B. Stufen der algebraischen Entwicklung, S. 15.
C. Einführung der Buchstabengröfsen, S. 15.
D. Moderne Operationszeichen, S. 16.
E. Entwicklung des Zahlbegriffes, S. 17.
F. Die 4 ersten Rechnungsarten, S. 19.
G. Potenzierung, S. 19.
H. Radizierung, S. 20.
I. Proportionen, S. 21.
K. Gleichungen, S. 22.
VII. Arithmetische und geometrische Reihen.
VIII. Zinseszins- und Rentenrechnung.
IX. Combinatorik. Binomischer Lehrsatz.
X. Unendliche Reihen.
XI. Stereometrie.
XII. Maxima und Minima.
XIII. Analytische Geometrie.
XIV. Kegelschnitte.

Das Rechnen.

Die Zahlen.

Die modernen Ziffern.

In Indien bildeten sich — vielleicht aus den Anfangsbuchstaben der Zahlwörter — Zahlzeichen, nach Ort und Zeit von verschiedener Form, zunächst ohne Null, deren Erfindung erst nach dem II Saec. p. anzunehmen ist. — Erstes Auftreten der Null in Indien 738 p. in einer Urkunde.

Indische Buchstabenabkürzungen des II Saec. p. ohne Null kamen nach Alexandria; aus ihnen bildeten sich die apices des Boethius (Rom 480 — Pavia 524), Aufschriften auf Rechenmarken 1, 2, . . . 9, die zum Kolumnenrechnen auf dem Abakus benutzt wurden. Diese apices, durch Gerbert (Papst Sylvester II Auvergne 940 — Rom 1003) weitverbreitet, werden von den Abacisten bis zum XII Saec. angewendet, vereinzelt auch später.

Denselben Ursprung haben die Zahlzeichen der Westaraber (Gobarziffern). — Zu den Ostarabern brachte ein indischer Gelehrter um 722 p. anders gestaltete indische Ziffern mit der Null, welche inzwischen in Indien sich gebildet hatte. Den Gebrauch der Null übernahmen von ihnen die Westaraber, ohne ihre bisherigen Zahlzeichen zu ändern.

Aus diesen westarabischen Zahlzeichen mit der Null sind unsere modernen Ziffern allmählich entstanden.

Durch die Übersetzungen und Bearbeitungen arabischer Rechenbücher von Atelhart von Bath (um 1120), Johannes von Luna (um 1140), Gerhard von Cremona (1114 — Toledo 1187), vor allem durch Leonardo Pisano (Fibonacci) (Pisa 1180—1250), dessen *liber abaci* die Grundlage des neueren Rechnens ist, und durch den *Algorithmus demonstratus* des Jordanus Nemorarius (Deutscher Ordensgeneral, † 1236) wurde das Rechnen mit den indischen Ziffern wissenschaftlich erklärt und verbreitet. Zunächst — abgesehen von Gelehrten — nur von Kaufleuten benutzt, wurden sie in Schrift und Druck allgemein verwendet nicht vor der Mitte des XVI Saec.

Älteste Berichte über die indischen Ziffern:

1) bei Masudi, einem arabischen Schriftsteller des X Saec.
2) bei Abu Sahl ben Tamim, einem Commentator der kabbalistischen Schrift *Sephir Yecira*, um 950.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3) bei Maximus Planudes (Byzanz, um 1330) im Rechenbuch *ψηφορία κατ' Ἰνδους*; hier ist zuerst die Null erwähnt.

Ältestes, sicher festgestelltes Auftreten der indischen Ziffern im Abendland bei Nichtmathematikern:

1) In einer Handschrift eines Lehrgedichtes „*Der Wälsche Gast*" unter einem Bilde der Arithmetik — zweite Hälfte des XIII Saec.
2) 1299, Florenz, amtliches Verbot des Gebrauches der indischen Ziffern bei den Kaufleuten (der Kontrolle wegen).
3) 1471, Druck eines Werkes von Petrarca mit Ziffern als Seitenzahlen.
4) 1482, erstes deutsches Rechenbuch, Bamberg. —

Auftreten auf Münzen seit 1549. — Auftreten auf Baudenkmälern u. a. sehr unsicher infolge event. Restaurationen nach dem 30jährigen Krieg.

Moderne Form der Ziffern:

0 und 1 haben stets ihre Form behalten; 2 tritt in heutiger Form zuerst im XIII Saec. auf; 3 hat die Form des entsprechenden Sanskritbuchstabens des II Saec. p. am reinsten bewahrt; 4 erscheint modern im XIII Saec. vereinzelt, regelmäfsig seit Petzensteiners Drucken (1482, 1483); 5 und 7 haben auch erst seit Erfindung der Buchdruckkunst die jetzige Form angenommen; die moderne 6 findet sich schon bei Maximus Planudes (um 1330), auch die entsprechende Gobarziffer gleicht derselben; die Form der 8 ist seit den apices des Boethius (um 1000) eingebürgert; die heutige 9 erscheint seit Maximus Planudes (um 1330) regelmäfsig.

Die Zahlwörter.

Das Wort Null (indisch sunya = leer, arabisch as-sifr)

1202, Leonardo Pisano, *liber abaci*: zephirum. — 1484 Nicolas Chuquet, *Le triparty en la science des nombres*: chiffre, nulle. — 1494 Luca Paciuolo (Florenz), *summa*: nulla, çero. — 1515 Köbel, *Vysirbuch*: nulla.

Das Wort Ziffer in der allgemeinen Bedeutung (ursprünglich Figuren) zuerst: 1525 *Bökeschen vor de leyen und Kinder* — dann: 1530 Schrift von Johannes Kolrofs, tüdtsch Leermeystern zu Basel, 1534 Rechenbuch von Jacob Köbel (hier die römischen Zahlen als die 'gewenlich teutsch Zal' im Gegensatz zu den 'ziffern zale' genannt).

Die Wörter Million, Billion, Trillion u. s. w. 1484, Nicolas Chuquet, *Le triparty*. — praktisch eingeführt durch Alb. Girard 1629 *Invention*.

Das Wort Milliarde: 1552 Jacques Peletier, *Arithmétique* (milliars = million de millions) — 1566 Jan Frenchant, *L'Arithmétique* (miliars = 1000 Millionen). In letzterer Bedeutung in der ersten Hälfte des XIX Saec. in Frankreich gebräuchlich geworden.

Die moderne Art Zahlen zu lesen mit Benutzung des Wortes Million hat sich erst nach dem XVII Saec. allgemein verbreitet (in Deutschland: zuerst 1681 Hechenberg, Hannover).

Das Abteilen zu je 3 bez. 6 Ziffern findet man zuerst bei Johannes de Sacrobosco († 1256), *tractatus de arte numerandi*.

Ein Erweitern des dekadischen Zahlensystems auf sehr grofse Zahlen bei Archimedes (287—212 a., Syrakus), *Sandrechnung* — Apollonius (zw. 250 und 200 i. Alexandria) nach Überlieferung von Pappus — bei den Indern in verschiedenen Schriften (z. B. in buddhistischen Schriften bis $m^{(2^{128})}$, $m = 10^7$).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Andere Zahlensysteme, als das dekadische betrachten zuerst wissenschaftlich: Blaise Pascal (1632—1662, Paris), *Caractères de divisibilité des nombres;* Joh. Caramuel y Lobkowitz 1670, *Matthesis biceps vetus et nova.*

Die Maſse.

Zeitmaſs.

Die Einteilung der Woche in 7 Tage ist babylonischen Ursprungs. Älteste Überlieferungen sind: 1) die *Bibel;* 2) *Namar Bili*, ein für den König Sargon I. von Babylon verfaſstes astrologisches Werk, um 1700 a.

Die Einteilung des Jahres in 365 Tage wird von den Ägyptern auf eine sagenhafte Urzeit verlegt.

Die Einführung des Schaltjahres (jedes 4. Jahr = 366 Tage) geht zurück auf das *Edikt von Kanopus* vom 7. III. 238 a. unter Ptolemaeus III Euergetes (Zusammenhang mit der Chronologie des Eratosthenes (276—194 Alexandria)). Es geriet bald in Vergessenheit. Dieselbe Kalenderform 46 a. durch Julius Caesar mit Hilfe des Sosigenes wiederholt.

Osterrechnung 1) 457 p. Victorius v. Aquitanien (zugleich Einführung des Jahres 1 als 754 p. urb. cond.). 2) 562 p. Cassiodorius (475—570, Bruttien), *computus paschalis* (nötig geworden nach den noch heute geltenden Festsetzungen des Conzils zu Nicaea 325 p.).

Die Verlegung des Jahranfanges auf den 1. Januar geschah 525 durch Dionysius Exiguus.

Die Gregorianische Kalenderform datiert vom 24. II. 1582 — Mitarbeiter Chr. Clavius (1537—1612); von den katholischen Ständen in Deutschland 1583, von den evangelischen 1699 angenommen.

Die Monatsnamen sind römischen Ursprungs.

Die Wörter Minuten, Sekunden stammen aus den lateinischen Übersetzungen der *μεγάλη σύνταξις* des Ptolemaeus, in welchen die Unterabteilungen eines Grades zu je 60 hieſsen: partes minutae primae, p. minutae secundae.

Winkelmaſs.

Die Teilung eines Kreises in 360 Grad, eines Grades in 2 weitere Unterabteilungen zu je 60 ist babylonischen Ursprungs, abgeleitet aus der Einteilung des Jahres in 360 Tage (die Chinesen haben bei verbesserter Jahreseinteilung den Kreis in $365^1/_4{}^\circ$ zerlegt). — Einführung der Sexagesimalteilung in Alexandria um 200 a. durch Hypsikles.

Das Wort Grad. Ptolemaeus (87—165 p. Alexandria) teilt den Durchmesser in 120 Teile (*μοῖραί*), jeden von diesen in weitere Unterabteilungen zu je 60 (vgl. Zeitmaſs, Minuten, Sekunden). Ins Arabische übersetzt hieſsen die Hauptteile darajah, von hier ins Lateinische wörtlich übersetzt: scala, gradus; das französische degré stammt direkt aus dem Arabischen.

Das Zeichen ° findet sich zuerst bei Beyer 1619 *Logistica decimalis.*

Das Wort Transporteur geht zurück auf Christian Wolf 1741 *Elementa Mattheseos:* instrumentum transportatorium.

Dezimalmaſse:

Einführung des metrischen Maſs- und Gewichtsystemes: 17. VIII. 1868 im Nord-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

deutschen Bund, 1. I. 1872 im Deutschen Reich. — Einführung des metrischen Münzsystemes 4. XII. 1871 im Deutschen Reich.

Das Wort Resolvieren erscheint in moderner Auffassung zuerst im *Algorithmus linealis* von Heinr. Stromer (1520 Wien).

Das Wort Reduzieren kommt ebendaselbst vor, jedoch sowohl in moderner Bedeutung, als auch in der des Resolvierens.

Das früher übliche Zeichen ℔ ist ein Compendium für libra.

Das Rechnen mit ganzen Zahlen.

Kopfrechnen

Dasselbe ist zu allen Zeiten getrieben worden, am höchsten ausgebildet bei den Indern (in einer arabischen Schrift aus dem XIV—XV Saec. als Luftrechnen bezeichnet).

Als gesonderte Übung im Unterricht trat dasselbe erst gegen das XVIII Saec. auf (z. B. im Philantropin zu Dessau).

Älteste Einmaleinstabelle, um 100 p. Nicomachus von Gerasa (Arabien), *εἰσαγωγὴ ἀριθμητική* (hieraus schöpft Boethius, dann Bernelinus).

Grofses Einmaleins zuerst bei Petrus de Dacia (um 1290—1347), *tabula ad inveniendam propositionem cuiusvis numeri.*

Dreiecksform des Einmaleins 1489, Johannes Widman v. Eger, *behende und hubsche Rechnung auf allen kauffmannschaft.*

Erste Rechenmaschinen: 1) 1640 Johann Ciermans, *disciplinae mathematicae* (nur Beschreibung). 2) 1642 Blaise Passcal (wirklich hergestellt).

Schriftliches Rechnen.

Älteste gedruckte deutsche Rechenbücher: 1) von Ulrich Wagner 1482 zu Nürnberg von Heinrich Petzensteiner gedruckt (sehr wenig erhalten). 2) Bamberger Rechenbuch von 1483. 3) Rechenbuch von Johannes Widmann 1489, Leipzig.

Die Operationszeichen sind aus der Algebra entlehnt, vergl. S. 16.

Duplicatio und Mediatio als besondere Rechnungsarten zuerst fortgelassen: 1494 Luca Pacinolo, *summa.*

Begriff der Spezies zuerst aufgestellt durch Gemma-Frisius 1540, *methodus.*

Auf genaues und sorgfältiges Untereinanderschreiben der Ziffern beim Rechnen legt zuerst Gewicht: 1748 Joh. G. Gottl. Hübsch, *Arithmetica portensis.*

Erste umfassendere Zusammenstellung von Rechenvorteilen mit Beweisen: 1732, Clausberg, *demonstrative Rechenkunst.*

Addieren.

Die moderne Art wurde zuerst von den Indern gebraucht; ausführliche Beschreibung im Rechenbuch des Muhammed ibn Musa Alchwarizmi (um 820 p, Bagdad, Damaskus) mit besonderer Berücksichtigung des Falles, dafs eine Teilsumme gröfser als 10.

Die Gewohnheit von rechts nach links zu addieren, wobei das Verbessern schon erhaltener Resultatsziffern wegfällt, tritt zuerst auf bei Johannes de Sacrobosco († 1256, Paris), *tractatus de arte numerandi.*

Die Probe durch Hinauf- und Herunteraddieren: 1494 Luca Paciuolo, *summa.*

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Subtraktion:

Die moderne Art (mit Borgen) von den Indern gebraucht; ausführliche Beschreibung im Rechenbuch des Alchwarizmi (820 p.) und des Maximus Planudes (u. 1330, Byzanz).

Von rechts nach links zu subtrahieren empfiehlt Johannes de Sacrobosco († 1256, Paris), *tractatus*.

Die sog. österreichische oder additive Subtraktion im XIX Saec. eingeführt.

Die Probe durch Addition: Jordanus Nemorarius (deutscher Ordensgeneral, † 1236), *Algorithmus demonstratus*.

Multiplikation.

Eine der modernen freilich nur entfernt ähnliche Art der Multiplikation durch Einzelmultiplikation der Einer-, Hunderter- u. s. w. Ziffern (πυθμένες) findet sich bei Apollonius (zw. 250 u. 200 in Alexandria), überliefert von Pappus.

Die moderne Art ist von den Indern erfunden (zum Teil infolge des aufserordentlich ausgebildeten Kopfrechnens und der Möglichkeit, die im Staube geschriebenen Ziffern auszulöschen, in sehr erheblich verkürzten Methoden). Das Resultat erscheint stets über der Aufgabe.

Die moderne Anordnung mit dem Ausrücken nach links tritt auf: 1483 *Bamberger Rechenbuch*, 1494 Luca Paciuolo, *summa* (hier auch Ausrücken nach rechts).

Die Probe durch Division: Jordanus Nemorarius († 1237), *Algor. demonstr.*

Die abgekürzte Multiplikation wird zuerst gelehrt in d. *Arithmetica* von Jost Bürgi (um 1592) und etwa gleichzeitig von Joh. Praetorius Joachimicus in kleinen Nachträgen zu einer Abschrift der Tafeln des Rhaeticus.

Division.

Das Wort Divisor zuerst 1494, Luca Paciuolo (Florenz), *summa*.

Das Wort Quotient: 1532, Apianus, deutsches Rechenbuch.

Die moderne Divisionsmethode von den Indern erfunden.

Die moderne Anordnung beim Dividieren (Untersichdividieren) erscheint zuerst 1494 (Florenz) Luca Paciuolo, *summa* (unter dem Namen: divisio a danda), in Deutschland zuerst: 1532, Apian, Deutsches Rechenbuch. Sie wird erst vom XVIII Saec. an gebräuchlich, während bis dahin die alte beschwerliche Methode des sog. Übersichdividierens vorherrschend war.

Praktische Winke über die Anzahl der Quotientenziffern, das Maximum des Restes, das Auftreten der Null im Quotienten, die Ermittelung der Quotientenziffer durch die erste Divisorziffer gab zuerst ausführlich Clavius 1611 (Jesuit, Rom), *opera mathematica*.

Die österreichische Divisionsmethode im XIX Saec. eingeführt.

Der Unterschied zwischen Teilen und Enthaltensein zuerst scharf hervorgehoben durch Tartaglia 1556, *General trattato*.

Die abgekürzte Division erscheint zuerst bei Joh. Praetorius Joachimicus (vgl. abgekürzte Multiplikation), auseinandergesetzt von Kepler, 1623, in einem Brief.

Die Probe durch Multiplikation: Jordanus Nemorarius († 1237), *Algorithmus demonstratus*.

Neunerprobe. Diese seit den Indern, welche infolge des Weglöschens der in Sand gegeschriebenen Zahlen eine entgegengesetzte Spezies als Rechenprobe nicht benutzen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

konnten, für alle 4 Rechnungsarten übliche Methode erkannte zuerst als unzureichend: 1494 Luca Paciuolo, *summa.*

Beweise für die Neunerprobe gab zuerst Wallis (1616—1703, Oxford), *Mathesis universalis.*

Eigenschaften der ganzen Zahlen.

Besondere Zahlengruppen.

Gerade und ungerade Zahlen: altägyptischen Ursprungs, dann besonders: Pythagoras (580—501 a. Chr., Unteritalien).

Vollkommene Zahlen: spätere Pythagoräer; Euclid (um 300 a., Alexandria), *Elemente Buch IX.*

Mangelhafte und überschiefsende Zahlen: Neupythagoräer (z. B. Nikomachus von Gerasa, um 100 p., Arabien).

Befreundete Zahlen: Pythagoras (580—501 a., Unteritalien), Jamblichus, *συναγωγὴ τῶν Πυθαγορικῶν δογμάτων* (um 325 p., Chalkis, Rom). — Eine Vorschrift zu ihrer Bildung giebt der Araber Tabit ibn Kurra (833 — Bagdad 808).

Figurierte Zahlen, siehe Reihen.

Teilbarkeit der Zahlen.

Primzahlen. Der Begriff derselben wird von der pythagoräischen Schule festgelegt (mit Einschlufs der 2, die Jamblichus nicht dazu rechnet). Euclid (um 300 a., Alexandria) zeigt, dafs ihre Anzahl unendlich grofs ist. Eratosthenes (Cyrene 276 — Alexandria 194) giebt eine Methode, die Primzahlen aufzusuchen (Sieb d. E.). Direkte Primzahlkriterien suchten vergeblich Stifel (1487—1567) in $2^{2n+1}-1$ (versagt in $2^3-1=511=13\cdot 37$), ferner Fermat (1601 — Toulouse 1665) in $2^{(2^n)}+1$ (versagt in $2^{(2^5)}+1$); beschränkte Primzahlreihen stellt Euler (1707—1766, Berlin, Petersburg) und Legendre (1752—1833, Paris) analytisch auf. Auf Vorarbeiten von Gaufs (1777—1855, Göttingen) hin gelang es Riemann (1826—1866, Göttingen) das Primzahlgesetz in analytische Form zu bringen.

Teilbarkeit durch 2: altägyptischen Ursprungs.

Teilbarkeit durch 9: indischen Ursprungs.

Regeln für 2, 5, 9, 3. — Probieren durch 7, 11, 13 u. s. w. bis zur Quadratwurzel aus der untersuchten Zahl: 1202, Leonardo Pisano, *liber abaci.* Dieselben Regeln zuerst deutsch: 1526, Chr. Rudolff, Rechenbuch.

Regeln für 2, 3 . . . 10: 1544 Michael Stifel, *arithmetica integra.*

Regeln für beliebigen Teiler: Blaise Pascal (1632—1662, Paris), *caractères de divisibilité des nombres.*

Aufsuchen des gemeinsamen Teilers zweier Zahlen 1) Euclid (um 300 a., Alexandria), *Elem. VII* 2. 2) Bhaskara (um 1160, Indien), *Siddhantaciromani.*

Aufsuchen des kleinsten Vielfachen: 1) Euclid, *Elem. VII 36.* 2) 1202 Leonardo Pisano, *liber abaci.*

Das Rechnen mit Brüchen.

Gewöhnliche Brüche.

Moderne Schreibart mit Bruchstrich zuerst in einer Schrift des XII Saec.: *Rego-*

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

luzze di Maestro Paolo dall Abbaco, dann 1494 Luca Paciuolo, *summa*. — Wahrscheinlich so entstanden, dafs man Stammbrüche, wie $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, mit den überstrichenen Nennerziffern schrieb: $\bar{3}$, $\bar{4}$ (z. B. in einer späteren lateinischen Euclidübersetzung von Zambertus, um 1500), analog den griechischen Stammbrüchen α', β', γ' . ., dann bei $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ die entsprechende Anzahl der Untereinheiten darüber setzte. — Das Übereinanderschreiben von Zähler und Nenner ohne Bruchstrich bereits bei den Indern.

Die Wörter Zähler und Nenner treten auf bei Jordanus Nemorarius (Deutscher Ordensgeneral, † 1236), *Algorithmus demonstratus:* numerans, denominans — 1494 Luca Paciuolo (Florenz), *summa*: numeratore, denominatore.

Definition eines Buches: Euclid (um 300 a., Alexandria), *Elem. lib. VII, Erkl. 2.*

Ganze Zahlen, als Brüche mit dem Nenner 1 geschrieben im indischen Rechenbuch von Bakhshali (entstanden III—IV Saec. p., niedergeschrieben VIII—IX Saec. p.)

Die Stammbrüche (mit dem Zähler 1) sind altägyptischen Ursprungs: Rechenbuch des Ahmes (Papyrus Rhind, zw. XX u. XVII Saec. a.), von den Griechen übernommen.

Die Zerlegung von Nichtstammbrüchen in Stammbrüche findet sich schon im Rechenbuch des Ahmes; daselbst wird eine schon längeren Gebrauch voraussetzende Tabelle von Zerlegungen gegeben — also um XX Saec. a.).

Das Verwandeln von gemischten Brüchen in unechte Brüche und umgekehrt, sowie Gleichnamigmachen als besondere Rechnungsart gelehrt von Johannes von Gmunden († 1442), *tractatus de minuciis phisicis.*

Das Heben der Brüche mit 2 bereits im altaegyptischen Rechenbuch des Ahmes (XX—XVII Saec. a.) — allgemein: Jordanus Nemorarius (Deutscher Ordensgeneral, † 1236), *Algorithmus demonstratus.*

Das Heben von zusammengesetzten Bruchstrichen zuerst: 1526 Rudolff, Rechenbuch.

Regeln für die Multiplikation zweier Brüche:

1) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = [(a \cdot c) : b] : d$: 1202 Leonardo Pisano, *liber abaci.*

2) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$: Jordanus Nemorarius († 1237), *Algorithmus demonstr.*

Erörterung der anscheinend vorhandenen Schwierigkeit, dafs beim Multiplizieren mit einem Bruch etwas Kleineres resultiert gegen die Definition der Multiplikation, zuerst bei Luca Paciuolo (Florenz), 1494, *summa.*

Regeln für die Division durch einen Bruch 1) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{acd}{bcd} : \frac{c}{d} = \frac{acd : c}{bcd : d} = \frac{ad}{bc}$ Jordanus Nemorarius († 1237), *Algorithmus demonstr.*

2) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ 1483 Bamberger Rechenbuch.

Regeln für die Addition und Subtraktion: $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{ad}$. 1483. Bamberger Rechenbuch.

Die moderne Anordnung, dafs die Multiplikation und Division der Brüche vor der Addition und Subtraktion derselben gelehrt wird, zuerst: 1494, Luca Paciuolo, *summa.*

Dezimalbrüche:

Vorläufer der Dezimalbrüche sind die Sexagesimalbrüche, welche altbabyloni-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

schen Ursprungs sind. Älteste Urkunde über letztere: die Täfelchen von Senkereh (XXIII—XVI Saec. a.), enthaltend eine Tabelle von Quadrat- und Kubikzahlen (es bedeutet hier $1 \cdot 4$ die Zahl $64 = 1 \cdot 60 + 4$). Ähnlich treten weitere 2 Unterabteilungen zu je 60 in der babylonischen Astronomie auf. —

Einführung der Sexagesimalbrüche in Alexandria durch Hypsikles um 200 a. — Benutzung derselben in allen wissenschaftlichen Werken bis zum Mittelalter; schliefslich werden sie (z. B. Jordanus Nemorarius († 1237), *Algorithmus dem.*) unter vollständiger Abstraktion von der Kreiseinteilung als reine Bruchart verwendet und als minutiae philosophicae oder phisicae im Gegensatz zu den m. vulgares bezeichnet.

Auftreten von Brüchen mit dekadischen Einheiten als Nenner.

1) Johannes von Sevilla (um 1150 p.), in einer Übersetzung eines unbekannten arabischen Rechenbuches.
2) Johannes von Gmunden († 1442), *tractatus de minut. phisicis* (Wurzelausziehen unter Kombination von Sexagesimal- und Dezimalbrüchen).
3) Peurbach (1423—1461, Wien), *tractatus super propositiones Ptolemaei de sinubus et chordis*, Sinustabelle mit $r = 600\,000$.
4) Regiomontanus, 1490, *Opus tabularum directionum profectionumque*, enthaltend eine Tangententabelle mit $r = 100\,000$.

Hervorheben der Wichtigkeit der Dezimalbrüche und Betonung der dezimalen Währung in Mafs, Münzen und Gewicht bei Simon Stewin, 1585, *La disme*, aber hier noch mit der Schreibweise $237^{(0)}\,5^{(1)}\,7^{(2)}\,8^{(3)} = 237,578$; unabhängig von ihm: 1603 Joh. Hartmann Beyer, *Logistica decimalis.*

Einführung eines Pünktchens oder Kommas an Stelle jeder Nennerbezeichnung zuerst bei Jost Bürgi (1552—1632, Prag), *Arithmetica* (nur handschriftlich vorhanden).

Erste Tabellen mit Benutzung des Dezimalpunktes, 1612, Bartholomaeus Pitiscus, *Trigonometrie.*

Ersetzung der Minuten und Sekunden durch dezimale Teile des Grades, 1633, Logarithmentafel von Briggs (nach seinem Tode veröffentlicht), leider unbeachtet bis auf die Neuzeit, wo wenigstens die Sekunden durch die Dezimalteile der Minuten ersetzt sind.

Schulpensum sind die Dezimalbrüche nach Einführung der dezimalen Währung geworden, in Frankreich schon seit Anfang des XIX Saec.

Unendliche Dezimalbrüche mit Perioden zuerst behandelt, 1693, Wallis, *Algebra* (Oxford).

Angewandtes Rechnen.

Bevorzugte Regeln sind im XVI Saec. der Dreisatz, im XVII Saec. die Welsche Praktik, im XVIII Saec. der Kettensatz, im XIX Saec. der Bruchsatz.

Das Wort „politische Arithmetik“ stammt von Nicolaus Rhabda (um 1340, Griechenland), *Briefe über Arithmetik*; es wurde in der 2. Hälfte des XVII Saec. gebräuchlich.

Regeldetri.

Das Wort Regeldetri aus den lateinischen bezw. italienischen Rechenbüchern des Mittelalters. 'Die gulden Regel' genannt im Bamberger Rechenbuch 1483.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Älteste überlieferte Aufgaben bei dem Inder Aryabhatta (geb. 476 p.) in seinem Werke *Aryabhattijam.*

Zusammengesetzte und sogenannte umgekehrte Regeldetri zuerst bei dem Inder Brahmagupta (geb. 598 p.). Die indische Behandlungsweise wurde von den Arabern übernommen und weiter vervollkommnet.

Aufstellung eines Ansatzes bei Lösung einer Regeldetriaufgabe: 1202, Leonardo Pisano, *liber abaci*, *Absch. VIII u. IX*, doch hier die gesuchte Bezeichnung immer links. Dieselbe rechts, wie im heutigen Verfahren: 1500 Balthasar Licht, *algorithmus linealis.*

Heben des Bruchstriches vor dem Ausrechnen: 1526 Rudolff, Rechenbuch.

Der moderne Bruchsatz zuerst behandelt von Stern, 1832, *Lehrgang des Rechenunterrichtes.*

Bei Anwendung der Regeldetri auf das praktische Leben entstand im XV bis XVI Saec. eine grofse Anzahl von Sonderregeln, z. T. mit merkwürdigen Namen. Tartaglia, 1556, *General trattato* vereinigte sie unter der noch heute üblichen Einteilung: Zins-, Sconto-, Termin-, Zinseszins-, Gesellschafts, Wechsel-, Mischungs-Rechnung.

Falscher Ansatz.

Vielfach verwertet im altägyptischen Rechenbuch der Ahmes (Papyrus Rhind, XX—XVII Saec. a.); er tritt auf bei Diophant (um 275 p., Alexandria), im altindischen Rechenbuch von Bakhshali (III—IV Saec. p.). Von den Arabern übernommen und vervollkommnet. — 1202, Leonardo Pisano, *liber abaci*, *Absch. 12.* Heut nur selten angewandt.

Zinsrechnung.

Ältestes Auftreten bei den Römern. Von ihnen bereits in der Gesetzgebung behandelt: 342 a. *lex Genucia*, Verbot der Zinsverleihung. Zu Ciceros Zeit 48 % nicht ungewöhnlich, zur Zeit der Kaiser 25 % u. s. w.

Zinsaufgaben, auch mit Zinseszins, bei Aryabhatta (Indien, geb. 476 p.) — monatlich 5 %.

Zinstafeln im Gebrauch zur Zeit des Luca Paciuolo (Toscana 1445? — Florenz 1509).

Die ersten gedruckten Zinstafeln: 1584, Simon Stevin.

Terminrechnung.

Die Bestimmung eines Einzeltermins zur Zahlung verschiedener, ungleichzeitig fälligen Schuldsummen nimmt Luca Paciuolo, 1494, *summa*, mit ausführlicher Berechnung der Zinsen vor, während Widmann, 1489 Rechenbuch, und Tartaglia, 1556, *General trattato*, wie heute, nur mit den 'Zinsnummern' (Produkt aus Kapital und Tagen) statt der Zinsen selbst operieren.

Gewinn- und Verlustrechnung

zuerst im Bamberger Rechenbuch 1483.

Rabattrechnung.

Rabatt in Hundert.

Eine Art Rab. i. 100 stellt das römische Interusurium dar (z. B. in den *Kesten* des Sextus Julius Africanus, um 220 p.), welches den Barwert eines später zu erwartenden Erbteils berechnet.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die unter dem Namen „Rabatt in Hundert“ übliche Rechnungsweise wurde zuerst benutzt von Benedict Carpzow (1595—1666, Jurist) und hat sich, trotzdem sie falsch ist, bis heute bei der Diskontierung von Wechseln in Gebrauch gehalten.

Rabatt auf Hundert wurde 1731 von Gottfr. Aug. Hoffmann (*Prudentia oeconomica*) in einer Polemik gegen Leibniz aufgestellt.

Zusammengesetzter Rabatt (mit Zinseszinsanrechnung) von Leibniz, *Acta eruditorum*, 1682, angegeben.

Rabattierungstafeln mit Benutzung als Zinseszinstafeln wurden zuerst zusammengestellt 1585 von Simon Stevin, *Practique d'Arithmétique*. Die Erfindung solcher Tafeln dürfte den Italienern zuzuschreiben sein, da Luca Paciuolo bereits 1494 von der Bildung von Interessetafeln spricht.

Tararechnung.

Das Wort Tara gleichen Stammes mit dem westarabischen tarh = Subtraktion (von taraha = wegwerfen).

Die Aufgabenbehandlung zuerst im Bamberger Rechenbuch von 1483, dann in Widmanns Rechenbuch 1489.

Wechselrechnung.

Wechselbriefe im VII Saec. durch vertriebene Juden aus Frankreich nach der Lombardei gebracht, von hier aus nach Antwerpen durch politische Flüchtlinge. In Nürnberg zuerst 1445.

Wechselrechnung, Unterweisung in doppelter Buchführung zuerst bei Luca Paciuolo, 1494, *summa*.

Ältestes ausführliches Lehrbuch: 1732, Chr. v. Clausberg, *demonstrative Rechenkunst*. Hierselbst auch erstmalig das Wort Arbitrage.

Gesellschaftsrechnung.

Das Auftreten dieser sehr vielseitigen Aufgabenarten ist sehr alt; einige finden sich schon im altägyptischen Rechenbuch des Ahmes (Papyrus Rhind, XX—XVII Saec. a.), bei Archimedes, Kronenrechnung (287—212 a., Syrakus), bei den Römern in ihren Erbteilungsaufgaben, im altindischen Rechenbuch von Bakhshali (III—IV Saec. p.), bei den Arabern, in dem chinesischen Werk '*Neun Abschnitte der Tsin kiu tschau*' (um 1240 p.), bei Alcuin (736—804 p.), Leonardo Pisano (1202), Bamberger Rechenbuch 1483, Luca Paciuolo (1494) u. a.

Mischungsrechnung.

Die ersten Aufgaben finden sich bei den Indern, dann bei den Arabern, ferner auch in den '*Neun Abschnitten der Tsin kiu tschau* (um 1240 p.).

Legierungsaufgaben zuerst: 1202, Leonardo Pisano, *liber abaci*, Abschn. 11.

Algebra.

Geschichtlicher Überblick.

Älteste sehr geringe Spuren finden sich bei den Ägyptern. Bei den Griechen wandte sich das Interesse der Mathematiker der Algebra weniger als der Geometrie zu. Ziemlich unvermittelt — vielleicht nur infolge mangelhafter Überlieferung — erscheint Diophants grofses Werk (um 275 p.) [mit einer schon hoch ausgebildeten

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf