion auf $y^3 = c$. 1683, *acta Eruditorum Lips.*

III. Methode von Euler durch Berechnung des y aus $x = a + by + cy^2$ und $y^3 = d$ und Vergleichung des Ergebnisses mit der vorgelegten Gleichung. 1674 *comm. acad. Petrop.*

Existenz der drei Lösungen, von denen event. zwei gleich sein können, zuerst bei Cardano, 1545, *Ars magna*.

Dafs $x_1 + x_2 + x_3$ gleich dem Koeffizienten des quadratischen Gliedes ist, erstmalig bei Cardano, 1545, *Ars magna*.

Den allgemeinen Zusammenhang der Wurzeln mit den Koeffizienten deckte erst Vieta, 1591, *Isagoge* auf.

Den irreduktibelen Fall behandelte Bombelli zuerst *l'Algebra*, 1572, indem er die Ferrosche Formel durch Umformungen so veränderte, dafs die imaginären Bestandteile herausfielen.

Erste goniometrische Lösung bei Vieta, 1591, *Isagoge*. Die Formel Vietas verwandelt 1629 Girard in eine praktische Regel.

Die übliche goniometrische Lösung ist von Moivre, 1707/1722, und Eytelwein, 1824.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Gleichung vierten Grades.

Die Lösung einiger biquadratischen Gleichungen ist den Arabern auf geometrischem Wege gelungen, z. B. Abul Wafa (940—998, Bagdad), Omar Alkhayami († 1123; Astronom am Hofe von Melikschah).

Die arithmetische Lösung wurde gefunden durch den Schüler des Cardano, Ferrari (1522—1565), veröffentlicht durch Cardano, 1545, *Ars magna.* (Durch Addition von Hülfsgröfsen auf beiden Seiten der Gleichung wird jede Seite zum Quadrat gemacht.)

Methode von Descartes, 1637, Zerfällung der linken Seite von $x^4 + px^2 + qx + v = 0$ in ein Produkt von zwei quadratischen Faktoren.

Gleichungen höheren Grades.

Die Wörter: algebraische und transcendente Gleichungen zuerst bei Leibniz, 1686, *geometria recondita* (Descartes sagt dafür noch: geometrisch und mechanisch).

Ordnen der Gleichungen nach Potenzen der Unbekannten zuerst in einer lateinischen Algebra aus dem Jahre 1461, München.

Die erste auf Null gebrachte Gleichung findet sich bei Michael Stifel, 1544, *arithmetica integra*; dann bei Bürgi (um 1619), häufiger bei Descartes.

Ein angenähertes Verfahren, eine Wurzel einer beliebig hohen Gleichung zu finden giebt zuerst Vieta, 1600, *de numerosa potestatum resolutione tractatus*; mit Hülfe von Reihen: Newton, 1669, *analysis per aequationes.*

Descartessche Zeichenregel: Descartes, 1637, *Géométrie*, angedeutet bereits durch Cardano in einer nachgelassenen Schrift; erster Beweis durch de Gue, 1741, *Démonstration* († 1785, Paris).

Huddesche Regel über das Auftreten gleicher Wurzeln, 1658, mit Beweis (in einem Brief).

Division durch $(x - x_1)$, wenn x_1 eine Wurzel: zuerst bei Descartes, 1637, *géométrie.*

Der Zusammenhang einer Gleichung mit der Normalform $(x \pm a)(x \pm b)(x \pm c) \ldots$ zuerst bei Harriot (1631, *artis analyticae praxis*).

Anzahl der Wurzeln: Alb. Girard, 1629, *Invention nouvelle en l'algèbre*, spricht zuerst aus, dafs eine Gleichung soviel Wurzeln hat, wie ihr Grad angiebt. Descartes (1637) drückt sich vorsichtiger aus, eine Gleichung n^{ten} Grades könne n Wurzeln haben. Newton, *arithmetica universalis* (Vorlesungen, 1707, v. Whiston herausgegeben) fügt hinzu: „jedenfalls nicht mehr". Euler (1742) behauptet die Zerlegbarkeit in Faktoren 1. und 2. Grades mit reellen Koeffizienten. Ein Beweis glückt ihm aber ebensowenig, wie 1746 d'Alembert (*Hist. de l'acad. d. Berl.*). Einen endgültigen Beweis giebt erst Gaufs, 1799, in seiner Dissertation.

Den Zusammenhang der Koeffizienten mit den Wurzeln kennt für die Gleichung 3. Grades z. Teil Cardano, für höhere Gleichungen Vieta (1591, *recognitio*). Den vollständigen Zusammenhang (auch bei Gleichungen mit imaginären Wurzeln) zeigt Alb. Girard, 1629, *Invention.*

Unauflösbarkeit der Gleichungen von höherem als dem 4. Grade mit algebraischen Gröfsen wird von Leibniz (um 1683) bereits behauptet, von Abel (1824) bewiesen.

Unbestimmte Gleichungen.

Erstes Auftreten unbestimmter Analytik bereits vor Diophant z. B. Rinderproblem des Archimedes.

Diophant (um 275 p., Alexandria) verlangt bei der Lösung einer Gleichung mit zwei

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Unbekannten keineswegs ganzzahlige Lösungen, sondern gestattet auch Brüche als Lösungen; er verwirft — entsprechend seiner Kenntnis des Zahlenbegriffes — negative und irrationale Lösungen. Im übrigen giebt Diophant auch nur Beispiele, keine Lösungsmethode.

Die Forderung nach nur ganzzahligen Lösungen stellten zuerst die Inder. Bhaskara (1114 geb.) beschreibt eine altindische Lösungsmethode, unter dem Namen „Zerstäubung", welche sich ungefähr mit der Eulerschen Methode deckt. Eine andere Lösung, die sog. „Grofse Erweiterung", findet sich bei den Chinesen und wird dem Sun tse (III. Saec. p.) zugeschrieben.

In Europa taucht die Frage nach nur ganzzahligen Lösungen zuerst wieder auf durch Bachet de Méziriac, 1621, Zusatz in seiner Diophantausgabe zu IV, 41, mit einer wenig brauchbaren Lösung. Ausführlicher behandelt diese Gleichungslösung Michel Rolle, 1690, *traité d'Algèbre*, und giebt eine wirkliche Lösungsmethode.

Die Aufgabe, eine Zahl zu suchen, welche durch gegebene Divisoren geteilt gegebene Reste läfst, tritt zuerst auf bei den Chinesen (Sun tse III. Saec. p.); ausführlich behandelt von Euler 1734/35, *comm. acad. Petrop.*

Beispiele von unbestimmten Gleichungen 2. Grades finden sich schon bei Diophant (c. 275 p., Alexandria), ferner bei den Indern Aryabhatta (geb. 476), Brahmagupta (geb. 598), Bhaskara (geb. 1114), dem Araber Alkarchi (um 1010, Bagdad) u. a.

Die pythagoräische Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ wurde zuerst in der pythagoräischen Schule gelöst durch $x = 2\alpha + 1$, $y = 2\alpha^2 + 2\alpha$, $z = 2\alpha^2 + 2\alpha + 1$; dann fand Plato (429—348, Athen) die Lösung: $x = m$, $y = \left(\frac{m}{2}\right)^2 - 1$, $z = \left(\frac{m}{2}\right)^2 + 1$. Euclids Lösung (um 300 a., Alexandria), in den *Elem. X 29*, ist $x = \alpha\beta\gamma$, $y = \frac{1}{2}\cdot(\alpha\beta^2 - \alpha\gamma^2)$, $z = \frac{1}{2}(\alpha\beta^2 + \alpha\gamma^2)$. Der Inder Brahmagupta (geb. 598) giebt $x = a$, $y = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b} - b\right)$, $z = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b} + b\right)$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Unbekannten keinesw gestattet auch Brüche als Lösungen; er verwirft Zahlenbegriffes — negative und irrationale Lösu auch nur Beispiele, keine Lösungsmethode.

Die Forderung nach ten zuerst die Inder. Bhaskara (1114 geb.) bes de, unter dem Namen „Zerstäubung“, welche s thode deckt. Eine andere Lösung, die sog. „G en Chinesen und wird dem Sun tse (III. Saec. p.)

In Europa taucht gen zuerst wieder auf durch Bachet de Méziriac, 1 zu IV, 41, mit einer wenig brauchbaren Lösung. chungslösung Michel Rolle, 1690, *traité d'Algèbre* thode.

Die Aufgabe, eine Za ebene Divisoren geteilt gegebene Reste lä (Sun tse III. Saec. p.); ausführlich behandelt vo

Beispiele von unbesti den sich schon bei Diophant (c. 275 p., Alexandri (geb. 476), Brahmagupta (geb. 598), Bhaskara m 1010, Bagdad) u. a.

Die pythagoräische G st in der pythagoräischen Schule gelöst durch x $-2\alpha+1$; dann fand Plato (429—348, Athen) di $\left(\frac{m}{2}\right)^2+1$. Euclids Lösung (um 300 a., Alexan $=\alpha\beta\gamma$, $y=\frac{1}{2}\cdot(\alpha\beta^2-\alpha\gamma^2)$, $z=\frac{1}{2}(\alpha\beta^2+\alpha\gamma^2)$. De ebt $x=a$, $y=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b}-b\right)$, $z=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b}+b\right)$.

Grauskala #13 B.I.G.
A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Druck von W. Pormetter in Berlin.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf