Nach den für die Theorie der linearen Differentialgleichungen grundlegenden Untersuchungen von Fuchs (Crelles Journal Bd. 66 pag. 121 ff. u. Bd. 68 pag. 354 ff.) läuft die Integration einer vorgelegten Differentialgleichung im wesentlichen auf die Ableitung gewisser Eigenschaften und Verhaltungsweisen der durch die Gleichung definierten Funktion hinaus. Namentlich ist der Verlauf der Integrale der gegebenen Gleichung in der ganzen durch die unbeschränkt Veränderliche festgelegten Ebene zu untersuchen. Eine Funktion kann als vollkommen determiniert betrachtet werden, wenn man ihr Verhalten in der Nähe ihrer singulären Punkte kennt, und wenn man ermitteln kann, wie sie sich verwandelt bei den Umläufen der unabhängig Veränderlichen um die singulären Punkte, denn man ist alsdann imstande, den Wert der Funktion durch Fortsetzung in jedem Punkte der zu ihr gehörigen Riemannschen Fläche zu berechnen. In Bezug auf das Verhalten der Integrale der linearen homogenen Differentialgleichungen in der Nähe der singulären Punkte zeigt Fuchs, dass allen diesen Integralen die Eigenschaft gemein ist, beim Umlauf der unbeschränkt Veränderlichen x um die singulären Punkte sich wie Potenzen und Logarithmen zu verhalten. Interessant sind insbesondere diejenigen linearen homogenen Differentialgleichungen, deren Integrale sich regulär verhalten, d. h. welche die Eigenschaft haben, mit einer bestimmten Potenz von $x-a$ multipliziert für jeden im Endlichen gelegenen Punkt $x=a$ endlich zu bleiben, und welche mit einer bestimmten Potenz von $\frac{1}{x}$ multipliziert für $x=\infty$ ebenfalls einen endlichen Wert annehmen. Die zu dieser Klasse gehörigen Gleichungen müssen in der Nähe eines jeden singulären Punktes $x=a$ die Gestalt haben

$$\text{(I.)}\quad \frac{d^m y}{dx^m} = \frac{P_1(x)}{x-a}\,\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \frac{P_2(x)}{(x-a)^2}\,\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \cdots\cdots + \frac{P_m(x)}{(x-a)^m}\,y,$$

wo die Funktionen $P_1(x)$, $P_2(x)$, ... $P_m(x)$ in der Umgebung von $x=a$ eindeutig, endlich und stetig, also nach positiven ganzen Potenzen von $x-a$ entwickelbar sind. — Unter einem zu irgend einem Punkte x gehörigen Fundamentalsystem von Integralen versteht man m solche Integrale $y_1, y_2, \cdots\cdots y_m$, welche die Eigenschaft haben, dass sich jedes andere Integral der Gleichung durch sie linear und homogen ausdrücken lässt, zwischen denen selbst aber eine lineare und homogene Relation nicht besteht. Die Determinante eines solchen Fundamentalsystems

$$\text{(II.)}\quad D = \begin{vmatrix} \frac{d^{m-1}y_1}{dx^{m-1}}, & \frac{d^{m-2}y_1}{dx^{m-2}}, \cdots\cdots & y_1 \\ \frac{d^{m-1}y_2}{dx^{m-1}}, & \frac{d^{m-2}y_2}{dx^{m-2}}, \cdots\cdots & y_2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ \frac{d^{m-1}y_m}{dx^{m-1}}, & \frac{d^{m-2}y_m}{dx^{m-2}}, \cdots\cdots & y_m \end{vmatrix}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

hat stets einen von Null verschiedenen Wert in dem Punkte, zu welchem dieses Fundamentalsystem gehört. Wenn $y_1, y_2, \ldots\ldots y_m$ die Glieder eines zu einem singulären Punkte $x = a$ gehörenden Fundamentalsystems bezeichnen und sich bei einem Umlauf der unabhängig Veränderlichen um den Punkt a verwandeln in

$$\text{(III.)}\quad \begin{array}{l} (y_1)' = \alpha_{11}\, y_1 + \alpha_{12}\, y_2 + \cdots\cdots + \alpha_{1m}\, y_m, \\ (y_2)' = \alpha_{21}\, y_1 + \alpha_{22}\, y_2 + \cdots\cdots + \alpha_{2m}\, y_m, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (y_m)' = \alpha_{m1}\, y_1 + \alpha_{m2}\, y_2 + \cdots + \alpha_{mm}\, y_m, \end{array}$$

so ist die für ω als Unbekannte geltende Gleichung $m^{\underline{ten}}$ Grades

$$\text{(IV.)}\quad \begin{vmatrix} \alpha_{11}-\omega, & \alpha_{12}\ , & \cdots\cdots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21}\ , & \alpha_{22}-\omega, & \cdots\cdots & \alpha_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m1}\ , & \alpha_{m2}\ , & \cdots\cdots & \alpha_{mm}-\omega \end{vmatrix} = 0$$

die zum singulären Punkte $x = a$ gehörige Fundamentalgleichung. Sie hat die Eigenschaft, dass ihre Koeffizienten von der Wahl des Fundamentalsystems unabhängig sind. Sind ihre Wurzeln sämtlich von einander verschieden, so giebt es zum singulären Punkte $x = a$ ein Fundamentalsystem von Integralen $u_1, u_2, \ldots\ldots\ldots u_m$, dessen sämtliche Elemente mit Potenzen von $x-a$ multipliziert in der Umgebung von $x = a$ eindeutig werden, also die Form haben

$$\text{(V.)}\quad \begin{array}{l} u_1 = (x-a)^{r_1} \varphi_1\ , \\ u_2 = (x-a)^{r_2} \varphi_2\ , \\ \cdots\cdots\ \cdots\cdots\cdots \\ u_m = (x-a)^{r_m} \varphi_m, \end{array}$$

wo die Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots \varphi_m$ in der Umgebung von $x = a$ eindeutig sind. Hat aber die Fundamentalgleichung auch gleiche Wurzeln, so giebt es ein Fundamentalsystem von Integralen, welches in gewisse Gruppen zerfällt werden kann; sind nur n Wurzeln der Fundamentalgleichung von einander verschieden und bezeichnet ω eine λ fache Wurzel, so zerfällt das Fundamentalsystem von Integralen in n Gruppen, von denen jede in der Umgebung des Punktes $x = a$ die Gestalt hat

$$\text{(VI.)}\quad \begin{array}{l} u_1 = (x-a)^r \varphi_{11}\,, \\ u_2 = (x-a)^r \varphi_{21} + (x-a)^r \varphi_{22} \log\,(x-a)\,, \\ u_3 = (x-a)^r \varphi_{31} + (x-a)^r \varphi_{32} \log\,(x-a) + (x-a)^r \varphi_{33}\ [\log\,(x-a)]^2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_\lambda = (x-a)^r \varphi_{\lambda 1} + (x-a)^r \varphi_{\lambda 2} \log\,(x-a) + \cdots\cdots + (x-a)^r \varphi_{\lambda\lambda}\ [\log\,(x-a)]^{\lambda-1}, \end{array}$$

wo die Funktionen φ in der Umgebung von $x = a$ eindeutig sind und r ein bestimmter Wert, nämlich einer der unendlich vielen Werte des Ausdrucks $\frac{1}{2\pi i} \log \omega$ ist. — Gehört eine lineare homogene Differentialgleichung zur Klasse derjenigen Differentialgleichungen, deren Integrale sich

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

regulär verhalten, d. h. hat sie in der Umgebung eines jeden singulären Punktes $x = a$ die Gestalt (I), so ist die für r als Unbekannte geltende Gleichung $m^{\underline{ten}}$ Grades

$$\text{(VII.)}\quad \left.\begin{array}{l} r\,(r-1)\,(r-2)\,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,(r-m+1) \\ -\,r\,(r-1)\,(r-2)\,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,(r-m+2)\,P_1(a) \\ -\,r\,(r-1)\,(r-2)\,\ldots\ldots\,(r-m+3)\,P_2(a) \\ -\,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\,r\,P_{m-1}(a) \\ -\,P_m\,(a) \end{array}\right\} = 0$$

die zum singulären Punkte $x = a$ gehörende determinierende Fundamentalgleichung. Dieselbe giebt ein wichtiges Kriterium dafür ab, ob die Ausdrücke für die Elemente des zum singulären Punkte $x = a$ gehörenden Fundamentalsystems mit Logarithmen behaftet sind oder nicht, also die Form (VI) oder die Form (V) haben. Hat nämlich die determinierende Fundamentalgleichung zwei oder mehr einander gleiche Wurzeln, so treten in den Ausdrücken des Fundamentalsystems in der Umgebung des singulären Punktes $x = a$ stets Logarithmen auf. Unterscheiden sich zwei oder mehr Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichung nur um ganze Zahlen, so können Logarithmen auftreten. Sind aber die Wurzeldifferenzen weder Null noch ganze Zahlen, so enthalten die Integrale in ihrem Ausdruck in der Nähe des singulären Punktes $x = a$ keine Logarithmen, haben also in der Umgebung des Punktes $x = a$ die Gestalt (V). Dabei sind $r_1, r_2, \ldots\ldots r_m$ die Wurzeln der zum Punkte $x = a$ gehörenden determinierenden Fundamentalgleichung. —

Als ein Beispiel zur Klasse der oben charakterisierten Differentialgleichungen betrachten wir im Folgenden die Gleichung

$$\text{(1.)}\quad \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{2\,(2x-1)}{x\,(x-1)}\,\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2\,(10x^2-10x+1)}{9x^2\,(x-1)^2}\,\frac{dy}{dx} + \frac{h}{x^2\,(x-1)^2}\,y = 0$$

mit den singulären Punkten

$$x = 0,\ x = 1,\ x = \infty.$$

Wir schreiben sie zunächst in der Form

$$\text{(1 a.)}\quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{P_1(x)}{x}\,\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P_2(x)}{x^2}\,\frac{dy}{dx} + \frac{P_3(x)}{x^3}\,y,$$

wobei die Funktionen

$$P_1(x) = -\,\frac{2\,(2x-1)}{x-1},$$

$$P_2(x) = -\,\frac{2}{9}\cdot\frac{10x^2-10x+1}{(x-1)^2},$$

$$P_3(x) = -\,\frac{hx}{(x-1)^2}$$

in der Umgebung des Punktes $x = 0$ eindeutig sind und in diesem Punkte selbst die endlichen Werte

$$-2,\ -\frac{2}{9}\ \text{und}\ 0$$

haben.

Durch die Substitution $x = 1 - t$ geht die Gleichung (1) über in

$$\text{(1 b.)}\quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{P_1(t)}{t}\,\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{P_2(t)}{t^2}\,\frac{dy}{dt} + \frac{P_3(t)}{t^3}\,y,$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

worin

$$P_1(t) = -\frac{2\,(2t-1)}{t-1},$$

$$P_2(t) = -\frac{2}{9}\cdot\frac{10t^2-10t+1}{(t-1)^2},$$

$$P_3(t) = +\frac{ht}{(t-1)^2}$$

in der Umgebung von $t=0$ eindeutig sind und in $t=0$ endliche Werte haben. Dem Punkte $t=0$ der t-Ebene entspricht aber Punkt $x=1$ der x-Ebene.

Um endlich die Gestalt der Gleichung in der Umgebung des Punktes $x=\infty$ zu erhalten, bilden wir die x-Ebene durch die Substitution $x=\frac{1}{u}$ auf eine u-Ebene ab, sodass dem Punkte $u=0$ der Punkt $x=\infty$ entspricht. Die Gleichung geht dabei über in

$$(1c.)\quad \frac{d^3y}{du^3} = \frac{P_1(u)}{u}\,\frac{d^2y}{du^2} + \frac{P_2(u)}{u^2}\,\frac{dy}{du} + \frac{P_3(u)}{u^3}\,y,$$

wobei

$$P_1(u) = -\frac{2\,(2u-1)}{u-1},$$

$$P_2(u) = -\frac{2}{9}\cdot\frac{10u^2-10u+1}{(u-1)^2},$$

$$P_3(u) = +\frac{hu}{(u-1)^2}$$

auch hier wieder in der Umgebung von $u=0$ stetig und in $u=0$ endlich sind. Bezeichnen wir daher die drei Punkte $x=0$, $x=1$ und $x=\infty$ allgemein mit z, so hat die Gleichung (1) in der Umgebung jedes dieser Punkte die Form

$$(2.)\quad \frac{d^3y}{dz^3} = \frac{P_1(z)}{z}\,\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{P_2(z)}{z^2}\,\frac{dy}{dz} + \frac{P_3(z)}{z^3}\,y,$$

wo

$$P_1(z) = -\frac{2\,(2z-1)}{z-1},$$

$$P_2(z) = -\frac{2}{9}\cdot\frac{10z^2-10z+1}{(z-1)^2},$$

$$P_3(z) = \mp\frac{hz}{(z-1)^2}.$$

Dabei gilt in der Funktion $P_3(z)$ das obere Vorzeichen für den Punkt $x=0$, das untere für die Punkte $x=1$ und $x=\infty$. Die zum Punkte $z=0$ gehörige determinierende Fundamentalgleichung

$$r\,(r-1)\,(r-2) - r\,(r-1)\,P_1(0) - r\,P_2(0) = 0$$

hat die Wurzeln $r_1=0$, $r_2=\frac{1}{3}$, $r_3=\frac{2}{3}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Da die Wurzeldifferenzen weder Null noch ganze Zahlen sind, so hat die Gleichung (2) ein Fundamentalsystem von Integralen y_1, y_2, y_3, dessen Elemente in der Umgebung des Punktes $z = 0$ darstellbar sind in der Form

$$y_1 = z^0 . \mathfrak{P}(z); \; y_2 = z^{\frac{1}{3}} . \mathfrak{P}(z); \; y_3 = z^{\frac{2}{3}} . \mathfrak{P}(z),$$

wo $\mathfrak{P}$ (z) eine nach positiven ganzen Potenzen von z fortschreitende Reihe bedeutet. Übertragen wir dies auf Gleichung (1), so sehen wir, dass es (da die determinierende Fundamentalgleichung für alle drei Punkte $x = 0$, $x = 1$, $x = \infty$ dieselbe ist) drei Fundamentalsysteme

$$\begin{array}{lll} y_{01}, & y_{02}, & y_{03}, \\ y_{11}, & y_{12}, & y_{13}, \\ y_{\infty 1}, & y_{\infty 2}, & y_{\infty 3} \end{array}$$

von Integralen giebt, welche in der Umgebung der singulären Punkte beziehungsweise die Gestalt haben

$$y_{01} = x^0 \, \mathfrak{P}_- (x); \; y_{02} = x^{\frac{1}{3}} \, \mathfrak{P}_- (x); \; y_{03} = x^{\frac{2}{3}} \, \mathfrak{P}_- (x),$$

$$y_{11} = (1-x)^0 \, \mathfrak{P}_+ (1-x); \; y_{12} = (1-x)^{\frac{1}{3}} \, \mathfrak{P}_+ (1-x); \; y_{13} = (1-x)^{\frac{2}{3}} \, \mathfrak{P}_+ (1-x),$$

$$y_{\infty 1} = \left(\frac{1}{x}\right)^0 \mathfrak{P}_+ \left(\frac{1}{x}\right); \; y_{\infty 2} = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} \mathfrak{P}_+ \left(\frac{1}{x}\right); \; y_{\infty 3} = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}} \mathfrak{P}_+ \left(\frac{1}{x}\right),$$

wobei wir durch die Bezeichnung $\mathfrak{P}_-$ (x) andeuten, dass in der Reihe $\mathfrak{P}$ (x) die Grösse h mit dem negativen Zeichen zu versehen ist, während sie in $\mathfrak{P}_+$ (x) das positive Zeichen hat.

Um in der nach positiven ganzen Potenzen von z fortschreitenden Reihe

$$\mathfrak{P}(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots\cdots + c_k z^k + \cdots\cdots$$

die Koeffizienten c_0, c_1, c_2, ... c_k, ... zu bestimmen, setzen wir zur Abkürzung $\mathfrak{P}(z) = u$ und führen

$$y = z^{r_i} . u$$

in die Differentialgleichung (2) ein, wobei r_i eine der Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichung bedeutet. Dadurch geht die Gleichung in eine neue Differentialgleichung mit der abhängig Veränderlichen u über.

Es verwandelt sich nämlich Gleichung (2) in

$$(3.) \quad \frac{d^3u}{dz^3} = \frac{Q_1(z)}{z} \cdot \frac{d^2u}{dz^2} + \frac{Q_2(z)}{z^2} \cdot \frac{du}{dz} + \frac{Q_3(z)}{z^3} u,$$

wobei wir zur Abkürzung gesetzt haben

$$Q_1(z) = -3r_i + P_1(z),$$

$$Q_2(z) = -3r_i(r_i - 1) + 2r_i P_1(z) + P_2(z),$$

$$z . Q_3(z) = -r_i(r_i - 1)(r_i - 2) + r_i(r_i - 1) P_1(z) + r_i P_2(z) + P_3(z).$$

Wegen der determinierenden Fundamentalgleichung können wir die letzte für Q_3 (z) geltende Gleichung auch so schreiben:

$$z . Q_3(z) = r_i(r_i - 1)\left[P_1(z) - P_1(o)\right] + r_i\left[P_2(z) - P_2(o)\right] + P_3(z) - P_3(o).$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wir können ferner die Gleichung (3) leicht auf die Form bringen

$$(4.)\quad z^2 \frac{d^3u}{dz^3} - Q_1(o)\, z \frac{d^2u}{dz^2} - Q_2(o) \frac{du}{dz} = Q_1'(z)\, z^2 \frac{d^2u}{dz^2} + Q_2'(z)\, z \frac{du}{dz} + Q_3(z)\, u,$$

wobei zu setzen ist

$$Q_1'(z) = \frac{Q_1(z) - Q_1(o)}{z},$$

$$Q_2'(z) = \frac{Q_2(z) - Q_2(o)}{z}.$$

Substituiert man nun in diese Gleichung für u die Potenzreihe

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots\cdots + c_k z^k + \cdots\cdots$$

und vergleicht die Koeffizienten von z^k auf beiden Seiten der Gleichung miteinander, so ergiebt sich für jeden positiven ganzzahligen Wert von k eine Formel von der Gestalt

$$(k+1)\left[k(k-1) - Q_1(o)\, k - Q_2(o)\right] c_{k+1} = A_k c_k + A_{k-1} c_{k-1} + A_{k-2} c_{k-2} + \cdots\cdots A_0 c_0,$$

wo die Grössen A_k, A_{k-1}, A_{k-2}, ..., A_0 sich aus den Koeffizienten der Reihenentwicklungen der Funktionen $Q_1'(z)$, $Q_2'(z)$ und $Q_3(z)$ nach Potenzen von z und aus den numerischen Grössen der Gleichung durch Addition und Multiplikation zusammensetzen. Da ferner die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$k(k-1) - Q_1(o)\, k - Q_2(o) = o$$

weder ganze Zahlen noch Null sind, so ist der Koeffizient von c_{k+1} für jeden positiven ganzzahligen Wert von k und für $k = o$ von Null verschieden. Um die Ausdrücke der Grössen A_k, A_{k-1}, ... A_0 herzustellen, entwickeln wir zunächst die Funktionen $Q_1'(z)$, $Q_2'(z)$, $Q_3(z)$ nach Potenzen von z. Indem wir diese Funktionen auf die Funktionen $P_1(z)$, $P_2(z)$, $P_3(z)$ zurückführen, erhalten wir

$$Q_1'(z) = \frac{Q_1(z) - Q_1(o)}{z} = \frac{1}{z}\left\{P_1(z) - P_1(o)\right\},$$

$$Q_2'(z) = \frac{Q_2(z) - Q_2(o)}{z} = \frac{1}{z}\left\{2r_i\left[P_1(z) - P_1(o)\right] + P_2(z) - P_2(0)\right\},$$

$$Q_3(z) = \frac{1}{z}\left\{r_i(r_i - 1)\left[P_1(z) - P_1(o)\right] + r_i\left[P_2(z) - P_2(o)\right] + P_3(z) - P_3(o)\right\}.$$

Infolge der Definition der Funktion $P_1(z)$ ist nun

$$P_1(z) - P_1(o) = -\frac{2(2z-1)}{z-1} + 2 = -\frac{2z}{z-1} = 2z(1 + z + z^2 + \cdots).$$

Ferner erhält man

$$\begin{aligned} P_2(z) - P_2(o) &= -\frac{2}{9} \cdot \frac{10z^2 - 10z + 1}{(z-1)^2} + \frac{2}{9} \\ &= -\frac{2}{9}\left[\frac{1}{(z-1)^2} + \frac{10z}{z-1} - 1\right] \\ &= -\frac{2}{9}\left[\begin{array}{l} 2z + 3z^2 + \cdots + (k+1)z^k + \cdots\cdots \\ -10z - 10z^2 - \cdots - 10z^k - \cdots\cdots \end{array}\right] \\ &= -\frac{2}{9} z\left[-8 + (-8+1)z + (-8+2)z^2 + \cdots + (-8+k)z^k + \cdots\right]. \end{aligned}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Endlich ergiebt sich für $P_3(z) - P_3(o)$ die Reihenentwicklung

$$P_3(z) - P_3(o) = \mp \frac{hz}{(z-1)^2} = \mp hz \left[1 + 2z + 3z^2 + \cdots + (k+1) z^k + \cdots \right].$$

Somit erhalten wir für $Q_1'(z)$ unmittelbar die Reihe

$$Q_1'(z) = 2(1 + z + z^2 + \cdots).$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} Q_2'(z) = 4r_i - \frac{2}{9}(-8) \\ + \left[4r_i - \frac{2}{9}(-8+1) \right] z \\ + \left[4r_i - \frac{2}{9}(-8+2) \right] z^2 \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ + \left[4r_i - \frac{2}{9}(-8+k) \right] z^k, \end{aligned}$$

oder, wenn wir zur Abkürzung setzen

$$m_i = 4\left(r_i + \frac{4}{9}\right), \; p = \frac{2}{9},$$

$$Q_2'(z) = m_i + (m_i - p) z + (m_i - 2p) z^2 + \cdots + (m_i - kp) z^k + \cdots.$$

Für $Q_3(z)$ endlich erhalten wir

$$\begin{aligned} Q_3(z) = 2r_i (r_i - 1) \left[1 + z + z^2 + \cdots \right] \\ - \frac{2}{9} r_i \left[-8 + (-8+1) z + (-8+2) z^2 + \cdots + (-8+k) z^k + \cdots \right] \\ \mp h \left[1 + 2z + 3z^2 + \cdots + (k+1) z^k + \cdots \right], \end{aligned}$$

oder geordnet:

$$\begin{aligned} Q_3(z) = 2r_i (r_i - 1) - \frac{2}{9} r_i (-8) \mp h \\ + \left[2r_i (r_i - 1) - \frac{2}{9} r_i (-8+1) \mp 2h \right] z \\ + \left[2r_i (r_i - 1) - \frac{2}{9} r_i (-8+2) \mp 3h \right] z^2 \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + \left[2r_i (r_i - 1) - \frac{2}{9} r_i (-8+k) \mp (k+1) h \right] z^k \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

oder

$$Q_3(z) = n_i + (n_i - q_i)\,z + (n_i - 2q_i)\,z^2 + \cdots + (n_i - kq_i)\,z^k + \cdots,$$

wobei wir abkürzend

$$n_i = 2r_i(r_i - 1) + \frac{16}{9}r_i \mp h\,,$$

$$q_i = r_i\,p \mp h$$

gesetzt haben. Es sind nun diese Reihentwicklungen für $Q_1'(z)$, $Q_2'(z)$ und $Q_3(z)$ in die rechte Seite der Gleichung (4) einzutragen und der Koeffizient von z^k aufzusuchen. Derselbe ist enthalten in dem Ausdruck

$$\begin{aligned}
&2z^2\left(1 + z + z^2 + \cdots + z^{k-2}\right)\left(1.2\,c_2 + 2.3\,c_3 z + \cdots + (k-1)\,k\,c_k z^{k-2}\right)\\
&+ z\left[m_i + (m_i - p)\,z + (m_i - 2p)\,z^2 + \cdots + (m_i - kp)\,z^k\right]\\
&\quad\left[c_1 + 2\,c_2 z + 3\,c_3 z^2 + \cdots + k\,c_k z^{k-1}\right]\\
&+ \left[n_i + (n_i - q_i)\,z + (n_i - 2q_i)\,z^2 + \cdots + (n_i - kq_i)\,z^k\right]\\
&\quad\left[c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_k z^k\right],
\end{aligned}$$

und wir erhalten somit für den Koeffizienten von z^k den Ausdruck

$$\begin{aligned}
&\left[2k(k-1) + km_i + n_i\right] c_k\\
&+ \left[2(k-1)(k-2) + (k-1)(m_i - 1p) + (n_i - 1q_i)\right] c_{k-1}\\
&+ \left[2(k-2)(k-3) + (k-2)(m_i - 2p) + (n_i - 2q_i)\right] c_{k-2}\\
&+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+ \left[2.3.2 + 3(m_i - (k-3)p) + (n_i - (k-3)q_i)\right] c_3\\
&+ \left[2.2.1 + 2(m_i - (k-2)p) + (n_i - (k-2)q_i)\right] c_2\\
&+ \left[2.1.0 + 1(m_i - (k-1)p) + (n_i - (k-1)q_i)\right] c_1\\
&+ \left[2.0.0 + 0(m_i - kp) + (n_i - kq_i)\right] c_0.
\end{aligned}$$

Demnach haben wir für die Grössen A_k, A_{k-1}, ... A_0 die Ausdrücke

$$\begin{aligned}
A_k &= 2k(k-1) + km_i + n_i\,,\\
A_{k-1} &= 2(k-1)(k-2) + (k-1)(m_i - p) + n_i - q_i\,,\\
A_{k-2} &= 2(k-2)(k-3) + (k-2)(m_i - 2p) + n_i - 2q_i\,,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$A_3 = 2.3.2 + 3\left(m_i - (k-3)\,p\right) + n_i - (k-3)\,q_i\,,$$
$$A_2 = 2.2.1 + 2\left(m_i - (k-2)\,p\right) + n_i - (k-2)\,q_i\,,$$
$$A_1 = 2.1.0 + 1\left(m_i - (k-1)\,p\right) + n_i - (k-1)\,q_i\,,$$
$$A_0 = 2.0.0 + 0\left(m_i - k\,p\right) + n_i - k\,q_i\,.$$

Führen wir noch der leichteren Übersicht wegen die Funktionen ein

$$F(k) = (k+1)\left[k(k-1) - Q_1(o)\,k - Q_2(o)\right],$$
$$f(k,s) = 2(k-s)(k-s-1) + (k-s)\left(m_i - s\,p\right) + n_i - s\,q_i\,,$$

so ist

$$c_{k+1} = \frac{1}{F(k)}\left\{ f(k,0)\,c_k + f(k,1)\,c_{k-1} + f(k,2)\,c_{k-2} + \cdots + f(k,k)\,c_0 \right\}$$

die zur Bestimmung der Koeffizienten c_1, c_2, c_3 .... dienende Rekursionsformel.

Da

$$\lim_{k=\infty} \frac{c_{k+1}}{c_k} = 1,$$

so convergiert die Reihe

$$\mathfrak{P}(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots$$

nur für Werte von $|z| < 1$, dagegen aber im allgemeinen nicht mehr für $z = 1$.

Wir können somit nun $\mathfrak{P}(z)$ als eine bekannte Funktion ansehen; es ist die Reihe $\mathfrak{P}_-(x)$ konvergent innerhalb des mit dem Radius 1 um den Punkt $x = o$ beschriebenen Kreises, die Reihe $\mathfrak{P}_+(1-x)$ konvergiert innerhalb des mit dem Radius 1 um den Punkt $x = 1$ beschriebenen Kreises, die Reihe $\mathfrak{P}_+\left(\frac{1}{x}\right)$ endlich ist konvergent ausserhalb des mit dem Radius 1 um den Nullpunkt beschriebenen Kreises. Mit Hülfe dieser Reihen können wir nunmehr den Zusammenhang zwischen den drei gefundenen Fundamentalsystemen herstellen. Die Elemente des zum singulären Punkte $x = 1$ gehörenden Fundamentalsystems müssen sich wie jedes andere Integral der Differentialgleichung linear und homogen durch das Fundamentalsystem y_{01}, y_{02}, y_{03} ausdrücken lassen; es müssen also Gleichungen bestehen von der Form:

$$(5.)\quad y_{11} = A_{11}\,y_{01} + A_{12}\,y_{02} + A_{13}\,y_{03}\,,$$
$$y_{12} = A_{21}\,y_{01} + A_{22}\,y_{02} + A_{23}\,y_{03}\,,$$
$$y_{13} = A_{31}\,y_{01} + A_{32}\,y_{02} + A_{33}\,y_{03}\,,$$

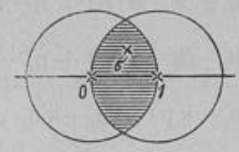
wo die Koeffizienten A_{11} .... A_{33} Konstanten bezeichnen. Ebenso müssen auch die Integrale $y_{\infty 1}$, $y_{\infty 2}$, $y_{\infty 3}$ sich linear und homogen durch das Fundamentalsystem y_{01}, y_{02}, y_{03} ausdrücken lassen:

$$(6.)\quad y_{\infty 1} = B_{11}\,y_{01} + B_{12}\,y_{02} + B_{13}\,y_{03}\,,$$
$$y_{\infty 2} = B_{21}\,y_{01} + B_{22}\,y_{02} + B_{23}\,y_{03}\,,$$
$$y_{\infty 3} = B_{31}\,y_{01} + B_{32}\,y_{02} + B_{33}\,y_{03}\,.$$

Diese Beziehung zwischen den Fundamentalsystemen ist eine in der ganzen x-Ebene gültige, da diese Integrale in ihrem ganzen Verlaufe bestimmt sind. Nun haben wir für y_{01}, y_{02}, y_{03} eine

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

innerhalb des Kreises mit dem Radius 1 um den Nullpunkt, für y_{11}, y_{12}, y_{13} eine innerhalb des Kreises mit dem Radius 1 um den Punkt 1 gültige Darstellung gefunden. Beide Konvergenzgebiete haben



ein gewisses Flächenstück gemeinsam. Wollen wir daher die Konstanten $A_{11} \ldots A_{33}$ bestimmen, so können wir uns auf dieses Flächenstück beschränken. Sei $x = \sigma$ ein Punkt innerhalb desselben, so bilden wir für diesen Punkt die Gleichungen

$$(7.)\quad y_{11} = A_{11}\, y_{01} + A_{12}\, y_{02} + A_{13}\, y_{03}\,,$$
$$\frac{dy_{11}}{dx} = A_{11}\frac{dy_{01}}{dx} + A_{12}\frac{dy_{02}}{dx} + A_{13}\frac{dy_{03}}{dx}\,,$$
$$\frac{d^2y_{11}}{dx^2} = A_{11}\frac{d^2y_{01}}{dx^2} + A_{12}\frac{d^2y_{02}}{dx^2} + A_{13}\frac{d^2y_{03}}{dx^2}\,,$$

$$y_{12} = A_{21}\, y_{01} + A_{22}\, y_{02} + A_{23}\, y_{03}\,,$$
$$\frac{dy_{12}}{dx} = A_{21}\frac{dy_{01}}{dx} + A_{22}\frac{dy_{02}}{dx} + A_{23}\frac{dy_{03}}{dx}\,,$$
$$\frac{d^2y_{12}}{dx^2} = A_{21}\frac{d^2y_{01}}{dx^2} + A_{22}\frac{d^2y_{02}}{dx^2} + A_{23}\frac{d^2y_{03}}{dx^2}\,,$$

$$y_{13} = A_{31}\, y_{01} + A_{32}\, y_{02} + A_{33}\, y_{03}\,,$$
$$\frac{dy_{13}}{dx} = A_{31}\frac{dy_{01}}{dx} + A_{32}\frac{dy_{02}}{dx} + A_{33}\frac{dy_{03}}{dx}\,,$$
$$\frac{d^2y_{13}}{dx^2} = A_{31}\frac{d^2y_{01}}{dx^2} + A_{32}\frac{d^2y_{02}}{dx^2} + A_{33}\frac{d^2y_{03}}{dx^2}\,,$$

aus welchen wir die Konstanten A vollständig bestimmen können. Die dabei auftretende Determinante

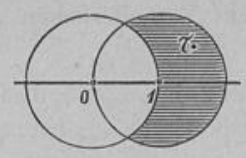
$$\begin{vmatrix} y_{01} & y_{02} & y_{03} \\ \frac{dy_{01}}{dx} & \frac{dy_{02}}{dx} & \frac{dy_{03}}{dx} \\ \frac{d^2y_{01}}{dx^2} & \frac{d^2y_{02}}{dx^2} & \frac{d^2y_{03}}{dx^2} \end{vmatrix}$$

verschwindet im Punkte $x = \sigma$ nicht, da y_{01}, y_{02}, y_{03} ein Fundamentalsystem bilden. Um die Koeffizienten B zu finden, verfahren wir wie folgt. Zwischen den Integralen y_{11}, y_{12}, y_{13}, $y_{\infty 1}$, $y_{\infty 2}$, $y_{\infty 3}$ müssen Gleichungen bestehen von der Form:

$$(8.)\quad y_{\infty 1} = C_{11}\, y_{11} + C_{12}\, y_{12} + C_{13}\, y_{13}\,,$$
$$y_{\infty 2} = C_{21}\, y_{11} + C_{22}\, y_{12} + C_{23}\, y_{13}\,,$$
$$y_{\infty 3} = C_{31}\, y_{11} + C_{32}\, y_{12} + C_{33}\, y_{13}\,.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nun haben die beiden Konvergenzbezirke, für welche wir eine Darstellung der Integrale y_{11}, y_{12}, y_{13}, $y_{\infty 1}$, $y_{\infty 2}$, $y_{\infty 3}$ gefunden haben, ein gewisses Flächenstück



gemeinsam. Sei τ ein Punkt desselben, so bilden wir für $x = \tau$ die Gleichungen

$$y_{\infty 1} = C_{11}\, y_{11} + C_{12}\, y_{12} + C_{13}\, y_{13},$$

$$\frac{dy_{\infty 1}}{dx} = C_{11}\frac{dy_{11}}{dx} + C_{12}\frac{dy_{12}}{dx} + C_{13}\frac{dy_{13}}{dx},$$

$$\frac{d^2y_{\infty 1}}{dx^2} = C_{11}\frac{d^2y_{11}}{dx^2} + C_{12}\frac{d^2y_{12}}{dx^2} + C_{13}\frac{d^2y_{13}}{dx^2},$$

$$y_{\infty 2} = C_{21}\, y_{11} + C_{22}\, y_{12} + C_{23}\, y_{13},$$

$$\frac{dy_{\infty 2}}{dx} = C_{21}\frac{dy_{11}}{dx} + C_{22}\frac{dy_{12}}{dx} + C_{23}\frac{dy_{13}}{dx},$$

$$\frac{d^2y_{\infty 2}}{dx^2} = C_{21}\frac{d^2y_{11}}{dx^2} + C_{22}\frac{d^2y_{12}}{dx^2} + C_{23}\frac{d^2y_{13}}{dx^2},$$

$$y_{\infty 3} = C_{31}\, y_{11} + C_{32}\, y_{12} + C_{33}\, y_{13},$$

$$\frac{dy_{\infty 3}}{dx} = C_{31}\frac{dy_{11}}{dx} + C_{32}\frac{dy_{12}}{dx} + C_{33}\frac{dy_{13}}{dx},$$

$$\frac{d^2y_{\infty 3}}{dx^2} = C_{31}\frac{d^2y_{11}}{dx^2} + C_{32}\frac{d^2y_{12}}{dx^2} + C_{33}\frac{d^2y_{13}}{dx^2},$$

aus welchen sich die neun Koeffizienten $C_{11} \ldots C_{33}$ vollständig berechnen lassen, weil die Determinante

$$\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ \frac{dy_{11}}{dx} & \frac{dy_{12}}{dx} & \frac{dy_{13}}{dx} \\ \frac{d^2y_{11}}{dx^2} & \frac{d^2y_{12}}{dx^2} & \frac{d^2y_{13}}{dx^2} \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet. Setzen wir dann die in (5) mit Hülfe von (7) gefundenen Ausdrücke in (8) ein, so erhalten wir $y_{\infty 1}$, $y_{\infty 2}$, $y_{\infty 3}$ linear und homogen mit konstanten Koeffizienten ausgedrückt durch die Integrale y_{01}, y_{02}, y_{03}, also die Gleichungen (6).

Bei einem Umlauf um den singulären Punkt $x = 0$ bleibt das Integral y_{01} vollkommen ungeändert; dagegen geht das Integral y_{02} über in

$$y_{02} \cdot e^{\frac{2\pi i}{3}},$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$e^{\frac{4\pi i}{3}}.$$

und y_{03} multipliziert sich mit dem Faktor $e^{\frac{4\pi i}{3}}$. Bezeichnen wir daher die Ausdrücke, in welche y_{01}, y_{02}, y_{03} beim Umlauf der unbeschränkt Veränderlichen x um den Punkt $x = o$ übergehen, mit $(y_{01})'_0$, $(y_{02})'_0$, $(y_{03})'_0$, so ist

$$(y_{01})'_0 = y_{01}\,;\ (y_{02})'_0 = e^{\frac{2\pi i}{3}} \cdot y_{02},\ (y_{03})'_0 = e^{\frac{4\pi i}{3}} \cdot y_{03},$$

oder, wie wir auch schreiben können:

$$(y_{01})'_0 = 1.\ y_{01} + 0.\ y_{02} + 0.\ y_{03},$$

$$(y_{02})'_0 = 0.\ y_{01} + e^{\frac{2\pi i}{3}}\ y_{02} + 0.\ y_{03},$$

$$(y_{03})'_0 = 0.\ y_{01} + 0.\ y_{02} + e^{\frac{4\pi i}{3}} \cdot y_{03},$$

d. h. um zu erhalten, was aus den Integralen y_{01}, y_{02}, y_{03} bei einem Umlauf um den Punkt $x = o$ wird, wende man auf dieselben die Substitution

$$[U] = \begin{bmatrix} 1, & 0 & , & 0 \\ 0, & e^{\frac{2\pi i}{3}}, & & 0 \\ 0, & 0 & , & e^{\frac{4\pi i}{3}} \end{bmatrix}$$

an. Es bleibt nun noch übrig zu zeigen, in was dieselben Integrale y_{01}, y_{02}, y_{03} bei einem Umlauf um den singulären Punkt $x = 1$ übergehen. Aus den Gleichungen (5) können wir umgekehrt y_{01}, y_{02}, y_{03} linear und homogen durch y_{11}, y_{12}, y_{13} ausdrücken in der Form

$$y_{01} = D_{11}\, y_{11} + D_{12}\, y_{12} + D_{13}\, y_{13},$$
$$y_{02} = D_{21}\, y_{11} + D_{22}\, y_{12} + D_{23}\, y_{13},$$
$$y_{03} = D_{31}\, y_{11} + D_{32}\, y_{12} + D_{33}\, y_{13}.$$

Nun gehen y_{11}, y_{12}, y_{13} bei einem Umlauf um den singulären Punkt $x = 1$ über in

$$(y_{11})'_1 = 1.\ y_{11} + 0.\ y_{12} + 0.\ y_{13},$$

$$(y_{12})'_1 = 0.\ y_{11} + e^{\frac{2\pi i}{3}}\ y_{12} + 0.\ y_{13},$$

$$(y_{13})'_1 = 0.\ y_{11} + 0.\ y_{12} + e^{\frac{4\pi i}{3}}\ y_{13}.$$

Um also zu erhalten, was aus den Integralen y_{11}, y_{12}, y_{13} beim Umlauf um den Punkt 1 wird, hat man auf sie ebenfalls die Substitution [U] anzuwenden. Wollen wir also die linearen homogenen Ausdrücke von y_{01}, y_{02}, y_{03} erhalten, in welche y_{01}, y_{02}, y_{03} bei einem Umlauf um den Punkt $x = 1$ übergehen, so ist auf y_{01}, y_{02}, y_{03} die Substitution

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} [U] \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

anzuwenden. Kennen wir aber die Substitution, welche anzuwenden ist, um die Ausdrücke zu erhalten, in welche y_{01}, y_{02}, y_{03} übergehen bei einer Umkreisung des Punktes $x = o$ und des Punktes $x = 1$, so ist uns auch die Substitution bekannt, welche anzuwenden ist bei einem μ maligen Umlauf um den Punkt $x = o$ und einem ν maligen Umlauf um den Punkt $x = 1$. Da ferner ein Umlauf um den Punkt $x = \infty$ anzusehen ist als das Entgegengesetzte eines Umlaufes um den Punkt 0 und eines darauf folgenden Umlaufes um den Punkt 1, so ist auch das Verhalten von y_{01}, y_{02}, y_{03} beim Umlauf um den unendlich fernen Punkt als bekannt anzusehen. Da wir endlich y_{11}, y_{12}, y_{13}, $y_{\infty 1}$, $y_{\infty 2}$, $y_{\infty 3}$ durch die y_{01}, y_{02}, y_{03} ausgedrückt haben, so ist auch von diesen Integralen das Verhalten bei beliebigen Umläufen um die singulären Punkte bekannt, und da sich nun überhaupt ein jedes Integral der Gleichung (1) linear und homogen mit konstanten Koeffizienten durch das Fundamentalsystem y_{01}, y_{02}, y_{03} ausdrücken lässt, so kennen wir jetzt auch das Verhalten des allgemeinen Integrals y der Gleichung (1) bei beliebigen Umläufen um die singulären Punkte, und es ist y in seinen Fortsetzungen bekannt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf