Die unter dem Namen „Rabatt in Hundert“ übliche Rechnungsweise wurde zuerst benutzt von Benedict Carpzow (1595—1666, Jurist) und hat sich, trotzdem sie falsch ist, bis heute bei der Diskontierung von Wechseln in Gebrauch gehalten.

Rabatt auf Hundert wurde 1731 von Gottfr. Aug. Hoffmann (*Prudentia oeconomica*) in einer Polemik gegen Leibniz aufgestellt.

Zusammengesetzter Rabatt (mit Zinseszinsanrechnung) von Leibniz, *Acta eruditorum*, 1682, angegeben.

Rabattierungstafeln mit Benutzung als Zinseszinstafeln wurden zuerst zusammengestellt 1585 von Simon Stevin, *Practique d'Arithmétique*. Die Erfindung solcher Tafeln dürfte den Italienern zuzuschreiben sein, da Luca Paciuolo bereits 1494 von der Bildung von Interessetafeln spricht.

Tararechnung.

Das Wort Tara gleichen Stammes mit dem westarabischen tarh = Subtraktion (von taraha = wegwerfen).

Die Aufgabenbehandlung zuerst im Bamberger Rechenbuch von 1483, dann in Widmanns Rechenbuch 1489.

Wechselrechnung.

Wechselbriefe im VII Saec. durch vertriebene Juden aus Frankreich nach der Lombardei gebracht, von hier aus nach Antwerpen durch politische Flüchtlinge. In Nürnberg zuerst 1445.

Wechselrechnung, Unterweisung in doppelter Buchführung zuerst bei Luca Paciuolo, 1494, *summa*.

Ältestes ausführliches Lehrbuch: 1732, Chr. v. Clausberg, *demonstrative Rechenkunst*. Hierselbst auch erstmalig das Wort Arbitrage.

Gesellschaftsrechnung.

Das Auftreten dieser sehr vielseitigen Aufgabenarten ist sehr alt; einige finden sich schon im altägyptischen Rechenbuch des Ahmes (Papyrus Rhind, XX—XVII Saec. a.), bei Archimedes, Kronenrechnung (287—212 a., Syrakus), bei den Römern in ihren Erbteilungsaufgaben, im altindischen Rechenbuch von Bakhshali (III—IV Saec. p.), bei den Arabern, in dem chinesischen Werk '*Neun Abschnitte der Tsin kiu tschau*' (um 1240 p.), bei Alcuin (736—804 p.), Leonardo Pisano (1202), Bamberger Rechenbuch 1483, Luca Paciuolo (1494) u. a.

Mischungsrechnung.

Die ersten Aufgaben finden sich bei den Indern, dann bei den Arabern, ferner auch in den '*Neun Abschnitten der Tsin kiu tschau* (um 1240 p.).

Legierungsaufgaben zuerst: 1202, Leonardo Pisano, *liber abaci*, Abschn. 11.

Algebra.

Geschichtlicher Überblick.

Älteste sehr geringe Spuren finden sich bei den Ägyptern. Bei den Griechen wandte sich das Interesse der Mathematiker der Algebra weniger als der Geometrie zu. Ziemlich unvermittelt — vielleicht nur infolge mangelhafter Überlieferung — erscheint Diophants grofses Werk (um 275 p.) [mit einer schon hoch ausgebildeten

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Algebra. Griechische Kenntnisse gelangen nach Indien und finden dort günstigsten Boden zur Weiterentwicklung (Aryabhatta um 500 p., Brahmagupta VII Saec. p. u. a.). Aus griechischen und indischen Quellen schöpfen die Araber (VIII—XI Saec.). Die Werke der letzteren werden im XII Saec. in lateinischen Übersetzungen ins Abendland gebracht und rufen hier im XIII—XV Saec. durch Leonardo Pisano (1202, *liber abaci*) eine kaufmännische, durch Jordanus Nemorarius († 1236) eine geistliche Schule hervor. Nach ihrer Vereinigung im XV Saec. beginnt im XVI Saec. (Vieta, 1591, *Isagoge*) der Aufschwung zur jetzigen Blüte.

Das Wort Algebra ist aus dem Titel eines Lehrbuches des Muhammed ibn Musa Alchvarizmi (um 820, Bagdad, Damaskus): *Aldschebr w Almukabala* (lat. *Algebra et Almucabala*) allmählich entstanden. [Aldschebr bedeutet bei der Behandlung der Gleichungen das Hinüberbringen negativer Gröfsen auf die andere Seite, Almucabala das Zusammenziehen gleichartiger Gröfsen.]

Beide Namen treten auf im XII Saec., im XIV Saec. beginnt das Wort Algebra allein aufzutreten, vom XV Saec. wird das zweite Wort selten; zum letzten Mal erscheint es 1577 in einem Werke von Gosselin.

Das Adjektivum algebraticus zuerst: 1494, Luca Paciuolo, *summa*.

Stufen der algebraischen Ausdrucksweise:

I. Rhetorische Algebra, Wortrechnung ohne Zeichen: Griechen (aufser Diophant), Ostaraber, älteste italienische Schule (einschl. Regiomontan).

II. Synkopierte Algebra, Wortrechnung mit Abbreviaturen für oft wiederkehrende Wörter: Diophant, Westaraber, spätere Europäer bis zum XVII Saec.

III. Symbolische Algebra, reine Buchstabenrechnung ohne Text: Indische Mathematiker, Europäer vom XVII Saec. an.

Einführung der Buchstabengröfsen.

Allgemeine Buchstabengröfsen sind vereinzelt im Altertum nachzuweisen: so bezeichnet schon Aristoteles (Stagira, 384 — Chalkis, 322 a.) unbekannte Gröfsen mit Buchstaben; Apollonius (zw. 250 u. 200, Alexandria) spricht an einer Stelle von einer $\varkappa$-fachen Myriade. Derselbe bezeichnet, wie Euclid (um 300 a., Alexandria), Zahlengröfsen mit Buchstaben zu geometrischer Veranschaulichung, letztere läfst Pappus (um 295 p., Alexandria) bereits fallen. Ein beliebiges Vielfache benutzt Diophant (II 8) (um 225 p.). Bei Leonardo Pisano, 1202, liber abaci, treten Regeldetriaufgaben mit Buchstabengröfsen auf. Umfangreiche Verwendung von Buchstabengröfsen bei Jordanus Nemorarius († 1237) in seiner *Arithmetik* (doch noch ohne ausreichende Operationszeichen, so dafs im Laufe der Rechnung immer neue Buchstaben eingeführt werden müssen).

Den Hauptschritt that Vieta, 1591, *Isagoge*, indem er die unbekannten Gröfsen durch Vokale, die bekannten durch Konsonanten bezeichnete. Die von Vieta gewählten grofsen Buchstaben ersetzte Harriot (Oxford 1560 — London 1621) durch kleine. Descartes (1637, *Géometrie*) führt für die bekannten Gröfsen a, b . . ., für die Unbekannten x, y, z ein.

Die Unbekannte x: Die erste Potenz der Unbekannten hiefs im Mittelalter causa (= coss) oder *r*adix, dargestellt schon seit Mitte des XV Saec. durch ein ver-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

schnörkeltes r, dessen Gestalt sich kaum von x unterschied. Wallis soll es zuerst mit dem Namen x bezeichnet haben.

Buchstaben mit Indices führte Leibniz ein, zuerst 1676, *compendium quadraturae arithmeticae.*

Formeln treten erst seit Vieta (1540—1603, Hugenott) auf; bis zu dieser Zeit gab es nur Wortregeln.

Erstes Auftreten der Algebra auf deutschem Boden in einem aus dem Jahre 1461 stammenden Bruchstück eines Auszuges aus der Algebra des Mohammed ben Musa.

Moderne Operationszeichen.

Addition: Das Zeichen + tritt zum ersten Mal auf: 1489, Joh. Widmann von Eger, Rechenbuch; wahrscheinlich damals schon längere Zeit in Deutschland gebräuchlich, während in Italien noch viel später $\overline{p}$, bez. für $-\overline{m}$ gebraucht wurden. — Nach einer neueren Erklärung ist das Pluszeichen auf ein Compendium für et zurückzuführen, wie es in Schriften vom XIV und XV Saec. nachzuweisen ist.

Subtraktion: Das Zeichen — zum ersten Mal 1489 Joh. Widmann von Eger, Rechenbuch. Vielleicht eine Art Compendium für den griechischen ὀβελός, der in der Prosodie beim Wegfallen eines Verses zur Andeutung des Ausfalles benutzt wurde (Alexandriner, Sueton, Isidorus).

Multiplikation: Das Zeichen × zuerst bei William Oughtred (1574—1660), entstanden aus einer Hülfslinienanordnung bei der komplementären Multiplikation.

Der Multiplikationspunkt ist eingeführt durch Leibniz, 1676, *Compendium quadraturae arithmeticae*, und Christian Wolf (1679—1754).

Multiplikation ohne Zeichen findet sich schon bei Leonardo Pisano, 1202, *liber abaci*, dann bei Girard, 1629, *Invention nouvelle en l'algèbre.*

Division: Der Doppelpunkt erstmalig bei Leibniz 1684 *Nova methodus*, der Bruchstrich zuerst bei Vieta, 1591, *Isagoge.*

Potenzierung: a^3, a^4 . . mit positiven ganzen Zahlen im Exponent zuerst bei Descartes (1596—1649); doch schreibt Descartes, wie auch noch Gaufs, aa statt a^2, da hier keine Abkürzung vorliege.

Allgemeine, negative und gebrochene Exponenten in unserer Schreibart zuerst bei Leibniz (1646—1716).

Radizierung: Ein Wurzelhaken tritt auf in der *Coss* von Rudolff 1525, verallgemeinert durch exponentenartiges Beifügen der mittelalterlichen Potenzbezeichnungen bei Stifel, 1544, *arithmetica integra.* — Zifferexponenten fügte zuerst bei: Simon Stevin (1548 bis 1620, Holland), Wurzelzeichen mit übergesetztem Exponenten zuerst bei Alb. Girard, 1629, *Invention nouvelle en l'algèbre.* — Wurzelhaken mit verlängertem Strich: Descartes, 1637, *Geometrie.*

Das Zeichen der imaginären Einheit $i = \sqrt{-1}$ durch Gaufs eingeführt.

Das Gleichheitszeichen = erstmalig bei Robert Recorde, 1556, *the Whetstone of witte.*

Die Ungleichheitszeichen > und < zuerst bei Harriot, 1631, *artes analyticae praxis.*

Klammern: Albert Girard, 1629, *Invention nouvelle en l'algèbre.*

Das Summenzeichen Σ geht auf Euler zurück, 1755, *Differentialrechnung.*

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Das Differenzenzeichen Δ rührt her von Joh. Bernoulli, 1706, Abhdlg. der Académie d. Sc.; im modernen Sinne jedoch erst von Euler benutzt.

Das Zeichen n! für $n(n-1)\ldots 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ führt ein: Kramp 1808, *Elements d'Arithmétique universelle.*

Ein Funktionszeichen f(x) wendet zuerst an Euler 1734/35, *comm. acad. Petrop.*, ihm folgt Clairant 1734, *acad. d. sciences.*

Das Unendlichkeitszeichen ∞ erscheint erstmalig bei John Wallis 1655, *Arithm. infinitorum prop. 5.*

Entwicklung des Zahlbegriffes.

Die Zahl 1 wird in der pythagoreischen Schule und von allen, die aus den Schriftwerken derselben schöpfen, nicht als Zahl, sondern nur als Ursprung der Zahlen aufgefafst so Theon von Smyrna (um 130 p.), Boethius (Rom 480 — Pavia 524), Mohammed ibn Musa (um 820 p., Bagdad, Damaskus), Psellus (um 1092, Griechenland).

Die Zahl 0 ist weder bei Ägyptern und Babyloniern noch bei den Griechen eine Zahl. In den ptolemäischen Sehnentafeln tritt, wenn Minuten fehlen, ein Nullzeichen ($\bar{0}$) auf, welches jedoch nur als Abkürzung von *οὐδέν* aufzufassen ist. Eine Null als Gleichungslösung wird z. B. von Diophant nicht geduldet, ebenso bis tief in das XVII. Saec. hinein (Chuquet 1484, Paciuolo 1494, Ghetaldi 1630). Die Inder hingegen rechneten mit der Null selbst in Fällen wie $\frac{a}{0}$.

Das Unendliche.

Der Begriff des Unendlichen wurde zuerst in der Akademie Platons (IV. Saec. a.) einer Untersuchung unterzogen. — Eine Erweiterung des Zahlensystems auf sehr grofse Zahlen giebt Archimedes (287—212 a., Syrakus) in seiner Sandrechnung, ihm ähnlich die Inder (vgl. S. 6).

Der Begriff des Unendlichkleinen liegt in der sog. Exhaustionsmethode der Alten, die in der platonischen Schule entstanden, von Eudoxus von Knidos (408—355 a.) wiederholt benutzt, von Archimedes mit gröfster Gewandheit angewendet wurde.

Unterschied zwischen 'transfinit' und 'infinit' bei Bradwardinus (1290—1349, England), *tractatus de continuo.*

Der Begriff des unendlich fernen Punktes eingeführt durch Desargues, 1639.

Unendlichkeitsbetrachtungen zur Ausführung von Quadraturen und Cubaturen zuerst von Kepler, 1615, *stereometria doliorum*, dann Cavalieri, 1635, *geometria.*

Infinitesimalrechnung begründet von Newton (1642—1717, England) und Leibniz (1646—1716).

Die gebrochenen Zahlen.

Die griechische Algebra erkannte nur ganze Zahlen an. Brüche treten nur in Gestalt von Verhältnissen ganzer Zahlen auf. Irrationalitäten wurden durch Ungleichungen zwischen ganzzahlige Verhältnisse als immer mehr zu nähernde Grenzen gebracht. Diophant (um 275 p., Alexandria) erkannte zuerst den Bruch als Zahl an, dann ähnlich die Inder.

Die irrationalen Zahlen.

Das Wort 'irrational' tritt zuerst auf bei Bradwardinus (1290—1349, England), *geometria speculativa.*

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Der Gegensatz 'rational-irrational' erstmalig bei Nicole Oresme (1320—1382, Bischof von Lisieux), *tractatus proportionum.*

Der Begriff des Irrationalen findet sich zuerst bei Pythagoras (580—501 a., Unteritalien). Die Lehre vom Irrationalen wurde besonders von Theätet (um 390 a., Heraklea) ausgebildet, überliefert von Euclid (um 300 a., Alexandria) in den *Elementen lib. X.* Auf dieser Grundlage arbeiteten im Mittelalter weiter: Luca Paciuolo, 1494, *summa,* in erster Reihe M. Stifel, 1544, *Arithmetica integra.*

Die Möglichkeit ihrer Anerkennung als wirkliche Zahlen giebt Johannes Müller, Regiomontanus (Königsberg i. Franken, 1436 — Rom, 1476) durch einen neuen Gröfsenbegriff. Vollendet ist die Theorie der irrationalen Zahlen erst in neuester Zeit.

Die negativen Zahlen.

Das Wort 'negativ' findet sich zuerst in einer Göttinger Algebrahandschrift, die dem 1574 gestorbenen Stephan Brechtel gehörte (hier affirmativ-negativ). Im Druck zuerst bei Petrus Ramus, 1569, *Scholae mathematicae.*

Das Wort 'affirmativ' von Vieta (1540—1603, Hugenott) eingeführt. Diophant (um 275 p., Alexandria) rechnete zwar mit „hinzuzufügenden" und „abzüglichen" Zahlen, aber nur bei Differenzen mit positivem Ergebnis.

Rein negative Zahlen treten zuerst bei den Indern auf (Rechenbuch von Bakhshali, III.—IV. Saec. p., u. später), erläutert durch den Gegensatz von Vermögen und Schulden und dem der Richtung. Wiederaufnahme der Richtungserklärung erst durch Alb. Girard 1629, *Invention.* — Negative Lösung einer Gleichung werden jedoch durch die Inder ebensowenig anerkannt, wie bis ins XVII. Saec. hinein (z. B. Vieta, 1540—1603; Harriot, 1560—1621).

Mit rein negativen Zahlen rechnet zuerst Joh. Widmann von Eger, 1489, Rechenbuch.

Negative Gleichungslösungen werden zuerst anerkannt in einer anonymen Aufgabensammlung vom Ende des XV. Saec., dann von Cardano, 1539, *Practica arithmetica* (Italien), Mich. Stifel, 1544, *arithmetica integra.*

Wallis (1616—1703, Oxford) hält negative Zahlen noch für gröfser als ∞.

Endgültige Anerkennung der negativen Zahlen durch Alb. Girard, 1629, *invention nouvelle en l'algèbre*; vor allem durch Descartes, 1637, *Geometrie,* der ihre geometrische Darstellbarkeit zeigte.

Die komplexen Zahlen.

Die Wörter 'reell-imaginär' zuerst bei Descartes, 1637, *Geometrie.*

Das Wort 'komplex' von Cauchy (1787—1857, Paris) eingeführt.

Das Wort 'Modul' für $\sqrt{a^2+b^2}$ bei $a+bi$ rührt von Argand, 1814, her. —

Die erste historisch festgestellte imaginäre Wurzel tritt bei Hero (um 110 a., Alexandria) auf. Derselbe rechnet mit Vernachlässigung des Vorzeichens im Radikanden falsch weiter.

Der Inder Bhâskara (geb. 1114 p.) kennt die Unmöglichkeit von $\sqrt[2]{-a}$. Cardano (Italien) bezeichnet noch in seiner *Practica arithmetica* (1539) imaginäre Wurzeln als unmöglich, in seiner *ars magna* (1545) rechnet er, als der erste, bereits formal mit solchen Wurzeln. Ähnlich Bombelli, 1579, *L'algebra.*

Alb. Girard, 1629 (*Invention nouvelle*), kennt das Auftreten imaginärer Wurzeln bei

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Gleichungen und spricht allgemein aus, dafs die Gleichung n^{ten} Grades n Wurzeln besitze. Descartes (1637, *Geometrie*) erkennt imaginäre Lösungen an, doch „gäbe es für sie inzwischen keine Gröfse, welche unserer Vorstellung entspricht". Der nunmehr zu immer gröfserem Umfange anwachsenden Verwendung der imaginären Gröfsen giebt Gaufs (1799, 1831) die notwendige Grundlage.

Versinnbildlichung imaginärer Gröfsen, zuerst versucht von Heinrich Kühn, *comm. acad. Petrop.* 1750/51; erste befriedigende Darstellung von Argand, 1806, wiederholt von Français, 1813, zur Anerkennung gebracht durch Gaufs, 1831.

Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division.

Das algebraische Rechnen wurde von den Griechen durch geometrische Konstruktionen ersetzt. Rein algebraisches Rechnen zuerst bei Diophant (um 275 p., Alexandria), dann bei den Indern.

Addition, Subtraktion, Multiplikation algebraischer Summen zuerst bei Diophant (um 275 p., Alexandria), *ἀριθμητικῶν βιβλία.*

Additions- und Subtraktionsregeln positiver und negativer Zahlen erscheinen zuerst bei Luca Paciuolo, 1494, *summa.*

Multiplikationsregeln giebt, als der erste, Diophant (um 275 p., Alexandria): *λεῖψις ἐπὶ λεῖψιν πολλαπλασιασθεῖσα ποιεῖ ὕπαρξιν, λεῖψις δὲ ἐπὶ ὕπαρξιν ποιεῖ λεῖψιν*; ähnliche Regeln bei Luca Paciuolo, 1494. Die kurzgefafste Zeichenregel $+\cdot+=+$ u. s. w. zuerst in einer Wiener Handschrift von 1520, *Regulae cosae vel Algebrae*, übernommen in Rudolffs *Cofs* (1525).

Divisionsregeln positiver und negativer Zahlen bei Luca Paciuolo, 1494, *summa.*

Die Division algebraischer Summen zusammengestellt in Wallis *Algebra*, 1685.

Die Division $\frac{1}{1+a}$ zu einer unendlichen Reihe zuerst von Nicolaus Mercator, 1668, *Logarithmotechnica.*

Betonung des Ordnens vor Beginn der Division in Newtons Vorlesungen *arithmetica universalis* (1707 v. Whiston herausgegeben).

Die Divisionsaufgabe $(a^3 - b^3) : (a - b)$ ist Diophant (um 295 p., Alexandria) bereits bekannt; die allgemeine Formel $(a^n - b^n) : (a - b)$ kennt Tartaglia, 1556, *General trattato.*

Den gröfsten gemeinsamen Teiler zweier algebraischen Summen sucht zuerst Simon Stevin (1585), *l'Arithmétique.*

Potenzierung.

Das Wort Potenz (Übersetzung des griechischen *δύναμις*, womit Hippocrates von Chios (um 440 a.) das Quadrat einer Gröfse bezeichnete) erscheint zuerst bei Bombelli, 1572, *l'Algebra* für das Quadrat der Unbekannten; schon bei Simon Stevin (1585, *l'Arithmétique*) findet sich die Erweiterung „potence cubique".

Das Wort Exponent findet sich zuerst bei Michael Stifel, 1544, *arithmetica integra*, dann bei Dechales, 1674, *mundus mathematicus.*

Für die Potenzen der Unbekannten bildeten sich zunächst nur Kunstausdrücke

Diophant: $x = \dot{\alpha}\rho\iota\vartheta\mu\acute{o}\varsigma$, $x^2 = \delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu\iota\varsigma$, $x^3 = \kappa\acute{\upsilon}\beta o\varsigma$, $x^4 = \delta\upsilon\nu\alpha\mu o\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu\iota\varsigma$, $x^5 = \delta\upsilon\nu\alpha\mu o\kappa\acute{\upsilon}\beta o\varsigma$

Muhammed.: x = schai (Sache) oder dschidr (Wurzel), x^2 = mâl (Vermögen) u. s. w.

Lat. übers.: x = res oder radix, x^2 = census

Italienisch: x = cosa (deutsch cofs), x^2 = censo.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Erweiterung über die 5. Potenz fand nur sehr allmählich statt, zuerst bei Luca Paciuolo, 1494, *summa*; exponentartige Bezeichnungen benutzte zuerst Bombelli, 1572, *l'Algebra.*

Die Moderne Bezeichnung rührt her von Descartes und Leibniz.

Potenzformeln (nicht in moderner Form) entwickelt zuerst Nicole Oresme (1320—1382, Normandie), *tractatus proportionum.*

Die Lehre von den Potenzen wurde in der mittelalterlichen Cofs ausgebildet.

$(a \pm b)^2$ bei den Griechen geometrisch, bei den Indern algebraisch zuerst abgeleitet.

$(a \pm b)^3$ von den Indern zum Kubikwurzelziehen benutzt (vgl. binomischer Lehrsatz).

Exponent Null für eine konstante Zahl erstmalig bei Simon Stevin, 1585, *L'arithmetique.*

Negative Exponenten zuerst benutzt von Nicolas Chuquet (um 1484, Paris, *Le Triparty*) (doch hier 7^{-1} noch in der Bedeutung $\frac{1}{7x}$) und Wallis, 1655, *arithmetica infinitorum.*

Gebrochene Exponenten: 1. Nicole Oresme (1320—1382, Normandie), *tractatus proportionum*; 2. Simon Stevin, 1585, *L'arithmetique.*

Definitive Einführung negativer und gebrochener Exponenten durch Newton (1642—1727, London).

Imaginäre Potenzexponenten bei Euler, 1746.

Radizierung.

Das Wort Wurzel: griechisch ῥίζη, zuerst bei Nicomachus von Gerasa (um 100 p.); indisch mûla (ebenfalls mit zweifacher Bedeutung) bei Aryabhatta (geb. 476 p.), ähnlich arabisch dschidr. Letzteres von Johannes v. Sevilla (um 1140) mit radix übersetzt.

Das deutsche Wort: Wurtz zuerst 1461 in einer deutschen Algebra.

Das Rechnen mit Wurzelgröfsen in geometrischem Gewande bei den Griechen, Euclid, *Elemente X*; jedoch treten nur solche Irrationalitäten auf, die mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind.

Der Beweis, dafs $\sqrt[2]{a}$ kein Bruch sein kann, zuerst bei Eutokius von Askalon (geb. 480 p.).

Die Doppeldeutigkeit der Quadratwurzel erkannte zuerst Bhâskara (Indien, geb. 1114 p.).

Ein (uns unbekanntes) Verfahren, Quadratwurzeln zu ziehen, hat es seit Platons Zeiten gegeben; vgl. die sehr genauen Werke in Archimedes' Kreismessung, die vielleicht auf die Umgleichung $a \pm \frac{r}{2a} > \sqrt{a^2 + r} > a \pm \frac{r}{2a \pm 1}$, zurückzuführen sind, welche bei den Arabern benutzt wurde. Für die Heronsche Werte ist neuerdings die Anwendung dieser Formel nachgewiesen.

Das moderne Verfahren findet sich (nur mit Sexagesimalbrüchen) bei Theon von Smyrna (um 130 p.). Bei den Indern gehört das Quadrat- und Kubikwurzelziehen (mit Hülfe von $(a + b)^2$ und $(a + b)^3$) zu den elementaren Rechenoperationen. Aryabhatta (Indien, 476 p. geb.) schreibt das Einteilen des Radikanden in Fächer zu je 2 (bezw. 3) vor. Bei Rainer Gemma-Frisius (1540, in einem lateinisch verfafsten Lehrbuch) ist unser Verfahren, auch schematisch beinahe ebenso, angewendet. Im Mittelalter wird die

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Anwendung der Formeln $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{1}{b \cdot c}\sqrt{a \cdot b \cdot c^2}$ und $\sqrt{a} = \frac{1}{b}\sqrt{a b^2}$ empfohlen. (Von Regiomontan aufgestellt und bewiesen zugleich mit der Formel $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{a \cdot c}{\sqrt{a b c^2}}$.)

Quadratwurzeln aus algebraischen Summen bei Rob. Recorde (1510—1558) und bei M. Stifel, 1553, *Neuausgabe der Rudolffschen Coſs.*

$\sqrt[2]{1 - x^2}$ zur Erzielung einer unendlichen Reihe zuerst von Newton ausgerechnet (1676, Brief an Oldenburg).

Für die Kubikwurzel müssen die Griechen auch ein angenähertes Verfahren besessen haben. Für die Heronschen Wurzeln ist ein Verfahren neuerdings aufgefunden worden: wenn $A = p^3 - a = q^3 + b$, so ist $\sqrt[3]{A} = q + \frac{b \cdot \sqrt{a}}{A + b \cdot \sqrt{a}}$.

Das moderne Verfahren für $\sqrt[3]{a}$ findet sich zuerst in dem deutschen Rechenbuch des Apianus, 1537.

Das Ausziehen höherer Wurzeln lehrte der Araber Omar Alchaijami († 1123, Melikschah) mit Hilfe der Binomialentwicklung $(a + b)^n$. Ebenso Vieta, 1591, *Isagoge.*

Daſs $\sqrt[n]{n}$ n verschiedene Werte hat, lehrt zuerst Rolle, 1690, *Traité d'algèbre.*

Die Werte von $\sqrt[3]{1}$ berechnete zuerst John Colson, 1707.

Anleitung zum formalen Rechnen mit irrationalen Wurzeln giebt zuerst Rudolff, 1524, *Coſs*, dann besonders Stifel, 1544, *arithmetica integra.*

Formeln für das Rechnen mit Wurzeln in einer eigenartigen Potenzbezeichnung mit gebrochenem Exponenten giebt Nicole Oresme (1323—1382, Normandie), *tractatus proportionum.*

Das Rationalmachen von Brüchen von der Form $\frac{a}{\sqrt{b}}$, $\frac{a}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}$ zuerst gelehrt von Bhâskara (Indien, geb. 1114 p.). Derselbe kennt auch die Formel $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$ und das Beispiel:

$$\sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}.$$

Das Rationalmachen eines Bruches $\frac{a}{b - \sqrt[3]{c}}$ mit der Formel $(b - \sqrt[3]{c}) \cdot \left(b + \sqrt[3]{c} + \sqrt[3]{\frac{a^2}{b^3}}\right)$ führt Cardano auf Gabriel de Aratoribus (XIV. Saec.) aus Mailand zurück.

Allgemeine Regeln für das Rationalmachen von Brüchen giebt Tartaglia 1556, *General trattato.*

Proportionen.

Die Lehre von den Proportionen, deren Anfänge auf Babylon weisen, ist begründet durch Pythagoras und seine Schüler (VI. Saec. a., Unteritalien). Sie kannten das arithmetische, geometrische und harmonische Mittel (nach Jamblichus). Hoch ausgebildet wurde die Lehre von Archytas von Tarent (430—365 a.) und besonders von

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Eudoxus v. Knidos (408—355 a.). Auf Grund der erhaltenen Ergebnisse leitet Euclid (um 100 a., Alexandria) die Proportionslehre in seinen *Elementen lib. V* geometrisch ab, im *7. Buch* überträgt er sie auf das Zahlengebiet. Die geometrischen Proportionen mit 4 Gröfsen ersetzen den Griechen bis zu einem gewissen Grade die Gleichungen.

Besonderes: Aus $a : b = c : d$ folgt $ad = bc$ *Eucl. VI S. 16* (geom.), *VII S. 19* (arithm.). Der Satz, dafs zwischen 2 Quadratzahlen eine mittlere Proportionale, zwischen 2 Kubikzahlen zwei mittlere Proportionalen einzuschalten sind, wird dem Platon (429—348 Athen) zugeschrieben (Eucl. *VIII 11. 12*). Die Umstellungen von $a : b = c : d$, wie die abgeleiteten Formeln: $\frac{a \pm c}{b \pm d} = \frac{a}{b}$, $\frac{a \pm b}{c \pm d} = \frac{a}{c}$ und die entsprechenden für fortlaufende Proportionen werden dem Eudoxus von Knidos (408—355 a.) zugeschrieben.

Der Satz von der mittleren Proportionalen findet sich zuerst *Euclid VI 17* geometrisch, *VII 20* arithmetisch.

Eine symbolische Form für die Proportion tritt zum ersten Mal auf bei dem Araber Alkalsadi († 1486, Spanien). Die moderne Form entstand aus der Schreibweise $a \cdot b :: c \cdot d$ des William Oughtred (1574—1660), worin später Doppelpunkt und Gleichheitszeichen auftraten.

Gleichungen.

Das Wort Wurzel (radix) in erweiterter Bedeutung zuerst in der Arithmetik des Boethius (480—524 p., Rom, Pavia).

Das Wort Koeffizient zuerst von Vieta 1591, *Isagoge*, gebraucht.

Die Bezeichnung „Grad einer Gleichung“, geht auf Descartes, 1637, *Geometrie* zurück.

Der Begriff der gegebenen und der unbekannten Gröfse und Aufstellung entsprechender Kunstwörter findet sich zuerst in der pythagoräischen Schule (VI.—IV. Saec. a.) (z. B. Thymaridas, um 390 a.).

Buchstabenkoeffizienten wurden durch Vieta 1591, *Isagoge*, eingeführt.

x, y, z als Unbekannte, a, b, c als Konstante von Descartes 1637, *Geometrie*, zuerst benutzt.

Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten.

Ältestes Auftreten derselben im altägyptischen Rechenbuch des Ahmes (Papyrus Rhind, XX.—XVIII. Saec. a.)

Algebraische Behandlung der Gleichungen zuerst bei Diophant (um 275 p., Alexandria); Transposition auf die Form $ax = b$, woraus $x = \frac{b}{a}$. Diese Grundoperation ging auch bei den Indern vorauf (vgl. Bhaskara, *Vija ganita T. 4.*). Aus beiden Quellen schöpften die Araber; so gebraucht Mohammed ben Musa diese Reduktion unter dem Namen Aldschebra w Almukabala (vgl. S. 15).

Eine andere Lösungsmethode mit Hülfe der regula falsi ist rein indischen Ursprungs, von den Arabern zuerst weiter ausgebildet.

Erste Erwähnung der Gleichungen in Deutschland, 1461 in einem Bruchstücke eines Auszuges der Algebra des Mohammed ibn Musa.

Ausführlichere Behandlung der Gleichungen in Widmanns Rechenbuch 1489.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Das Rationalmachen einer Gleichung, falls Irrationalitäten auftreten, zeigt zuerst Nic. Chuquet (um 1484, Paris, *Le Triparty*).

Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten.

Diophant hatte nur ein Zeichen für die Unbekannte; er wufste sich in dem Falle mehrerer Unbekannten durch geschickte Substitutionen oder durch Zwischengleichungen zu helfen. Die Inder unterschieden verschiedene Unbekannte durch die Farbe. Verschiedenartig benannte Unbekannte benutzte zuerst Alkarchi (um 1010, Bagdad), in weiterer Ausdehnung dann Stifel, 1544, *arithmetica integra*.

Die Kombinations- und Substitutionsmethode lehrt zuerst Newton in der *Arithmetica universalis* (Vorlesungen Newtons, 1707, herausgegeben von Whiston).

Durch Addieren sucht Maclaurin (1748 Algebra) Gleichungen mit mehreren Unbekannten zu lösen.

Um den Zusammenhang der Koeffizienten in den Lösungen, den Maclaurin z. Teil schon erkannt hatte, besser zu übersehen, führt Leibniz doppelte Indices ein, (1676, *Compendium quadraturae arithmeticae*) und giebt damit den Anstofs zur Determinantentheorie.

Die Gleichungsauflösung mit Determinanten (abgesehen von Namen und schriftlicher Anordnung) zuerst angegeben von Gabriel Cramer (1750, *Introduction*).

Das Wort Determinante rührt von Cauchy (1789—1857, Paris) her.

Eingekleidete Gleichungen.

Das Auftreten von Gleichungen überhaupt geht auf Wortaufgaben zurück. Abstrakte Gleichungen werden erst spät betrachtet.

Beispiele: Brunnenaufgabe zuerst bei Hero (um 110 a., Alexandria), Courieraufgabe zuerst bei Arryabhatta (Indien, geb. 476 p.) u. a.

Am meisten ausgebildet bei den Indern.

Die Behandlung geometrischer Aufgaben durch Gleichungen geht in erster Reihe auf die Araber zurück, besonders: Abul Dschud (um 1050 p.). Eine grofse Mannigfaltigkeit dieser Aufgaben giebt Leonardo Pisano (1202, *liber abaci*), Widmann, (1489, Rechenbuch), Regiomontanus, Luca Paciuolo.

Gleichungen zweiten Grades.

Die älteste Lösung der quadratischen Gleichung ist bei den Griechen zu finden, und zwar zunächst eine solche geometrischer Art.

Fall I: $x^2 = px + q$ $(p > 0,\ q > 0)$ ist geometrisch gelöst: Euclid (um 300 a., Alexandria), *Data*, *S. 84*, *85*.

Fall II: $x^2 + px = q$ und III: $x^2 + q = px$, *Euelid Elem. VI 28*, *29*.

Fall IV: $x^2 + px + q = 0$ wird, da er imaginäre Werte liefert, erst im XVII. Saec. genau betrachtet (Albert Girard, 1629, *Nouvelle Invention*). Die Unmöglichkeit, ihn zu lösen, kannte bereits der Inder Bhaskara (geb. 1114 p.).

Eine einfach-rechnerische Lösung von Zahlengleichungen II. Grades müssen die Griechen ebenfalls besessen haben, wenn auch keine allgemeine Lösungsmethode uns erhalten ist. — Arabischen Autoren zufolge soll Hipparch (180—125, Rhodus, Alexandria) über quadratische Gleichungen geschrieben haben, die er bei Anfertigung seiner Sehnentafel oft hat anwenden müssen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die älteste, numerische Lösung einer quadratischen Gleichung (ohne Ableitung) findet sich bei Hero (110 a., Alexandria), Lehrbuch für Feldmesser, in moderner Weise rekonstruiert: $ax^2 + bx = c$ liefert $x = \frac{\sqrt{ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}}{a}$.

In Diophants ἀριθμητικῶν βιβλία 6 (um 275 p., Alexandria) werden folgende Fälle unterschieden und zahlenmäfsig gelöst

I. $ax + b = cx$ Beispiel lib. IV 33, 45
II. $ax^2 + bx = c$ „ lib. VI 6.
III. $ax^2 + b = cx$ „ lib. VI 24.

Die Stelle des Diophantischen Werkes, welche die allgemeine Lösung giebt, ist verloren gegangen. Wahrscheinlich ist die Auffindung der arithmetischen Lösung bei den Griechen so vor sich gegangen, dafs sie die ihnen bekannte geometrische Konstruktion in die Sprache der Algebra umsetzten.

Die Vereinigung der 3 Fälle zu einer Normalform geschah bei den Indern (Aryabhatta geb. 476, Brahmagupta geb. 598, Cridhara VII.—IX. Saec.), da sie mit negativen Gröfsen rechnen konnten. Im Mittelalter geschah diese Reduktion auf eine Grundförm erst wieder durch Stifel (1544, *Arithmetica integra*).

Die Existenz zweier Lösungen kannte — im Gegensatz zu den Griechen, die stets nur einen positiven Wert kannten — der Inder Bhaskara (geb. 1114 p.), wenn er auch zwei Lösungen nur dann zuliefs, falls sie beide positiv und beim Rechnen ein Durchgang durch das Negative vermieden wird.

Geometrische Beweise für die 3 Diophantischen Lösungen giebt Muhammed ibn Musa Alchwarizmi (um 820 p., Bagdad, Damaskus) und Omar Alkhayami († 1123, Nissabur).

Die 3 Lösungsformeln in Versen in einer arabischen Abhandlung, übersetzt von Gerhard v. Cremona (1114—1187).

Gleichungen nach der Form $ax^{2p} + bx^p = c$; $ax^{2p} + b = cx^p$; $ax^p + b = cx^{2p}$ betrachtete zuerst der Araber Alkarchi (um 1010, Bagdad).

Dafs bei $x + px + q = 0$: $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$, lehrte zuerst Vieta, 1591, *Isagoge*.

Die negativen Wurzeln berücksichtigt zuerst Cardano 1543.

Geometrische Lösung: Mollweide, 1810.

Reciproke Gleichungen:

Euler, 1732, *comm. acad. Petrop. 1732/33.*

Quadratische Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

Eine ganz Zahl dieser Aufgaben löste bereits Diophant (um 275, Alexandria); ferner findet sich eine reiche Auswahl bei Jordanus Nemorarius († 1236), *de numeris datis*, Luca Paciuolo, 1494, *summa* u. a.

Gleichungen dritten Grades.

Veranlassung zur ersten kubischen Gleichung gab die Aufgabe der Würfelverdoppelung ($x^3 = 2a^3$), welche bereits zur Zeit des Euripides (480—406 a.) ein allgemein bekanntes Problem war. Es wurde eine ganze Anzahl von Lösungen gefunden, die teils auf Bewegungsgeometrie, wie die des Plato (Athen, 429—348 a.), Eratosthenes (276—194 a., Alexandria), Hero (um 110 a., Alexandria), teils auf Kegelschnitte, wie die des Menächmus (um 350 a.), teils auf höhere Kurven, wie die des Archytas

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

(430—365 a., Tarent), Eudoxus (408—355 a., Knidos), Nikomedes (um 180 a., Gerasa), Diocles (um 180 a.) zurückgeführt wurden.

Die zweite kubische Gleichung, die des Archimedes (287—212, Syrakus), welche bei der Aufgabe, eine Kugel durch eine Ebene in gegebenem Verhältnis zu schneiden, auftrat, soll von Archimedes selbst mit Hilfe nur einer Parabel gelöst worden sein.

Eine vollständige wissenschaftliche Behandlung der kubischen Gleichung (Einteilung, geometrische Lösungen durch Kegelschnitte mit Beweisen, die sich auf Apollonius (zw. 250 und 200 a. in Alexandria, dann Pergamum) stützen) rührt her von dem Araber Omar Alkhayami († 1123; Astronom am Hofe von Melikschah).

Die arithmetische Lösung der Gleichung dritten Grades $x^3 + px = q$ fand zwischen 1506 und 1516 Scipione del Ferro (1496—1526, Professor in Bologna) und teilte sie Bekannten mit. Veröffentlicht wurde sie durch Cardano, 1545, *Ars magna*, welcher sie von Tartaglia (1500—1557) unter dem Eide, sie nicht zu veröffentlichen, erhalten hatte. Es ist nach den übrigen Leistungen Tartaglias zweifelhaft, ob dieser die Lösung selbständig gefunden oder von einem Mitwisser der Ferroschen Lösung erhalten hat. Der vermeintliche Wortbruch des Cardano wird dadurch in ein anderes Licht gestellt, dafs Cardano, 1542, Einsicht in die Ferroschen Papiere nehmen und so konstatieren konnte, dafs Tartaglia mindestens kein Anrecht auf die Priorität hatte; aufserdem werden von ihm auch Ferro und Tartaglia als die Erfinder genannt.

Beweis der Ferroschen Formel, deren Herleitung unbekannt ist, durch Cardano auf geometrischem Wege: 1545, *Ars magna*.

Reduktion der allgemeinen Form auf die Normalform ebenfalls durch Cardano, 1545, *Ars magna*.

Andere Lösungsarten:

I. Methode von Hudde durch Substitution von $x^2 = z + z$ in $x^3 = qx + r$ und Zerfällung in zwei lösbare Gleichungen für x und z. 1658, *Epist. I de reductione aequationum*.

II. Methode von Tschirnhausen durch Substitution von $x^2 + vx + w = y$ in $x^3 + qx + q = 0$ und Reduktion auf $y^3 = c$. 1683, *acta Eruditorum Lips.*

III. Methode von Euler durch Berechnung des y aus $x = a + by + cy^2$ und $y^3 = d$ und Vergleichung des Ergebnisses mit der vorgelegten Gleichung. 1674 *comm. acad. Petrop.*

Existenz der drei Lösungen, von denen event. zwei gleich sein können, zuerst bei Cardano, 1545, *Ars magna*.

Dafs $x_1 + x_2 + x_3$ gleich dem Koeffizienten des quadratischen Gliedes ist, erstmalig bei Cardano, 1545, *Ars magna*.

Den allgemeinen Zusammenhang der Wurzeln mit den Koeffizienten deckte erst Vieta, 1591, *Isagoge* auf.

Den irreduktibelen Fall behandelte Bombelli zuerst *l'Algebra*, 1572, indem er die Ferrosche Formel durch Umformungen so veränderte, dafs die imaginären Bestandteile herausfielen.

Erste goniometrische Lösung bei Vieta, 1591, *Isagoge*. Die Formel Vietas verwandelt 1629 Girard in eine praktische Regel.

Die übliche goniometrische Lösung ist von Moivre, 1707/1722, und Eytelwein, 1824.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Gleichung vierten Grades.

Die Lösung einiger biquadratischen Gleichungen ist den Arabern auf geometrischem Wege gelungen, z. B. Abul Wafa (940—998, Bagdad), Omar Alkhayami († 1123; Astronom am Hofe von Melikschah).

Die arithmetische Lösung wurde gefunden durch den Schüler des Cardano, Ferrari (1522—1565), veröffentlicht durch Cardano, 1545, *Ars magna.* (Durch Addition von Hülfsgröfsen auf beiden Seiten der Gleichung wird jede Seite zum Quadrat gemacht.)

Methode von Descartes, 1637, Zerfällung der linken Seite von $x^4 + px^2 + qx + v = 0$ in ein Produkt von zwei quadratischen Faktoren.

Gleichungen höheren Grades.

Die Wörter: algebraische und transcendente Gleichungen zuerst bei Leibniz, 1686, *geometria recondita* (Descartes sagt dafür noch: geometrisch und mechanisch).

Ordnen der Gleichungen nach Potenzen der Unbekannten zuerst in einer lateinischen Algebra aus dem Jahre 1461, München.

Die erste auf Null gebrachte Gleichung findet sich bei Michael Stifel, 1544, *arithmetica integra*; dann bei Bürgi (um 1619), häufiger bei Descartes.

Ein angenähertes Verfahren, eine Wurzel einer beliebig hohen Gleichung zu finden giebt zuerst Vieta, 1600, *de numerosa potestatum resolutione tractatus*; mit Hülfe von Reihen: Newton, 1669, *analysis per aequationes.*

Descartessche Zeichenregel: Descartes, 1637, *Géométrie*, angedeutet bereits durch Cardano in einer nachgelassenen Schrift; erster Beweis durch de Gue, 1741, *Démonstration* († 1785, Paris).

Huddesche Regel über das Auftreten gleicher Wurzeln, 1658, mit Beweis (in einem Brief).

Division durch $(x - x_1)$, wenn x_1 eine Wurzel: zuerst bei Descartes, 1637, *géométrie.*

Der Zusammenhang einer Gleichung mit der Normalform $(x \pm a)(x \pm b)(x \pm c) \ldots$ zuerst bei Harriot (1631, *artis analyticae praxis*).

Anzahl der Wurzeln: Alb. Girard, 1629, *Invention nouvelle en l'algèbre*, spricht zuerst aus, dafs eine Gleichung soviel Wurzeln hat, wie ihr Grad angiebt. Descartes (1637) drückt sich vorsichtiger aus, eine Gleichung n^{ten} Grades könne n Wurzeln haben. Newton, *arithmetica universalis* (Vorlesungen, 1707, v. Whiston herausgegeben) fügt hinzu: „jedenfalls nicht mehr". Euler (1742) behauptet die Zerlegbarkeit in Faktoren 1. und 2. Grades mit reellen Koeffizienten. Ein Beweis glückt ihm aber ebensowenig, wie 1746 d'Alembert (*Hist. de l'acad. d. Berl.*). Einen endgültigen Beweis giebt erst Gaufs, 1799, in seiner Dissertation.

Den Zusammenhang der Koeffizienten mit den Wurzeln kennt für die Gleichung 3. Grades z. Teil Cardano, für höhere Gleichungen Vieta (1591, *recognitio*). Den vollständigen Zusammenhang (auch bei Gleichungen mit imaginären Wurzeln) zeigt Alb. Girard, 1629, *Invention.*

Unauflösbarkeit der Gleichungen von höherem als dem 4. Grade mit algebraischen Gröfsen wird von Leibniz (um 1683) bereits behauptet, von Abel (1824) bewiesen.

Unbestimmte Gleichungen.

Erstes Auftreten unbestimmter Analytik bereits vor Diophant z. B. Rinderproblem des Archimedes.

Diophant (um 275 p., Alexandria) verlangt bei der Lösung einer Gleichung mit zwei

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Unbekannten keineswegs ganzzahlige Lösungen, sondern gestattet auch Brüche als Lösungen; er verwirft — entsprechend seiner Kenntnis des Zahlenbegriffes — negative und irrationale Lösungen. Im übrigen giebt Diophant auch nur Beispiele, keine Lösungsmethode.

Die Forderung nach nur ganzzahligen Lösungen stellten zuerst die Inder. Bhaskara (1114 geb.) beschreibt eine altindische Lösungsmethode, unter dem Namen „Zerstäubung", welche sich ungefähr mit der Eulerschen Methode deckt. Eine andere Lösung, die sog. „Grofse Erweiterung", findet sich bei den Chinesen und wird dem Sun tse (III. Saec. p.) zugeschrieben.

In Europa taucht die Frage nach nur ganzzahligen Lösungen zuerst wieder auf durch Bachet de Méziriac, 1621, Zusatz in seiner Diophantausgabe zu IV, 41, mit einer wenig brauchbaren Lösung. Ausführlicher behandelt diese Gleichungslösung Michel Rolle, 1690, *traité d'Algèbre*, und giebt eine wirkliche Lösungsmethode.

Die Aufgabe, eine Zahl zu suchen, welche durch gegebene Divisoren geteilt gegebene Reste läfst, tritt zuerst auf bei den Chinesen (Sun tse III. Saec. p.); ausführlich behandelt von Euler 1734/35, *comm. acad. Petrop.*

Beispiele von unbestimmten Gleichungen 2. Grades finden sich schon bei Diophant (c. 275 p., Alexandria), ferner bei den Indern Aryabhatta (geb. 476), Brahmagupta (geb. 598), Bhaskara (geb. 1114), dem Araber Alkarchi (um 1010, Bagdad) u. a.

Die pythagoräische Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ wurde zuerst in der pythagoräischen Schule gelöst durch $x = 2\alpha + 1$, $y = 2\alpha^2 + 2\alpha$, $z = 2\alpha^2 + 2\alpha + 1$; dann fand Plato (429—348, Athen) die Lösung: $x = m$, $y = \left(\frac{m}{2}\right)^2 - 1$, $z = \left(\frac{m}{2}\right)^2 + 1$. Euclids Lösung (um 300 a., Alexandria), in den *Elem. X 29*, ist $x = \alpha\beta\gamma$, $y = \frac{1}{2}\cdot(\alpha\beta^2 - \alpha\gamma^2)$, $z = \frac{1}{2}(\alpha\beta^2 + \alpha\gamma^2)$. Der Inder Brahmagupta (geb. 598) giebt $x = a$, $y = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b} - b\right)$, $z = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b} + b\right)$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Unbekannten keinesw gestattet auch Brüche als Lösungen; er verwirft Zahlenbegriffes — negative und irrationale Lösu auch nur Beispiele, keine Lösungsmethode.

Die Forderung nach ten zuerst die Inder. Bhaskara (1114 geb.) bes de, unter dem Namen „Zerstäubung“, welche s thode deckt. Eine andere Lösung, die sog. „G en Chinesen und wird dem Sun tse (III. Saec. p.)

In Europa taucht gen zuerst wieder auf durch Bachet de Méziriac, 1 zu IV, 41, mit einer wenig brauchbaren Lösung. chungslösung Michel Rolle, 1690, *traité d'Algèbre* thode.

Die Aufgabe, eine Za ebene Divisoren geteilt gegebene Reste lä (Sun tse III. Saec. p.); ausführlich behandelt vo

Beispiele von unbesti den sich schon bei Diophant (c. 275 p., Alexandri (geb. 476), Brahmagupta (geb. 598), Bhaskara m 1010, Bagdad) u. a.

Die pythagoräische G st in der pythagoräischen Schule gelöst durch x $-2\alpha+1$; dann fand Plato (429—348, Athen) di $\left(\frac{m}{2}\right)^2+1$. Euclids Lösung (um 300 a., Alexan $=\alpha\beta\gamma$, $y=\frac{1}{2}\cdot(\alpha\beta^2-\alpha\gamma^2)$, $z=\frac{1}{2}(\alpha\beta^2+\alpha\gamma^2)$. De ebt $x=a$, $y=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b}-b\right)$, $z=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b}+b\right)$.

Grauskala #13 B.I.G.
A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Druck von W. Pormetter in Berlin.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf