Anfangsgründe

der

darstellenden Geometrie, der Axonometrie, der Perspective und der Schattenconstruction.

Ergänzungsband zu Koppe's Lehrbüchern der Mathematik.

Mit einer Figurentafel.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Gern hätte ich diese Gelegenheit benutzt um eine Fortsetzung des **„Grundrisses der mathematischen Geographie"**, dessen Anfang in das Programm 1867 aufgenommen ist, hier folgen zu lassen; allein allerlei Hindernisse, meistens Krankheit, ließen mich nicht zur weitern Bearbeitung kommen, und als mir der Raum des diesjährigen Programms zur Verfügung gestellt wurde, war inzwischen die hier folgende Arbeit an mich herangetreten. Da ich noch nicht genügendes Material von der vorigen Arbeit bereit hatte und diese neue sich nicht beliebig hinausschieben ließ, entschloß ich mich von derselben soviel abdrucken zu lassen, als der Raum des Programms gestattet.

Der Verfasser.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Vorwort.

Daß die „Unterrichts- und Prüfungs-Ordnung der Realschulen vom 6. October 1859" bestimmt, es sollen auf den Realschulen „die Elemente der beschreibenden Geometrie" gelehrt, oder, wie die „Erläuternden Bemerkungen zu der Unterrichts- und Prüfungs-Ordnung ꝛc." ergänzend hinzufügen, „die Hauptsätze der beschreibenden Geometrie, Schattenconstruction und Perspective ..... durchgenommen" werden, ist mit Dank anzuerkennen, nicht etwa, weil dadurch denjenigen Schülern der Realschule, welche sich dem Studium des Baufachs oder dem Maschinenbau widmen, nützliche ihrem Berufe dienliche positive Kenntnisse mitgegeben werden — denn die Realschulen sollen keine Fachschulen sein —, auch nicht allein aus dem Grunde, den die „Erläuternden Bemerkungen ꝛc." anführen, daß nämlich den Schülern „der Zusammenhang der Mathematik mit einem rationellen Verfahren beim Zeichnen gegenwärtig erhalten" werde, obgleich ich diesen Nutzen keineswegs gering anschlage[1]), sondern hauptsächlich — und darauf lege ich ein besonderes Gewicht — weil durch diese Lehren dem geometrischen Unterrichte ein neues Moment seiner bildenden Kraft erwächst, indem die den Schülern bereits bekannten geometrischen Lehren in neue Beziehungen zu einander treten, neue Resultate liefern und von einem andern Standpunkte betrachtet, in einem neuen Lichte erscheinen.

Dieser Gewinn für die Durchbildung des jugendlichen Geistes erscheint mir so groß, daß alle etwaigen praktischen Vortheile meines Erachtens dagegen in den Hintergrund treten.

Ich spreche daher im Interesse der mathematischen Disciplinen und deren Bedeutung für die Erziehung der Jugend den Wunsch aus, daß auch die Gymnasien sich dieses Lehrgegenstandes bedienen mögen, soweit es ihnen die dem mathematischen Unterrichte allerdings etwas knapp zugemessene Zeit gestattet.

---

[1]) Anmerkung. Ich bedaure es lebhaft, daß der so nützliche Zeichenunterricht nicht an allen höhern Lehranstalten — Realschulen und Gymnasien — mit der Ausdehnung und Intensität betrieben wird, wie es die oben genannte Unt.- und Prüf.-Ordnung vorschreibt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Um nun den oben angedeuteten Zweck in möglichst hohem Maße zu erreichen, erschien es geboten, die geometrischen Lehren in möglichst vielseitige Anwendung zu bringen, d. h. so viele Methoden der „darstellenden Geometrie im weitern Sinne" als irgend möglich zu behandeln. Dadurch würde aber der Stoff zu gewaltig anwachsen, als daß er auf der Schule, wo diesem Gegenstande immerhin nur ein mäßiger Raum gewährt werden darf, bewältigt werden könnte. Dieser Umstand bedingt nun wieder andererseits eine sehr bedeutende Einschränkung, so daß die nicht ganz leichte Aufgabe zu lösen bleibt, bei der Behandlung der einzelnen Methoden sich auf ein Minimum zu beschränken, jedoch so die Auswahl des Stoffes zu treffen, daß der Schüler außer dem Gewinne der formalen Bildung auch eine möglichst klare Vorstellung von den einzelnen Methoden empfange.

Die Lösung dieser Aufgabe wird vielleicht beim ersten Versuch nicht zu allseitiger Befriedigung der Fachgenossen ausfallen; erst die von vielen Lehrern gesammelte Erfahrung kann schließlich den vollkommenen Leitfaden dictiren.

Inhalt.

Einleitung.
I. Abschnitt: Darstellende Geometrie.
II. Abschnitt: Axonometrie.
III. Abschnitt: Perspective.
IV. Abschnitt: Schattenconstruction.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Einleitung.

A. Erläuterungen.

§. 1. Die Entwickelung der geometrischen Lehren bedarf, wenigstens für den Anfänger, der Darstellung.

§. 2. In der Geometrie der Ebene (Planimetrie) ergiebt sich die Darstellung unmittelbar aus der Theorie; sie erfordert also keine besondere Behandlung.

§. 3. Dagegen bietet die Geometrie des Raumes Schwierigkeiten bei der Darstellung ihrer Objecte.

Soll die Darstellung durch räumliche Gebilde (Modelle) bewirkt werden, so ergiebt sie sich wiederum unmittelbar aus der Theorie und es sind nur technische Schwierigkeiten zu überwinden, die hier jedoch nicht Gegenstand der Betrachtung sein können.

Sollen aber die Objecte der Geometrie des Raumes durch Zeichnung dargestellt werden, so bieten sie, da der Raum in dem sie liegen drei, die Zeichenebene aber nur zwei Dimensionen hat, mathematische Schwierigkeiten dar; und diese sollen im Folgenden gehoben werden.[1])

§. 4. Erklärung. Die Gesammtheit der Methoden, nach welchen Gestalt und Lage der Raumgebilde durch Zeichnungen in der Ebene dargestellt werden, und alle im Raume auszuführende Constructionen sich in solche umwandeln lassen, die in der Ebene ausgeführt werden, ist die **darstellende** (beschreibende, descriptive) **Geometrie** im weitern Sinne.

§. 5. Ein unentbehrliches Hülfsmittel, die einzelnen Theile eines Raumgebildes in die Zeichenebene zu bringen, sind die Projectionen.

B. Projectionen.

§. 6. Erklärung 1. Werden von einem Complexe von Punkten nach einem bestimmten Gesetze grade Linien, Projectionsstralen, nach einer der Lage nach gegebenen Ebene, der

---

[1]) Anmerkung. Die den Lehrbüchern der Stereometrie zur Veranschaulichung eingefügten Figuren sind meist axonometrischer, zum Theil auch wol perspectivischer Natur, ohne jedoch mathematisch genau nach der einen oder der andern Methode entworfen zu sein.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Projectionsebene oder Grundebene, gezogen, so sind die Fußpunkte der Projectionsstralen die Projektionen der Punkte.

Erklärung 2. Gehen sämmtliche Projectionsstralen durch einen Punkt, das Projectionscentrum, so führt die Projectionsart den Namen Centralprojection.

Z. B. Die vier Punkte mit ihren Verbindungslinien, in denen die von unserm Auge durch die vier Eckpunkte eines Quadrates gezogenen Stralen eine vor oder hinter dem Quadrat liegende Ebene durchstoßen, bilden die Centralprojection dieses Quadrates.

Erklärung 3. Sind sämmtliche Projectionsstralen unter einander parallel, so heißt diese Projectionsart Parallelprojection.

Und jenachdem die Stralen rechte oder schiefe Neigungswinkel mit der Projectionsebene bilden, unterscheiden wir rechtwinklige (orthographische) und schiefe Projection.

Bemerkung 1. Die centrale (und schiefe) Projection wird weiter unten in der „Perspective" ihre weitere Erörterung finden.

Bemerkung 2. Die Hauptlehren der rechtwinkligen Projection sind in jedem guten Lehrbuch der Stereometrie zu finden; wir setzen sie hier also als bekannt voraus.[1])

§. 7. Zusatz 1. Die rechtwinklige Projection einer Linie (graden und krummen) erhält man, wenn man von sämmtlichen Punkten derselben Lothe (Projectionsstralen) auf die Grundebene fällt; die continuirliche Folge aller Fußpunkte derselben bildet die Projection der Linie.

Die Grade ab (Fig. 1) ist die Projection der Graden AB, und die Kurve cd ist die Projection der Kurve CD. — Die Projection einer Graden ist stets eine Grade (resp. ein Punkt) — vergl. Koppe, Stereom. §. 97 —, wenn, wie hier immer geschieht, als Projectionsfläche eine Ebene und nicht irgend eine krumme Fläche gewählt wird; die Projection einer krummen Linie ist nicht immer eine krumme Linie, sondern wird für den Fall, wenn die Kurve in einer zur Grundebene senkrechten Ebene liegt, eine Grade (die Durchschnittslinie).

Zur Bestimmung der Projection einer graden Linie genügen offenbar die Projectionen zweier Punkte.

Die Projectionen sämmtlicher Begrenzungslinien einer ebenen Figur bilden die Projection der Figur. — Die Projectionen sämmtlicher Grenzflächen eines Körpers bilden die Projection des Körpers.

Die Projectionen nach den andern Projectionsarten ergeben sich in analoger Weise.

§. 8. Zusatz 2. Eine andere in vielen Fällen zweckmäßigere Entstehungsart der Projectionen von Linien, Flächen und Körpern ist die folgende:

Man denke sich einen Projectionsstral an der zu projicirenden Linie, resp. an dem Umriß der Fläche oder des Körpers so hingleiten, daß er,

---

[1]) Anmerkung. Da sich dies Lehrbuch zunächst an Koppe's Lehrbücher der Mathematik anschließen soll, so verweisen wir auf „Koppe's Stereometrie" §§. 96 bis 106, und machen darauf aufmerksam, daß es zum Verständniß des Folgenden unerläßlich nöthig ist, daß der Leser sich mit den Lehren der rechtwinkligen Projection ganz vertraut mache.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

1. will man eine Parallelprojection erhalten, stets seiner ersten Lage parallel bleibt,
2. will man eine Centralprojection erhalten, stets durch das Projectionscentrum hindurchgeht,

und dabei nirgends in die Fläche oder den Körper eindringt noch sich davon entfernt. Die von dem Stral auf der Projectionsebene hinterlassene **Spur**, resp. die von ihr begrenzte Figur ist die **Projection.**

Dieser sich fortbewegende Projectionsstral heißt die Erzeugende, und die von ihr beschriebene Fläche, die

im 1. Falle eine Cylinderfläche
im 2. Falle eine Kegelfläche } im weitesten Sinne ist, heißt die projicirende oder entwerfende Fläche.

Man kann daher auch so sagen: Der Durchschnitt der Projectionsebene mit der projicirenden Fläche ist die Projection.

Die rechtwinklige Projection entsteht, wenn die Projectionsebene die projicirende Cylinderfläche senkrecht zur Richtung der Erzeugenden durchschneidet.

Die projicirende Fläche der graden Linie ist offenbar eine Ebene; diese steht bei rechtwinkliger Projection senkrecht zur Projectionsebene.

§. 9. Lehrsatz.[1]) Ist ein Raumgebilde (Linie oder ebene Figur) seiner Lage und Größe nach und eine Projectionsebene ihrer Lage nach gegeben, so ist die Projection des Raumgebildes vollkommen bestimmt; dagegen ist die Lage und Größe eines Raumgebildes durch seine Projection auf eine Projectionsebene nicht bestimmt.

Beweis. Bezeichnen wir das Raumgebilde durch A, seine Projection durch a und seinen Neigungswinkel gegen die Projectionsebene durch i, so ist nach Koppe, Stereometrie §. 105. Anm. 1

$$a = A \cos i.$$

Von den drei Größen dieser Gleichung sind im ersten Theile des Lehrsatzes zwei, A und i, als bekannt vorausgesetzt, also ist a bestimmt; im zweiten Theile ist nur a als bekannt vorausgesetzt, also bleiben die beiden andern A und i unbestimmt.

Z. B. Die beiden Linien AB und AC (Fig. 2) haben verschiedene Länge und Lage, aber dieselbe Projection ab;

$$ab = AB \cos i, \; ab = AC \cos i_1.$$

§. 10. 1) Ist die Projection eines Punktes auf einer Projectionsebene und außerdem seine Entfernung von dieser Ebene d. i. die Länge seiner projicirenden Graden (s. d. §§. 11—14), oder

2) sind seine Projectionen auf zwei oder drei senkrecht auf einander stehenden Projectionsebenen gegeben, so ist seine Lage im Raume vollkommen bestimmt (s. die §§. 15—19).

---

[1]) Anmerkung. Es sind von hier ab in der Einleitung und im I. Abschnitt stets rechtwinklige Projectionen gemeint, wenn nicht ausdrücklich im einzelnen Falle anders bestimmt wird.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

C. Methode der bezifferten (cotirten) Ebenen.

§. 11. Es sei in der Ebene MN (Fig. 3) a die rechtwinklige Projection des Punktes A und dessen Entfernung von der Projectionsebene MN sei gleich 12″, so setzt man diese Zahl neben die Projection a und versieht sie mit dem Vorzeichen + oder —, jenachdem A auf der einen oder der andern Seite der Ebene liegt. Dadurch ist die Lage des Punktes A im Raume vollkommen bestimmt.

§. 12. Die Lage und Größe der begrenzten Graden AB (Fig. 4) ist ebenso vollkommen bestimmt, wenn man ihre rechtwinklige Projection ab und die Entfernungen ihrer Endpunkte von der Ebene, die in Zahlen (z. B. 6″ und 9″) an die Endpunkte der Projection geschrieben werden, kennt.

Diese Projection mit ihren Ziffern heißt die bezifferte (cotirte) Projection.

Um hieraus die wahre Länge der Linie AB zu finden, construire man (Fig. 4) ein Trapez $a_1 b_1 A_1 B_1$ aus der gegebenen Projection ab und den beiden auf ihr senkrecht stehenden parallelen Seiten von 6″ und 9″ Länge; A_1 B_1 ist die wahre Länge.

§. 13. Zusatz. Soll eine krumme Linie nach dieser Methode dargestellt werden, so muß man an möglichst viele Punkte ihrer rechtwinkligen Projection die Entfernungen der entsprechenden Punkte der Kurve in Ziffern schreiben.

§. 14. Ist irgend ein Polyeder z. B. ein Hexaeder (Würfel) Fig. 5 nach dieser Methode darzustellen, so entwirft man seine rechtwinklige Projection auf die Grundebene MN und setzt an die Projectionen der Ecken des Polyeders die Entfernungen derselben von der Grundebene in Ziffern. Die so in der Ebene MN entstandene und mit Ziffern versehene ebene Figur ist die bezifferte Projection oder die bezifferte (cotirte) Ebene.

Daß umgekehrt durch die gegebene bezifferte Projection eines Polyeders dessen Größe und Lage im Raume genau bestimmt ist, leuchtet ein (vergl. §. 12).

Bemerkung. Aus dem in den §§. 11 bis 14 Gesagten wird das Wesen der Methode der bezifferten (cotirten) Ebenen deutlich geworden sein.

Da wir im Folgenden von dieser halb geometrischen halb arithmetischen Methode keine Anwendung zu machen gedenken, so beschränken wir uns auf diese kurze Erörterung und verlassen diesen Gegenstand, indem wir nur noch bemerken, daß von dieser Methode beim Plan- und Karten-Zeichnen häufig Gebrauch gemacht wird, um z. B. Terrain-Erhöhungen und Vertiefungen genau anzugeben.

D. Coordinaten des Raumes.[1])

§. 15. Erklärung. Es seien XOY, XOZ, YOZ (Fig. 6) drei feste senkrecht auf einander stehende Ebenen, die sich in den ebenfalls senkrecht auf einander stehenden (s. Koppe, Stereom.

---

[1]) Anmerkung. Den Leser, der noch keine Kenntniß von den Coordinaten hat, verweisen wir auf Koppe's „Anfangsgründe der analytischen Geometrie und der Lehre von den Kegelschnitten". Beim Gebrauch dieses Buches in Schulen wird der Lehrer die für unsern Zweck ausreichende Kenntniß von den Coordinaten, falls sie noch nicht vorhanden ist, den Schülern mit leichter Mühe und in sehr kurzer Zeit beibringen können.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 71) Linien OX, OZ, OY durchschneiden, und P sei irgend ein Punkt im Raume, dessen senkrechte Entfernungen von den drei Ebenen resp. Pp_{I}, Pp_{II} und Pp_{III} sind. Diese drei Ebenen heißen Coordinatenebenen, ihre Durchschnittslinien Coordinatenaxen — OX xAxe, OY yAxe, OZ zAxe —, der gemeinsame Durchschnittspunkt derselben O der Coordinatenanfang und die drei Senkrechten Pp_{I}, Pp_{II}, Pp_{III} die Coordinaten des Punktes P, die mit x, y, z bezeichnet werden, jenachdem sie der xAxe, der yAxe oder der zAxe parallel sind. Die drei Coordinatenebenen mit ihren Axen werden ein rechtwinkliges Coordinatensystem genannt.

Zur Veranschaulichung desselben kann eine untere Ecke des Zimmers dienen, in dem man sich gerade befindet.

Positive und negative Coordinaten. — Positive und negative Theile der Coordinatenaxen. — Positive und negative Theile der Coordinatenebenen. —

§. 16. Zusatz. Die Lage eines Punktes im Raume ist durch seine mit ihren Vorzeichen gegebenen Coordinaten vollkommen bestimmt.

§. 17. Zusatz 1. Betrachtet man die drei Coordinatenebenen als Projectionsebenen, so sind die Fußpunkte — p_{I}, p_{II}, p_{III} Fig. 6 — der Coordinaten des Punktes P die rechtwinkligen Projectionen von P.

Zusatz 2. Sind die drei rechtwinkligen Projectionen eines Punktes P auf drei senkrecht auf einander stehenden Projectionsebenen gegeben, so ist dadurch die Lage des Punktes P im Raume genau bestimmt, da die drei in den Projectionen auf den Projectionsebenen errichteten Senkrechten sich in einem Punkte, dem Punkte P, schneiden müssen. (Folgt aus dem Begriff der rechtwinkligen Projection.)

§. 18. Lehrsatz.[1]) (Fig. 7.) Die Lage eines Punktes P im Raume ist schon durch seine beiden rechtwinkligen Projectionen p_{I} und p_{II} auf zwei senkrecht zu einander stehenden Projectionsebenen XOY und XOZ vollkommen bestimmt.

Beweis. Wenn noch die dritte Projectionsebene mit der dritten Projection von P gegeben ist, so durchschneiden sich alle drei in den Projectionen errichteten Senkrechten in ein und demselben Punkte, nämlich P (§. 17, Zusatz 2.), es trägt also offenbar die dritte Senkrechte zur Bestimmung des Punktes P nichts bei, dieselbe ist demnach durch zwei Senkrechte und also durch zwei Projectionen bestimmt.

§. 19. Das bisher von Punkten Gesagte muß auch von Linien und somit auch von Flächen und Körpern gelten, was durch Betrachtung der Figur 8 deutlich sein wird. Die drei projicirenden Cylinderflächen durchschneiden sich in ein und derselben Linie, nämlich der Linie, in deren Projectionen sie senkrecht errichtet sind, die dritte ist also nicht nothwendig.

E. Vorbereitende Aufgaben.

§. 20. Als zweckmäßige Vorbereitung auf die Methode der darstellenden Geometrie erscheint die graphische Lösung folgender Aufgaben, die sich auf die körperlichen Ecken[2]) beziehen:

[1]) Anmerkung. Dieser Lehrsatz ist für die darstellende Geometrie von besonderer Wichtigkeit.
[2]) Anmerkung. Ueber die körperlichen Ecken s. Koppe, Stereom. §. 42 bis §. 62.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aufgabe 1. Die drei Seiten einer dreiseitigen körperlichen Ecke (eines körperlichen Dreiecks) sind gegeben, man soll die Winkel derselben durch graphische Construction (Construction in einer Ebene) bestimmen.

Auflösung. Es sei OMNL (Fig. 9, a und Fig. 9, b) das körperliche Dreieck, dessen Seiten MOL = a, MON = b und NOL = c gegeben sind. Wir wollen annehmen, daß die Seite NOL = c in der Ebene des Papiers liegt und uns auf den Fall beschränken, daß sämmtliche Winkel, sowol die Seiten als auch die Neigungswinkel der Seiten, spitze Winkel sind. Denken wir uns nun von einem beliebigen Punkte B der Kante OM (Fig. 9, a) auf die Seite NOL und auf die Kanten OL und ON die Senkrechten BD, BA und BC gefällt und die Graden DA und DC gezogen, so sind zwei rechtwinklige Dreiecke ABD und CBD entstanden, deren spitze Winkel BAD = α und BCD = γ zwei Winkel des körperlichen Dreiecks sind, nämlich $\angle\,\alpha$ der Neigungswinkel der Seiten a und c, und $\angle\,\gamma$ der Neigungswinkel der Seiten b und c (s. Koppe, Stereom. §. 42, §. 86 und §. 92, 1).

Denken wir uns ferner in demselben Punkte B (Fig. 9, b) auf der Kante OM in den Ebenen MOL und MON (den Seiten a und b) zwei Senkrechte BF und BE errichtet und die Punkte F und E, in denen sie die Kanten OL und ON treffen, durch eine grade Linie verbunden, so ist ein schiefwinkliges Dreieck BEF entstanden, dessen $\angle$ EBF = β der dritte Winkel des körperlichen Dreiecks ist.

Diese drei Dreiecke, die beiden rechtwinkligen ABD und CBD und das schiefwinklige BEF, welche nach dem Obigen die drei Winkel des körperlichen Dreiecks enthalten, liegen aber nicht in der Zeichenebene (der Ebene des Papiers), sondern die beiden ersten stehen senkrecht auf derselben (s. Koppe, Stereom. §. 70), das letzte ist unter einem spitzen Winkel gegen dieselbe geneigt. Daher zeigen die Figuren 9, a und 9, b auch nicht die wahre Größe und Form der Dreiecke und also auch nicht die wahre Größe der gesuchten Winkel. Wir müssen daher diese Dreiecke in die Zeichenebene, d. i. die Seite NOL des körperlichen Dreiecks, die nach der Annahme in der Ebene des Papiers liegt, herumzulegen suchen, indem wir sie uns um ihre in derselben liegenden Grundlinien AD, CD und EF gedreht denken. Die dann erhaltenen Zeichnungen werden die Dreiecke und somit die gesuchten Winkel in ihrer wirklichen Größe zeigen. Die beiden rechtwinkligen Dreiecke wollen wir uns nach rechts, das Dreieck BEF nach links herumgelegt denken.

Zum Zweck dieser Construction denken wir uns auch die Seiten MOL und MON um die Kanten OL und ON bis in die Ebene NOL gedreht; und wenn man erwägt, daß wenn ein rechter Winkel (ADB, CDB, OAB, OCB) um einen Schenkel gedreht wird, der bewegte Schenkel in allen Lagen senkrecht auf dem festen (als Drehungsaxe dienenden) Schenkel bleibt, und daß ferner die Seiten BF und BE des ebenen Dreiecks BEF senkrecht auf der Kante OM stehen und sich bis zu den Kanten OL und ON erstrecken, so wird nach allem Obigen die folgende Construction leicht verständlich sein.

Construction. Gegeben sind drei Winkel a, b und c, welche die drei Seiten des körperlichen Dreiecks sein sollen. Man zeichne einen Winkel LON = c (Fig. 9, c); trage an LO in O den Winkel LOM_1 = a und an NO in O den Winkel NOM_{11} = b an, schneide auf OM_1 die

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

beliebige Strecke OB_I und auf OM_{II} dieselbe Strecke OB_{II} ab, fälle von B_I auf OL und von B_{II} auf ON die Senkrechten B_IA und $B_{II}C$ und verlängere sie, bis sie sich in D schneiden; errichte in D auf AD und CD die Senkrechten DB, beschreibe sodann mit B_IA um A und $B_{II}C$ um C Kreisbogen, bis dieselben die Senkrechten DB in den Punkten B schneiden und verbinde die beiden Punkte B mit A und C.

Die so entstandenen rechtwinkligen Dreiecke ABD und CBD geben nun die wahre Größe und Form der gleichbezeichneten Dreiecke der Figur 9, a an und es sind also die Winkel BAD und BCD die Winkel α und γ des körperlichen Dreiecks in ihrer wahren Größe.

Um den dritten Winkel β zu erhalten, errichte man auf OM_I und OM_{II} in B_I und B_{II} Senkrechte bis sie die OL und ON in F und E treffen, verbinde F mit E und beschreibe mit B_IF um F und mit $B_{II}E$ um E Kreisbogen, bis beide sich in B schneiden. Verbindet man endlich diesen Schnittpunkt B mit F und E, so entsteht das Dreieck BFE, welches die wahre Größe und Form des gleichbezeichneten Dreiecks der Figur 9, b angiebt. Der Winkel FBE ist also der dritte Winkel β des körperlichen Dreiecks in seiner wahren Größe.

Aufgabe 2. Zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel eines körperlichen Dreiecks sind gegeben; man soll die dritte Seite und die beiden andern Winkel durch graphische Construction finden.

Auflösung. Es sei OMNL (Fig. 10) das körperliche Dreieck; MOL und NOL seien die gegebenen Seiten und ∠ BAC der gegebene Winkel. Punkt A wird in OL beliebig gewählt; daraus ergiebt sich die Länge von AC und AB und auch von OC und OB, und aus der Construction des Dreiecks ABC, die sich in der Ebene NOL leicht aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel ergiebt, wird die BC bekannt. Damit ist Dreieck OBC aus drei Seiten zu construiren und somit die dritte Seite MON des körperlichen Dreiecks gefunden.

Die beiden andern Winkel sind dann nach Aufgabe 1 zu finden.

Aufgabe 3. Eine Seite und die beiden anliegenden Winkel eines körperlichen Dreiecks sind gegeben; man soll die beiden andern Seiten und den dritten Winkel durch graphische Construction finden.

Auflösung. Es sei NOL (Fig. 11) die gegebene Seite und ∠ BAD und ∠ BCD die gegebenen ihr anliegenden Winkel des körperlichen Dreiecks OMNL. Aus der Construction der rechtwinkligen Dreiecke BAD und BCD werden sich unmittelbar die Strecken AB und CB, und mittelbar OA und OC und damit die Construction der rechtwinkligen Dreiecke OAB und OCB aus den beiden Katheten ergeben. Damit wären dann die Seiten AOB und COB des körperlichen Dreiecks gefunden und daraus nach Aufgabe 1 der dritte Winkel leicht zu construiren.

Aber die Construction der rechtwinkligen Dreiecke BAD und BCD bietet einige Schwierigkeit, da für dieselbe nur der rechte und ein spitzer Winkel und der Umstand gegeben ist, daß beide dieselbe Kathete (BD) haben müssen, die jedoch nicht gegeben ist.

Folgende Ueberlegung wird zur Construction der Dreiecke führen. Der Fußpunkt D der gemeinsamen Kathete BD ist die Projection eines Punktes der Kante OM auf die Ebene NOL, ebenso Punkt O; also ist eine durch O und D gelegte Grade die Projection der Kante OM. Ferner, denkt man sich die Dreiecke BAD und BCD auf ihren Basen AD und CD so fort-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

gerückt, daß ihre Eckpunkte A und C auf den Kanten OL und ON hingleiten und dabei sie selbst ihrer ursprünglichen Lage parallel bleiben, so beschreibt Punkt D (als jedem Dreieck besonders angehörig betrachtet) zwei grade Linien, die resp. OL und ON parallel sind.

Umgekehrt, hat man an irgend einer Stelle der Kanten OL und ON in der Ebene NOL zwei rechtwinklige Dreiecke mit den gegebenen Winkeln α und γ und einer gleichen (übrigens beliebigen) Kathete so construirt, daß die nicht gleichen Katheten senkrecht zu den genannten Kanten stehen, und zieht durch die Scheitel der rechten Winkel Parallelen zu OL und ON, so ist der Durchschnittspunkt beider Parallelen offenbar die Projection eines Punktes der Kante OM. Danach kann man nun die Projection der Kante OM und dann, wie man leicht erkennen wird, die beiden rechtwinkligen Dreiecke nicht blos mit einer gleichen Kathete, sondern auch mit einem gemeinsamen Scheitel des rechten Winkels construiren, woraus sich dann das Uebrige nach dem oben bereits Gesagten leicht ergiebt.

Bemerkung. Der Leser muß die Constructionen auch der Aufgaben 2 und 3 vollständig ausführen.

I. Abschnitt.

Darstellende Geometrie.

§. 21. Erklärung. Die Wissenschaft, welche lehrt 1) die Raumgebilde durch zwei (resp. drei) Projectionen in **einer** Ebene so darzustellen, daß man die gegenseitige Lage und die wahren Dimensionen derselben aus der Zeichnung erkennen kann, und 2) den Zusammenhang und die gegenseitigen Beziehungen der durch ihre Projectionen in einer Ebene gegebenen Raumgebilde durch Constructionen, in derselben Ebene ausgeführt, aufzufinden, ist die **darstellende Geometrie** im engern Sinne.

Im Folgenden soll unter „darstellender Geometrie" stets der soeben gegebene Begriff verstanden werden.

§. 22. Methode der darstellenden Geometrie.

Die darstellende Geometrie bedient sich der rechtwinkligen Projectionen und als Projectionsebenen der Coordinatenebenen eines rechtwinkligen Systems (s. §. 15). Diese Ebenen müssen in eine Ebene, die Zeichenebene, gelegt werden.

Da nach §. 18 zwei Projectionen auf zwei Projectionsebenen zur genauen Bestimmung ausreichen, so beschränkt sich die darstellende Geometrie auf zwei dieser Ebenen (in seltenen Fällen wird die dritte hinzugenommen) und vereinfacht dadurch ihre Aufgabe wesentlich.

Da diese Wissenschaft ihre Anwendung vorzugsweise zur Darstellung von Gebäuden, Maschinen u. dgl. findet, also von Gegenständen, bei denen in der Regel zwei Dimensionen senkrecht zu einander stehen, so tritt eine weitere Vereinfachung dadurch ein, daß die beiden

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Projectionsebenen diesen Dimensionen des darzustellenden Gegenstandes parallel genommen werden, so daß also die eine Projectionsebene eine horizontale, die andere eine vertikale Lage hat.

Endlich wird die horizontale Projectionsebene als Zeichenebene gewählt und die vertikale Projectionsebene um ihre Durchschnittskante mit der horizontalen Projectionsebene um 90° gedreht, so daß nun beide Projectionsebenen nebst den in ihnen befindlichen Projectionen in ein und derselben Ebene, der als Zeichenebene gewählten horizontalen Ebene, liegen.

§. 23. Benennungen und Bezeichnungen.

Die horizontale Projectionsebene heißt kurz Horizontalebene, und die in ihr liegenden Projectionen heißen Horizontal-Projectionen; dem entsprechend heißt die vertikale Projectionsebene Vertikalebene und die in ihr liegenden Projectionen Vertikal-Projectionen. Die Durchschnittslinie beider Ebenen wird Projections-Axe oder kürzer Axe genannt. Wir wollen sie durch XY bezeichnen.

Zur bessern Veranschaulichung denken wir uns, daß wir auf der Horizontalebene XYH (Fig. 12) stehen und die Vertikalebene XYV vor uns haben. Die Axe XY theilt jede Projectionsebene in zwei Theile, einen positiven und einen negativen. Derjenige Theil der Horizontalebene XYH, auf dem wir uns stehend denken, sei der positive, der jenseits der Vertikalebene liegende XYH_1 also der negative Theil, und der unmittelbar vor uns also über der Horizontalebene befindliche Theil XYV der Vertikalebene sei deren positiver, der unterhalb befindliche also deren negativer Theil.

Indem wir nun die Vertikalebene um die Axe XY im Sinne der Pfeile in Figur 12, also den positiven Theil von uns weg um 90° gedreht denken, fällt der positive Theil der Vertikalebene mit dem negativen Theile der Horizontalebene, und der negative Theil der erstern mit dem positiven der letztern zusammen. Im Folgenden sind nun die Zeichnungen stets so aufzufassen, daß über der horizontal gezeichneten Axe XY (Fig. 13) der positive Theil der Vertikalebene und der negative Theil der Horizontalebene, und unter der Axe der positive Theil der Horizontalebene und der negative der Vertikalebene liegen.

Kommt noch die dritte Projectionsebene (Coordinatenebene) hinzu, die ja auf den beiden andern senkrecht steht, so erfolgt die Drehung um ihre Durchschnittslinie mit der Horizontalebene nach der einen oder andern Seite, jenachdem der betreffende Fall es am zweckmäßigsten erscheinen läßt.

Die beiden Projectionsebenen theilen den Raum in vier Theile, Quadranten genannt. Der zwischen den positiven Theilen der Ebenen gelegene Quadrant, also derjenige in dem wir uns stehend denken, sei der erste (I), der zwischen dem positiven Theile der Vertikalebene und dem negativen Theile der Horizontalebene gelegene der zweite (II), und in diesem Sinne weiter gezählt, ergeben sich leicht der dritte (III) und vierte (IV) Quadrant.

Die Raumgebilde sollen durch die großen Buchstaben, und ihre Projectionen durch die entsprechenden kleinen aber accentuirten Buchstaben bezeichnet werden, und zwar soll die Horizontal-Projection stets mit einem Accent, die Vertikal-Projection mit zwei und, wenn die dritte zur Anwendung kommt, so soll dieselbe mit drei Accenten versehen werden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ist z. B. P (Fig. 12) ein Punkt im Raume, so ist p_I seine Horizontal-Projection und p_{II} seine Vertikal-Projection. Man erkennt diese Projectionen in Figur 13 sofort wieder; natürlich kann der Punkt P selbst dort nicht verzeichnet sein, er ist aber durch seine Projectionen p_I und p_{II} als gegeben zu betrachten.

Wenn daher in der darstellenden Geometrie Raumgrößen gegeben sind, so heißt das immer, ihre Projectionen sind gegeben.

Es leuchtet nun sofort ein, daß aus der Lage der Projectionen in dem positiven oder negativen Theile der einen oder der andern Projectionsebene, oder besser, aus der Lage der Projectionen über oder unter der Axe XY (Fig. 13) und aus der Anzahl ihrer Accente ohne Schwierigkeit erkannt werden kann, in welchem Quadranten der betreffende Punkt liegt.

Bemerkung. Nach der Erklärung in §. 21 hat die darstellende Geometrie zwei Aufgaben zu lösen:

1) Raumgebilde in **einer** Ebene darzustellen und
2) Constructionen an Raumgebilden, die durch ihre Projectionen gegeben sind, in der Ebene der Projectionen auszuführen.

I. Darstellung der Raumgebilde.

§. 24. Lehrsatz. Die Verbindungslinie der Horizontal- und Vertikal-Projection eines Punktes resp. deren Verlängerung steht senkrecht zur Axe.

Beweis. Sei P (Fig. 12) ein Punkt im Raume, so sind Pp_I und Pp_{II} seine Projectionsstralen und p_I ist seine Horizontalprojection und p_{II} seine Vertikalprojection. Eine durch Pp_I und Pp_{II} gelegte Ebene steht auf beiden Projectionsebenen, und ihre Durchschnittslinien Op_I und Op_{II} stehen auf der Axe XY senkrecht (vergl. Koppe, Stereom. §. 70 und §. 71), Pp_IOp_{II} ist also ein Rechteck und folglich $Pp_I = p_{II}O$ und $Pp_{II} = p_IO$, und $\angle\, p_IOY = \angle\, p_{II}OY = R$.

Wird nun die Vertikalebene um XY gedreht, so dreht sich der rechte Winkel $p_{II}OY$ um seinen Schenkel XY. Ist nun die Drehung, bei welcher natürlich Op_{II} stets $\perp$ XY bleibt, um 90° erfolgt, so legt sich der Schenkel Op_{II} seiner ganzen Länge nach und somit der rechte Winkel $p_{II}OY$ in die Horizontalebene und bildet mit dem Rechten p_IOY einen gestreckten Winkel. Die Linie p_IOp_{II} (Fig. 12 und 13) ist also eine gerade, die $\perp$ XY ist; w. z. b. w.

Liegt der Punkt P in einem andern Quadranten, so ist der Beweis ganz analog. Figur 14 zeigt die Projectionen eines Punktes, der im II. Quadranten liegt, oder, nach dem Sprachgebrauch der darstellenden Geometrie, in Figur 14 ist ein Punkt P im II. Quadranten gegeben.

Der Leser möge zur Uebung den Beweis für Punkte im II., III. und IV. Quadranten vollständig ausführen.

§. 25. Zusatz. Umgekehrt: Zwei Punkte in der Zeichenebene können nur dann die beiden Projectionen eines Punktes im Raume sein, wenn ihre Verbindungslinie senkrecht zur Axe steht.

§. 26. Zusatz. Die Entfernungen der Projectionen von der Axe Op_I und

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Op_{II} (Fig. 13 und 14) sind die Entfernungen des Punktes von den entsprechenden Projectionsebenen oder, was dasselbe ist, sind seine Coordinaten. — Die Entfernung von der Vertikalebene, Op_{I}, wollen wir die erste Ordinate und die Entfernung von der Horizontalebene, Op_{II}, die zweite Ordinate nennen.

Uebungen I.

Punkte durch ihre beiden Projectionen in einer Ebene darzustellen, die 1) im III. Quadranten, 2) im IV. Quadranten, 3) im positiven Theil der Horizontalebene, 4) im negativen Theil derselben Ebene, 5) im positiven Theil der Vertikal-Ebene und 6) im negativen Theil derselben Ebene liegen; 7) deren Horizontalprojection und zweite Ordinate und 8) deren Vertikalprojection und erste Ordinate gegeben ist.

Bemerkung ad 3, 4, 5 und 6. Es braucht wol kaum daran erinnert zu werden, daß der in einer Projectionsebene liegende Punkt mit der gleichnamigen Projection zusammenfällt und die ungleichnamige Projection in der Axe hat.

B. Grade Linien und Punkte.

§. 27. Eine grade Linie kann neun wesentlich verschiedene Lagen gegen die beiden Projectionsebenen haben:

I. (1) sie ist beiden Ebenen parallel;
II. sie ist einer Ebene parallel und durchschneidet (selbst oder verlängert) die andere
(2) a. unter spitzem Winkel
(3) b. unter rechtem Winkel (steht senkrecht auf ihr);
III. sie schneidet beide Ebenen
(4) a. in zwei Punkten
(5) b. in einem Punkte, also in der Axe;
IV. sie liegt in der einen Ebene und
(6) a. ist der andern parallel
(7) b. schneidet die andere unter spitzem Winkel
(8) c. steht auf der andern senkrecht;
V. (9) sie fällt mit der Axe zusammen.

Da die Linie in jedem der vier Quadranten liegen kann und jedesmal die unter I., II. und III. aufgeführten Fälle statthaben können, und die unter IV. genannten Fälle in jedem der vier Theile der Projectionsebenen (pos. und negat. Theil der Horizontal- und Vertikal-Ebene) möglich sind, so ist damit eine reiche Mannigfaltigkeit der darzustellenden Fälle gegeben.

§. 28. Die Darstellung dieser verschiedenen Fälle nach der Methode der darstellenden Geometrie bietet keine Schwierigkeit, wenn man bedenkt, daß die Lehren der orthographischen Projection in Bezug auf die eine Projectionsebene ja auch in Bezug auf die andere Projectionsebene gelten. Um, was die Hauptsache ist, die Lage der beiden Projectionen gegen die Projections-Axe zu finden und sofort zu erkennen, auf welche Lehrsätze der Stereometrie man sich dabei zu stützen habe, muß man sich nur stets die projicirenden Ebenen der darzustellenden Graden hinzudenken.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wir wollen daher nicht jeden einzelnen Fall besprechen, sondern uns darauf beschränken, einige Fälle in Figur 15 darzustellen; der Leser wird dann leicht die Darstellung der andern Fälle selbst finden.

In Bezug auf die unter IV. genannten Fälle mag nur noch bemerkt sein, daß wenn eine Grade in einer Projectionsebene (z. B. der Horizontalebene) liegt, sie mit ihrer gleichnamigen (der Horizontal-) Projection zusammenfällt, ihre ungleichnamige (die Vertikal-) Projection aber mit der Axe zusammenfällt.

Größerer Deutlichkeit wegen sind Strecken (begrenzte Grade) zur Darstellung gewählt worden. Doch sieht Jeder leicht, daß damit auch die Darstellung unbegrenzter Graden gegeben ist; denn die beliebige Verlängerung einer Strecke über beide Endpunkte hinaus, wodurch sie ja eine unbegrenzte Grade wird, ändert nichts an ihrer Lage und folglich auch nichts an der Richtung ihrer Projectionen.

§. 29. Figur 15 stellt von den in §. 27 aufgeführten Fällen dar[1]):

unter No. 1 den Fall I. (1)
„ No. 2 „ „ II. a (2) (Die Grade AB liegt im II. Quadr.)
„ No. 3 „ „ II. b (3)
„ No. 4 „ „ III. a (4) (2 Lagen)
„ No. 5 „ „ IV. b (7)
„ No. 6 „ „ IV. c (8).

Beispielsweise mag an No. 1 erläutert werden, wie die Lage der Projectionen gegen die Axe zu finden ist. Die Grade AB ist der Horizontalebene parallel, also ist auch ihre projicirende Ebene derselben parallel. Wenn aber zwei parallele Ebenen von einer dritten geschnitten werden, so sind ihre Durchschnittskanten (d. i. hier die Axe und die Horizontalprojection $a_I b_I$) einander parallel; also $a_I b_I \parallel XY$. In derselben Weise erhält man $a_{II} b_{II} \parallel XY$.

§. 30. Einer etwas ausführlicheren Erläuterung bedarf der unter §. 27. III. mitbegriffene besondere Fall, daß die Grade AB in einer zu beiden Projectionsebenen und folglich auch zur Axe (s. Koppe, Stereom. §. 71) senkrechten Ebene liegt.

In diesem Falle nämlich fallen die beiden projicirenden Ebenen in eine Ebene zusammen, sie schneiden sich also nicht und bestimmen daher auch die Lage der Graden AB nicht.

Man muß nun die dritte Projectionsebene zu Hülfe nehmen; die drei Projectionen $a_I b_I$, $a_{II} b_{II}$ und $a_{III} b_{III}$ (Fig. 16) bestimmen die Lage und Größe der Graden AB genau. Die dritte Projectionsebene ist in Figur 16 um die Linie QR, in welcher sie die Horizontalebene schneidet, nach rechts gedreht zu denken; das Uebrige ergiebt sich aus der Figur selbst, die den Fall III, a in §. 27 unter Hinzunahme der obigen Bedingung darstellt.

2c. 2c.

---

[1]) Anmerkung. Zur bessern Veranschaulichung leisten zwei senkrecht auf einander befestigte Stücke Pappe oder auch ein rechtwinklig aufgeklappter Deckel eines Buches, und eine Stricknadel vortreffliche Dienste.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wir wollen daher nicht jeden ei auf beschränken, einige Fälle in Figur 15 darzustellen lung der andern Fälle selbst finden.

In Bezug auf die unter IV. ge , daß wenn eine Grade in einer Projectionsebene (z. er gleichnamigen (der Horizontal-) Projection zusamm) Projection aber mit der Axe zusammenfällt.

Größerer Deutlichkeit wegen s rstellung gewählt worden. Doch sieht Jeder leicht, da Graden gegeben ist; denn die beliebige Verlängerung s, wodurch sie ja eine unbegrenzte Grade wird, änder ch nichts an der Richtung ihrer Projectionen.

§. 29. Figur 15 stellt von de

unter No. 1 den Fall

„ No. 2 „ „ I Quadr.)

„ No. 3 „ „ I

„ No. 4 „ „ II

„ No. 5 „ „ IV

„ No. 6 „ „ IV

Beispielsweise mag an No. 1 e ctionen gegen die Axe zu finden ist. Die Grade AB auch ihre projici- rende Ebene derselben parallel. We dritten geschnitten werden, so sind ihre Durchschnittsk alprojection a_1b_1) einander parallel; also $a_1b_1 \parallel XY$. $\parallel XY$.

§. 30. Einer etwas ausführli . III. mitbegriffene besondere Fall, daß die Grade A enen und folg- lich auch zur Axe (s. Koppe, Ste

In diesem Falle nämlich fallen Ebene zusammen, sie schneiden sich also nicht und besti AB nicht.

Man muß nun die dritte Pr drei Projectionen a_1b_1, $a_{11}b_{11}$ und $a_{111}b_{111}$ (Fig. 1 Graden AB genau. Die dritte Projectionsebene ist in ie die Horizontal- ebene schneidet, nach rechts gedreht der Figur selbst, die den Fall III, a in §. 27 unter lt.

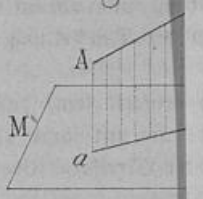
---

[1]) Anmerkung. Zur bessern B der befestigte Stücke Pappe oder auch ein rechtwinklig aufgekla l vortreffliche Dienste.

© The Tiffen Company, 2007
TIFFEN Gray Scale
R G B W G K C Y M
A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fig: 1.



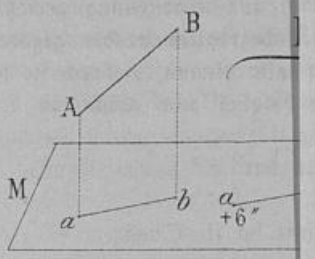


Fig: 7

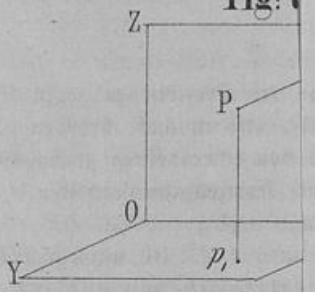
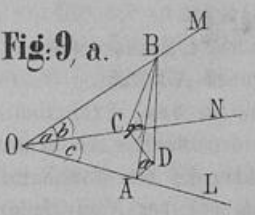
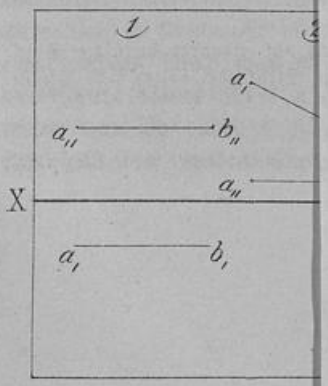


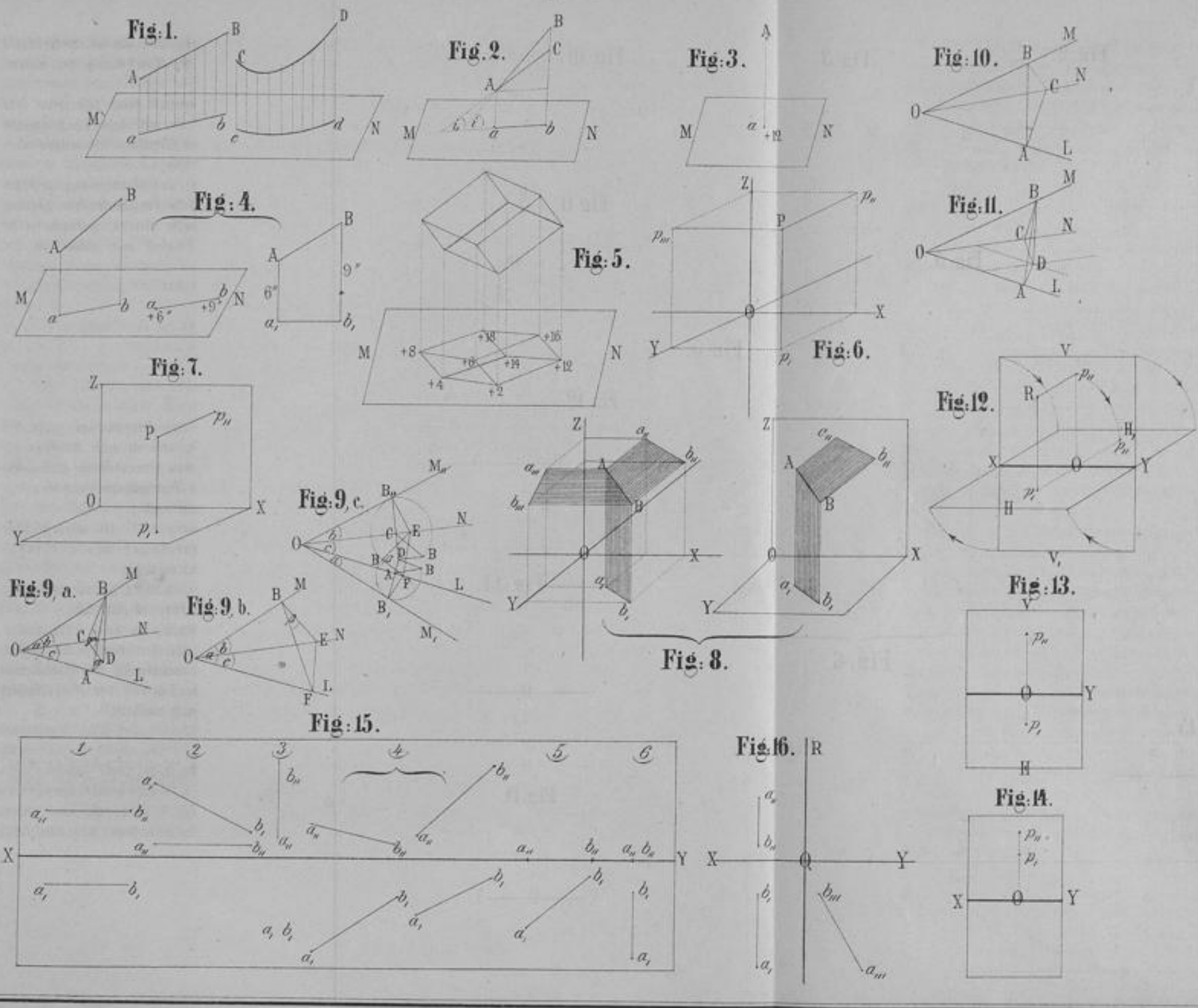
Fig: 9, a.





Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Figurentafel.



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf