Chr. Huygens

„DE CIRCULI MAGNITUDINE INVENTA“

als ein Beitrag zur „Lehre vom Kreise“

für die Lehrbücher elementar entwickelt

von

H. Kiessling.

Unter den vielen geometrischen Abhandlungen von Huygens, die trotz ihrer grossen wissenschaftlichen Bedeutung leider immer mehr in Vergessenheit zu gerathen scheinen, nehmen unstreitig eine Reihe die Cyklometrie behandelnder kleinerer Schriften*) das grösste Interesse aller Mathematiker in Anspruch.

Die meiste Beachtung hat wohl die Schrift „de circuli magnitudine inventa“ gefunden, aus der auch einige Sätze in einzelne geometrische Lehrbücher**) übergegangen sind; es wäre zu wünschen, dass derselben ein noch allgemeineres Interesse zugewendet würde. Im Vergleich zur historischen und wissenschaftlichen Bedeutung des Problems der Zirkel-Quadratur ist die Behandlung der Kreislehre in fast allen Lehrbüchern zu dürftig und keinesweges im Stande den Anfänger nur im entferntesten die grosse Bedeutung dieses wichtigen Theiles der Elementargeometrie erkennen zu lassen.

---

*) 1) Theoremata de quadratura hyperboles ellipsis et circuli ex dato proportionum gravitatis centro. Lugd. Batav. 1651.
2) *Εξέτασις* cyclometriae clarissimi viri Gregorii a. S. Vincentio S. I. ed. a. 1647. Lugd. Batav. 1651.
3) Chr. Hugenii ad C. V. Franc. Xaverium Ainscom. S. I. epistola, qua diluuntur ea quibus *ἐξέτασις* cyclometriae Gregorii a. S. Vincentio impugnata fuit. Hagae. Com. 1656.
4) Chr. Hugenii de circuli magnitudine inventa. Lugd. Batav. 1654.
5) Chr. Hugenii observationes in librum Gregorii de vera circuli et hyperbolae quadratura. Journal des sçavans (2 jul. 1668 und 12. Nov. 1668).
cf. varia opera. Lugd. Batav. 1724. pag. 315.

**) Es scheint, als ob nur in folgenden drei Lehrbüchern:
Kunze, Lehrbuch d. Geometrie. 2. Aufl. Jena 1851;
Baltzer, Elemente der Mathematik. T. II. 2. Aufl. Leipzig 1867;
van Swinden, Grondbeginsels der Meetkunde. Amsterd. 1816 (in grösseren Kreisen bekannt durch die treffliche deutsche Bearbeitung von C. F. A. Jacobi. Jena 1834).
der Inhalt der Huygens'schen Abhandlung beachtet worden ist. Heis und Eschweiler, Lehrbuch der Geometrie. 2. Aufl. Köln 1858, erwähnen nur historisch die Huygens'schen Grenzbestimmungen (I. pag. 168). Man vergl. auch: La Frémoire, Aufgaben; herausgegeben von G. Reuschle. Stuttgart 1858, pag. 166.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Im folgenden ist versucht worden, aus der oben erwähnten Schrift eine Reihe von Sätzen, die sich auf das Verhältniss des Kreises zu den um- und eingeschriebenen Polygonen beziehen, auf ganz elementarem, anschaulichem Wege, ohne Zuhülfenahme der Aehnlichkeitslehre, abzuleiten. Nicht alle Sätze der reichhaltigen Abhandlung scheinen eine so einfache Darstellung zu gestatten. Gelänge es auch die aus statischen Beziehungen *) folgenden Grenzbestimmungen auf ähnlichem Wege zu entwickeln, so würde ein nicht unwesentlicher Beitrag zur Elementar-Geometrie geliefert werden. Da sowohl die erste Ausgabe der 1654 erschienenen Schrift, als auch die von Gravesande 1724 veranstaltete Gesammtausgabe von Huygens Werken, die alle seine geometrischen Arbeiten enthält, nicht eben häufig anzutreffen ist, wird die unten folgende Mittheilung der interessanten kleinen Abhandlung in ihrer unverkürzten Gestalt vielleicht manchem nicht unlieb sein.

Es werden der Uebersicht halber die unentbehrlichen geometrischen Hülfssätze vorausgeschickt. Da die Aehnlichkeitslehre nicht vorausgesetzt zu werden braucht, können diese Huygens'schen Sätze wohl den Schluss der Kreislehre bilden, wie dieselbe in Ober-Tertia resp. Unter-Secunda vorgetragen wird.

Lemma I. Wenn man vom Endpunkte der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks auf dem einen Schenkel ein Loth errichtet und zugleich auf den andern Schenkel ein Loth fällt, so wird der von diesen beiden Lothen eingeschlossene Winkel durch die Basis des Dreiecks halbirt.

Lemma II. Wenn in einem Dreieck ein von ungleichen Seiten eingeschlossener Winkel halbirt wird, so wird die Gegenseite in Stücke getheilt, die in demselben Sinne ungleich sind, wie die anstossenden Seiten. **)

Lemma III. Jedes Paralleltrapez zerfällt durch die Diagonale in zwei ungleiche Dreiecke, von denen das mit grösserer Basis das grössere ist.

Lemma IV. Die Verbindungslinie des Durchschnittspunktes zweier Tangenten eines Kreises mit dem Mittelpunkt desselben halbirt sowohl den Winkel zwischen den Tangenten, als den zwischen den zugehörigen Radien und geht senkrecht durch die Mitte der zugehörigen Sehne.

Lemma V. Wenn eine Kreisperipherie in eine Anzahl gleicher Theile getheilt ist, so bilden die Sehnen zwischen den Theilpunkten ein reguläres eingeschriebenes, die Tangenten dagegen ein reguläres umschriebenes Polygon.

---

*) cf. prop. XVII.

**) cf. Materialien zur Uebung für Anfänger in Anwendung der 26 ersten Sätze der „Elemente" (Euklids) zum Beweise anderer geometrischer Sätze, von C. F. Hauber, im Anhang zu dessen: Chrestomathia geometrica. Tübingen 1820. pag. 352. Eine trotz des verdammenden Urtheils von C. H. Nagel (cf. dessen Idee der Realschule. Ulm 1840. pag. 222) sehr beachtenswerthe Sammlung von elementaren Uebungssätzen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Lemma VI. Die Verbindungslinie der Halbirungspunkte zweier Seiten eines Dreiecks schneidet von demselben den vierten Theil ab.

Lemma VII. Die unendliche Summe

$$1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{64} + \cdots$$

hat zum Gränzwerth $\tfrac{4}{3}$. (Archimedes Quadr. d. Parabel. Satz 23.)

Ist der Flächeninhalt irgend eines dem Kreise ein- oder umgeschriebenen (regulären) Polygons gegeben, so ist das zugleich ein (unterer resp. oberer) Näherungswerth für den Flächeninhalt des Kreises. Je grösser die Seitenzahl ist, desto weniger werden diese Näherungswerthe vom Inhalt des Kreises verschieden sein. Huygens hat nun gezeigt, wie man ohne die Berechnung von Vielecken mit grösserer Seitenzahl doch noch genauere Näherungswerthe für den Flächeninhalt und die Peripherie des Kreises anzugeben vermag.

Man gelangt am einfachsten zum Ziel durch folgende Betrachtung:

Vergleicht man die Flächeninhalte des regulären n-Ecks, 2n-Ecks, 4n-Ecks u. s. f. unter einander, so ist allen die Fläche des regulären n-Ecks gemeinsam; es treten bei jeder Verdopplung der Seitenzahl zum vorhergehenden Polygon nur entsprechend n, 2n, 4n u. s. w. gleichschenklige Dreiecke jedesmal hinzu, deren Grösse in nahezu demselben Verhältnisse abnimmt. Bezeichnet man nun mit E die Fläche des regulären eingeschriebenen n-Ecks, mit E_1, E_2 u. s. f. die Flächen der regulären eingeschriebenen Polygone von doppelter, vierfacher u. s. f. Seitenzahl, ferner die durch Construction von E_1 zu E hinzutretenden (n) gleichschenkligen Dreiecke (einzeln) mit $\triangle$, die durch Construction von E_2 zu E_1 hinzutretenden 2n gleichschenkligen Dreiecke entsprechend mit $\triangle_1$, die folgenden mit $\triangle_2$ u. s. f., so lehrt die unmittelbare Anschauung, dass (die Kreisfläche = K gesetzt)

$$K = E + n\triangle + 2n\triangle_1 + 4n\triangle_2 + \cdots$$

ist; ferner

$$n\triangle = E_1 - E$$
$$2n\triangle_1 = E_2 - E_1$$
$$4n\triangle_2 = E_3 - E_2 \text{ u. s. f.}$$

Offenbar genügt die Betrachtung nur eines der n Sektoren (in der Figur 1ª AOX). Aus der Vergleichung je zweier auf einander folgender Glieder dieser Reihe ergiebt sich leicht, dass

$$2n\triangle_1 > \tfrac{1}{4}n\triangle$$
$$4n\triangle_2 > \tfrac{1}{4}2n\triangle_1$$
$$8n\triangle_3 > \tfrac{1}{4}4n\triangle_2 \text{ u. s. f.}$$

ist. Nun ist $\beta_1\gamma y_1 = \triangle_1$ (Lemma V) und $\beta_{11}\gamma y_{11} = \tfrac{1}{4}\triangle$ (Lemma VI). Diese beiden Dreiecke lassen sich aber leicht mit einander vergleichen; denn es ist:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

1) $\beta_1 y_1$, die Grundlinie von $\triangle_1$, grösser als $\beta_{11} y_{11}$;

2) $\gamma_1 \gamma$, die Höhe von $\triangle_1$, grösser als $\frac{1}{2}\gamma\gamma_{11}$ (die Höhe von $\triangle$.) nach Lemma II und I, da W. $\gamma\beta_{11}\gamma_{11}$ durch die Basis $\beta_{11}\gamma_1$ halbirt wird.

Also ist

$$2\beta_1\gamma y_1 > \beta_{11}\gamma y_{11}, \text{ d. h. } 2\triangle_1 > \tfrac{1}{4}\triangle$$

und ebenso folgt

$$2\triangle_2 > \tfrac{1}{4}\triangle_1 \text{ u. s. w.}$$

Das ist prop. I:

Beschreibt man in einen beliebigen Kreisabschnitt ein gleichschenkliges Dreieck und in die durch dessen Schenkel gebildeten Kreisabschnitte wiederum gleichschenklige Dreiecke, so ist die vierfache Summe dieser beiden letzteren stets grösser als das erstere. (vergl. Kunze, §. 180.)

Es ist also auch:

$$2n\triangle_1 > \tfrac{1}{4}n\triangle$$
$$4n\triangle_2 > \tfrac{1}{4}2n\triangle_1 > \tfrac{1}{16}n\triangle$$
$$8n\triangle_3 > \tfrac{1}{4}4n\triangle_2 > \tfrac{1}{64}n\triangle \text{ u. s. f.}$$

folglich die Summe:

$$n\triangle + 2n\triangle_1 + \ldots \text{ oder } \Sigma > n\triangle\,[1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} + \ldots]$$
$$\text{d. h. } \Sigma > \tfrac{4}{3}n\triangle \text{ (Lemma VII)},$$

also ist auch

$$E + \Sigma \text{ oder } K > E + \tfrac{4}{3}n\triangle$$

und da

$$n\triangle = E_1 - E \text{ ist,}$$
$$K > E + \tfrac{4}{3}(E_1 - E)$$

oder

$$K > E_1 + \tfrac{1}{3}(E_1 - E).$$

Damit ist prop. V bewiesen:

Jeder Kreis ist grösser als ein in denselben beschriebenes Vieleck von gerader Seitenzahl zusammengenommen mit dem dritten Theil des Ueberschusses eben dieses Vielecks über das in denselben Kreis beschriebene Vieleck von halb so grosser Seitenzahl. (van Swinden, §. 328. Kunze, §. 182.)

Der Satz ist hier für den ganzen Kreis bewiesen worden, er gilt auch für jeden Kreissektor. Aus

$$K > E + \tfrac{4}{3}n\triangle$$

folgt nämlich:

$$\frac{K - E}{n} > \tfrac{4}{3}\triangle.$$

Das ist offenbar identisch mit prop. III.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Jeder Kreisabschnitt, der kleiner ist als der Halbkreis, ist grösser als $^4/_3$ des gleichschenkligen (grössten) Dreiecks, welches man über der zugehörigen Sehne als Grundlinie in denselben beschreibt. (van Swinden, §. 326.)

Es kömmt nun noch darauf an eine obere Grenze für den Kreis zu finden. Zunächst führt dieselbe Betrachtung wie vorhin darauf durch successive Construction der umgeschriebenen Vielecke von jedesmal doppelter Seitenzahl die Differenz zwischen dem Kreise und den umgeschriebenen Vielecken immer kleiner zu machen.

Wenn man nun, vom umgeschriebenen n-Eck (U) ausgehend, das umgeschriebene 2n-Eck, 4n-Eck . . U_1, U_2 . . u. s. f. dadurch construirt, dass man fortgesetzt die von je zwei Tangenten (halben Polygonseiten) eingeschlossenen Kreisbogen halbirt und durch die Halbirungspunkte neue Tangenten zieht, so wird von dem umgeschriebenen n-Eck allmählich eine Reihe von gleichschenkligen Dreiecken abgeschnitten, erst n, dann 2n, 4n u. s. f., deren (unendliche) Summe die Differenz zwischen dem Kreise und dem umgeschriebenen n-Eck angiebt. Bezeichnet man diese Dreiecke der Reihe nach (einzeln) mit δ, δ_1, δ_2 . . . . so ist offenbar:

$$\begin{aligned} K &= U - n\delta - 2n\delta_1 - 4n\delta_2 - \ldots \\ &= U - \sigma. \end{aligned}$$

Das Einfachste wäre wohl, analog wie vorhin, zwischen den Gliedern dieser Reihe ein Grenzverhältniss aufzusuchen; das scheint aber ohne grosse Umwege nicht möglich zu sein; man erhält jedoch sehr einfach einen Grenzwerth für diese Summe (σ), wenn man sie mit der vorigen (Σ) vergleicht. Weil

$$\delta > {}^1/_2\Delta$$
$$\delta_1 > {}^1/_2\Delta_1$$
$$\delta_2 > {}^1/_2\Delta_2 \text{ u. s. f.}$$

so hat σ als untere Grenze die Hälfte von Σ.

Diese Ungleichungen ergeben sich sehr einfach aus folgender Betrachtung:
Die Linie $O\beta$ (Fig. 1^b) theilt $\alpha\gamma$ (Lemma II) so, dass

$$\alpha\beta > \beta\gamma,$$

folglich ist auch

$$\alpha\beta A > {}^1/_2\alpha A\gamma;$$

$\alpha A\gamma$ ist aber im Paralleltrapez $\alpha\gamma zA$ (Lemma III) $> A\gamma z$,
also ist auch

$$\alpha\beta A \text{ oder } \beta C\gamma > {}^1/_2 A\gamma z$$
$$\text{d. h. } \delta > {}^1/_2\Delta;$$

ebenso folgt

$$\delta_1 > {}^1/_2\Delta_1 \text{ u. s. f.}$$

Das ist prop. II:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Beschreibt man in einen Kreisabschnitt, welcher kleiner als der Halbkreis ist, ein gleichschenkliges Dreieck und über derselben Grundlinie ein zweites, dessen Schenkel Tangenten an den Kreis sind, so scheidet die Tangente, welche man durch die Spitze des ersteren Dreiecks zieht, von dem zweiten stets ein Dreieck ab, welches grösser ist, als die Hälfte jenes ersteren.

Es ist folglich:

$$n\delta + 2n\delta_1 + \ldots > \tfrac{1}{2}\,[n\triangle + 2n\triangle_1 + \ldots]$$
$$> \tfrac{1}{2}\,(K - E),$$

also

$$K < U - \tfrac{1}{2}\,(K - E)$$

oder

$$K < \tfrac{2}{3}U + \tfrac{1}{3}E.$$

Dies ist prop. VI:

Jeder Kreis ist kleiner als $^2/_3$ eines um ihn beschriebenen regelmässigen Vielecks von gerader Seitenzahl zusammengenommen mit dem dritten Theile des dem ersteren ähnlichen inneren Vielecks. (van Swinden, §. 329. Kunze, §. 183.)

Aus der letzten Gleichung folgt unmittelbar

$$K - E < \tfrac{2}{3}\,(U - E).$$

Durch Division mit n erhält man:

$$\frac{K - E}{n} < \tfrac{2}{3}\,\frac{(U - E)}{n}$$

und das ist offenbar prop. IV:

Jeder Kreisabschnitt, der noch nicht einen Halbkreis ausmacht, ist kleiner als $^2/_3$ des gleichschenkligen Dreiecks, welches von der zu dem Abschnitt gehörigen Sehne und den durch ihre Endpunkte gehenden Tangenten gebildet wird. (van Swinden, §. 327.)

Man erhält eine andere obere Grenze (die Huygens aber nicht für die Kreisfläche, sondern für die Kreisperipherie abgeleitet hat), wenn man, statt vom eingeschriebenen n-Eck, vom eingeschriebenen 2n-Eck ausgeht, also von der Gleichung:

$$K = E_1 + 2n\triangle_1 + 4n\triangle_2 + \ldots.$$

und berücksichtigt, dass

$$2\triangle_1 < \tfrac{1}{2}\delta,$$
$$2\triangle_2 < \tfrac{1}{2}\delta_1 \text{ u. s. f.}$$

ist, also die zu E_1 hinzutretende Summe mit σ vergleicht.

Diese Ungleichungen ergeben sich am leichtesten aus folgender Betrachtung:

Es ist $\beta_{11}\beta_1 < \tfrac{1}{2}\beta_{11}\beta$ (da W. $\beta A\gamma$ durch $A\beta_1$ halbirt wird, Lemma II und I), folglich $A\beta_1\gamma < \tfrac{1}{2}A\beta\gamma$; aber da auch $A\beta < \beta C$ (Lemma II), so ist $A\beta\gamma < \beta C\gamma$, also auch $A\beta_1\gamma < \tfrac{1}{2}\beta C\gamma$ oder $< \tfrac{1}{4}\beta Cy$; folglich $2A\beta_1\gamma < \tfrac{1}{2}\beta Cy$ d. h. $2\triangle_1 < \tfrac{1}{2}\delta$. Ebenso folgt $2\triangle_2 < \tfrac{1}{2}\delta_1$ u. s. f.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Mit Berücksichtigung dieser Ungleichungen ergiebt sich:

$$K < E_1 + \tfrac{1}{2}\,[n\delta + 2n\delta_1 + \ldots];$$

oder da

$$n\delta + 2n\delta_1 + \ldots = U - K,$$

$$K < E_1 + \tfrac{1}{2}\,(U - K),$$

oder

$$K < \tfrac{2}{3}E_1 + \tfrac{1}{3}U.$$

Es sind somit drei Grenzgleichungen für die Kreisfläche gewonnen:

$$K > E_1 + \tfrac{1}{3}\,(E_1 - E),$$

$$K < \tfrac{2}{3}U + \tfrac{1}{3}E$$

und

$$K < \tfrac{2}{3}E_1 + \tfrac{1}{3}U.$$

Von den beiden letzten liegt die zweite dem Kreise näher, setzt aber auch die Berechnung des eingeschriebenen Polygons von doppelter Seitenzahl voraus.

Daraus lassen sich nun leicht die entsprechenden Grenzen für die Kreisperipherie (P) herleiten; bezeichnet man durch $u, u_1, u_2 \ldots e, e_1, e_2 \ldots$ die $U, U_1, U_2 \ldots E, E_1, E_2 \ldots$ entsprechenden Polygonumfänge, so ist:

$$\frac{ur}{2} = U,\ \frac{er}{2} = E_1,\ \frac{Pr}{2} = K;$$

also

$$u = \frac{2}{r}\,U$$

$$e = \frac{2}{r}\,E_1.$$

Daraus ergiebt sich für die Kreisperipherie leicht folgende Grenzgleichung:

$$P > e_1 + \tfrac{1}{3}\,(e_1 - e).$$

Das ist der Inhalt von prop. VII:

Der Umkreis ist grösser als der Umfang eines regelmässigen eingeschriebenen Vielecks von gerader Seitenzahl, zusammengenommen mit dem dritten Theile des Unterschiedes zwischen eben diesem Umfange und dem Umfange des eingeschriebenen Vielecks von halb so grosser Seitenzahl. (v. Sw., §. 330.)

Ferner

$$P < \tfrac{2}{3}u_1 + \tfrac{1}{3}e$$

und

$$P < \tfrac{2}{3}e + \tfrac{1}{3}u.$$

Diese letzte Ungleichung ist in prop. IX abgeleitet:

Der Umfang eines Kreises ist kleiner als $\tfrac{2}{3}$ vom Umfange eines in denselben beschriebenen Vielecks und $\tfrac{1}{3}$ vom Umfange des diesem ähnlichen äusseren Vielecks zusammengenommen. (van Swinden, §. 332.)

Dividirt man die letzte Gleichung durch n, so erhält man:

$$\frac{P}{n} < \tfrac{2}{3}\,\frac{e}{n} + \tfrac{1}{3}\,\frac{u}{n},$$

eine Gleichung, die sich leicht in Worte übertragen lässt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Bedeutung dieser Sätze ergiebt sich namentlich bei der wirklichen numerischen Berechnung einer oberen und unteren Grenze, zwischen denen die Kreisperipherie enthalten ist. Die von Archimedes*) aus dem 96-Eck abgeleiteten Grenzen:

$$3^1/_7 < P < 3^{10}/_{71} \quad (2r = 1)$$

lassen sich zu Folge prop. VII und IX schon berechnen, wenn man nur das ein- und umgeschriebene reguläre 12-Eck zu Grunde legt (prop. X), dessen Umfang sich aus dem des ein- und umgeschriebenen regulären 6-Ecks, bloss unter Anwendung des pythagoräischen Lehrsatzes, leicht berechnen lässt.**) Somit lässt sich also die wichtigste Aufgabe der Kreislehre, im Anschluss an den pythagoräischen Lehrsatz, schon für viele Bedürfnisse vollkommen ausreichend absolviren.

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich auch unmittelbar eine äusserst einfache näherungsweise geometrische Quadratur, sowohl des ganzen Kreises, als eines beliebigen Bogens (innerhalb der Archimedischen Grenzen), die in prop. XI und XII mitgetheilt ist. (van Swinden, § 330. 3.)

Dies ist der Inhalt der zwölf ersten Sätze der Huygens'schen Abhandlung. Dieselben bilden einen so wesentlichen Theil unserer Kenntniss der Eigenschaften des Kreises und lassen sich, wie gezeigt worden ist, auf so einfachem Wege begründen, dass ihrer Aufnahme in die elementaren Lehrbücher hoffentlich nichts mehr im Wege stehen wird.

Die nun folgenden Sätze führen zu noch bemerkenswertheren Resultaten;***) allerdings auf Umwegen, die dem Anfänger das Verständniss des eingeschlagenen Entwickelungsganges sehr erschweren. Vielleicht gelingt es aber auch dafür eine einfache Begründung zu finden; jedenfalls belohnt der überraschend reiche Inhalt der Schrift reichlich jede auf sie verwandte Mühe.

---

*) cf. van Swinden, p. 325, oder p. 110 d. Nizze'schen Uebersetzung. Vergl. auch Montucla, Histoire de la quadrature du cercle. 2me éd. p. 50 und Lagny, Mémoires de l'Acad. 1723. p. 55.

**) Es ist nämlich der Umfang v. eingeschr. 6 Eck $= 3$. $(2r = 1)$

„ „ „ umschr. 6 „ $= 3{,}4641\ldots$

„ „ „ eingeschr. 12 „ $= 3{,}1058\ldots = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$

„ „ „ umschr. 12 „ $= 3{,}2154\ldots = \sqrt{2 - \sqrt{3}} : \sqrt{2 + \sqrt{3}}$

daraus ergiebt sich für:

$$e_{12} + {}^1/_3\,(e_{12} - e_6) < P < {}^2/_3\, e_{12} + {}^1/_3\, u_{12},$$

$$3{,}1411\ldots < P < 3{,}1423\ldots$$

***) cf. prop. XX.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

CHRISTIANI HUGENII,

CONST. F.

DE

CIRCULI MAGNITUDINE INVENTA.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

PRAEFATIO.

Circa antiquum tetragonismi problema, quo vel apud mathematum ignaros nihil est celebrius, recens operae pretium nos fecisse rati, et quaedam hactenus compertis meliora ut putamus consecuti, geometris ea demonstrata impertiri volumus. Namque et studiis eorum profutura arbitramur, et novitate ipsa ad rerum abditarum investigationem incitamento futura, reputantibus in eo quoque argumento, ubi omnes pridem summa contentione versati sint, aliqua superfuisse haud indigna diligentiae praemia. Plurimi quidem antehac inventae quadraturae gloriam sibi asserere conati sunt, variaque subinde commenta protulere, falsis vera miscentes. Verum a peritioribus omnia vel eversa fuisse vel contempta scimus, neque aliud adhuc receptum, quo omnis circuli dimensio niteretur, praeter unum illud, maiorem esse eum inscripto sibi polygono, circumscripto minorem. Nos autem propiorem determinationem nunc exhibemus ostendimusque, quod duobus sumptis polygonis proportione mediis inter inscriptum circumscriptumque ipsis simile, minoris eorum perimeter circumferentia circuli maior existit, reliquum vero polygonum eadem proportione circuli aream exuperat. Et hoc quidem ut inter ea quae demonstraturi sumus et difficillimum et contemplatione praecipue dignum videatur, alia tamen sunt non accuratiora modo, sed quae et usu magis probentur; quae sane hic in antecessum non recensebimus, quippe in sequentibus rectius percipienda. Breviter tamen quid studiis geometriae conferant exposuisse proderit, cum non minimam habeant utilitatis commendationem. Cum igitur duplicem propositi tractationem instituerimus, primum eo tradendo quorum demonstratio consuetis geometriae elementis contenta est, deinde centrorum gravitatis quoque considerationem adhibendo: in prioribus quidem illud explicatum reperietur, quomodo non tantum circumferentiae toti, sed et arcui cuilibet dato recta linea aequalis invenienda sit; expedita ratione ad mechanicas constructiones, quaeque vel subtilissimas earum minime frustretur. Quomodo item numeros exercentibus peripheriae ad diametrum ratio, quam Archimedes ex polygonis laterum 96 eruit, per dodecagona sola comprobari queat. Ex polygonis autem laterum 10800, cum iis qui veterem insistunt viam vix hi peripheriae termini existant 62831852 et 62831855 ad diametrum partium 20000000, nostra methodo isti prodiisse cernentur 6283185307179584 et 6283185307179589; semperque duplicem obtineri verorum characterum numerum, quacunque laterum multitudine polygona adhibeantur. Quod quidem certa ratione contingere perspeximus sicuti et quadratum cuiusque numeri bis totidem quot latus characteribus

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

plerumque constituitur. At maiora etiam compendia centrorum gravitatis proprietas subministrat, et propius quodammodo ad perfectionem insuperabilis problematis per haec accessisse videmur. Certe ad Archimedeos peripheriae limites constituendos, solo nunc inscripti trigoni cognito latere indigemus. E sexagintangulo autem inter hosce eam contineri probamus 31415926538 et 31415926533, posita diametro partium 10000000000, cum solita methodo vix isti producantur 3145 et 3140. Adeo ut triplus iam et ultra sit verarum hic notarum numerus, sicut per praecedentia duplus; et perpetuo quidem successu, haud aliter quam in maioribus numeris cubum sui lateris triplum esse animadvertitur. Ergo posthac si qui falso circumferentiae magnitudinem definient, per numerosa polygona non refutabuntur, sed calculo brevi minimeque intricato, quemque erroris insimulare, quod hactenus fere soliti sunt, haud facile possint. Ad haec si quid in subtensarum canone, quem emendatum haberi quantum referat omnes sciunt, in eo contexendo si quid erit admissum aut aliunde perversum irrepserit, non difficile erit horum ope restituere, cum alia nunc ratione ex inscriptis in circulo longitudinem arcuum quibus subtenduntur invenire liceat. Quinimo et omni canonum auxilio destitutis ostendimus, quo pacto ex lateribus triangulorum datis angulos eorum investigare queant, ut nunquam duorum secundorum scrupulorum sit a vero dissensus, saepe ne unius quidem tertii. Et haec quidem non levia commoda visum iri confidimus. Comperimus autem et Renatum Cartesium, cuius viri inventis cum philosophia universa tum mathesis plurimum illustrata est, nonnulla quae huc spectant scriptis mandasse. Ea vero defuncto ipso in commentariis reperta feruntur, neque adhuc rescire potuimus qua industria aut eventu hisce manum admoverit. Willebrordi autem Snellii geometrae eruditi Cyclometricus exstat, multo labore conscriptus, quique omnis in his est. Atque ille non exiguam laudem promeritus videretur, si praecipua duo theoremata, quibus omne id opus velut fundamentis superstructum est, demonstrare potuisset. Sed quas ibi pro demonstrationibus haberi postulat, propositum minime comprobant: ipsa vero theoremata, sicut in utroque evidenti ratione nos ostendimus, praeclaram continent veritatem. Et ea quidem sequentibus merito inserenda putavimus, quod causae eorum a nostris pendeant inventis.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

CHRISTIANI HUGENII,

CONST. F.

DE

CIRCULI MAGNITUDINE INVENTA.

Theorema I. Propositio I.

Si circuli portioni semicirculo minori triangulum maximum inscribatur, et portionibus reliquis triangula similiter inscribantur, erit triangulum primo descriptum duorum simul quae in portionibus reliquis descripta sunt minus quam quadruplum.

Esto circuli portio ABC (Fig. 1) semicirculo minor, cuius diameter BD; maximum autem inscriptum triangulum ABC, hoc est, quod basin et altitudinem habeat cum portione eandem. Et reliquis duabus portionibus inscribantur triangula item maxima AEB, FBC. Dico triangulum ABC minus esse quam quadruplum triangulorum AEB, BFC simul sumptorum. Iungatur enim EF, quae secet diametrum portionis in puncto G. Quoniam igitur arcus AB bifariam dividitur in E puncto, erit utraque harum EA, EB, maior dimidia AB. Quamobrem quadratum AB minus erit quam quadruplum quadrati EB vel EA. Sicut autem quadratum AB ad quadratum EB, ita est DB ad BG longitudine; quia quadratum quidem AB aequale est rectangulo quod a DB et circuli totius diametro continetur, quadratum vero EB aequale rectangulo sub eadem diametro et recta BG. Minor igitur est BD quam quadrupla BG. Sed et AC minor est quam dupla EF, quoniam haec ipsi AB aequatur. Ergo patet triangulum ABC minus esse quam octuplum trianguli EBF. Huic autem triangulo aequantur singula AEB, BFC. Ergo utriusque simul triangulum ABC minus erit quam quadruplum. Quod erat ostendendum.

Theor. II. Prop. II.

Si fuerit circuli portio semicirculo minor, et super eadem basi triangulum, cuius latera portionem contingant; ducatur autem quae contingat portionem in vertice: haec a triangulo dicto triangulum abscindet maius dimidio maximi trianguli intra portionem descripti.

Esto circuli portio semicirculo minor ABC (Fig. 2), cuius vertex B. Et contingant portionem ad terminos basis rectae AE, CE, quae conveniant in E: convenient enim quia portio

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

semicirculo minor est. Porro ducatur FG, quae contingat ipsam in vertice B; et iungantur AB, BC. Ostendendum est itaque, triangulum FEG maius esse dimidio trianguli ABC. Constat triangula AEC, FEG, item AFB, BGC aequicruria esse, dividique FG ad B bifariam. Utraque autem simul FE, EG, maior est quam FG; ergo EF maior quam FB, vel quam FA. Tota igitur AE minor quam dupla FE. Quare triangulum FEG maius erit quarta parte trianguli AEC. Sicut autem FA ad AE, ita est altitudo trianguli ABC ad altitudinem trianguli AEC, et basis utrique eadem AC. Ergo, quum FA sit minor quam subdupla totius AE, erit triangulum ABC minus dimidio trianguli AEC. Huius vero quarta parte maius erat triangulum FEG. Ergo triangulum FEG maius dimidio trianguli ABC. Quod ostendendum fuit.

Theor. III. Prop. III.

Omnis circuli portio semicirculo minor ad maximum triangulum inscriptum maiorem rationem habet quam sesquitertiam.

Esto circuli portio semicirculo minor cui maximum sit inscriptum triangulum ABC (Fig. 3). Dico portionem ad dictum triangulum maiorem rationem habere quam quatuor ad tria. Inscribantur enim et reliquis portionibus duabus maxima triangula ADB, BEC. Itaque minus est triangulum ABC quam illorum simul quadruplum (per 1 huius): ac proinde spatium aliquod adiungi potest triangulo ABC, quod una cum ipso minus etiam sit quam quadruplum dictorum simul triangulorum ADB, BEC. Esto itaque ea ratione adiectum triangulum AFC, ut totum spatium ABCF minus sit quam quadruplum triangulorum ADB, BEC. Et porro in residuis portionibus maxima triangula inscribi intelligantur; itemque in residuis semper, donec portiones quibus postremum inscribentur simul minores sint triangulo ACF, hoc enim fieri potest. Itaque et triangula postremum inscripta simul triangulo ACF minora erunt. Quia autem spatii ABCF quarta parte maiora sunt duo simul triangula ADB, BEC. Rursusque quarta horum parte maiora triangula quatuor, quae portionibus reliquis inscribuntur. Et horum quarta maiora similiter, quae deinceps; atque ita continue, si plura fuerint descripta. Erit propterea spatium ex quadrilatero ABCF et caeteris inscriptis triangulis, et triente eorum, quae postremo inscripta erunt, compositum, maius quam sesquitertium ipsius quadrilateri ABCF. Hoc enim ab Archimede demonstratum est, quod si fuerint spatia quotcunque in ratione quadrupla, ea omnia simul cum triente minimi ad maximum rationem habebunt sesquitertiam. Dividendo itaque, triangula omnia intra portiones ADB, BEC descripta cum triente postremo descriptorum maiora erunt tertia parte spatii ABCF. Sed triens dictus minor est triente trianguli ACF. Igitur dempto illinc triente postremo inscriptorum; a spatio autem ABCF ablato triangulo AFC, erunt triangula omnia intra portiones ADB, BEC descripta, maiora triente trianguli ABC. Quare componendo, tota figura rectilinea portioni ABC inscripta maior quam sesquitertia trianguli ABC, multoque magis portio ipsa. Quod erat demonstrandum.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Theor. IV. Prop. IV.

Omnis circuli portio, semicirculo minor, minor est duabus tertiis trianguli eandem cum ipsa basin habentis, et latera portionem contingentia.

Esto circuli portio, semicirculo minor, ABC (Fig. 4), et contingant ipsam ad terminos basis rectae AD, CD, quae conveniant in puncto D. Dico portionem ABC minorem esse duabus tertiis trianguli ADC. Ducatur enim EF quae portionem contingat in vertice B, et inscribatur ipsi triangulum maximum ABC. Quum igitur triangulum EDF maius sit dimidio trianguli ABC [per 2 huius], manifestum est ab illo partem abscindi posse, ita ut reliquum tamen maius sit dimidio dicti ABC trianguli. Sit igitur hoc pacto abscissum triangulum EDG. Et ducantur porro rectae HI, KL quae portiones reliquas AMB, BNC in verticibus suis contingant, ipsisque portionibus triangula maxima inscribantur. Idemque prorsus circa reliquas portiones fieri intelligatur, donec tandem portiones residuae simul minores sint quam duplum trianguli EDG. Erit igitur inscripta portioni figura quaedam rectilinea, atque alia circumscripta. Et quoniam triangulum EGF maius est dimidio trianguli ABC; et rursus triangula HEI, KFL maiora quam dimidia triangulorum AMB, BNC; idque eadem semper ratione in reliquis locum habet, ut triangula super portionum verticibus constituta, eorum quae intra portiones ipsas descripta sunt, maiora sint quam subdupla: apparet triangula omnia extra portionem posita etiam absque triangulo EGD maiora simul esse quam dimidia triangulorum omnium intra portionem descriptorum. Atqui segmentorum in portione reliquorum triangulum quoque EGD maius est quam subduplum. Ergo triangulum EDF simul cum reliquis triangulis, quae sunt extra portionem, maius erit dimidio portionis totius ABC. Quare multo magis spatium a rectis AD, DC et arcu ABC comprehensum maius erit portionis ABC dimidio. Ac proinde triangulum ADC maius quam portionis ABC sesquialterum. Quod erat demonstrandum.

Theor. V. Prop. V.

Omnis circulus maior est polygono aequalium laterum sibi inscripto et triente excessus quo id polygonum superat aliud inscriptum subduplo laterum numero.

Esto circulus centro C (Fig. 5), sitque ipsi inscriptum polygonum aequalium laterum, quorum unum sit AB. Atque alterum item polygonum sit inscriptum, cuius bina latera AD, DB, subtendat AB. Hoc igitur priore polygono maius est. Sit autem excessus trienti aequale H spatium. Dico circulum maiorem esse polygono ADB una cum spatio H. Ducantur enim ex centro rectae CA, CB. Quoniam igitur portio circuli ADB maior est quam sesquitertia trianguli ADB sibi inscripti (p. 3 huius), erunt portiones AD, DB, simul maiores triente trianguli ADB. Quam ob rem et sector CAB maior erit utrisque simul quadrilatero CADB et triente trianguli ADB. Sicut autem sector CAB ad circulum totum, ita est quadrilaterum CDBA ad polygonum ADB, et ita quoque triens trianguli ADB ad trientem excessus polygoni ADB supra polygonum AB. Ergo manifestum est circulum quoque totum maiorem fore polygono ADB una cum triente excessus quo polygonum ADB superat polygonum AB, hoc est, una cum spatio H. Quod erat demonstrandum.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Theor. VI. Prop. VI.

Omnis circulus minor est duabus tertiis polygoni aequalium laterum sibi circumscripti et triente polygoni similis inscripti.

Esto circulus cuius centrum A (Fig. 6), et inscribatur ipsi polygonum lateribus aequalibus, quorum unum sit BC; et aliud simile circumscribatur FEG, cuius latera circulum contingant ad occursum angulorum polygoni prioris. Dico circulum minorem esse duabus tertiis polygoni FEG, simul cum triente polygoni BC. Ducantur autem ex centro rectae AB, AC. Igitur quoniam super basi portionis BDC consistit triangulum BEC, cuius latera portionem contingunt, erit ipsa minor duabus tertiis trianguli BEC (per 4 huius). Itaque si triangulo ABC addantur duae tertiae trianguli BEC, hoc est, duae tertiae excessus quadrilateri ABEC supra triangulum ABC, ex utrisque compositum spatium maius erit sectore circuli ABC. Idem est autem, sive triangulo ABC addantur duae tertiae excessus dicti, sive addantur duae tertiae quadrilateri ABEC, contraque auferantur duae tertiae trianguli ABC: hinc autem fiunt duae tertiae quadrilateri ABEC cum triente trianguli ABC. Ergo apparet sectorem ABC minorem esse duabus tertiis quadrilateri ABEC et triente trianguli ABC. Quare sumptis omnibus quoties sector ABC circulo continetur, totus quoque circulus minor erit duabus tertiis polygoni circumscripti FEC et triente inscripti BC. Quod erat demonstrandum.

Theor. VII. Prop. VII.

Omnis circuli circumferentia maior est perimetro polygoni aequalium laterum sibi inscripti, et triente excessus quo perimeter eadem superat perimetrum alterius polygoni inscripti subduplo laterum numero.

Esto circulus AB (Fig. 7), centro O, cui inscribatur polygonum aequilaterum ACD, atque alterum duplo laterum numero AECBDF. Sitque recta GI aequalis perimetro polygoni AECBDF, GH vero aequalis perimetro polygoni ACD. Excessus igitur perimetrorum est HI, cuius triens IK adiiciatur ipsi GI. Dico tota GK maiorem esse circuli AB circumferentiam. Inscribatur enim circulo tertium polygonum aequilaterum ALEMC, quod sit duplo numero laterum polygoni AECBDF. Et super lineis GH, HI, IK, triangula constituantur quorum communis vertex N, altitudo autem aequalis semidiametro circuli AB. Igitur quoniam GH basis aequalis est perimetro polygoni ACD, erit triangulum GNH aequale polygono, cui bis totidem sunt latera, hoc est, polygono AECBDF. Hoc enim patet, ductis ex centro rectis OA et OE, quarum haec secet AC in P. Nam triangulum quidem AEO aequale est triangulo basin habenti AP et altitudinem radii OE. Quanta autem pars est triangulum AEO polygoni AECBDF, eadem est recta AP perimetri ACD. Itaque polygonum AECBDF aequabitur triangulo cuius basis aequalis perimetro ACD, altitudo autem radio EO: hoc est triangulo GNH. Eadem ratione, quoniam basis GI est aequalis polygoni AECBDF perimetro, et altitudo trianguli GNI eaqualis radio circuli, erit triangulum GNI aequale polygono ALEMC. Itaque triangulum HNI aequale excessui polygoni ALEMC supra polygonum AECBDF.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Trianguli autem HNI subtriplum est ex constructione triangulum INK. Ergo hoc aequale erit dicti excessus trienti. Quare totum triangulum GNK minus erit circulo AB (per 5 huius). Altitudo autem trianguli aequalis est circuli semidiametro. Ergo evidens est rectam GK tota circuli circumferentia minorem esse. Quod erat demonstrandum.

Hinc manifestum est, si a sesquitertio laterum polygoni circulo inscripti auferatur triens laterum polygoni alterius inscripti subduplo laterum numero, reliquum circumferentia minus esse. Idem enim est, sive perimetro maiori addatur $^1/_3$ excessus quo ipsa superat perimetrum minorem, sive addatur $^1/_3$ perimetri maioris contraque auferatur $^1/_3$ perimetri minoris. Hinc autem fit sesquitertium maioris perimetri minus triente minoris. Quare si a sexdecim inscripti dodecagoni lateribus duo latera inscripti hexagoni, hoc est, diameter circuli deducatur, reliqua circuli circumferentia minor erit, aut si ab octo dodecagoni lateribus radius deducatur, reliqua minor erit circumferentiae semisse. Hoc autem ad constructionem mechanicam utile est, quoniam exigua est differentia, sicut postea ostendetur. Manifestum etiam, in omni arcu qui semicircumferentia minor sit, si ad subtensam addatur triens excessus quo subtensa sinum superat, compositam arcu minorem esse.

Theor. VIII. Prop. VIII.

Circulo dato, si ad diametri terminum contingens ducatur, ducatur autem et ab opposito diametri termino quae circumferentiam secet occurratque tangenti ductae: erunt interceptae tangentis duae tertiae cum triente eius quae ab intersectionis puncto diametro ad angulos rectos incidet simul arcu abscisso adiacente maiores.

Esto circulus centro A (Fig. 8), diametro BC, et ducatur ex C recta quae circulum contingat CD: huic autem occurrat ducta ab altero diametri termino recta BD, quae circumferentiam secet in E: sitque EF diametro BC ad angulos rectos. Dico tangentis interceptae CD duas tertias simul cum triente ipsius EF, arcu EC maiores esse. Iungantur enim AE, EC; et ducatur tangens circulum in E puncto, quae tangenti CD occurrat in G. Erit igitur GE ipsi GC aequalis, itemque DG; nam si centro G circumferentia describatur quae transeat per puncta C, E, eadem transibit quoque per D punctum, quoniam angulus CED rectus est. Ostensum autem fuit supra, duas tertias quadrilateri AEGC una cum triente trianguli AEC simul maiores esse sectore AEC (per 6 huius). Estque quadrilaterum AEGC aequale triangulo basin habenti duplam CG, hoc est, CD: et altitudinem CA, triangulum vero AEC aequale triangulo basin ipsi EF aequalem habenti et altitudinem dictam AC. Itaque apparet duas tertias quadrilateri AEGC simul cum triente trianguli AEC aequari triangulo qui basin habeat compositam ex duabus tertiis CD et triente EF, altitudinem vero radii AC. Quare eiusmodi quoque triangulum maius erit sectore AEC. Unde liquet basin ipsius, hoc est, compositam ex duabus tertiis ipsius CD et triente ipsius EF, maiorem esse arcu CE. Quod erat demonstrandum.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Theor. IX. Prop. IX.

Omnis circuli circumferentia minor est duabus tertiis perimetri polygoni aequalium laterum sibi inscripti et triente perimetri polygoni similis circumscripti.

Esto circulus cuius A (Fig. 3) centrum, et inscribatur ei polygonum aequilaterum, cuius latus CD: semileque aliud circumscribatur lateribus ad priora parallelis, quorum unum sit EF. Dico circuli totius circumferentiam minorem esse duabus tertiis ambitus polygoni CD et triente ambitus polygoni EF. Ducatur autem diameter circuli BG, quae simul inscripti polygoni latus CD medium dividat in H et circumscripti latus EF in G (constat autem G fore punctum contactus lateris EF), et ponatur HL aequalis ipsi HG, et iungantur AC, BC et producantur, occurratque BC lateri EF in K, producta autem AC incidet in E angulum polygoni circumscripti. Quoniam igitur HL aequalis HG, erit BL dupla ipsius AH: Ideoque ut GA ad AH, ita GB ad LB. Maior autem est ratio HB ad BL, quam GB ad BH; quoniam hae tres sese aequaliter excedunt, GB, HB, LB. Itaque maior erit ratio GB ad BL, hoc est, GA ad AH, quam duplicata rationis GB ad BH. Sicut autem GA ad AH, ita est EG ad CH; et sicut GB ad BH, ita KG ad CH. Ergo maior erit ratio EG ad CH, quam duplicata eius, quam habet KG ad CH. Quare maior ratio EG ad KG, quam KG ad CH. Ideoque duae simul EG, CH omnino maiores dupla KG. Et sumptis omnium trientibus, erunt trientes utriusque EG et CH simul maiores duabus tertiis KG. Quamobrem addito utrimque ipsius CH triente, erit triens EG cum duabus tertiis CH, maior duabus tertiis KG cum triente CH. Hisce vero minor etiam est arcus CG (per praeced.). Igitur duae tertiae CH simul cum triente ipsius EG maiores omnino sunt eodem arcu CG. Unde sumptis omnibus toties quoties arcus CG circumferentia tota continetur, erunt quoque duae tertiae perimetri polygoni CD, cum triente perimetri polygoni EF, maiores circuli totius circumferentia. Quod fuerat ostendendum.

Omnis igitur circumferentiae arcus quadrante minor, minor est sinus sui besse et tangentis triente.

Problema I. Prop. X.

Peripheriae ad diametrum rationem invenire quamlibet verae propinquam.

Minorem esse peripheriae ad diametrum rationem quam triplam sesquiseptimam: maiorem vero quam $3^{10}/_{71}$ Archimedes ostendit inscripto circumscriptoque 96 laterum polygono. Idem vero hic per dodecagona demonstrabimus.

Quia enim latus inscripti circulo dodecagoni maius est partibus $5176^{3}/_{8}$, qualium radius continet 10000: duodecim latera proinde, hoc est, perimeter inscripti dodecagoni maior erit quam $62116^{1}/_{2}$: perimeter autem hexagoni inscripti est radii sextupla, ideoque partium 60000. Igitur dodecagoni perimeter perimetrum hexagoni excedit amplius quam partibus $2116^{1}/_{2}$. Quare triens excessus maior erit quam $705^{1}/_{2}$. Igitur dodecagoni perimeter una cum triente excessus, quo perimetrum hexagoni superat, maior erit aggregato partium $62116^{1}/_{2}$ et $705^{1}/_{2}$, hoc est,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

partibus 62822. Atque hisce proinde omnino maior erit circuli peripheria (per 7 huius). Est autem maior ratio 62822 ad 20000, longitudinem diametri, quam $3^{10}/_{71}$ ad 1. Ergo omnino etiam peripheriae ad diametrum ratio maior erit.

Rursus quoniam latus dodecagoni inscripti minus est partibus $5176^{2}/_{5}$, erunt octo latera, hoc est, $^{2}/_{3}$ perimetri minora quam $41411^{1}/_{5}$. Item quia latus dodecagoni circumscripti minus est quam 5359 erunt quatuor latera, hoc est, triens perimetri minor quam 21436. Quamobrem $^{2}/_{3}$ perimetri dodecagoni inscripti cum triente perimetri circumscripti minores erunt quam $62847^{1}/_{5}$. Sed istis simul minor etiam est circuli circumferentia (per 9 huius). Ergo haec ad diametrum omnino minorem habebit rationem quam $62847^{1}/_{5}$ ad 20000; et multo minorem proinde quam $62857^{1}/_{7}$ ad 20000, hoc est, quam triplam sesquiseptimam.

Demonstrati itaque sunt termini rationis peripheriae ad diametrum, quos Archimedes statuit. Eosdem vero postmodum solius inscripti trigoni aequilateri latere indagato comprobabimus. Porro ut propinquior inveniatur ratio plurium laterum polygona consideranda sunt. Intelligatur igitur circumscriptum circulo polygonum aliudque inscriptum laterum 60. Et praeter haec subduplo numero laterum inscriptum, nempe trigintangulum.

Et invenitur quidem latus inscripti sexagintanguli maius partibus 10467191, qualium radius 100000000 et latus trigintanguli minus quam 20905693: cuius dimidium $10452846^{1}/_{2}$ est sinus arcus aequantis $^{1}/_{60}$ circumferentiae. Subtensa autem erat 10467191. Ergo differentia $14344^{1}/_{2}$ minor vera: et triens differentiae $4781^{1}/_{2}$, qui additus ad subtensam 10467191 facit $10471972^{1}/_{2}$. Quibus itaque maior est arcus $^{1}/_{60}$ circumferentiae. Ductis autem $10471972^{1}/_{2}$ sexagies fiunt 628318350. Hisce igitur partibus omnino maior est circumferentia tota.

Rursus quoniam latus inscripti sexagintanguli minus est quam 10467192, erunt duae tertiae ipsius minores quam 6978128. Circumscripti autem sexagintanguli latus cum sit minus quam 10481556, erit triens ipsius minor quam 3493852. Quibus additis ad 6978128, fiunt 10471980. Hae igitur omnino excedunt $^{1}/_{60}$ circumferentiae, et sexagecuplum ipsarum, hoc est 628318800 maius erit circumferentia tota. Quod si vero polygona adhibeamus laterum 10800, quorum inscripti quidem latus calculo Ludolphi Coloniensis Arithmetici nobilis inventum est partium 58177640912684919 non una amplius, subtenditurque duobus scrup. primis; circumscripti autem latus 58177643374063182 non una minus; praetereaque latus polygoni subduplo laterum numero inscripti, quod est 116355276902613523 non una minus. Hinc peripheriae longitudo invenitur maior quam partium 6283185307179584; minor autem quam 6283185307179589, qualium radius 1000000000000000. Solita autem methodo ex additis inscripti circumscriptique polygoni istius lateribus, invenietur tantum maiorem esse peripheriam partibus 62831852, et minorem 62831855. Patet igitur notarum verarum amplius quam duplum numerum esse a nobis inventum. Hoc autem et in praecedentibus ita se habet, semperque evenire necesse est quotcunque laterum polygonis utamur. At per ea, quae postea trademus, triplum numerum notarum facile obtineri apparebit.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Problema II. Prop. XI.

Rectam sumere peripheriae dati circuli aequalem.

Ostensum est superius, quod octo inscripti dodecagoni latera dempto circuli radio minora sunt peripheria dimidia. In constructione autem ut plurimum defectus animadverti nequit. Nam si quatermillesima diametri pars accedat longitudini sic inventae, iam dimidiam peripheriam excedet. Quod sic fiet manifestum. Quarum partium radius est 10000, earum latus dodecagoni inscripti circulo est amplius quam $5176^3/_8$. Unde latera octo maiora quam 41411, et dempto radio 10000, erit reliqua maior quam 31411, cui si addantur partes 5, hoc est, $^1/_{4000}$ diametri, fient iam 31416; quibus minorem esse circumferentiam dimidiam liquet ex praecedentibus. Latus autem dodecagoni inscripti facile invenitur, quia radius peripheriae sextantem subtendit. Estque haec ratio accuratior quam si tripla sesquiseptima utamur. Nam secundum eam excedetur peripheriae longitudo amplius quam $^1/_{1600}$ diametri.

Aliter.

Esto datus circulus cuius BC diameter (Fig. 10, Tfl. 2). Dividatur semicircumferentia BC bifariam in D, reliqua vero trifariam in E et F. Et iungantur DE, DF, quae secent diametrum in G et H. Erit trianguli GDH latus alterum una cum basi GH quadrante BD exiguo maius, neque enim excedet $^1/_{5000}$ diametri BC. Sciendum est enim fieri DG vel DH duobus inscripti dodecagoni lateribus aequales. GH autem lateri dodecagoni circumscripti. Unde quidam iunctas DG et GH maiores esse constat quadrante BD. Nam quia per 8 huius octo latera dodecagoni circulo inscripti cum quatuor lateribus circumscripti maiora sunt peripheria tota, ideo sumpta omnium quarta parte erunt quoque duo latera inscripti cum latere uno circumscripti maiora peripheriae quadrante. Porro quoniam latus inscripti dodecagoni minus est quam partium 51764 qualium BC 200000: erunt latera duo, hoc est, GD, minor quam 103528. Circumscripti autem dodecagoni latus minus est partibus 53590, ipsa nimirum GH. Itaque iunctae una DG, GH efficiunt minus quam 157118. At quadrantem BD constat ex praecedentibus maiorem esse quam 157079. Ergo differentia minor est quam partium 39, cum 40 demum efficiant $^1/_{5000}$ diametri BC.

Problema III. Prop. XII.

Dato arcui cuicunque rectam aequalem sumere.

Esto datus circumferentiae arcus CD (Fig. 11, Tfl. 2), primum quadrante minor, cui rectam aequalem sumere oporteat. Dividatur arcus CD bifariam in E, sitque subtensae CD aequalis recta FG. Duabus vero CE, ED, quae subtendunt arcus dimidios, aequalis FH. Et ipsi FH iungatur HI triens excessus GH. Erit tota FI arcui CD aequalis fere: adeo ut una sui particula, qualium 1200 continet, aucta, maior futura sit, etiamsi arcus CD quadranti aequalis detur. In minoribus autem arcubus minor erit differentia. Nam si fuerit datus non maior peripheriae sextante, linea inventa minus quam $^1/_{6000}$ sui parte a vera arcus longitudine deficiet. Et minores

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

quidem esse arcubus rectas eo modo inventas constat ex theoremate 7 huius. De quantitate autem differentiae est ostendendum.

Primum itaque ponendo arcum CD quadranti peripheriae aequalem, erit CD recta, hoc est, FG, latus quadrati circulo inscripti, et minor proinde quam partium 141422, qualium radius circuli 100000. CE autem vel ED latus inscripti octogoni, ideoque maior quam 76536. Est autem duplae ED aequalis FH. Ergo haec maior quam 153072. Quare excessus GH maior quam 11650. Et huius triens HI maior quam 3883. Ideoque tota FI maior quam 156955. Arcus autem CD cum quadranti aequalis ponitur minor est quam 157080. Itaque minus ab hoc discrepat recta FI quam partibus 125, qualium ipsa est 156955. Quae utique minus efficiunt quam $^1/_{1200}$ ipsius FI.

Si vero sextans peripheriae sit arcus CD, erit recta CD, hoc est, FG, latus hexagoni inscripti, ideoque partium 10000, et CE vel ED latus dodecagoni, ac proinde maior quam $5176^3/_8$. Cuius dupla FH maior quam $10352^3/_4$; unde GK maior quam $352^3/_4$ et HI maior quam $117^7/_{12}$. Tota igitur FI maior quam $10470^1/_3$. Arcus autem CD, sextans peripheriae, minor est quam 10472. Ergo deficiunt lineae FI partium earundem pauciores quam $1^2/_3$, Quae non aequant $^1/_{6000}$ FI. Porro cum arcus quadrante maior datus erit, dividendus est in partes aequales 4 vel 6 vel plures, prout accuratiori dimensione uti voluerimus, sednumero pares: earumque partium subtensis simul sumptis adiungendus est triens excessus quo ipsae superant aggregatum earum quae arcubus duplis subtenduntur. Ita namque componetur longitudo arcus totius. Vel hac etiam ratione eadem habebitur, si arcus reliqui ad semicircumferentiam longitudo inveniatur aut supra eandem excessus, aut reliqui ad circumferentiam totam, si dodrante maior fuerit datus; eaque longitudo adiungatur vel auferatur a dimidiae vel toti us circumferentiae longitudine, quam antea invenire docuimus.

Theor. X. Prop. XIII.

Latus polygoni aequilateri circulo inscripti, proportione medium est inter latus polygoni similis circumscripti, et dimidium latus polygoni inscripti subduplo laterum numero.

In circulo cuius centrum A (Fig. 12, Tfl. 2), radius AB, sit latus inscripti polygoni aequilateri BC; et latus circumscripti similis polygoni DE ipsi BC parallelum. Ergo producta AB transibit per D, et AC perE. Et si ducatur CF ipsi AB ad angulos rectos, ea erit dimidium latus polygoni inscripti subduplo numero laterum. Itaque ostendendum est, BC mediam esse proportione inter ED et CF. Ducatur AG, quae dividat ED bifariam, itaque erit ipsa quoque circuli semidiameter et aequalis AB. Et quoniam est ut ED ad CB sic DA ad AB, hoc est, DA ad AG; sicut autem DA ad AG, ita BC ad CF propter triangulos similes DAG, BCF. Erit proinde ut ED ad CB, ita quoque CB ad CF. Quod erat demonstrandum.

Lemma.

Esto linea BC (Fig. 13, Tfl. 2) divisa aequaliter in R; et inaequaliter in F, sitque segmentum maius FC; et fiat BO aequalis utrique simul BC, CF; BM vero utrique BC, CR.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dico maiorem esse rationem RB ad BF, quam triplicatam eius, quam habet OB ad BM. Sumatur enim ipsi OM aequalis utraque harum ML, LP. Quoniam igitur MO ipsi RF aequalis (nam hoc ex constructione intelligitur), erit PO tripla ipsius FR. Sed et BM tripla est BR. Ergo ut BR ad BM, ita FR ad PO. Et permutando ut BR ad FR, sic BM ad PO. Maior autem est BO quam BM. Ergo maior erit ratio BO ad OP, quam BR ad RF et per conversionem rationis minor OB ad BP quam RB ad BF. Porro quoniam aequales sunt OM, ML, maior erit ratio BO ad OM, quam BM ad ML: et per conversionem rationis minor OB ad BM quam MB ad BL. Eodem modo minor adhuc ostendetur ratio MB ad BL quam LB ad BP. Itaque omnino ratio triplicata eius quam habet OB ad BM minor erit quam composita ex rationibus OB ad BM, BM ad BL et BL ad PB, hoc est, quam ratio OB ad BP. Maior autem erat RB ad BF, quam OB ad BP. Ergo omnino maior erit ratio RB ad BF, quam triplicata rationis OB ad BM. Quod erat propositum.

Theor. XI. Prop. XIV.

Omnis circuli circumferentia minor est minore duarum mediarum proportionalium inter perimetros polygonorum similium, quorum alterum ordinate circulo inscriptum sit, alterum circumscriptum. Et circulus minor est polygono istis simili cuius ambitus maiori mediarum aequetur.

Esto circulus BD, cuius centrum A (Fig. 14, Tfl. 2). Et inscribatur ei polygonum aequilaterum BCDL, simileque circumscribatur lateribus parallelis HKMN. Sitque perimetro polygoni HKMN aequalis recta T, perimetro autem BCDL aequalis Z. Et inter Z et T duae sint mediae proportionales X et V, quarum X minor. Dico circumferentiam circuli BD minorem esse recta X. Et si fiat polygonum in quo Y, cuius perimeter aequetur rectae V, simile autem sit polygono BCDL aut HKMN; dico circulum BN minorem haberi polygono Y. Ducatur enim diameter circuli PE, quae dividat bifariam latera parallela BC, HK, inscripti circumscriptique polygoni in R et E; erit autem E punctum contactus lateris HK, et BC secabitur in R ad angulos rectos. Ducatur etiam ex centro recta ACK, quae utriusque polygoni angulos C et K bifariam secet, nam hoc ab eadem recta fieri constat; et iungatur CE. Ipsi autem CE ponatur aequalis CF; sitque duabus his CR, CF tertia proportionalis CG. Ergo qualis polygoni inscripti latus est CE sive CF, talis circumscripti latus erit CG (per 13 huius). Ideoque duae tertiae CF cum triente CG simul maiores erunt arcu EC (per 9 huius). Sit autem duabus tertiis CF cum triente CG aequalis recta S. Ergo et haec maior erit arcu EC. Et quoniam se habet CR ad CF, ut CF ad CG, erit quoque dupla CR una cum CF ad triplam CR, hoc est, utraque simul BC, CF ad utramque BC, CR, ut dupla CF una cum CG ad triplam CF: vel sumptis horum trientibus, ut $^2/_3$ CF una cum $^1/_3$ CG ad CF, hoc est ut S ad CF. Quare etiam triplicata ratio eius quam habet utraque simul BC, CF ad utramque BC, CR eadem erit triplicatae rationi S ad CF. Maior autem est ratio RB ad BF quam triplicata eius, quam habet utraque simul BC, CF at utramque BC, CR (per lemma praec.). Ergo maior eadem ratio RB ad BF quam triplicata eius quam habet S ad

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

CF, hoc est, quam cubi S ad cubum CF. Sicut autem RB ad BF, ita est cubus RB ad id quod fit ex quadrato RB in BF. Ergo maior quoque ratio cubi RB ad quadratum RB in BF, quam cubi S ad cubum CF. Quadrato autem RB in BF minus est rectangulum sub RB, BG, in FC, quod sic ostenditur. Quia enim proportionales sunt: RC, CF, CG, erit id quo maior mediam excedit, hoc est FG, maior quam quo media minimam, hoc est, quam FR. Maior autem est FC quam FB. Ergo omnino maior erit ratio CF ad FR, quam FB ad FG. Et per conversionem rationis, minor ratio FC ad CR, quam FB ad BG. Et permutando minor FC ad FB, quam CR seu RB ad BG: hoc est (sumpta communi altitudine BR) quam quadrati RB ad rectangulum RBG. Unde quod fit ex rectangulo RBG in FC minus erit quam quod ex quadrato RB in FB, uti dictum fuit. Quum itaque maior ostensa fuerit ratio cubi RB ad quadratum RB in BF, quam cubi S ad cubum CF, omnino quoque maior erit ratio cubi RB ad solidum sub rectangulo RBG in FC, quam cubi S ad cubum CF. Et permutando maior ratio cubi RB ad cubum S, quam rectanguli RBG in FC ad cubum CF; hoc est, quam rectanguli RBG ad quadratum CF. Est autem quadrato CF aequale rectangulum GCR, hoc est, rectangulum sub GC, RB, quia proportionales sunt CR, CF, CG. Itaque maior erit ratio cubi RB ad cubum S, quam rectanguli RBG ad rectangulum sub GC, RB, hoc est, quam GB ad GC. Sicut autem BG ad GC, ita RC ad EK. Quia enim est CR ad CG, ut quadratum CR ad quadratum CF seu quadratum CE: ut autem quadratum CR ad quadratum CE, ita est PR ad PE diametrum: erit idcirco CR ad CG, ut PR ad PE. Unde dupla CR, hoc est CB ad CG ut dupla PR ad PE, hoc est, ut PR ad PA. Et dividendo, BG ad GC, ut RA ad AP seu AE, hoc est, ut RC ad EK, quod dicebamus. Itaque maior quoque ratio cubi RB ad cubum S, hoc est, ratio triplicata RB ad S, quam RC ad EK. Est autem S maior ostensa arcu EC. Ergo omnino maior erit ratio triplicata RB seu RC ad aequalem arcui EC, quam RC ad EK. Sicut autem RC ad arcum EC, ita est perimeter polygoni BEDL, hoc est, linea Z ad circumferentiam circuli BD. Et sicut RC ad EK, ita perimeter polygoni BCDL ad perimetrum polygoni HKMN, hoc est, ita Z ad T. Ergo maior quoque triplicata ratio Z ad circumferentiam totam BD, quam Z ad T. Ratio autem triplicata Z ad X eadem est rationi Z ad T. Itaque maior est ratio ipsius Z ad dictam circumferentiam, quam Z ad X. Ac proinde circumferentia minor quam recta X. Quod erat demonstrandum.

Sciendum est autem ipsam X minorem esse duabus tertiis Z et triente T: hoc est duabus tertiis perimetri polygoni inscripti et triente circumscripti, quibus alioqui minorem esse circuli circumferentiam constat ex praecedentibus. Nam $^2/_3$ Z cum $^1/_3$ T aequantur minori duarum mediarum secundum arithmeticam proportionem, quae maior est minore mediarum secundum proportionem geometricam. Iam vero et de polygono Y demonstrabimus, ipsum videlicet circulo BD maius esse. Quia enim polygonum Y habet ad polygonum simile KKMN rationem duplicatam eius quam perimeter ad perimetrum; perimeter autem polygoni Y aequatur rectae V, et perimeter HKMN ipsi T; habebit proinde polygonum Y ad polygonum HKMN rationem duplicatam eius quam V ad T, hoc est, eam quam X ad T. Sicut autem polygonum HKMN ad circulum BD, ita est perimeter ipsius polygoni, hoc est, linea T ad circuli BD circumferentiam; quoniam polygonum aequale est triangulo basin habenti perimetro suae aequalem et altitudinem radii AE,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

circulus autem aequalis eiusdem altitudinis triangulo cuius basis circumferentiae aequetur. Ex aequali igitur, erit polygonum X ad circulum BD sicut X ad circumferentiam BD. Est autem X maior ostensa quam BD circumferentia. Ergo et polygonum Y maius erit circulo BD. Quod erat demonstrandum.

Ex his manifestus est Orontii Finei error, qui circumferentiae quadrantem aequalem minori duarum proportione mediarum inter inscripti et circumscripti quadrati latera prodidit, circulum vero aequalem quadrato quod fieret a maiori.

Theor. XII. Prop. XV.

Si inter productam circuli diametrum et circumferentiam recta aptetur radio aequalis, et producta circulum secet, occurratque tangenti circulum ad alterum diametri terminum: intercipiet ea partem tangentis arcu adiacente abscisso maiorem.

Esto descriptus circulus centro C (Fig. 15, Tfl. 2), cuius diameter AB. Haec autem producatur versus A, interque ipsam et circumferentiam ponatur ED recta radio aequalis. Quae producta secet circumferentiam in F, occurratque tangenti in G, ei nimirum quae circulum contingit ad diametri terminum B. Dico tangentem BG maiorem esse arcu BF. Ducatur enim per centrum recta HL parallela EG, quae circumferentiae occurrat in punctis H, M: tangenti vero BG in L. Et iungatur DH, quae diametrum secet in K. Similes itaque sunt trianguli EDK, CHK, quoniam angulos ad K aequales habent, et angulum E aequalem angulo C. Sed et latus ED aequale est lateri HC, suntque haec latera aequalibus angulis subtensa. Ergo aequale etiam latus DK lateri KH. Itaqae CA secat bifariam ipsam DH, itemque arcum DAH. Arcus igitur DH sive huic aequalis FM duplus est ad arcum AH. Ipsi autem AH aequalis est arcus MB. Igitur arcus FB triplus erit ad arcum AH. Porro quoniam HK sinus est arcus HA, eiusdemque tangenti aequatur LB, erunt duae tertiae HK et triens LB simul maiores arcu AH (per 9 huius). Quare sumptis omnium triplis erit dupla HK, hoc est, HD sive GL una cum LB maior arcu AH triplo, hoc est, arcu FB. Apparet igitur totam GB arcu FB maiorem esse.

Hoc theorema alterum est ex iis quibus cyclometria Willebrordi Snellii tota innititur, quaeque demonstrasse ipse videri voluit, argumentatione usus quae meram quaesiti petitionem continet. Sed et alterum subiungemus, quod utile est imprimis et contemplatione dignissimum.

Theor. XIII. Prop. XVI.

Si diametro circuli semidiameter in directum adiiciatur, et ab adiectae termino recta ducatur quae circulum secet, occurratque tangenti circulum ad terminum diametri oppositum: intercipiet ea partem tangentis arcu adiacente abscisso minorem.

Esto circulus, cuius diameter AB (Fig. 16, Tfl. 2); quae producatur, et sit AC semidiametro aequalis. Et ducatur recta CL, quae circumferentiam secundo secet in E; occurratque tangenti in L, ei nimirum quae circulum contingit in termino diametri B. Dico interceptam BL

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

arcu BE minorem esse. Iungantur enim AE, EB, positaque AH ipsi AE aequali ducatur HE et producatur, occurratque tangenti in K. Denique sit EG diametro AB ad angulos rectos, ED vero tangenti BL. Quoniam igitur isosceles est triangulus HAE, erunt anguli inter se aequales H et HEA. Quia autem angulus AEB rectus est, etiam recto aequales erunt duo simul HEA, KEB. Veram duo quoque isti H et HKB uni recto aequantur, quoniam in triangulo HKB rectus est angulus B. Ergo demptis utrimque aequalibus, hinc nimirum angulo H, inde angulo HEA, relinquentur inter se aequales anguli KEB, HKB. Triangulus igitur isosceles est KBE, eiusque latera aequalia EB, BK. Est autem BD aequalis EG. Ergo DK differentia est qua BE excedit EG. Porro quoniam est AG ad AE, ut AE ad AB, erunt duae simul AG, AB maiores dupla AE. (Eucl. elem. V. 25.) Ideoque AE, hoc est, AH minor quam dimidia utriusque simul AG, AB; hoc est, minor quam CA cum dimidia AG. Quare ablata utrimque CA, erit CH minor dimidia AG. CA vero dimidia AG maior est. Ergo si addatur AC ad AG, erit tota CG maior quam tripla ipsius CH. Quia autem ut HG ad GE, ita est ED ad DK; ut autem GE ad GC, ita LD ad DE. Erit ex aequo in proportione turbata ut HG ad GC ita LD ad DK. Et per conversionem rationis et dividendo, ut GC ad CH, ita DK ad KL. Ergo etiam DK maior quam tripla KL. Erat autem DK excessus ipsius EB supra EG. Ergo KL minor est triente dicti excessus. KB autem aequalis est ipsi EB subtensae. Ergo KB una cum KL, hoc est, tota LB omnino minor erit arcu BE (per 7 huius). Quod erat demonstrandum.

Perpenso autem theoremate praecedenti, liquet non posse sumi punctum aliud in producta BA diametro, quod minus a circulo distet quam punctum C, eandemque servet proprietatem, ut nimirum ducta CL fiat tangens intercepta BL semper minor arcu abscisso BE.

Porro usus huius theorematis multiplex est, cum in inveniendis triangulorum angulis quorum cognita sint latera, idque circa tabularum opem, tum ut latera ex angulis datis inveniantur, vel cuilibet peripheriae arcui subtensa assignetur. Quae omnia a Snellio in cyclometricis diligenter pertractata sunt.

Theor. XIV. Prop. XVII.

Portionis circuli centrum gravitatis diametrum portionis ita dividit, ut pars quae ad verticem reliqua maior sit, minor autem quam eiusdem sesquialtera.

Esto circuli portio ABC (Fig. 17, Tfl. 2) (ponatur autem semicirculo minor, quoniam ceterae ad propositum non faciunt) et diameter portionis sit BD, quae bifariam secetur in E. Itaque ostendendum est primo centrum gravitatis portionis AB distare a vertice B ultra punctum E; nam, quod in diametro situm sit, alibi ostendimus. Ducatur per E, recta basi parallela, quae utrimque circumferentiae occurrat in punctis F et G. Per quae ducantur KI, HL basi AC ad angulos rectos, atque hae cum ea, quae portionem in vertice contingit, constituant rectangulum KL. Quoniam igitur portio semicirculo minor est, constat rectanguli dicti dimidium FL contineri intra segmentum AFGC, atque insuper spatia quaedam AFI, LGC. Alterum vero rectanguli KL semissem KG complecti segmentum FBG una cum spatiis FBK, BGH. Quae spatia quum sint tota supra rectam FG, etiam centrum commune gravitatis eorum supra eandem situm erit. Est

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

autem E punctum in ipsa FG centrum gravitatis totius rectanguli KL. Igitur spatii reliqui BFILGB centrum gravitatis erit infra rectam FG. Sed et spatiorum AFI, LGC commune gravitatis centrum est infra eandem FG. Ergo magnitudinis ex spatiis hisce et dicto spatio BFILGB compositae, quae est portio ipsa ABC, centrum gravitatis infra lineam FG reperiri necesse est, ideoque infra E punctum.

Eadem vero diameter BD (Fig. 18, Tfl. 2) secetur nunc in S, ita ut BS sit sesquialtera reliquae SD. Dico centrum gravitatis portionis ABC minus distare a vertice B quam punctum S. Sit enim BDP totius circuli diameter et ducatur per S recta basi parallela quae circumferentiae occurrat in F et G. Et parabole intelligatur cuius vertex B, axis BD, rectum vero latus aequale SP. Et occurrat basi portionis in H et K. Quoniam igitur quadratum FS aequale est rectangulo BSP, hoc est, ei quod sub BS et latere recto parabolae continetur, transibit ea per F punctum, itemque per G. Partes autem lineae parabolicae BF, BG infra circumferentiam cadent, sed reliquae FH, GK erunt exteriores. Hoc enim ostenditur ducta inter B et S ordinatim applicata NL, quae circumferentiae occurrat in N, parabolae autem in M. Nam quia quadratum NL aequale est rectangulo BLP, quadratum vero ML rectangulo contento lineis BL, SP, rectangulum autem BLP maius eo quod sub BL, SP continetur: erit quadratum NL maius quadrato ML et NL linea maior quam ML. Idem autem continget ubicunque inter B et S aliqua ordinatim applicabitur. Igitur partem circumferentiae FB totam extra parabolam ferri necesse est, eademque ratione partem BG. Rursus quia rectangulum BDP aequale est quadrato DA, rectangulum vero sub BD, SP contentum quadrato DH; erit HD maior quam AD potentia, ideoque et longitudine. Idemque eveniet ubicunque inter S, D, ordinatim aliqua applicabitur. Quare partes circumferentiae FA, itemque GC intra parabolam cadent. Fiunt igitur spatia quaedam FNBM et BQG, itemque alia HFA, GCK. Quorum haec cum tota sint infra lineam FG, etiam centrum commune gravitatis eorum infra eandem erit. At parabolicae portionis HBK centrum gravitatis est in ipsa FG, nimirum S punctum (Archim. de aequipond. II. 8). Ergo partis reliquae AFMBQGC centrum gravitatis erit supra rectam FG. Sed supra hanc situm quoque apparet centrum gravitatis spatiorum FMBN, BQG, quum tota sint supra ipsam FG. Ergo et spatii ex hisce duobus et AFMBQGC compositi, hoc est, portionis circuli ABC centrum gravitatis supra lineam FG reperietur, quumque sit in BD diametro, minus aberit a vertice B quam punctum S. Quod erat ostendendum.

Theor. XV. Prop. XVIII.

Circuli portio semicirculo minor ad inscriptum triangulum maximum maiorem rationem habet quam sesquitertiam, minorem vero quam diameter portionis reliquae tripla sesquitertia ad circuli diametrum cum tripla ea, quae a centro circuli pertingit ad portionis basin.

Sit portio semicirculo minor, cui inscriptum triangulum maximum ABC (Fig. 19, Tfl. 2). Diameter autem portionis sit BD; et diameter circuli a quo portio resecta est, BF, centrum E. Ostendendum est primo, portionis ABC ad triangulum inscriptum maiorem esse rationem quam

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

sesquitertiam. Esto portionis ABC centrum gravitatis punctum G et secetur DF in H, ut sit HD dupla reliquae HF. Quoniam igitur FB est dupla EB, DB autem minor quam dupla GB, erit maior ratio FB ad BD, quam EB ad BG. Et per conversionem rationis, minor BF ad FD, quam BE ad EG. Et permutando minor BF ad BE (quae portio dupla est) quam FD ad EG. Igitur FD maior est quam dupla EG. Ipsius autem FD duas tertias continet HD. Ergo HD maior est quam sesquitertia EG. Sicut autem HD ad EG, ita est portio ABC ad inscriptum sibi triangulum: hoc enim antehac demonstravimus in theorematis de hyperboles, ellipsis et circuli quadratura. Itaque maior est ratio portionis ad inscriptum triangulum ABC quam sesquitertia. Quod autem ad triangulum ABC portio minorem habeat rationem quam tripla sesquitertia ipsius DF ad diametrum circuli BF una cum tripla ED, id nunc ostendemus. Secetur diameter portionis in R, ut BR sit sesquialtera reliquae RD. Ergo cadit R punctum inter G et D (per praeced.) quoniam positum fuit G centrum gravitatis in portione ABC. Quumque portionis ad inscriptum triangulum eadem sit ratio, quae HD ad EG, ut modo dictum fuit; minor autem sit ratio HD ad EG, quam HD ad ER: Erit propterea minor quoque portionis ad inscriptum triangulum ratio quam HD ad ER, sive quam HD quinquies sumpta ad quintuplam ER. Atqui HD (cum sit aequalis duabus tertiis DF) quinquies sumpta aequabitur decem tertiis, hoc est, triplae sesquitertiae DF. ER vero quae continet FD et duas quintas ipsius DB, si quinquies sumatur, aequabitur duplae BD et quintuplae ED; hoc est, duplae totius EB atque insuper triplae ED. Igitur apparet portionem ABC ad inscriptum triangulum minorem habere rationem quam triplam sesquitertiam DF ad duplam EB, hoc est, diametrum BF, una cum tripla ED. Quod erat demonstrandum.

Theor. XVI. Prop. XIX.

Arcus quilibet semicircumferentia minor, maior est sua subtensa simul et triente differentiae qua subtensa sinum excedit. Idem vero minor quam subtensa simul cum ea quae ad dictum trientem sese habeat, ut quadrupla subtensa iuncta sinui ad subtensam duplam cum sinu triplo.

Esto circulus cuius D (Fig. 20, Tfl. 2) centrum, diameter FB. Et sit arcus AB semicircumferentia minor, cui subtensa ducatur BA, sinus autem AM: quae nimirum diametro FB sit ad angulos rectos. Porro ipsi AM sit aequalis recta GH et GI aequalis subtensae AB. Excessus igitur est HI; cuius triens IK ipsi GI adiiciatur. Ostendendum est primo, arcum AB tota GK maiorem esse. Hoc autem ex theoremate VII est manifestum. At cum ipsi GI additur IO quae ad IK trientem ipsius HI rationem habeat, quam quadrupla GI una cum GH ad duplam GI cum tripla GH. Dico totam GO arcu AB maiorem esse. Constituantur enim super lineis GH, HI, IO, triangula quorum communis vertex sit L, altitudo autem aequalis radio DB. Et iungatur DA, ducaturque diameter circuli CE quae rectam AB bifariam dividat in N, arcum vero AB in E. Et iungatur AE, EB.

Quoniam igitur OI est ad IK ut quadrupla GI una cum GH ad duplam GI cum tripla GH; sumptis consequentium triplis erit OI ad IH (haec enim tripla est IK) ut quadrupla GI una

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

cum GH ad sexcuplam GI cum noncupla GH. Et componendo, OH ad HI, ut decupla utriusque IG, GH ad sexcuplam IG cum noncupla GH: vel sumptis horum trientibus, ut decem tertiae duarum simul GI, GH ad duplam GI cum tripla GH. Est autem eadem ratio linearum GI ad GH, hoc est BA ad AM, quae BD ad DN, propter similes triangulos BAM, BDN. Ergo etiam OH ad HI, ut $^{10}/_3$ utriusque simul BD, DN ad duplam BD cum tripla DN; hoc est, ut $^{10}/_3$ NC ad diametrum EC cum tripla DN. Hac autem ratione minor est ratio portionis AEB ad AEB triangulum (per praeced.). Ergo dictae portionis ad dictum triangulum minor quoque ratio quam OH ad HI, hoc est, quam trianguli OHL ad triangulum IHL. Triangulum autem IHL aequale est triangulo AEB. Quod sic ostenditur. Triangulum enim GHL aequale est triangulo DAB, quoniam bases et altitudines reciproce aequales habent. Similique ratione quoniam GI aequalis est rectae AB, erit triangulum GIL aequale duobus simul triangulis DAE, DBE, hoc est, quadrilatero DAEB. Itaque triangulum HIL triangulo AEB aequari necesse est, quod dicebamus. Habebit itaque portio AEB ad triangulum sibi inscriptum AEB minorem quoque rationem quam triangulum OHL ad idem triangulum AEB. Quam ob rem triangulum OHL portione AEB maius erit. Et totum proinde triangulum OGL maius sectore DAEB. Altitudo autem trianguli GLO aequalis est radio DB. Ergo basis GO maior erit arcu AB: Quod erat ostendendum.

Ex his manifestum est de tota quoque circumferentia pronunciari posse, quod, si circulo inscribantur polygona duo aequilatera, quorum alterum alterius sit duplo laterum numero, et differentiae perimetrorum triens perimetro polygoni maioris adiungatur, composita ex his circuli circumferentia minor erit. Eidem vero maiori perimetro si linea addatur quae ad dictum differentiae trientem sese habeat, sicut quadrupla perimetri maioris iuncta perimetro minori, ad duplum maioris cum tripla minoris composita circumferentiam circuli excedet.

Problema IV. Prop. XX.

Circumferentiae ad diametrum rationem investigare et ex datis inscriptis in dato circulo invenire longitudinem arcuum quibus illae subtenduntur.

Esto circulus centro D (Fig. 21, Tfl. 2), cuius diameter CB, et sit arcus BA sextans circumferentiae, cui subtensa ducatur AB, itemque sinus AM. Posita igitur DB semidiametro partium 100000, totidem quoque erit subtensa BA; AM vero partium 86603 non una minus, hoc est, si una pars sive unitas auferatur ab 86603 fiet minor debito; quippe semissis lateris trianguli aequilateri circulo inscripti. Hinc excessus AB supra AM fit 13397 vero minor. Cuius triens $4465^2/_3$ additus ipsi AB 100000, fiunt partes $104465^2/_3$ minores arcu AB. Et hic primus est minor terminus, quo postea alium vero propiorem inveniemus. Prius autem maior quoque terminus secundum theorema praecedens inquirendus est.

Tres nimirum sunt numeri quibus quartum proportionalem invenire oportet. Primus est partium duplae AB et triplae AM qui erit 459807, vero minor (nam hoc quoque observandum ut minor sit, idemque in caeteris prout dicetur) secundus quadruplae AB et simplae AM qui

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

486603 vero maius. Et tertius triens excessus AB supra AM 4466 vero maior. Itaque quartus proportionalis erit 4727 vero maior, quo addito ad AB 100000 fit 104727, maior numero partium, quas continet arcus AB, peripheriae sextans (per praec.). Iam igitur invenimus longitudinem arcus AB secundum minorem maioremque terminum, quorum hic quidem longe propior vero est, cum vero proximus sit 104719.

Sed ex utroque istorum alius minor terminus habebitur priore accuratior si utamur praecepto sequenti, quod a diligentiori centrorum gravitatis inspectione dependet.

Inventorum terminorum differentia sesquitertia iungatur duplae subtensae et sinui triplo, et quam rationem habet ex his composita ad triplam sesquitertiam seu $^{10}/_{3}$ utriusque simul sinus subtensaeque eandem habeat subtensae supra sinum excessus ad aliam quandam. Haec ad sinum addita rectam constituet arcu minorem.

Minor terminus erat $104465^{2}/_{3}$. Maior 104727; differentia horum est $261^{1}/_{3}$. Estque rursus tribus numeris inveniendus quartus proportionalis. Primus est partium duplae AB et triplae AM et sesquitertiae terminorum differentiae, 460158 vero maior. Secundus $^{10}/_{3}$ utriusque simul AB, AM, 622008 vero minor. Tertius denique excessus AB supra AM, 13397 vero minor. Quibus quartus proportionalis est 18109 vero minor. Hic igitur additus numero partium AM $86602^{1}/_{2}$ vero minor fiunt $104711^{1}/_{2}$ minores arcu AB. Quare sexcuplum earum, 628269 minus erit circumferentia tota At quoniam 104727 maiores inventae sunt arcu AB, earum sexcuplum 628362 circumferentia maius erit. Itaque circumferentiae ad diametrum ratio minor est quam 628362, maior autem quam 628269 ad 200000; sive minor quam 314181 maior autem quam 314135 ad 100000. Unde constat minorem utique esse quam triplam sesquiseptimam, et maiorem quam $3^{10}/_{71}$. Quin etiam Longomontani error per hae refutatur, qui scripsit peripheriam maiorem esse partibus 314185 qualium radius 100000. Esto nunc arcus AB $^{1}/_{8}$ circumferentiae, et erit AM, semissis lateris quadrati circulo inscripti, partium 7071068, non una minus, qualium radius DB 10000000. AB vero latus octanguli partium 7653668 non una maius. Quibus datis ad similitudinem praecedentium invenietur primus minor terminus longitudinis arcus AB 7847868. Deinde maior terminus 7854066. Et ex utroque rursus terminus minor accuratior 7853885. Unde constat peripheriae ad diametram rationem minorem haberi quam $31416^{1}/_{3}$, maiorem autem quam 31415 ad 10000. Et quum terminus maior 7854066 a vera arcus AB longitudine minus distet quam partibus 85 (est enim arcus AB, per ea quae supra ostendimus, maior quam 7853981); partes autem 85 efficiant minus quam duos scrupulos secundos, hoc est, quam $^{2}/_{1296000}$ circumferentiae, nam tota earundem plures habet quam 60000000: Hinc manifestum est, si trianguli rectanguli angulos quaeramus ex datis lateribus, eo modo quo maiorem istum terminum paulo ante, nunquam duobus scrupulis secundis aberraturos, etiamsi aequalia inter se fuerint latera circa angulum rectum, veluti hic erant in triangulo DAM.

Si vero ea sit ratio lateris DM ad MA, ut angulus ADM non excedat $^{1}/_{4}$ recti, non unius tertii scrupuli error erit. Posito enim arcu AB $^{1}/_{16}$ circumferentiae, erit AM semissis lateris octanguli aequilateri circulo inscripti partium 382683433, non una minus. AB vero latus

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

sexdecanguli 390180644 non una amplius, qualium radius DB 1000000000. Unde primus minor terminus longitudinis arcus AB invenitur partium 392679714. Terminus autem maior 392699148. Et ex his minor rursus 392699010. Constat autem ex supra demonstratis arcum AB $^1/_{16}$ peripheriae, maiorem esse quam 392699081, quas terminus maior superat partibus 67. Hae autem minus efficiunt uno scrupulo tertio, hoc est, $^1/_{77760000}$ totius circumferentiae, quoniam ea maior est utique quam 6000000000.

Porro ex novissimis terminis inventis orietur ratio circumferentiae ad diametrum minor quam 3141593$^1/_5$, maior autem quam 3141592 ad 1000000.

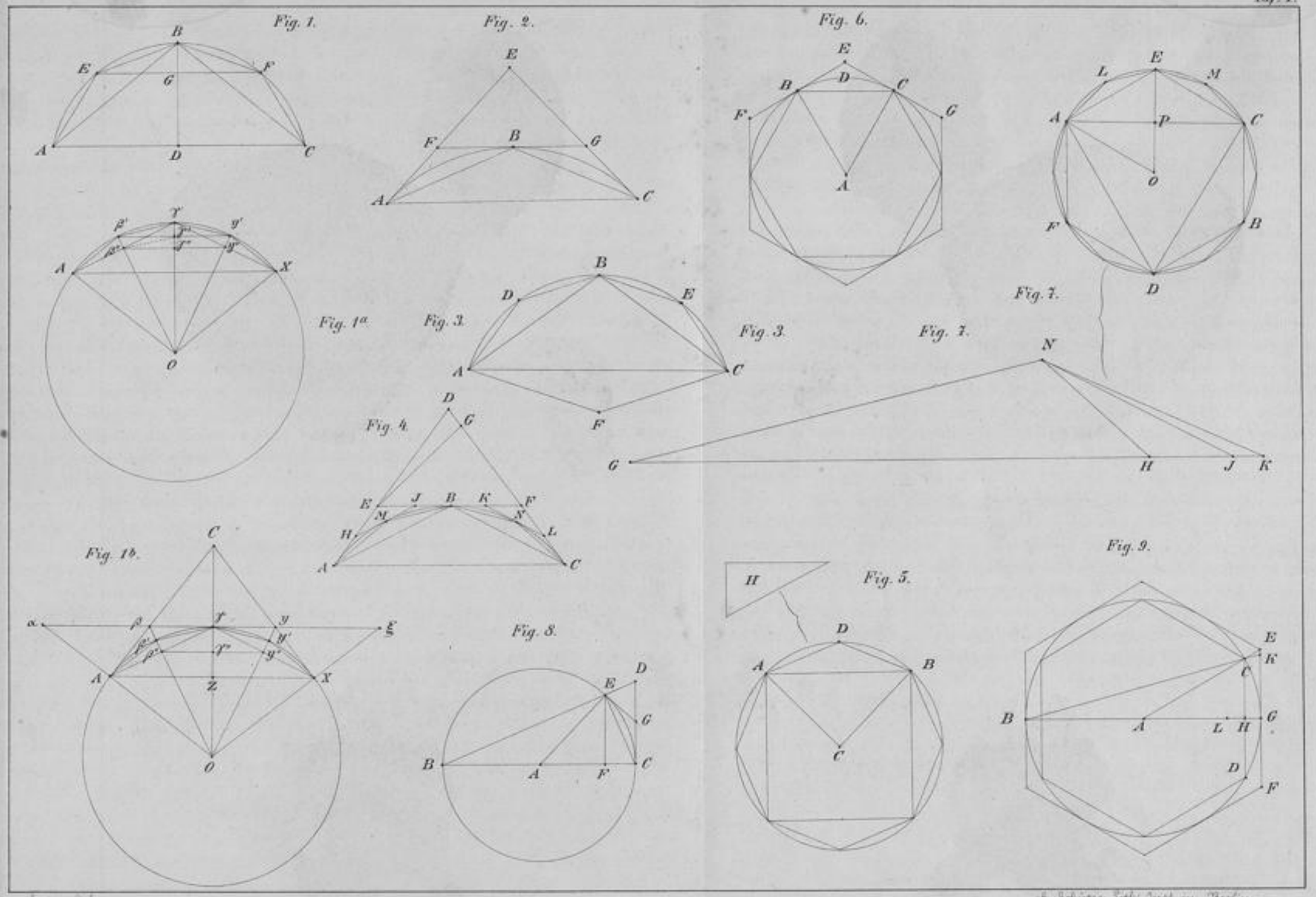
Quodsi $^1/_{60}$ circumferentiae ponatur arcus AB, seu partium 6 qualium tota 360: Erit AM semisses lateris trigintanguli partium 10452846326766, non una minus, qualium radis 100000000000000. Et AB latus sexagintanguli 10467191248588 non una amplius. Invenieturque ex his arcus AB secundum primum minorem terminum 10471972889195; secundum maiorem 10471975512584. Et ex his minor alter terminus 10471975511302. Unde efficitur peripheriae ad diametrum ratio minor quam 31415926538, maior autem quam 31415926533 ad 10000000000.

Quos terminos si ex additis inscriptorum et circumscriptorum polygonorum lateribus inquirendum esset fere ad laterum quadringenta millia deveniendum. Nam ex sexagintangulo inscripto circumscriptoque hoc tantum probatur, minorem esse rationem peripheriae ad diametrum quam 3145 ad 1000, maiorem autem quam 3140. Adeo ut triplum et amplius verarum notarum numerum nostro ratiocinio productum appareat. Idem vero in ulterioribus polygonis si quis experiatur semper evenire cernet: non ignota nobis ratione, sed quae longiori explicatione indigeret.

Porro autem quomodo datis quibuscunque aliis inscriptis arcuum quibus subtenduntur longitudo per haec inveniri queat satis puto manifestum. Si enim quadrati inscripti latere maiores sunt, longitudo arcus ad semicircumferentiam reliqui inquirenda est, cuius tum quoque subtensa datur. Sciendum autem et dimidiorum arcuum subtensas inveniri cum totius arcus subtensa data est. Atque hac ratione si bisectionibus uti placebit, poterimus ad omnem subtensam arcus ipsius longitudinem quamlibet verae propinquam non difficulter cognoscere. Utile hoc ad sinuum tabulas examinandas. Imo ad componendas quoque: quia cognita arcus alicuius subtensa, etiam eius qui paulo maior minorve sit satis accurate definiri potest.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



Autor del.

A. Schütze Lith. Inst. in Berlin.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fig. 13.

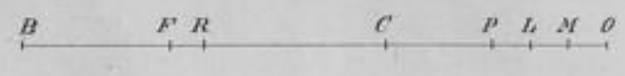


Fig. 16.

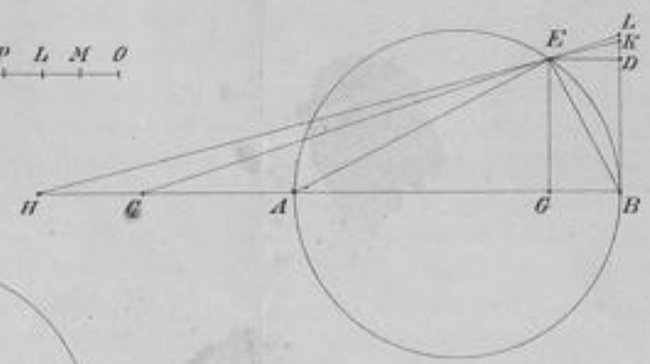
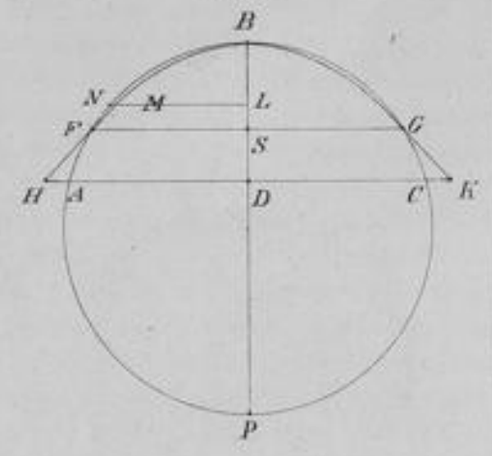


Fig. 18.



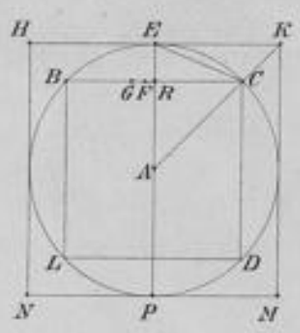


Fig. 10.

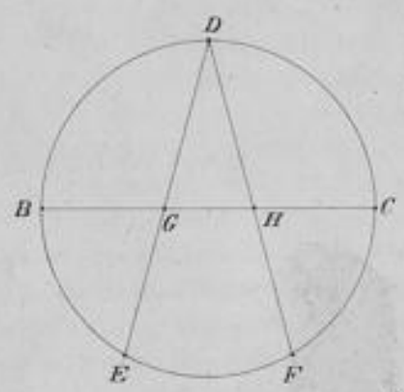


Fig. 12.

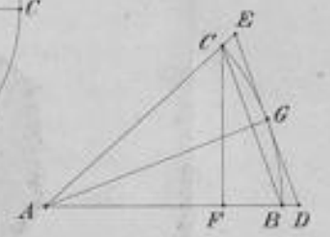
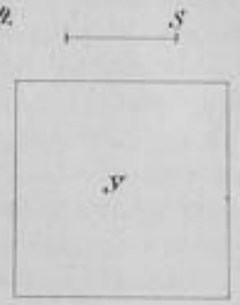


Fig. 14.



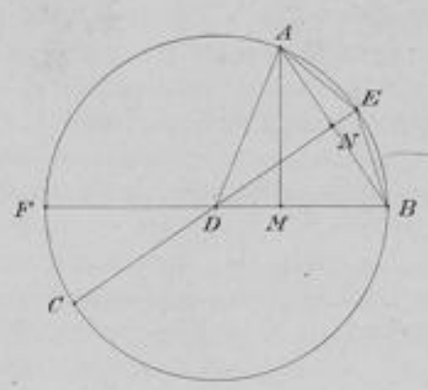
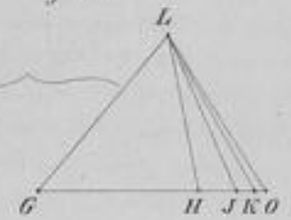


Fig. 20.



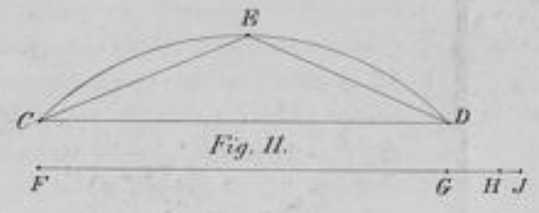


Fig. 11.

Fig. 19.

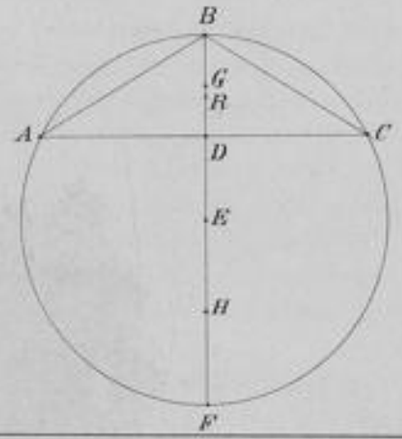


Fig. 15.

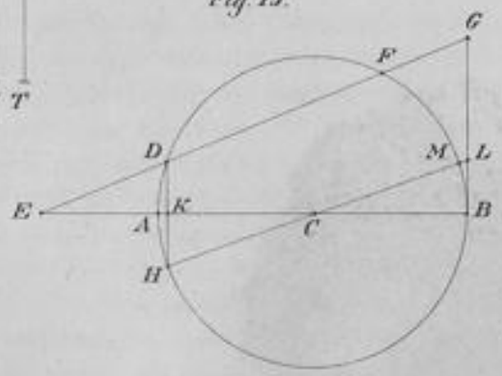


Fig. 17.

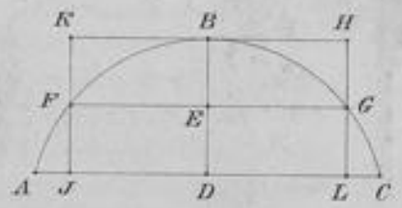
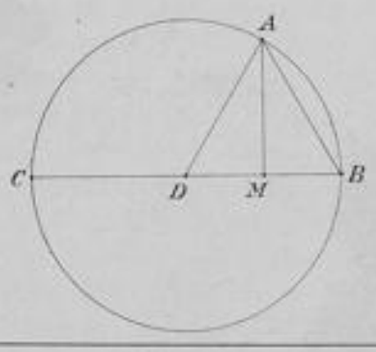


Fig. 21.



Autor. Zeichn.

A. Lodzinsky Sächs. Buchdr. in Berlin.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf